E: 9188

17 X

FÍSICA GENERAL Y EXPERIMENTAL

POR EL

Prof. ELIGIO PERUCCA
Ordinario de Física en el Politécnico de Turín

TOMO I

MECÁNICA - CALOR

TRADUCCIÓN DE LA CUARTA EDICIÓN ITALIANA

POR

JOSÉ MAÑAS BONVÍ †
Catedrático de Física y de Química General en la Escuela de Ingenieros Industriales de Barcelona

SEGUNDA EDICIÓN ESPAÑOLA PUESTA AL DÍA CON LA SEXTA EDICIÓN ITALIANA

POR

FRANCISCO M. BIOSCA

BAJO LA DIRECCIÓN DEL

Dr. JOSÉ M.ª VIDAL LLENAS
Catedrático de Física de la Universidad de Barcelona

Con 713 figuras en el texto

EDITORIAL LABOR, S. A.
BARCELONA - MADRID - BUENOS AIRES - RIO DE JANEIRO
MÉXICO - MONTEVIDEO
1953

Librería Bosch
11-RONDA UNIVERSIDAD-11
BARCELONA

E: 9188

17 X

FÍSICA GENERAL Y EXPERIMENTAL

POR EL

Prof. ELIGIO PERUCCA

Ordinario de Física en el Politécnico de Turín

TOMO I

MECÁNICA - CALOR

TRADUCCIÓN DE LA CUARTA EDICIÓN ITALIANA

POR

JOSÉ MAÑAS BONVÍ †

Catedrático de Física y de Química General en la Escuela de Ingenieros Industriales de Barcelona

SEGUNDA EDICIÓN ESPAÑOLA PUESTA AL DÍA CON LA SEXTA EDICIÓN ITALIANA

POR

FRANCISCO M. BIOSCA

BAJO LA DIRECCIÓN DEL

Dr. JOSÉ M.ª VIDAL LLENAS

Catedrático de Física de la Universidad de Barcelona

Con 713 figuras en el texto

EDITORIAL LABOR, S. A.

BARCELONA - MADRID - BUENOS AIRES - RIO DE JANEIRO

MÉXICO - MONTEVIDEO

1953

Librería Bosch

11-RONDA UNIVERSIDAD-11

BARCELONA

Título de la obra original:

PERUCCA, FISICA GENERALE E SPERIMENTALE, I:
MECCANICA - CALORE

Editada por

UNIONE TIPOGRAFICO-EDITRICE TORINESE, TORINO

ES PROPIEDAD

Primera edición : 1943
Reimpresión : 1948
Segunda edición : 1953

PRINTED IN SPAIN

IMPRENTA ELZEVIRIANA Y LIBRERÍA CAMÍ - TORRES AMAT, 9 : BARCELONA

Prólogo de la sexta edición

Desde que el presente libro fué objeto de la última revisión (1941) han transcurrido años difíciles; durante los mismos nacieron los nuevos «progresos» de la física, ocupada en sembrar la destrucción y la muerte. Estos son los «progresos» que cita con fruición el que busca las ventajas de la guerra o deplora la aridez moral de las ciencias positivas, porque no ha comprendido su espíritu.

Esta obra se ocupará poco de tales «progresos», teniendo en cuenta que poco influyen en los conceptos fundamentales de la Física. Por lo tanto, las variaciones, no escasas, resultantes de la revisión actual, radican en otras causas.

Si aceptamos que las relaciones físicas son relaciones entre magnitudes y no entre medidas (como lo prefería MAXWELL*), surge la necesidad de precisar con más cuidado los principios en que se funda el sistema de medidas. Este afán nuestro de precisión, incluso podrá parecer pedantería en algunas ocasiones. El resultado ha sido una modificación formal en la manera de tratar las materias, ligera en el primer volumen y muy patente, por el contrario, en Electromagnetismo.*

El lector debe aceptar como buena la intervención simultánea de las tres constantes universales μ_0, ε_0, γ_0 en Electromagnetismo, y, una vez comprendido este juego, sacará de ello manifiestas ventajas.

El capítulo relativo a los campos vectoriales ha sido refundido por completo con el fin de tratar homólogamente los campos conservadores en cuanto al flujo y los campos conservadores respecto al trabajo.

En la Dinámica se ha elaborado de nuevo la formulación del principio de la acción y la reacción; en Acústica se ha cambiado el capítulo que trata de las mediciones; en la Termodinámica han sido escritas de nuevo muchas páginas, habiéndose dado más importancia a la entalpía; pero, quizá menos de la que se merece.

En el segundo volumen han experimentado modificaciones profundas las páginas relativas a la fotometría; el capítulo que trata del magnetismo y los principales párrafos acerca de la inducción electromagnética.

Se han introducido algunas modificaciones en los símbolos, por razones de simetría, de lógica o de claridad. Figura en la pág. XV *una tabla de los símbolos.*

¿Querrán perdonarme mis lectores la inquietud que me impide congelar en páginas cristalizadas estos dos volúmenes?

Eligio Perucca

Turín, octubre de 1948.

Prólogo de la primera edición

Este libro, en dos tomos, debe su origen al curso que desarrollo desde algunos años en el bienio de preparación de la Real Escuela de Ingeniería de Turín.

Pero estos dos tomos no sólo tienen por objeto presentar a los estudiantes el curso de las lecciones en forma más digna y completa que la que permiten los apuntes velografiados, sino que van también destinados a todos los ingenieros, químicos, técnicos y gente estudiosa en general que deseen refrescar y poner al día sus conocimientos en el campo de la física general y experimental, y a quienes quieran prepararse para la lectura de tratados especiales de física pura o aplicada.

Las páginas que siguen no se han escrito para componer un trabajo superficial de divulgación, pues los ingenieros, técnicos, estudiantes y hombres de estudio que se sirvan del mismo deben tener conocimiento de la física elemental y de los fundamentos de la geometría analítica y del cálculo infinitesimal. En efecto, la Física es una de las ciencias que han de estudiarse necesariamente por aproximaciones sucesivas ; y una característica que distingue este libro de otros de su misma extensión, publicados hasta ahora en Italia, es el mayor empleo de la matemática.

A mi juicio, es imposible un segundo estudio de la Física sin el empleo del cálculo ; se necesita continuamente el algoritmo matemático, especialmente el del cálculo infinitesimal, para la definición exacta de muchos conceptos físicos, aun de los más comunes, y para la formulación cuantitativa de las leyes físicas.

Se rompe así en Italia una tradición ya abandonada en todos los países que van a la vanguardia de los estudios físicos, y además se utilizan los conocimientos dados, después de una larga y precisa doctrina, por los doctos colegas matemáticos de la escuela superior italiana, que estaban en peligro de ser considerados como elegantes ejercicios de lógica, cuando son un poderoso auxilio de toda la ciencia física y de la técnica.

No obstante el uso de las diferenciales, de las derivadas, y de las integrales, este libro pretende ser un tratado de física experimental, en el más estricto sentido de la palabra, más bien que un libro de preparación para el estudio de las numerosas ciencias que deri-

van de la Física. Lo cual explica el desarrollo, intencionadamente desproporcionado, de algunos capítulos de la física moderna, para los que no se prevé por ahora grandes desarrollos prácticos y técnicos.

Sin embargo, se ha reservado mucho espacio (compatible con la extensión del libro) al estudio de algunos fenómenos, ya sean conocidos desde antiguo o desde fecha muy reciente, que tienen un notable valor conceptual y práctico ; así se destinan muchas páginas a la dinámica de las oscilaciones y son muy largos varios apartados, sobre acústica, ciencia que merece hoy un puesto de honor en la física técnica. En el segundo tomo se tratan con amplitud la conducción unipolar, la electrónica y la fotoelectricidad.

Deseaba desde hace tiempo reunir, formando un solo cuerpo, la extensa y rica materia del curso de Física, siguiendo las directrices antes expuestas. Y ha llegado el momento propicio, porque, además de no haber aparecido en Italia otro libro de este género, la U. T. E. T. ha iniciado la publicación de una extensa y orgánica colección de volúmenes sobre la Ciencia de la Ingeniería, bajo la inteligente y activa dirección del queridísimo compañero Prof. G. ALBENGA. Mi libro de Física General, aun quedando fuera, por estar dedicado a un mayor círculo de lectores, debe ser considerado útil (por no decir indispensable) prolegómeno.

Verdaderamente, con el continuo desarrollo de la Física, se afirma cada día más la conveniencia de confiar a varios especialistas la redacción de las diversas partes de un tratado general. A este respecto, es característica la organización de los grandes tratados alemanes, de los cuales recordaremos los más recientes :

MÜLLER - POUILLET, *Lehrbuch der Physik*, en cinco tomos, en curso de publicación;
GEIGER - SCHEEL, *Handbuch der Physik*, en veinticuatro tomos, 1926 - 29 ;
WIEN - HARMS, *Handbuch der Experimentalphysik*, en más de treinta tomos, en curso de publicación.

De este procedimiento monográfico, seguido también en otras naciones, se ha hecho cargo en Italia el « Comitato Físico del Consiglio Nacionale delle Ricerche », con su proyecto de publicación de un Tratado General de Física en quince tomos.

Se conseguirá de este modo un desarrollo de amplitud y de precisión que no pueden reunirse en esta obra, de proporciones mucho más modestas y confiada a la capacidad de una sola persona. Pero consideraré logrado el objeto de este libro si llega a reunir las cualidades necesarias para que sirva de intermediario entre los libros de Física elemental y las obras más elevadas de Física pura y aplicada.

Enero de 1932.

Eligio Perucca

SIGNOS, ABREVIATURAS, SÍMBOLOS

En la tabla siguiente se recogen los que se usan con más frecuencia.
Los símbolos valen para toda la obra, excluídas raras excepciones inevitables.
Véase, al comienzo del tomo II, una tabla análoga de símbolos relativos a la Optica y al Electromagnetismo.

$\approx$	aproximadamente
$\vec{A} \cdot \vec{B}$	producto escalar
$\vec{A} \wedge \vec{B}$	producto vectorial
A	módulo de $\vec{A}$
A_x	componente de $\vec{A}$ según el eje x
$\oint$	integral a lo largo de una línea cerrada
Δy	variación de y, o sea $y_2 - y_1$
$\sum$	suma
$\sum_r$	suma respecto a r
$\bar{u}$	valor medio de u
$\bar{\bar{u}}$	valor medio cuadrático de u
g	magnitud física en general
g	su medida
$[g]$	su unidad de medida
m	metro
μm	micra (10^{-6} m)
g_m	gramo-masa
g_p	gramo-peso
seg	segundo de tiempo
°C	grado CELSIUS centígrado
°K	grado KELVIN absoluto
m_{Hg}	metro de mercurio (unidad de presión)
m_{H_2O}	metro de agua (unidad de presión)
atm	atmósfera (unidad de presión)
Nw	newton
Hz	hertz
cal	caloría
amp	ampère
Ω	ohm
Å	angström (10^{-10} m)
mol	molécula-gramo
a	amplitud de oscilación
a_c	aceleración
c	concentración
c_p	calor específico a presión constante
c_v	calor específico a volumen constante
c_v	calor latente de vaporización
c_f	calor de fusión
c_r	calor de reacción
e	base de los logaritmos naturales
f	coeficiente de rozamiento de deslizamiento
g	aceleración de la gravedad
h	altura ; desniveles
	conductividad calorífica externa
i	intensidad de corriente eléctrica
j	$\sqrt{-1}$
k	constante general
	conductividad calorífica interna
	constante de BOLTZMANN

l	longitud de un segmento, de una línea
m	masa
m_{at}	masa atómica
m_{mol}	masa molecular
n	número de orden
	índice de refracción
p	presión (específica)
r	radio de curvatura
	distancia a un centro
	resistencia eléctrica
s	espacio recorrido
	corrimiento de un punto
	entropía específica
v	volumen ; en termodinámica, también volumen específico
t	tiempo
u	velocidad
	energía interna específica
v_{sp}	volumen específico
w	entalpía específica
w	densidad de volumen de la energía
x, y, z	ejes, y coordenadas relativas a los mismos
A	inverso del equivalente mecánico de la caloría
B	baricentro
C	centro
	capacidad calorífica
E	módulo de YOUNG
	intensidad de una onda elástica
F	fuerza
	energía libre
F_e	fuerza electromotriz
G	centro de gravedad
	módulo de rigidez
H	intensidad del campo vectorial
I	momento de inercia
J	equivalente mecánico de la caloría
K	constante general
M	momento estático
	masa total
N	número de AVOGADRO
	número total
O	origen
	centro
P	peso
	presión total
Q	cantidad de calor
	cantidad de movimiento
R	resultante de vectores
	número de REYNOLDS
	constante de los gases
	radio del círculo de la esfera
S	superficie, área
S_e	pantalla de proyección
T	período
U	energía interna
V	potencial eléctrico
$\mathbf{V}$	velocidad de propagación
W	entalpía
X, Y, Z	ejes, y coordenadas relativas a los mismos
α	ángulo
	aceleración angular
	coeficiente de dilatación de volumen
β	ángulo
	coeficiente térmico de aumento de presión
γ	ángulo
	razón de los calores específicos c_p c_v
δ	densidad (masa específica relativa)
ε	magnitud muy pequeña
	módulo de compresión uniforme
	constante dieléctrica
ζ	eje y coordenada relativa al mismo
η	coeficiente de rozamiento interno
θ	temperatura centrígrada o Celsius
ϑ	ángulo de torsión
$\varkappa$	coeficiente de amortiguamiento
	conductividad eléctrica
λ	longitud de onda
	coeficiente de dilatación lineal
	camino libre medio

μ	masa específica (absoluta)
	constante magnética
ν	frecuencia
	coeficiente de POISSON
	número de valencia
ξ	eje y coordenada relativa al mismo
π	razón entre la circunferencia y su diámetro
ϱ	peso específico absoluto
	rendimiento
	radio de curvatura
	factor de reflexión
	resistividad eléctrica
σ	tensión normal específica
ζ	constante de STEFAN-BOLTZMANN
	sensación sonora
τ	constante de tiempo
	tensión tangencial específica
	tensión superficial
	factor de transmisión
φ	ángulo
	ángulo de rotación
	fase
ψ	peso específico relativo
ω	velocidad angular
	pulsación
Θ	temperatura absoluta o Kelvin
Σ	superficie (no área)
Φ	flujo
	potencial termodinámico de GIBBS
Φ_B	flujo del vector $\vec{H}$
Ω	ángulo sólido
$\mathfrak{l}$	trabajo referido a la unidad de masa
m	masa magnética
$\mathfrak{w}$	potencia
$\vec{\mathfrak{A}}$	potencial vector
$\mathfrak{E}$	energía cinética
$\vec{\mathfrak{H}}$	intensidad del campo magnético
$\mathfrak{L}$	trabajo
$\mathfrak{L}_o$	trabajo a lo largo de una línea cerrada
$\vec{\mathfrak{K}}$	momento cinético
$\mathfrak{V}$	potencial de campo conservador
	potencial de campo magnético
$\mathfrak{W}$	energía potencial

ÍNDICE DE MATERIAS

INTRODUCCIÓN — Págs.

1. La Física y el método experimental 1
2. Experimento y observación 2
3. Teorías físicas 4
4. Física y realidad 6
5. Magnitudes físicas 6
6. Ecuaciones entre magnitudes físicas. Ecuaciones básicas. Ecuaciones entre unidades, entre medidas 9
7. Sistema de medición. Sistema de ecuaciones entre unidades. Dimensiones 16
8. Los varios sistemas de medición. El sistema adoptado 20
9. Magnitudes físicas. Su medición indirecta 23
10. Aparatos de medición calibrados 24
11. Índices y escalas 25
12. Nonio y micrómetro ocular 29
13. Mediciones físicas en general 33
14. Sensibilidad 35
15. Precisión y error en una medición 39
16. Errores absoluto y relativo 41
17. Justificación de la media 42
18. Ejemplo 43
19. Aparatos registradores 44
20. Tablas y representaciones gráficas 45

PRIMERA PARTE

Principios de la mecánica

21. Objeto y división de la mecánica 48

CAPÍTULO I

Medición de las magnitudes fundamentales y de algunas de las principales magnitudes derivadas

22. Unidad y patrón de longitud 48
23. Medición de pequeñas longitudes 51
24. Comparador 51

		Págs.
25.	Máquina para dividir rectas	54
26.	Catetómetro	54
27.	Esferómetro	55
28.	Palmer	58
29.	Microscopio micrométrico	58
30.	Otros métodos	59
31.	Áreas	60
32.	Volúmenes	63
33.	Los ángulos y su unidad de medida	65
34.	Ángulos patrones	68
35.	Aparatos para la medición de ángulos	69
36.	Palanca óptica	76
37.	Medición de un intervalo de tiempo	79
38.	Unidad y patrones de tiempo	81
39.	Relojes	82
40.	Cronógrafos	86
41.	Unidades y patrones de fuerza y de masa	87
42.	Medición de las fuerzas	90
43.	Medición de las masas	96
44.	Balanza para análisis	96
45.	Densidad de los sólidos y de los líquidos	101
46.	Medición de la densidad de los sólidos	106
47.	Medición de la densidad de los líquidos	108
48.	Medición de volúmenes	110

CAPÍTULO II

Nociones sobre los vectores

49.	Vectores	111
50.	Suma de vectores	115
51.	Diferencia de vectores	117
52.	Productos	117
53.	Producto triplo	124

CAPÍTULO III

Cinemática

54.	Objeto de la cinemática	125
	A. Movimiento de un punto	
55.	Movimiento rectilíneo	126
56.	Movimientos rectilíneos más importantes	131
57.	Movimiento curvilíneo	140
58.	Ejemplos de movimientos curvilíneos	144
	B. Composición de movimientos	
59.	Composición de corrimientos	147
60.	Composición y descomposición de movimientos	150

		Págs.
61.	Paralelogramo de las velocidades	152
62.	Paralelogramo de las aceleraciones	153
63.	Movimientos rectilíneos y movimientos curvilíneos	155
64.	Ejemplos de composición de movimientos sobre un mismo eje	156
65.	Ejemplos de composición de movimientos sobre dos ejes ortogonales	158
66.	Composición de dos movimientos armónicos de igual período	159
67.	Movimiento circular y movimiento armónico	165
68.	Composición de movimientos circulares	166
69.	Construcción de Fresnel	168
70.	Composición de movimientos armónicos, de períodos diferentes, sobre un mismo eje	169
71.	Análisis armónico	171
72.	Pulsaciones y modulación	175
73.	Composición de dos movimientos armónicos de períodos diferentes sobre ejes ortogonales	181
74.	Generalización	182
75.	Fenómenos periódicos y método estroboscópico de observación	182
	C. Nociones de cinemática de los cuerpos rígidos	
76.	Cuerpos rígidos y movimientos rígidos	187

CAPÍTULO IV

Estática

77.	Fuerzas. Objeto de la estática	189
78.	Generalidades sobre los rozamientos	193
	A. Campos vectoriales	
79.	Campos de fuerzas	195
80.	Línea y tubo de fuerza	198
81.	Flujo del vector	199
82.	Flujo saliente; divergencia	202
83.	Relación de Gauss	203
84.	Trabajo integral de línea	205
85.	Circulación y rotacional	207
86.	Relación de Stokes	209
87.	Campos solenoidales	210
88.	Campos irrotacionales; campos conservadores con respecto al «trabajo»	213
89.	Potencial (escalar)	214
90.	Energía potencial	219
91.	Potencial polidromo	220
92.	Potencial vector	222
93.	Campos vectoriales	222
94.	Campo de fuerzas uniforme	225
95.	Campo de fuerzas centrales	228
96.	Fuerzas culombianas y newtonianas	229
97.	Teorema de Gauss	232
98.	Generalización	234
99.	Energía potencial, mutua, en los campos culombianos	236

Págs.

B. Estática del punto

100. Punto libre ... 238
101. Equilibrio de un campo de fuerzas. Tipos de equilibrio ... 241
102. Punto ligado. Ligadura ... 246
103. Punto ligado en un campo de fuerzas ... 249
104. Reacciones de las ligaduras ... 251

C. Estática del cuerpo rígido

105. Cuerpo rígido libre ... 253
106. Fuerzas paralelas ... 256
107. Centro de gravedad. Baricentro ... 258
108. Pares de fuerzas ... 261
109. Extensión al problema general. Momento de una fuerza ... 264
110. Equilibrio de un cuerpo rígido ligado ... 268

D. Nociones sobre el principio de los trabajos virtuales

111. Principio de los trabajos virtuales ... 275
112. Máquinas simples ... 278
113. Coordenadas y grados de libertad ... 283

CAPÍTULO V

Dinámica

114. Objeto de la dinámica ... 284

A. Dinámica del punto

115. Principio de acción de las fuerzas ... 286
116. Principio de inercia. Sistemas inertes ... 292
117. Independencia de las acciones simultáneas ... 296
118. Problema general de la dinámica del punto libre ... 299
119. Movimiento curvilíneo. Movimiento ligado ... 302
120. Cantidad de movimiento, impulso y sus momentos ... 303
121. Principio de acción y reacción ... 307
122. Fuerzas de inercia. Fuerza centrífuga ... 313
123. Fuerza centrífuga ... 316
124. Fuerzas internas y externas. Teorema de las cantidades de movimiento ... 319
125. Trabajo. Potencia. Energía ... 321
126. Teorema de las fuerzas vivas ... 325
127. Conservación de la energía ... 327
128. Teorema de la energía ... 329
129. Dinámica y movimiento relativo ... 330
130. Invariabilidad de la masa en los sistemas inertes ... 334
131. Paradoja ... 337
132. Un ejemplo de conservación de la cantidad de movimiento o de la energía ... 339

B. Plano inclinado

133. Movimiento sobre el plano inclinado ... 340
134. Rozamiento de deslizamiento ... 341
135. Cono de rozamiento ... 346

Págs.

C. Choque

136. Choque ... 347
137. Choque normal inelástico ... 349
138. Péndulo balístico ... 350
139. Choque oblicuo inelástico ... 350
140. Choque normal elástico ... 351
141. Choque oblicuo elástico ... 353
142. Presión producida por el choque ... 353
143. Choque entre cuerpos reales ... 355

D. Dinámica de las oscilaciones

144. Péndulo simple ... 355
145. Oscilaciones libres, no amortiguadas ... 359
146. Energía y movimiento armónico ... 360
147. Energía y composición de las oscilaciones ... 363
148. Oscilaciones libres amortiguadas ... 366
149. Oscilaciones forzadas ... 369
150. Resonancia en las oscilaciones forzadas ... 372
151. Experimentos sobre las oscilaciones forzadas ... 379
152. Oscilaciones entretenidas ... 382
153. Acoplamiento de oscilaciones y de osciladores ... 382
154. Péndulos acoplados ... 383
155. Las pesas elásticas ... 386

E. Dinámica del cuerpo rígido

156. Dinámica del cuerpo rígido ... 388
157. Ley del movimiento ... 388
158. Momentos de inercia de un cuerpo rígido y su cálculo ... 393
159. Teorema de Huygens-Steiner ... 396
160. Experimentos sobre momentos de inercia ... 398
161. Teorema del momento cinético ... 401
162. Péndulo compuesto ... 405
163. Cuerpo rígido libre ... 409
164. Rodadura ... 411
165. Rozamiento de rodadura ... 413
166. Campo de las fuerzas centrífugas en una rueda. Ejes libres ... 416
167. Giroscopio ... 418

CAPÍTULO VI

Gravitación universal

168. Atracción newtoniana ... 422
169. La ley de Newton como ecuación de definición de la masa ... 426
170. Campo gravitatorio ... 427
171. Campo gravitatorio de una capa esférica homogénea ... 428
172. Campo gravitatorio de una esfera ... 429
173. Energía de gravitación de una esfera homogénea. Calor solar ... 431
174. Campo de la gravedad ... 433
175. Anomalías de la gravedad ... 437
176. Masa inerte y masa gravitatoria ... 443
177. Pruebas de la rotación terrestre ... 444

Págs.

SEGUNDA PARTE

Mecánica de los cuerpos deformables

CAPÍTULO I

Idea sobre la constitución de la materia

178. Cuerpos reales ... 449
179. Divisibilidad. Moléculas. Átomos ... 450
180. Isótopos. Isobaros ... 454
181. Fuerzas moleculares ... 456
182. Cristales y moléculas ... 458
183. Sólidos, líquidos y gases ideales ... 464

CAPÍTULO II

Estática de los cuerpos deformables. Elasticidad

184. Elasticidad. Elastostática ... 466
185. Compresión uniforme ... 469
186. Volumenómetro ... 476
187. Elasticidad de deslizamiento. Rozamiento interno ... 477
188. Casos prácticos elementales de elasticidad ... 487
189. Elasticidad de torsión ... 489
190. Elasticidad de alargamiento ... 494
191. Elasticidad de compresión axial ... 496
192. Elasticidad de flexión ... 496
193. Resorte en hélice ... 503
194. Energía y oscilaciones elásticas ... 504
195. Esfuerzos internos ... 507
196. Anomalías elásticas de los cuerpos reales ... 509
197. Elasticidad en los cristales ... 512
198. Dureza ... 514

CAPÍTULO III

Estática de los flúidos

199. Consideraciones fundamentales ... 515
200. Presión específica en un punto de un flúido ... 518
201. Leyes experimentales del equilibrio de los flúidos pesados ... 520
202. Deducción de las leyes de la estática de los flúidos pesados ... 522
203. Fórmulas hipsométricas ... 533
204. Líquido pesado en rotación, Centrifugación ... 532
205. Flotadores ... 534
206. Sumergibles. Aeróstatos ... 536
207. Líquidos en vasos comunicantes ... 537
208. Equilibrio de los flúidos y principio de los trabajos virtuales ... 540

Págs.

CAPÍTULO IV

Medida de las presiones en la estática de flúidos

209. Presión total y presión específica ... 541
210. Barómetro ... 542
211. Probeta ... 549
212. Probeta de Mac Leod ... 549
213. Manómetros ... 551
214. Micromanómetros ... 553
215. Valores de algunas presiones ... 555

CAPÍTULO V

Fenómenos de superficie

216. Contacto entre varias fases ... 556
217. Superficie de contacto. Tensión superficial ... 557
218. Energía superficial, fuerzas moleculares y tensión superficial ... 561
219. Líneas de contacto ... 563
220. Capilaridad ... 568
221. Fórmula de Laplace ... 569
222. Consecuencias ... 572
223. Otros experimentos sobre tensión superficial ... 574
224. Adsorción. Absorción ... 576

CAPÍTULO VI

Difusión y otros fenómenos moleculares

225. Difusión ... 581
226. Difusión a través de una pared porosa ... 584
227. Movimiento browniano ... 589

CAPÍTULO VII

Dinámica de los flúidos

228. Generalidades ... 591
229. Cuatro ejemplos de movimiento estacionario ... 592
230. Conservación de los vórtices ... 597
231. Oscilaciones de un líquido pesado en un tubo en U ... 598
232. Cámara elástica ... 599
233. Movimiento estacionario en las conducciones ... 600
234. Teorema de la energía ... 602
235. Teorema de la cantidad de movimiento ... 604
236. Diversas aplicaciones ... 606
237. Influencia de los rozamientos ... 613
238. Régimen de Poiseuille. Viscosímetros ... 614
239. Régimen turbulento. Número de Reynolds ... 618
240. Llamas sensibles ... 620

Págs.

CAPÍTULO VIII

Movimiento de los cuerpos en los flúidos; rozamiento del medio

241. Generalidades ... 621
242. Regímenes diversos ... 623
243. Ley de Stokes ... 626
244. Resistencia del medio proporcional a u^2, paralela y opuesta a $\vec{u}$. 627
245. Los regímenes y el número de Reynolds ... 628
246. Resistencia del medio no paralela a $\vec{u}$ ... 629

TERCERA PARTE

Ondas elásticas y acústicas

CAPÍTULO I

Propagación de las ondas elásticas

247. Ondas elásticas y acústicas ... 633
248. Propagación por ondas elásticas ... 634
249. Ecuación de la onda ... 636
250. Ecuación de la propagación por ondas planas ... 642
251. Energía transmitida por ondas ... 646
252. Absorción ... 651
253. Interferencia ... 653
254. Tubo de Quincke ... 657
255. Reflexión en las cuerdas y en los tubos ... 659
256. Obtención de ondas estacionarias. Resonancia ... 660
257. Propagación sobre una superficie o en el espacio. Ondas esféricas. 664
258. Principio de Huygens-Fresnel. Difracción ... 671
259. Reflexión, refracción y formación de imágenes ... 675
260. Vibraciones libres de los cuerpos elásticos ... 678

CAPÍTULO II

Generación y recepción de ondas elásticas

261. Generadores de ondas elásticas. Generadores primarios de sonidos 682
262. Receptores de ondas elásticas ... 687
263. Receptores sonoros y mediciones sonoras ... 690
264. Medición de la intensidad de la onda sonora ... 694
265. Resonadores ... 697
266. Receptores del sonido acoplados a resonadores ... 700
267. Acciones ponderomotrices del sonido ... 702
268. Análisis de los sonidos ... 703
269. Llamas sensibles ... 705
270. Registro de los sonidos ... 706
271. Generadores secundarios de sonido ... 711

Págs.

272. Voz ... 715
273. Oído ... 715
274. Nivel y sensación sonora. Fon ... 723

CAPÍTULO III

Campo sonoro indefinido y aplicaciones técnicas de la acústica

275. Campo sonoro indefinido ... 728
276. Propagación rectilínea del sonido ... 728
277. Determinación de la velocidad del sonido ... 729
278. Reflexión del sonido ... 734
279. Refracción del sonido ... 734
280. Energía sonora reflejada y refractada ... 735
281. Perturbaciones ... 736
282. Efecto Doppler para el sonido ... 739
283. Onda balística ... 740
284. Filtros acústicos ... 742
285. Aplicaciones técnicas de la acústica ... 743

CUARTA PARTE

Calor

CAPÍTULO I

Termometría

286. Temperatura. Cantidad de calor ... 751
287. Temperatura ... 751
288. Escala de temperaturas ... 754
289. Estado de un cuerpo. Transformación ... 756
290. Ejemplos de transformaciones ... 758
291. Ecuación de estado ... 759
292. Trabajo externo por expansión ... 763
293. Otros tipos de trabajo externo ... 768
294. Transformaciones reversibles e irreversibles ... 768
295. Ecuación de estado de los gases perfectos ... 773
296. Ley de Dalton ... 777
297. Ecuación de estado de mezclas de gases perfectos ... 779
298. Higrometría ... 780
299. Temperatura absoluta. Cero absoluto ... 783
300. Termómetro de gas ... 784
301. Escala práctica de temperaturas ... 787
302. Termómetros prácticos ... 789
303. Termómetros de líquido ... 790
304. Otros termómetros. Escala internacional de temperaturas ... 791
305. Pirómetros ... 794
306. Determinación de la ecuación de estado de un cuerpo puro ... 796
307. Dilatación de los líquidos ... 798

Págs.

308. Dilatación de los sólidos ... 800
309. Gases reales. Isotermas ... 807
310. Determinación de las constantes críticas ... 811
311. Ecuación de estado de los flúidos reales ... 812
312. Solidificación, fusión y sublimación ... 816

CAPÍTULO II

Calorimetría

313. Cantidad de calor ... 818
314. Medición de las cantidades de calor ... 820
315. Calorímetros ... 822
316. dQ no es una diferencial exacta ... 827
317. Otra propiedad de los gases perfectos ... 831
318. Calores específicos ... 831
319. Resultados sobre los calores específicos ... 835
320. Calores latentes ... 840
321. Poder calorífico ... 841
322. Propagación del calor ... 842
323. Conductibilidad interna. Problema del muro ... 844
324. Conductibilidad externa ... 847
325. Problema de la barra ... 848

CAPÍTULO III

Termodinámica

A. Primer principio de la Termodinámica

326. Principio de la equivalencia ... 851
327. Primer principio de la termodinámica ... 859
328. Energía interna ... 861
329. Comprobación y generalización del primer principio ... 862
330. Ejemplos de aplicaciones del primer principio ... 866
331. Entalpía ... 868

B. Aplicación del primer principio a los gases perfectos

332. Energía interna de un gas perfecto ... 870
333. Los dos calores específicos de los gases perfectos ... 873
334. Ecuación de la transformación adiabática ... 874
335. Determinación de γ ... 877
336. Politrópicas de un gas perfecto ... 879
337. Ciclo de Carnot ... 882
338. Postulado de Clausius ... 886
339. Teorema de Carnot ... 887
340. Temperatura termodinámica ... 890
341. Segundo principio de la termodinámica ... 891
342. Valor del segundo principio ... 895
343. Entropía ... 896
344. Generalización del segundo principio ... 899

Págs.

345. Deducciones fundamentales del segundo principio. A) Transformaciones reversibles ... 902
346. Deducciones fundamentales del segundo principio. B) Transformaciones irreversibles ... 904
347. Ley de incremento de la entropía ... 907
348. La irreversibilidad y el segundo principio de la termodinámica ... 907
349. Equilibrio termodinámico ... 909

D. Ulteriores aplicaciones de la termodinámica

350. Coeficientes calorimétricos ... 913
351. Compresibilidades isotérmica y adiabática ... 917
352. Experimento de Joule Thomson ... 919
353. Fórmula de Helmholtz ... 923
354. Cambios de estado y calores latentes ... 924
355. Cambios de estado y calores específicos ... 926
356. Isotermas de van der Waals y presión de vapor saturante ... 927
357. Tensión superficial y presión de vapor saturante ... 927
358. Punto triple ... 929
359. Disoluciones ... 930

CAPÍTULO IV

Teoría cinética de los gases

360. Constitución molecular de los gases perfectos ... 933
361. Presión ... 934
362. Temperatura ... 937
363. Ecuación de estado ... 938
364. Ley de Avogadro ... 938
365. Velocidades moleculares ... 938
366. Distribución estadística de las velocidades ... 939
367. Energía interna y calores específicos de los gases ... 944
368. Difusión ... 946
369. Camino libre medio ... 951
370. Rozamiento interno ... 952
371. Determinación de magnitudes moleculares ... 955
372. Extensión de la teoría cinética ... 956
373. Teoría cinética de los sólidos y calores específicos ... 958
374. El segundo principio de la termodinámica y teoría cinética ... 960

CAPÍTULO V

Producción de vacíos elevados

375. Bombas neumáticas ... 962
376. Técnica de los vacíos elevados ... 970
377. Manómetros moleculares ... 972
378. Rayos moleculares ... 973

ÍNDICE ALFABÉTICO ... 977

INTRODUCCIÓN

§ 1. **La Física y el método experimental.** La Física, considerada por los griegos como la ciencia de los hechos naturales, ha sufrido incesantes mutilaciones para ir dando vida a todo el grupo de las ciencias naturales.

Estas mutilaciones no han disminuído, sin embargo, su importancia, ya que el descubrimiento de leyes naturales, de trascendencia inmensa (conservación de la materia, leyes del movimiento, principios de la termodinámica o, mejor dicho, de la energética, leyes del electromagnetismo, etcétera), han colocado y mantenido a la Física en una situación de privilegio respecto a las otras ciencias naturales, que se encuentran supeditadas a las leyes físicas.

Las innumerables aplicaciones de la Física en el campo de la técnica le dan el título de benemérita de la sociedad, del cual los físicos, aun los puramente teóricos, se sienten orgullosos.

Ahora bien: la Física debe su eficiencia al uso constante del *método experimental*. Todas las demás ciencias, naturales, biológicas y aun económico-sociales, intentan, a veces en vano, utilizar este método, cuya potencia eurística es incluso superior a la de los principios de la lógica.

El método experimental tiene por base la producción a nuestro arbitrio de los fenómenos naturales en las condiciones más adecuadas para la observación; en esto consiste la *experiencia*. Ésta permite al físico investigar las relaciones de interdependencia entre las distintas *magnitudes físicas* (§ 5) y las relaciones de causa y efecto entre los diversos fenómenos. La búsqueda de estas relaciones *(leyes físicas experimentales)* constituye el objeto de la experimentación y aun el objeto esencial de la Física.

Si nos limitáramos a observar los fenómenos naturales, sin simplificarlos convenientemente, ocurriría a menudo que estas relaciones pasarían desapercibidas, a causa de su complejidad.

No nos permite la naturaleza asistir a la caída libre de los graves en el vacío; pero es necesario experimentar en el vacío para descubrir esta ley: todos los cuerpos caen según la vertical (despreciando la ligerísima inclinación hacia Oriente, debida a la rotación terrestre) y el movimiento de caída obedece siempre a la misma ley.

§ 2. Experimento y observación. El experimento va acompañado siempre de la *observación*, y ésta requiere el uso de nuestros sentidos. Vemos las posiciones relativas de los cuerpos, variables en el caso del movimiento; recibimos las sensaciones luminosas, sonoras, térmicas, debidas a los cuerpos que nos rodean. En el mayor número de casos se utiliza el sentido de la vista; pero tenemos ejemplos de observaciones efectuadas con otros sentidos, por ejemplo, con el oído (puente de KOHLRAUSCH para la medida de la resistencia eléctrica de los electrólitos; comparación de la frecuencia de vibración de dos diapasones por el método de las pulsaciones, etc.).

La tendencia moderna en la experimentación es realizar las observaciones utilizando exclusivamente el sentido de la vista, y aun substituir en lo posible el ojo del experimentador por un registro fotográfico del fenómeno. En la mayor parte de los dispositivos experimentales, la observación se limita a establecer la posición de cuerpos (particularmente, la de índices sobre escalas, § 13) y la variación de tal posición; es decir: estudiamos un movimiento.

Esta observación óptica es, con mucho, preferible no tanto por la perfección del ojo como por la potencia de los medios ópticos de que dispone la Física (anteojo, microscopio, máquina fotográfica) y porque la perturbación introducida en el fenómeno a consecuencia de su observación óptica es, en general, despreciable. Un ciego podría estudiar el movimiento de un grave sobre un plano inclinado siguiendo con el tacto el cuerpo que desciende; pero tal observación modificaría sensiblemente el movimiento en estudio. Al contrario, la observación con el ojo no influye de modo sensible en el movimiento del grave.

A este propósito debe advertirse que hoy en día algunas investigaciones físicas se adentran tanto en el examen del microcosmos, que ya no está justificada la suposición corriente de que el observador, utilizando tan sólo la luz que ilumina al fenómeno en estudio, pueda observarlo sin introducir en él perturbación sensible.

Como se ha dicho (§ 1), el objeto fundamental de la Física es encontrar *leyes físicas*, es decir, relaciones de interdependencia entre varias magnitudes físicas o entre varios fenómenos.

En general, las observaciones y los experimentos conducen primero a establecer relaciones puramente cualitativas; por ejemplo:

la velocidad de la caída de un grave aumenta con el tiempo de su caída;

el volumen de un gas disminuye al aumentar su presión;

la corriente eléctrica que fluye por un hilo metálico dado crece al aumentar la diferencia de potencial eléctrico aplicado entre los extremos del hilo;

un hilo metálico se calienta cuando por él circula una corriente eléctrica; etc.

El conjunto de estos resultados cualitativos constituye ya una Física de primera aproximación.

Pero no se contenta el físico con esto, y trata siempre de llegar a una relación cuantitativa entre las magnitudes que intervienen en el fenómeno.

Así, la ley de la caída libre de los graves en el vacío viene resumida en la fórmula:

$$s = \frac{1}{2} g \cdot t^2,$$

que relaciona el espacio recorrido s con el tiempo t empleado en recorrerlo y con una constante g *(aceleración de la gravedad)*.

Análogamente, en los gases prácticamente perfectos, a temperatura constante, la presión p y el volumen v de una masa gaseosa dada están relacionados por la ley de BOYLE:

$$p \cdot v = \text{constante}.$$

Asimismo, en un hilo metálico a temperatura constante se cumple la ley de OHM:

$$\frac{V_A - V_B}{i} = r \text{ (constante)},$$

es decir, es constante la razón entre la diferencia de potencial eléctrico $V_A - V_B$ aplicada a los extremos A y B del hilo y la intensidad de la corriente eléctrica i; la razón constante $\frac{V_A - V_B}{i}$ es la *resistencia* eléctrica r del hilo.

Y así sucesivamente.

El uso más corriente de cada una de estas leyes es semejante al de una ecuación matemática.

Conocidas todas las magnitudes a excepción de una de ellas, puede determinarse esta última.

Análogamente, un sistema de leyes físicas puede ser utilizado de un modo parecido a un sistema de ecuaciones matemáticas.

Debe notarse que todas estas leyes cuantitativas son válidas en determinadas condiciones y entre ciertos límites. En realidad, deben considerarse todavía como leyes aproximadas, aunque pueden ser muy aproximadas.

De ninguna ley física puede asegurarse *a priori* la exactitud ilimitada con vistas al sucesivo perfeccionamiento de los medios experimentales. Pero aun así, el valor de estas leyes es incalculable, como lo demuestra el desarrollo de la ingeniería.

§ 3. Teorías físicas. Es tan grande el número de leyes cualitativas y cuantitativas conocidas en la actualidad, que se necesita ordenarlas lógicamente.

Tal es el objeto de la física teórica; mejor dicho, una parte de su objeto. La otra parte, y la más brillante, consiste en guiar al físico en la investigación de nuevos hechos experimentales.

Para cumplir su objeto, la Física teórica construye *teorías físicas*, que pueden agruparse en dos categorías:

1.º Teorías que se deducen lógicamente de los hechos experimentales bien conocidos.

Sirva de ejemplo la teoría de los instrumentos ópticos, en particular la teoría de GAUSS referente a los sistemas centrados, y la teoría elemental de las lentes, que se deducen lógicamente de las leyes experimentales de la óptica geométrica (propagación rectilínea de la luz, leyes de la reflexión y de la refracción e independencia de los rayos luminosos).

La mecánica racional, pura deducción lógica de las leyes de la dinámica de GALILEO y NEWTON, constituye otro ejemplo.

2.º Teorías que se deducen lógicamente de *hipótesis* no comprobadas experimentalmente.

Por ejemplo, la teoría de la gravitación de NEWTON, que permite explicar las leyes experimentales de KEPLER sobre el movimiento de los planetas, está fundada en la hipótesis de que todos los cuerpos se atraen en razón directa de sus masas y en razón inversa del cuadrado de su distancia (1). Esta atracción es independiente de la presencia de otros cuerpos.

Estas teorías pagan caro el privilegio de hacer uso de hipótesis no controladas por la experimentación directa, y viven peligrosamente bajo el examen continuo de los físicos experimentales y teóricos: se imaginan y se realizan los más delicados experimentos para obtener la verificación directa de las hipótesis supuestas, y se impulsa cada vez más la deducción para multiplicar el número de hechos experimentales *explicados* por la teoría, es decir, deducidos lógicamente.

¡Pobre teoría si uno solo de los hechos que se deducen de ella no está de acuerdo con la experimentación; desgraciada también si al realizar un experimento para la comprobación directa de la hipótesis, ésta no resulta confirmada! La teoría se tambalea como un castillo de naipes.

Pero si al cabo de un siglo de establecer NEWTON su hipótesis, resulta que CAVENDISH verifica directamente, mediante un experimento justamente famoso, su exactitud de la ley de la gravitación

(1) Los cuerpos deben ser prácticamente puntiformes, si se quiere que esté definida su distancia; esto es, sus dimensiones han de ser despreciables respecto a sus distancias, con la aproximación que se juzga satisfactoria en la medición de dichas distancias.

universal (bien que la demostración se refiera solamente a los cuerpos de la superficie terrestre) y si después de otros cincuenta años puede indicar LEVERRIER, con ayuda de la teoría de NEWTON, al astrónomo GALLE, a qué punto del cielo debe dirigir el telescopio para descubrir el nuevo planeta *Neptuno*, origen de las perturbaciones en la órbita del planeta *Urano*, la duda sobre la validez de la hipótesis se transforma en admiración y la «hipótesis» de la gravitación universal se convierte en la «ley» de la gravitación universal.

Pero junto a estas teorías que resisten, y aun se refuerzan con el tiempo, ¡cuántas se han propuesto que, después de una vida a veces larga y brillante, otras veces efímera, han debido transformarse radicalmente o morir!

La teoría atómica, después de un siglo de existencia, ha tenido que ceder su puesto a la teoría eléctrica de la materia, según la cual el *átomo* no es, ni mucho menos, indivisible.

El *éter cósmico*, señor absoluto del vacío, de los espacios intermoleculares, materia prima para la fabricación de las diferentes clases de materia ponderal (como todos los flúidos que los físicos teóricos de los pasados tiempos imaginaron), ¿dónde ha ido a esconderse después de un siglo de triunfos? A cada una de las tentativas experimentales imaginadas para ponerlo en evidencia directamente, parece que la naturaleza responde que el éter no existe, o que, al menos, los fenómenos naturales se efectúan enteramente como si el éter no existiese (JEANS).

Estos ejemplos enseñan que se ha de ser muy cauto al formular las hipótesis que han de servir de fundamento a una teoría; para las hipótesis más atrevidas se ha inventado el nombre de *hipótesis de trabajo*.

Pero sería excesiva pretensión limitar las teorías a las basadas solamente en hechos experimentales comprobados directamente. Aparte de la necesaria extrapolación que el físico realiza en todo resultado experimental, tratando siempre de atribuirle la mayor amplitud posible (por ejemplo, del citado experimento de CAVENDISH se deduce que: todos los cuerpos del universo obedecen a la ley de gravitación de NEWTON), existe también el hecho de que algunos experimentos que parecían constituir la prueba directa de una hipótesis, sometidos a un examen más profundo, demostraron carecer del valor probatorio que se les atribuía. Se ha enseñado durante un siglo que los fenómenos de interferencia constituían una prueba contra una teoría corpuscular de la luz, y ahora se ha debido reconocer que esto no es cierto.

Basta recordar que la inducción electromagnética, las ondas hertzianas, el efecto ZEEMAN y, en estos últimos años, el efecto RAMAN, así como la difracción de los electrones, son hechos que han sido previstos por teorías que se basan en hipótesis que carecen de confirmación directa, para comprender que las teorías de este tipo tienen también un papel importante.

§ 4. Física y realidad. Aunque la Física parece aproximarse a la Filosofía en algunas discusiones teóricas, es fundamental observar que ni los físicos teóricos ni los físicos experimentales se proponen descubrir la íntima esencia de las magnitudes y de los seres considerados: no pretenden descubrir la realidad. Bajo este aspecto no puede existir ningún punto de contacto entre los físicos y los filósofos.

Introducimos las diversas magnitudes físicas (longitud, tiempo, masa, fuerza, energía, calor, resistencia eléctrica, etc.) porque es conveniente introducirlas; y consideraremos que una magnitud física está suficientemente *definida* y tiene existencia real siempre que se está de acuerdo sobre las operaciones que deben efectuarse para *medirla*.

Esto es particularmente evidente cuando se trata de magnitudes físicas (por ejemplo, la agudeza visual, deslumbramiento, calor, Vol. II) que son definibles de diversas maneras y que, por lo tanto, sólo quedan individualizadas cuando se fija el procedimiento por el que han sido medidas.

Así, también consideraremos lícita la introducción de entes ideales en cuanto se dé una definición capaz de individualizarlos; se encuentran en este caso, el cuerpo rígido, el gas perfecto, el líquido perfecto, el rayo luminoso, el aislador perfecto (térmico o eléctrico), la transformación reversible, etc.

En fin, aunque pueda parecer absurdo a los filósofos, hemos de convenir en que al físico no le interesa el que el éter, por ejemplo, exista realmente o no. Lo que interesa es que, admitida la existencia de un éter dotado de propiedades convencionales, compatibles entre sí, se puedan coordinar lógicamente muchas leyes físicas experimentales ya establecidas, y sea posible predecir otras leyes nuevas capaces de ser sometidas a la comprobación experimental.

§ 5. Magnitudes físicas. Su medición directa (1). *Magnitud física* es todo ente, introducido para describir los fenómenos físicos, susceptible de definición cuantitativa, esto es, de *medición*.

Medir una magnitud física g significa encontrar su *medida* o *valor* g, respecto a cierta magnitud física $[g]$ tomada como *unidad de medida*; es decir, encontrar un número g tal que g veces $[g]$ sea igual a g.

Aceptando el algoritmo algébrico, se tiene:

$$g = \mathrm{g}\cdot[g], \text{ de donde } \frac{g}{[g]} = \mathrm{g}. \qquad [1]$$

(1) Para evitar ambigüedad llamaremos «medición» a la operación de medir y «medida» al número que de ella resulta.

La medida g se llama *razón* o relación entre la magnitud g que se mide y la unidad de medida $[g]$ previamente escogida.

Ejemplo: el diámetro $l = 70$ cm de una rueda es una magnitud física, 70 es la medida de ésta y el cm (centímetro) es la unidad.

La [1] presupone la existencia de un acuerdo sobre estos tres puntos:

1.º ¿Qué operación establece que dos magnitudes físicas son iguales entre sí? Tal operación crea la *especie* de la magnitud en cuestión: dos magnitudes iguales son, en particular, *de la misma especie*. También se dice que tienen «la misma naturaleza física».

Ejemplo: Supóngase que tenemos dos barras.

Con las operaciones establecidas en Geometría para decidir la igualdad de dos segmentos, cabe establecer la igualdad de ambas barras *con respecto a su longitud;* la longitud es una (especie de) magnitud física común a las dos barras; las longitudes l_1, l_2 de las dos barras son *magnitudes de la misma especie*.

Con la operación de *pesada* se establece la igualdad de las barras en cuanto al *peso*, otra magnitud física común a las mismas.

Mediante la operación que consiste en comparar el empuje de ARQUÍMEDES que sufren las barras sumergidas en el mismo líquido, se establece la igualdad relativa al *volumen*.

Las «barras» no son magnitudes físicas y carece de significado hablar de barras iguales (sin embargo, ¿quién no ha cometido incorrecciones en tal sentido?). Es lícito hablar de la igualdad de sus longitudes, de sus pesos, de sus volúmenes, de sus secciones, de sus temperaturas...

2.º ¿Qué operación establece si una magnitud física g es la suma de otras dos g_1, g_2? Se escribirá:

$$g = g_1 + g_2.$$

Tanto los sumandos como la suma resultan de la misma especie.

Ejemplo: Para las longitudes se procede lo mismo que en Geometría para definir el segmento suma de dos segmentos dados.

Para las masas, la suma de las masas m_A, m_B de dos cuerpos A y B (fig. 1), es la masa de un cuerpo C que por sí solo equilibra la misma tara Z necesaria para equilibrar a los dos cuerpos A, B cuando obran simultáneamente.

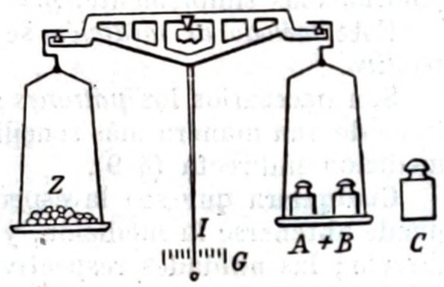


Fig. 1

El concepto de suma se extiende de la manera usual al caso de más sumandos.

Si se tienen n sumandos iguales (1º), su suma g es igual a n veces cada uno de los sumandos g_1, y se escribe :

$$g = \mathrm{n} \cdot g_1. \qquad [2]$$

Como ocurre en Geometría con los segmentos, estas consideraciones se extienden del caso n entero y al caso en que n es número real cualquiera.

3.º ¿Qué magnitud $g_1 = [g]$, de la misma especie que g, se ha escogido como unidad de medida? Por ejemplo, el metro se ha elegido para las longitudes, el segundo para los tiempos...

De la unidad $[g]$, según lo dicho en 2.º, pueden obtenerse múltiplos o submúltiplos conocidos, para servir, a semejanza de la unidad, como *patrones*, esto es, como magnitudes físicas g_p, de la especie que se considera, y de medida g_p conocida con respecto a la unidad escogida de antemano $[g]$:

$$g_p = \mathrm{g}_p \cdot [g].$$

De modo más general, puede servir como patrón una magnitud cuya medida es conocida, aunque no se trate propiamente de un múltiplo o submúltiplo de la unidad. Así ocurre, por ejemplo, con la pila patrón en la medición de fuerzas electromotrices.

Una vez establecidas las operaciones 1.º, 2.º, se está en condiciones de determinar qué múltiplo n de un patrón dado g_p, es igual a la magnitud física g en estudio (g y g_p de la misma especie).

Entonces se tiene :

$$g = \mathrm{n} \cdot g_p = \mathrm{n} \cdot \mathrm{g}_p \cdot [g] \qquad [3]$$

y $g = \mathrm{n} \cdot \mathrm{g}_p$ es la medida buscada de g según la unidad $[g]$.

Si como patrón se utilizase la unidad misma, sería $g_p = 1$ y se tendría, más simplemente, $g = \mathrm{n}$.

Este *método de medición* se llama *directo*, de *confrontamiento*, o *relativo*.

Son necesarios los *patrones ;* en compensación, la medida se obtiene de una manera más sencilla y fácil que cuando se recurre a la medición indirecta (§ 9).

Cualquiera que sea la especie de una magnitud física, siempre puede obtenerse la medición, y de ahí la definición, por el método directo ; las unidades respectivas podrían ser escogidas arbitrariamente, de modo que fuesen independientes unas de otras. Ejemplo : para la longitud la « legua », para las áreas el « acre », para los volúmenes el « barril »... Las leyes físicas resultarían entonces recargadas con numerosas constantes de proporcionalidad incomodísimas ;

la institución de un *sistema de medidas coherente* (§ 7) evita este inconveniente.

Observemos, finalmente, que la igualdad entre dos magnitudes físicas g_1, g_2 se escribe :

$$\mathrm{g}_1 [g_1] = \mathrm{g}_2 [g_2] \qquad [4]$$

siendo $[g_1]$, $[g_2]$ de la misma especie, pero no necesariamente iguales ; ejemplo :

$$2 \text{ libras} = 907{,}2 \text{ gramos.}$$

La suma g de g_1 y g_2 se escribe :

$$\mathrm{g}_1 [g_1] + \mathrm{g}_2 [g_2] = \mathrm{g} [g], \qquad [5]$$

con $[g_1]$, $[g_2]$, $[g]$ de la misma especie, pero no necesariamente iguales ; ejemplo :

$$3 \text{ yardas} + 2 \text{ pies} = 3{,}3528 \text{ metros.}$$

Es en extremo oportuno establecer que todas las magnitudes físicas de la misma especie estén medidas con la misma unidad ; ésta es una primera condición para la coherencia (§§ 6, 7) ; *en tal caso*, siendo igual la unidad, las [4] y [5] dan :

$$\mathrm{g}_1 = \mathrm{g}_2 \qquad [4 \text{ bis}]$$

$$\mathrm{g}_1 + \mathrm{g}_2 = \mathrm{g} \qquad [5 \text{ bis}]$$

y *de la igualdad entre las magnitudes ftsicas se deriva la igualdad de las medidas.*

De lo contrario, importa conocer las *ecuaciones de conversión*, esto es, relaciones del tipo :

$$[g_1] = \mathrm{k}_1 [g], \quad [g_2] = \mathrm{k}_2 [g] \qquad [6]$$

de manera que, por ejemplo la [5] da :

$$\mathrm{g}_1 \cdot [g_1] + \mathrm{g}_2 \cdot [g_2] = \mathrm{k}_1 \cdot \mathrm{g}_1 \cdot [g] + \mathrm{k}_2 \cdot \mathrm{g}_2 \cdot [g] = \mathrm{g} \cdot [g]$$

de donde

$$\mathrm{k}_1 \cdot \mathrm{g}_1 + \mathrm{k}_2 \cdot \mathrm{g}_2 = \mathrm{g}. \qquad [7]$$

§ 6. Ecuaciones entre magnitudes físicas. Ecuaciones básicas. Ecuaciones entre unidades, entre medidas. Las (especies de) magni-

tudes físicas, a medida que van apareciendo, se reúnen en *ecuaciones de definición* o *ecuaciones básicas*, que han de considerarse como *ecuaciones entre magnitudes*.

He aquí las primeras de tales ecuaciones para la Mecánica: (1)

$$[1]\quad u=\frac{dl}{dt} \qquad [2]\quad a_c=\frac{du}{dt} \qquad [3]\quad S=l^2$$

$$[4]\quad v=l^3 \qquad [5]\quad F=m\cdot a_c \qquad [6]\quad \mathfrak{L}=F\cdot l$$

$$[7]\quad Q=m\cdot u \qquad [8]\quad M=b\cdot F \qquad [9]\quad \mathfrak{E}=\frac{1}{2}mu^2$$

$$[10]\quad p=\frac{F}{S} \qquad [11]\quad \mu=\frac{m}{v} \qquad [12]\quad b=l;$$

. . . . . .

Estas ecuaciones contienen las siguientes (especies de) magnitudes físicas:

Longitud $l=\mathrm{l}\cdot[l]$; tiempo $t=\mathrm{t}\cdot[t]$; velocidad $u=\mathrm{u}\cdot[u]$; aceleración $a_c=\mathrm{a}_c\cdot[a_c]$; área $\mathrm{S}=S\cdot[S]$; volumen $v=\mathrm{v}\cdot[v]$; fuerza $F=\mathrm{F}\cdot[F]$; trabajo $\mathfrak{L}=\mathfrak{L}\cdot[\mathfrak{L}]$; cantidad de movimiento $Q=\mathrm{Q}\cdot[Q]$; masa $m=\mathrm{m}\cdot[m]$; momento cinético $M=\mathrm{M}\cdot[M]$; energía cinética $\mathfrak{E}=\mathfrak{E}\cdot[\mathfrak{E}]$; presión específica $p=\mathrm{p}\cdot[p]$; masa específica $\mu=\mu\cdot[\mu]$; brazo de una fuerza $b=\mathrm{b}\cdot[b]$; $dl=d\mathrm{l}\cdot[l]$, diferencia de dos longitudes, también es una longitud, y asimismo $dt=d\mathrm{t}\cdot[t]$ es un tiempo, $du=d\mathrm{u}\cdot[u]$ es una velocidad.

Las [1] ÷ [12] son un *sistema de ecuaciones básicas* entre magnitudes físicas. Son 12 ecuaciones entre 15 magnitudes; tratadas con el algoritmo matemático permiten formalmente expresar 12 de las magnitudes dichas en función de las otras 3 (con tal que se escojan adecuadamente) que permanecen indeterminadas y han de ser definidas por el método directo del § 5; las unidades correspondientes pueden, por lo tanto, elegirse de un modo arbitrario (§ 5, 3.º) siendo independientes entre sí. Ordinariamente se eligen como indeterminadas, *l*, *m*, *t*.

Así, pues, las expresiones [1] a [12] *definen* las otras doce (especies de) magnitudes en función de *l*, *m*, *t*. Las (especies de) magnitudes *l*, *m*, *t*, es decir, longitud, masa y tiempo, y las unidades relativas a las mismas se llaman *fundamentales*. Las otras (especies de)

(1) Bastan ecuaciones esquemáticas: $u=\frac{dl}{dt}$ o inmediatamente $u=\frac{l}{t}$ en lugar de $\vec{u}=\frac{\vec{dl}}{dt}$; $\mathfrak{L}=F\cdot l$ en vez de $\mathfrak{L}=\vec{F}\cdot\vec{dl}$; $S=l^2$ en vez de $S=\iint dx\cdot dy$; para la aceleración podría escribirse $a_c=\frac{u}{t}$ dando a u el significado de «aumento de la velocidad».
La flecha recuerda las magnitudes vectoriales (§ 49). Algunas veces se indicará también un vector con dos letras; por ejemplo: $\vec{AB}$ en el § 54.

magnitudes se denominan *derivadas* como asimismo sus unidades (si son coherentes; § 7).

La $[l]$ define la velocidad; ésta es la longitud «espacio recorrido» dividida por el «tiempo empleado en recorrerlo»; la velocidad es *derivada* (1) del espacio y del tiempo.

Cada una de las ecuaciones entre magnitudes se divide en una *ecuación entre unidades* y una *ecuación entre medidas*. Así la [1], limitándonos al movimiento uniforme, se escribe:

$$\frac{l}{t}=u \quad \text{o} \quad \text{sea} \quad \frac{\mathrm{l}\cdot[l]}{\mathrm{t}\cdot[t]}=\mathrm{u}\cdot[u] \qquad [13]$$

o, finalmente,

$$\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{t}}\cdot\frac{[l]}{[t]}=\mathrm{u}\,[u].$$

Ejemplo: $\quad \dfrac{30\cdot\mathrm{m}}{5\ \mathrm{seg}}=\dfrac{30}{5}\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{seg}}=6\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{seg}}=\mathrm{u}\ [u]$

Cuando $\frac{[l]}{[t]}$ *se identifica con la unidad* $[u]$, *la ecuación* [13] entre magnitudes se divide en

$$\frac{[l]}{[t]}=[u]\ \textit{ecuación entre unidades} \qquad [14]$$

$$\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{t}}=\mathrm{u}\ \textit{ecuación entre medidas} \qquad [15]$$

Las unidades $[l]$, $[t]$, $[u]$ se llaman *coherentes* entre sí; se tiene coherencia; una de ellas, en general $[u]$, está subordinada a las otras según la [14].

En el ejemplo: m, seg y $[u]=\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{seg}}$ son coherentes; la unidad $[u]=\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{seg}}$ está subordinada a las unidades m, seg; si, como ocurre por regla general, m y seg son unidades fundamentales, $[u]=\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{seg}}$ es la unidad coherente *derivada* de las unidades fundamentales m, seg.

(1) Por pura casualidad, la velocidad es también la «derivada» del espacio con respecto al tiempo, con el significado que tiene esta palabra en el cálculo infinitesimal.

Si se tiene, como en la [9], un coeficiente numérico, se conviene en hacer la división en unidades coherentes poniendo el coeficiente en la ecuación entre las medidas; así, la [9] se divide en:

$$[m]\,[u]^2 = [m]\,\frac{[l]^2}{[t]^2} = [\mathfrak{E}] \qquad [16]$$

$$\frac{1}{2}\,u\,m^2 = \mathfrak{E} \qquad [17]$$

De este modo, la ecuación entre medidas resulta, también en este caso, idéntica formalmente a la ecuación entre magnitudes, lo que no ocurre con la ecuación entre unidades.

En varias ecuaciones básicas del electromagnetismo se encontrarán coeficientes numéricos $(4\pi)^k$ con $k = \pm 1$, que se han de tratar como el coeficiente $\frac{1}{2}$ de las ecuaciones [9], [16], [17].

Nótese que la [15], para $l = t = 1$, da $u = 1$; en unidades coherentes la unidad $[u]$ de velocidad es la que tiene un móvil que recorre la unidad $[l]$ de espacio en la unidad $[t]$ de tiempo. Pero la [17], para $m = u = 1$, da $\mathfrak{E} = \frac{1}{2}$; en unidades coherentes la unidad $[\mathfrak{E}]$ de energía cinética es el *doble* de la energía cinética poseída por un móvil la masa y velocidad del cual son la unidad.

Como para las [4], [5], § 5, también se pueden usar ahora unidades no coherentes y escribir, por ejemplo:

$$\frac{7608\ \text{m}}{2\ \text{horas}} = 2\ \text{nudos.}$$

En general: se puede dividir la [13] en:

$$\text{n}\,\frac{[l]}{[t]} = [u] \qquad \frac{1}{\text{n}}\,\frac{\text{l}}{\text{t}} = \text{u} \qquad [18]$$

siendo n un número cualquiera; así, la ecuación del ejemplo precedente se divide en:

$$1852\,\frac{\text{m}}{\text{hora}} = \text{nudo} \qquad \frac{1}{1852}\cdot\frac{7608}{2} = 2.$$

Pero la ventaja de tales generalizaciones es discutible, mientras que *el mérito esencial de la coherencia es que las ecuaciones entre magnitudes y las ecuaciones correspondientes entre medidas son fundamentalmente idénticas.*

Volviendo a las ecuaciones básicas [1] ÷ [12], pueden distinguirse en ellas tres tipos:

1.º *Ecuaciones básicas* que establecen simplemente la igualdad de especie de dos magnitudes físicas; así la [12] establece que los brazos de las fuerzas son considerados como longitudes l y son de la misma especie que éstas; en virtud de la coherencia van medidos en la misma unidad; por ejemplo en m.

2.º *Ecuaciones básicas* introducidas para definir nuevas (especies de) magnitudes; tales ecuaciones dan significado físico a cocientes, productos, ... de magnitudes físicas; el algoritmo algébrico también resulta válido.

Así la [1] define la velocidad y da significado físico a la relación entre el espacio recorrido dl y el tiempo dt empleado en recorrerlo.

3.º *Ecuaciones básicas* deducidas de leyes llamadas universales por su generalidad e importancia.

Las más famosas son las deducidas de las dos leyes de Coulomb en Electromagnetismo (véase tomo II, §§ 200 a 202).

Podría procederse análogamente para la ley de Newton (§§ 168, 169); así se procede cuando se utiliza el principio de la equivalencia entre el calor y la energía para definir la cantidad de calor (§ 326, [6])

Pero también son del mismo tipo las ecuaciones [3] y [4].

De hecho, la Geometría introduce áreas y volúmenes como magnitudes fundamentales, esto es, definiéndolas de una manera directa, según el § 5. Luego, por ej, para las áreas planas, demuestra la relación:

$$\frac{S}{l^2} = k_s \qquad [19]$$

entre el área S de un cuadrado cualquiera y su lado l. Esta ley, considerada como una ecuación entre magnitudes:

$$\frac{\text{S}\cdot[S]}{\text{l}^2\cdot[l]^2} = \text{k}_s\cdot[k_s] \qquad [19\ \text{bis}]$$

sustituye a la [3]; $\text{k}_s\cdot[k_s]$ tiene el carácter de magnitud física. En unidades coherentes es:

$$[k_s] = \frac{[S]}{[l]^2} \qquad [20]$$

y k_s mide, en la unidad $[S]$, el área de un cuadrado cuyo lado es $1\cdot[l]$. Por ejemplo, midiendo las áreas en acres y los lados en m,

$k_s \cdot [k_s] = \dfrac{1}{4046{,}7\ldots}\ \dfrac{\text{acre}}{\text{m}^2}$; $\dfrac{1}{4046.7}$ de acre es igual al área de un cuadrado cuyo lado es 1 m ; k_s es, por lo tanto, una *constante universal* cuyo valor numérico k_s depende solamente de las unidades empleadas para S y l.

Mientras que una magnitud física de una especie determinada puede tener importes diversos (por ejemplo, longitudes de 1 m. 1852 m., 0,01 m., ...), en cambio la especie de la magnitud física k_s sólo presenta un importe :

$$\frac{1}{4046{,}7}\ \frac{\text{acres}}{\text{m}^2} = 10{,}764\ldots\ \frac{\text{foot}^2}{\text{m}^2} = \ldots$$

Substituyendo la [3] por la [19], las [1] ÷ [12] contienen 16 (especies de) magnitudes físicas, entre las cuales está la constante universal k_s, de manera que resultan 4 magnitudes fundamentales. Como tales se escogen l, m, t, como antes, y, además, k_s.

Como quiera que la unidad de una magnitud fundamental puede elegirse arbitrariamente, se escoge $[k_s]$ de modo que se tenga $k_s = 1$.

Entonces en la [20], fijada $[l]$ resulta fijada $[S]$; la unidad de área se deriva de la unidad de longitud.

La [19 bis] se escribe :

$$S \cdot [S] = 1 \cdot [k_s] \cdot l^2 \cdot [l]^2$$

en donde, en unidades corrientes :

$$S = l^2$$

y $k_s = 1$ mide, en unidades $[S]$ el área del cuadrado cuyo lado es $[l]$; en otras palabras : $[S]$ es el área de tal cuadrado ; por ejemplo, para $[l] = 1$ m, $[S]$ es el área del cuadrado que tiene 1 m de lado.

Se prefiere *universalmente* ignorar en tal caso $[k_s]$ y escribir simplemente :

$$S \cdot [S] = l^2 \cdot [l]^2 ; \qquad S = l^2$$

esto es, la [3]. Así queda eliminada una constante universal k_s y la especie de magnitud física correspondiente ; con ello disminuye en 1 el número de las magnitudes fundamentales, que vuelven a ser solamente 3.

El caso de los volúmenes es análogo ; la Geometría introduce los volúmenes como magnitudes fundamentales y luego demuestra la relación :

$$v = k_v \cdot l^3 \qquad [21]$$

entre el volumen v de cualquier cubo y su lado l.

En la [4] se ha supuesto $k_v = 1$ y se ha ignorado $[k_v]$, de ahí que haya desaparecido la (especie de) magnitud física k_v poseedora del carácter de constante universal. Pero acerca de ello no existe ya un acuerdo universal como en el caso de las áreas ; véase *litro*, § 32.

Finalmente, la Geometría introduce el ángulo plano φ como magnitud fundamental y luego demuestra la relación

$$\varphi = k_\varphi \cdot \frac{a_r}{r} \qquad [22]$$

entre el ángulo φ (fig. 2), el radio r y el arco de circunferencia a_r.

Como r y a_r se consideran de la misma especie que la longitud l, también se escriben las ecuaciones

$$r = l ; \qquad a_r = l \qquad [23]$$

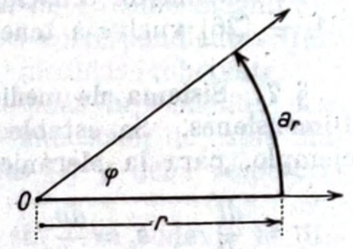


Fig. 2

y, para la coherencia r, a_r, l, se miden en la misma unidad, por ejemplo, en m ; k_φ es una constante universal con el significado físico de un ángulo al cual le corresponde un arco cuya longitud es igual al radio.

Añadiendo a las [1] ÷ [12] las [22], [23] se dispone de un sistema de 15 ecuaciones básicas con 19 (especies de) magnitudes, entre las cuales figuran el ángulo φ y la constante universal k_φ. Entonces las magnitudes fundamentales son 4.

Análogamente al caso de las áreas, se toma $k_\varphi = k_\varphi \cdot [k_\varphi]$ como cuarta magnitud fundamental (además de l, m, t). Su unidad $[k_\varphi]$ es arbitraria ; se han utilizado unidades que dan a k_φ los valores :

$k_\varphi = 1$; la unidad coherente de ángulo que así resulta es el *radián*, ángulo correspondiente a un arco de circunferencia cuya longitud es igual al radio ;

$k = \dfrac{360}{2\pi}$; la unidad coherente de ángulo resultante es el grado *nonagesimal*, en efecto en la [22], para $a_r = 2\pi r$, esto es para el ángulo de un giro, resulta entonces $\varphi = 360$;

$k_\varphi = \dfrac{400}{2\pi}$; la unidad coherente de ángulo es el *grado centesimal* ; el ángulo de un giro contiene 400 de tales grados.

En cada uno de estos tres casos se debería conservar $[k_\varphi]$ en la [22] ; no obstante, por convenio casi universal, la [22] se escribe respectivamente :

$$\varphi = \frac{a_r}{r} \qquad [24]$$

$$\varphi = \frac{360}{2\pi}\,\frac{a_r}{r} \qquad [25]$$

$$\varphi = \frac{400}{2\pi}\,\frac{a_r}{r} \qquad [26]$$

atribuyendo a $\frac{360}{2\pi}$ o $\frac{400}{2\pi}$ funciones de coeficiente numérico, como lo es $\frac{1}{2}$ en la [9].

El sistema de ecuaciones básicas [1] ÷ [12], [23], y una de las [24] ÷ [26] vuelve a tener sólo tres magnitudes fundamentales.

§ 7. Sistema de medición. Sistema de ecuaciones entre unidades. Dimensiones. Se establece un sistema de ecuaciones básicas; por ejemplo, para la Mecánica, las [1] ÷ [12], [24], [23] del § 6:

$$\left.\begin{array}{lllll} u = \dfrac{dl}{dt} & a_c = \dfrac{du}{dt} & S = l^2 & v = l^3 & F = m\cdot a_c \\ \mathfrak{L} = F\cdot l & Q = m\cdot u & M = b\cdot F & \mathfrak{E} = \dfrac{1}{2}\,mu^2 & p = \dfrac{F}{S} \\ \mu = \dfrac{m}{v} & b = l & \varphi = \dfrac{a_r}{r} & a_r = l & r = l\ldots \end{array}\right\} \quad [1]$$

Son 15 ecuaciones entre 18 (especies de) magnitudes físicas.

Si se establece que las unidades sean todas *coherentes*, entonces las [1] se desdoblan en las *ecuaciones entre medidas*.

$$\left.\begin{array}{lllll} \mathrm{u} = \dfrac{dl}{dt} & \mathrm{a_c} = \dfrac{du}{dt} & \mathrm{S} = \mathrm{l}^2 & \mathrm{v} = \mathrm{l}^3 & \mathrm{F} = \mathrm{m}\cdot\mathrm{a_c} \\ \mathfrak{L} = \mathrm{F}\cdot\mathrm{l} & \mathrm{Q} = \mathrm{m}\cdot\mathrm{u} & \mathrm{M} = \mathrm{b}\cdot\mathrm{F} & \mathfrak{E} = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{mu}^2 & \mathrm{p} = \dfrac{\mathrm{F}}{\mathrm{S}} \\ \mu = \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{v}} & \mathrm{b} = \mathrm{l} & \varphi = \dfrac{\mathrm{a_r}}{\mathrm{r}} & \mathrm{a_r} = \mathrm{l} & \mathrm{r} = \mathrm{l}\ldots \end{array}\right\} \quad [2]$$

idénticas formalmente (1) a las [1], y en las *ecuaciones entre unidades*:

(1) La identidad formal entre las [1] y las [2], consecuencia de la *coherencia*, permite en todas las aplicaciones numéricas de la Física ejecutar las operaciones matemáticas con las medidas, esto es: con números abstractos, aunque se trata siempre de llegar a relaciones finales entre magnitudes físicas.

Es un hecho que las fórmulas de la Física se refieren, por regla general, a las magnitudes y que la costumbre de considerar, según los casos, o sólo las medidas, o sólo las magnitudes físicas, está tan arraigada que hace superfluo que sigamos distinguiéndolas tipográficamente como se hace en estos párrafos. La distinción entre los caracteres redondo y cursivo aparecerá tan sólo esporádicamente en algunos lugares en donde nos convendrá distinguir entre la magnitud física g y su medida g.

$$\left.\begin{array}{llll} [u] = [l]\cdot[t]^{-1}; & [a_c] = [u]\cdot[t]^{-1}; & [S] = [l]^2; & [v] = [l]^3 \\ [F] = [m]\cdot[a_c]; & [\mathfrak{L}] = [F]\cdot[l]; & [Q] = [m]\cdot[u]; & [M] = [b]\cdot[F] \\ [\mathfrak{E}] = [m]\cdot[u]^2; & [p] = [F]\cdot[S]^{-1}; & [\mu] = [m]\cdot[v]^{-1}; & [b] = [l] \\ & [\varphi] = [a_r]\cdot[r]^{-1}; & [a_r] = [l]; & [r] = [l]\ldots \end{array}\right\} \quad [3]$$

desprovistas de los eventuales coeficientes numéricos existentes en las [1].

Se establecen las unidades fundamentales, y por lo tanto, también las (especies de) magnitudes fundamentales.

Resulta entonces individualizado un *sistema de mediciones*, llamado usualmente «sistema de medidas».

Por ejemplo, fijadas las [1], escogidas l, m, t como magnitudes fundamentales y m, $\mathrm{kg_m}$, seg como unidades correspondientes (fundamentales), queda fijado un sistema de medidas coherente.

El sistema m, $\mathrm{kg_m}$, seg, suele indicarse más brevemente, pero de modo ilógico por MKS; basta la simple indicación de estas unidades para que todos los físicos acepten las [1] y deba respetarse la coherencia.

Pero en Electromagnetismo, en donde está viva todavía la discusión entre varios sistemas de ecuaciones básicas, para individualizar un sistema de mediciones tendremos que decir, por ejemplo, «m, $\mathrm{kg_m}$, seg, Ω internacional, racionalizado de cierta manera».

Las ecuaciones [3], consideradas como un sistema de ecuaciones algebraicas, permiten expresar todas las unidades en función de tres, unidades únicas elegidas convenientemente; tales unidades se denominan de *referencia dimensional*. Generalmente, pero no necesariamente, estas tres unidades coinciden con las fundamentales, y en este caso las otras unidades se llaman *derivadas*, lo mismo que las magnitudes físicas homólogas (§ 6).

Las ecuaciones [3], resueltas respecto de $[l]$, $[m]$, $[t]$, dan el sistema:

$$\begin{array}{lll} [l] = [l^1\cdot m^0\cdot t^0] & [m] = [l^0\cdot m^1\cdot t^0] & [t] = [l^0\cdot m^0\cdot t^1] \\ [u] = [l^1\cdot m^0\cdot t^{-1}] & [a_c] = [l^1\cdot m^0\cdot t^{-2}] & [S] = [l^2\cdot m^0\cdot t^0] \\ [v] = [l^3\cdot m^0\cdot t^0] & [F] = [l^1\cdot m^1\cdot t^{-2}] & [\mathfrak{L}] = [l^2\cdot m^1\cdot t^{-2}] \\ [Q] = [l\cdot m^1\cdot t^{-1}] & [M] = [l^2\cdot m^1\cdot t^{-2}] & [\mathfrak{E}] = [l^2\cdot m^1\cdot t^{-2}] \\ [p] = [l^{-1}\cdot m^1\cdot t^{-2}] & [\mu] = [l^{-3}\cdot m^1\cdot t^0] & [\varphi] = l^0\cdot m^0\cdot t^0] \\ & [a_r] = [r] = [b] = [l^1\cdot m^0\cdot t^0]. & \end{array} \quad [4]$$

en particular para $[l] = \mathrm{m}$, $[m] = \mathrm{kg_m}$, $[t] = \mathrm{seg}$:

$[u] = \mathrm{m}\cdot\mathrm{seg}^{-1}$ $[a_c] = \mathrm{m}\cdot\mathrm{seg}^{-2}$ $[S] = \mathrm{m}^2$

$[v] = \mathrm{m}^3$ $[F] = \mathrm{m}\cdot\mathrm{kg_m}\cdot\mathrm{seg}^{-2}$ $[\mathfrak{L}] = \mathrm{m}^2\cdot\mathrm{kg_m}\cdot\mathrm{seg}^{-2}$

$[Q] = \mathrm{m}\cdot\mathrm{kg_m}\cdot\mathrm{seg}^{-1}$ $[M] = \mathrm{m}^2\cdot\mathrm{kg_m}\cdot\mathrm{seg}^{-2}$ $[\mathfrak{G}] = \mathrm{m.\,kgm.seg}^{-2}$ [5]

$[p] = \mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{kg_m}\cdot\mathrm{seg}^{-2}$ $[\mu] = \mathrm{kg_m}\cdot\mathrm{m}^{-3}$ $[\varphi] = 1$

$[a_r] = [r] = [b] = \mathrm{m}$

Al introducir en las ecuaciones [4] los exponentes 1, y al poner las unidades fundamentales con exponente nulo, con el cual se atribuye a la potencia el valor numérico 1, se ha conseguido una escritura muy uniforme; escribiendo $[l^\alpha \cdot m \cdot t^\gamma]$ en vez de $[l]^\alpha \cdot [m]^\beta \cdot [t]^\gamma$ se han simplificado las fórmulas.

Las ecuaciones entre unidades, en especial si se resuelven como en [4] y [5] se llaman también *ecuaciones dimensionales.*

En su origen las *dimensiones de unidades* respecto de las unidades de referencia eran los exponentes de las expresiones [4]; se decía, por ejemplo, que la unidad de aceleración tenía la dimensión 1 respecto a la unidad de longitud y la dimensión — 2 respecto a la unidad de tiempo, con lo cual quería recordarse que permaneciendo fijo el sistema [1] y la coherencia, la unidad de aceleración va multiplicada por n^1 si la unidad de longitud está multiplicada por n, y va multiplicada por n^{-2} si la unidad de tiempo está multiplicada por n.

De aquí que se hayan difundido afirmaciones como las siguientes: « la aceleración tiene la dimensión 1 con respecto a la longitud y la dimensión — 2 con relación al tiempo », « la aceleración tiene la dimensión de una longitud dividida por el cuadrado de un tiempo »; y, en fin, « la aceleración es una longitud dividida por el cuadrado de un tiempo » o, incluso, « por un tiempo al cuadrado ».

Esta última frase, de empleo corriente, debe considerarse como la lectura de la ecuación dimensional correspondiente entre unidades, y no como la definición de la aceleración. Considérese, en efecto, la frase: « la energía cinética es una masa por el cuadrado de la velocidad » ignorándose el factor 1/2. Análogamente se tienen las frases: « el trabajo es el producto de una fuerza por una longitud », « el momento es el producto de una fuerza por una longitud », mientras que el trabajo y el momento de una fuerza se definen de una manera mucho más completa y no se los puede confundir entre sí.

En un sistema de medidas dado, coherente, las magnitudes físicas de igual especie se miden todas con la misma unidad; son *equidimensionales* u *homogéneas.*

Pero ocurre que magnitudes de distinta especie pueden resultar *equidimensionales.* El caso del trabajo y del momento de una fuerza es el más conocido; sus unidades $[\mathfrak{L}]$ y $[M]$ se expresan del mismo modo en las expresiones [4] y [5]. No obstante, como se trata de magnitudes de distinta especie, no puede escribirse $[\mathfrak{L}] = [M]$.

El caso no es único: la presión específica y el módulo de JOUNG (§ 190), como también los coeficientes de dilatación lineal y cúbica, etcétera, son equidimensionales.

Ahora bien, como los dos miembros de una igualdad física, y asimismo los varios sumandos de un polinomio, tienen que ser de la misma especie, y por lo tanto equidimensionales, tenemos la posibilidad de utilizar el *control de las dimensiones*; es condición necesaria, pero no suficiente, para la validez de una fórmula física que coincidan las dimensiones de los dos miembros de una ecuación, o de los varios términos de una suma. Escapan a tal control los errores que radican en coeficientes numéricos equivocados o en una confusión entre magnitudes equidimensionales.

Este control no requiere la resolución previa de las expresiones [3] con respecto a las unidades fundamentales; las unidades de referencia para el control dimensional pueden ser distintas de las fundamentales e incluso pueden ser más numerosas, lo que reduce los casos de equidimensionalidad.

Por ejemplo, en el caso del coeficiente η de rozamiento interno (§ 187, *b*]) podrá ser conveniente escribir:

$$[\eta] = [F\cdot l\cdot S^{-1}\cdot u^{-1}].$$

En cambio, si sólo hacemos intervenir las unidades fundamentales, tenemos:

$$[\eta] = [l^{-1}\cdot m\cdot t^{-1}].$$

Por ejemplo: en la nota del § 56, *c*] veremos que resulta útil considerar entre las dimensiones de referencia, la dimensión del ángulo a pesar de que éste carece de dimensiones en el sistema de medidas adoptado.

Algunas magnitudes y sus correspondientes unidades resultan sin *dimensiones*; los exponentes del segundo miembro de las expresiones (4) son todos nulos; este es el caso del ángulo φ, según se define en [1]. La unidad de tales magnitudes es independiente del importe de las unidades de las magnitudes fundamentales. Ocurre esto en las (especies de) magnitudes físicas definidas como relación entre (especies de) magnitudes equidimensionales; son un ejemplo de ello los varios tipos de rendimiento, numerosos « factores », el índice de refracción, la densidad (§ 45, *a*]) ...

Las magnitudes sin dimensiones tienen una unidad anónima. Existen algunas excepciones: así la unidad de ángulo, a causa de las varias unidades, utilizadas (§ 33), todas sin dimensiones, tiene un nombre (radián, grado, ...).

Muy a menudo las magnitudes físicas sin dimensiones se denominan *números abstractos*; esto no es oportuno, puesto que:

una magnitud física dimensionada se determina mediante el nombre de la especie, la medida y el nombre de la unidad (ejemplo : trabajo de 5 dinas·cm.) ;

una magnitud física sin dimensiones se determina mediante el nombre de la especie y la medida (ejemplo : índice de refracción 1,51) ;

un número abstracto, se fija mediante la simple medida (ejemplo 5).

§ 8. Los varios sistemas de medición. El sistema adoptado. El empleo universal de un solo sistema de mediano coherente, constituiría una ventaja considerable para la ciencia y para la práctica. Razones de costumbre y de comodidad, que a su vez tienen gran importancia, lo han impedido hasta el presente.

Están en uso diversos sistemas de medición ; las diferencias entre dos sistemas de medición coherentes, son de varios tipos.

1.º Con los mismos sistemas de ecuaciones básicas y, por tanto, gracias a la coherencia, con las mismas ecuaciones entre unidades, pueden elegirse diferentes (especies de) magnitudes fundamentales ; así para el sistema [1], [3] del § 7, que tiene tres magnitudes fundamentales, se eligen como tales :

	longitud	masa	tiempo
o bien :	longitud	fuerza	tiempo
o bien :	longitud	energía	tiempo.

Conviene escoger como magnitudes fundamentales aquellas que permiten una medición directa (§ 5) fácil y, por tanto, una realización fácil de *patrones* muy constantes con el tiempo y reproducibles. La elección, « longitud, masa, tiempo » es, sin duda, la más oportuna.

2.º Con los mismos sistemas de ecuaciones básicas y, gracias a la coherencia, con las mismas ecuaciones entre unidades, aun eligiendo las mismas magnitudes fundamentales, pueden ser distintas las unidades fundamentales escogidas.

Así en el sistema [1], [3] del § 7 con las magnitudes fundamentales « longitud, masa y tiempo », se eligen como unidades fundamentales :

cm, g_m, seg,

o bien :

m, kg_m, seg.

Estos son los dos sistemas científicamente más notables, denominados, respectivamente, sistemas CGS y MKS, notaciones no muy lógicas por cierto.

3.º Sistemas de medición diversos a causa de algún coeficiente numérico en alguna de las ecuaciones básicas.

Ejemplo : sistemas fundados en la [1] § 7, pero distintos porque la definición del ángulo es, respectivamente :

$$\varphi = \frac{a_r}{r} \qquad \text{o bien} \qquad \varphi = \frac{360}{2\pi}\,\frac{a_r}{r}.$$

El sistema [3], § 7, de ecuaciones entre unidades que así resulta, en el caso de la coherencia, es idéntico en los dos casos ; las unidades $[\varphi]$ son, respectivamente, el radián y el grado nonagesimal ; pero las ecuaciones entre unidades no son capaces de distinguir uno de otro.

Esto es lo que ocurre con muchas unidades de medida electromagnéticas, según que se use un sistema de medidas « racionalizado » o bien « no racionalizado ».

4.º Sistemas de medición diversos a causa de la forma de alguna ecuación básica ; así, el sistema legal, que tiene como unidad de volumen el litro, no tiene como ecuación definidora del volumen la ecuación $v = l^3$.

5.º Sistemas de medición diversos por discrepar en el número de las constantes universales, y, por tanto, en el número de las (especies de) magnitudes físicas contenido en cierto número de ecuaciones básicas. Entonces es diferente el número de las (especies de) magnitudes fundamentales. Ya se ha hablado de ello en el § 6, 3.º.

El sistema CGS_{em} y el MKS Ω_{int} « no racionalizado » ofrecen el ejemplo más importante de este caso.

El control dimensional, mencionado en el § 7, es eficaz si se contiene dentro de los límites de los sistemas de medición que son diferentes por las razones indicadas en 1.º ó 2.º, cuyo contenido conceptual, es, realmente, muy ligero.

Entre los sistemas de medición se llamó *absoluto* a todo sistema que se limitase a tomar tan sólo tres magnitudes y, por tanto, tres unidades fundamentales, para desarrollar la Mecánica y, a la vez, el Electromagnetismo.

El número de estas magnitudes y unidades podría reducirse a 1 ; bastaría tomar de las dos leyes universales de NEWTON (gravitación universal) y de EINSTEIN (constancia de la velocidad de la luz en el vacío) dos nuevas ecuaciones básicas poniendo igual a 1 el valor de estas dos constantes universales : « constante de gravitación universal » y « velocidad de propagación de la luz en el vacío ».

La reducción excesiva del número de las magnitudes y unidades fundamentales, y, por tanto, independientes, fué considerada como poco cómoda, hasta el punto que, por algún tiempo, se consideró « práctico », en contraposición a « absoluto », un sistema de medición que tenía cierto número de unidades independientes entre sí, y, por

consiguiente, fundamentales, superior al requerido por el sistema de las ecuaciones básicas escogidas y por la coherencia.

Así en el sistema «práctico» del electromagnetismo se introdujeron hasta tres unidades independientes (unidades *internacionales* de resistencia y de intensidad de corriente, y, finalmente, la pila WESTON como patrón primario de f. e. m.).

Pero los inconvenientes que de ello han resultado han sido tales que indujeron (1939) a la Comisión Electrotécnica Internacional a renunciar a tales unidades independientes superfluas para volver a un sistema absoluto en el sentido que antes hemos definido.

El sistema «práctico» del Electromagnetismo y de la Mecánica se había establecido también con el objeto de tener, por lo menos para las (especies de) magnitudes más corrientes, unidades de un importe acomodado a las medidas más comunes; esto es, unidades ni demasiado pequeñas ni excesivamente grandes. El joule, el watt, el ampère, el ohm, nacieron por este motivo. Pero no es posible un sistema coherente en el cual gran número de unidades tengan un importe «práctico» (ejemplo: el faraday, coherente con el volt, y con el coulomb, es una unidad de capacidad electrica enormemente grande); además el importe más a propósito para una unidad no es el mismo en todas las aplicaciones: la dina, unidad de fuerza microscópica para la mecánica ordinaria, resulta excelente en Acústica.

El sistema de las ecuaciones básicas que hemos escogido es el sistema [1], § 7, al cual añadiremos, poco a poco, las ecuaciones de definición de otras magnitudes físicas, según se irá indicando, sea para la Mecánica, sea para los restantes capítulos de la Física.

Son todavía posibles infinitos sistemas de unidades *coherentes*, como se ha dicho en 1.º y 2.º.

Las *fórmulas físicas* que iremos escribiendo *serán válidas en uno cualquiera de estos sistemas* y podrán ser consideradas o bien como ecuaciones entre magnitudes o como ecuaciones entre medidas. Nos encontraremos en este último caso en todos los cálculos numéricos.

El sistema de unidades que hemos escogido en la Mecánica no *será* único; usaremos *indiferentemente el sistema* cm g_m seg (CGS) o *el sistema* m kg_m seg (MKS), ya mencionados en 2.º.

En favor del sistema cm g_m seg está su inapreciable contribución al progreso científico de un siglo a esta parte.

En favor del sistema m kg_m seg está su enlace directo con el sistema del Electromagnetismo, llamado «práctico».

Los dos sistemas no presentan en la Mecánica diferencia conceptual alguna. Todas las fórmulas pueden ser utilizadas con uno u otro de ambos sistemas; pero, desde luego, es condición indispensable que no se mezclen el uno con el otro.

§ 9. **Magnitudes físicas. Su medición indirecta.** Este método de medición puede efectuarse cuando la magnitud física que se ha de medir y es una función conocida de otra magnitud física que no es de la misma especie que y:

$$y = y\ (x_1, x_2, \ldots x_n) \qquad [1]$$

Nos hallamos en este caso siempre que se haga uso de las ecuaciones básicas (§ 6); en especial la [1] sirve inmediatamente para definir y.

Por ejemplo: la velocidad (media) u de un punto t se define como razón entre el espacio recorrido l y el tiempo t empleado en recorrerlo:

$$u = \frac{l}{t} \qquad [2]$$

De las medidas l, t de l, t resulta conocida la medida u de u, con tal que se trate de unidades coherentes:

$$u = \frac{l}{t} \quad ; \qquad [u] = \frac{[l]}{[t]}$$

Este método de medición se llama *indirecto* o *absoluto* en contraposición al citado § 5. La medición se denomina *indirecta, absoluta* o *derivada*. Pero una medición «absoluta» nada contiene privilegiado, así que requiere todas aquellas premisas (§§ 6 ÷ 9), en gran parte convencionales, que permiten establecer un sistema de medición coherente.

La medición de los volúmenes es particularmente instructiva; aceptada la [4], § 6, el volumen v de un cilindro de altura h y cuya base tiene un radio r, es:

$$v = \pi\, r^2 \cdot h; \qquad v\,[v] = \pi\, r^2\, h\, [l]^3 \qquad [3]$$

De las medidas de r^2 y de h se deduce, en unidades coherentes, la medida

$$v = \pi\, r^2\, h$$

de v; por ejemplo r, h en m, v en m^3.

En una medición indirecta, respetada la coherencia, la unidad de medida de la magnitud que nos ocupa está determinada y no se necesita disponer de su *patrón*.

Esto es una gran ventaja, puesto que exceptuados casos particulares (longitud, masa, resistencia eléctrica, ...) los buenos patrones

son difíciles de realizar, y, por lo tanto, resultan caros; quien quisiera realizar, por ejemplo, un patrón de peso (supongamos 1 kg_p) no sólo se vería obligado a poseer una copia del patrón depositado en Sèvres, sino que tendría quehacer experiencias en el vacío y en un lugar en donde el valor de la gravedad tuviese el *valor normal* $g_{norm} = 980{,}665\ cm \cdot sec^{-2}$ (§ 174).

Pero una medición indirecta es sólo posible cuando se pueda escribir la relación $y = y\ (x_1, \ldots, x_n)$ con la debida exactitud.

Así, cuando el cilindro no es perfecto, la [3] es tan sólo aproximada y será necesario decidir si podrá considerarse como suficientemente aproximada.

A causa de este inconveniente las medidas absolutas son, por regla general, mucho más difíciles y menos frecuentes que las medidas relativas.

Así, solamente tratándose de sólidos de forma geométrica singularmente sencilla (cilindro, cono, pirámide, esfera, ...) se conoce una relación del tipo de la [1] que dé al volumen en función de medidas lineales efectuadas sobre el sólido.

¿Cómo medir los volúmenes en los otros casos?

Se podrá establecer un método de medición directa de los volúmenes: dos cuerpos tienen igual volumen si sumergidos en un mismo líquido experimentan empujes de ARQUÍMEDES iguales; entonces, si se sumergen simultáneamente, la balanza hidrostática indicará un empuje de ARQUÍMEDES (doble) característico del volumen doble. Un cuerpo único tendrá un volumen doble que el de cada uno de los precedentes, si por sí solo recibe el empuje (doble) característico del volumen doble. Ocurrirá lo mismo para el volumen triple, etcétera.

Queda por fijar la unidad de medida.

Procediendo con el método del empuje de ARQUÍMEDES, el volumen adquiere caracteres de (especie de) magnitud fundamental y la unidad podría ser establecida o de una manera arbitraria, o, generalmente, derivándola coherentemente de la unidad de longitud, mediante la [4], § 6.

Es lo que ocurre cuando se acepta el *litro* (§ 32) como unidad de volumen.

§ 10. Aparatos de medición calibrados. Las consideraciones de los §§ 5 ÷ 9 podrán parecer excesivamente triviales o demasiado teóricas; pero al fijarnos detenidamente en ejemplos sencillos de la Mecánica, nos resultará después fácil orientarnos en el campo de los sistemas del electromagnetismo, menos simple y más afectado por las controversias.

Desde luego, en la práctica cotidiana se elimina el inconveniente de las medidas relativas, esto es, la necesidad de los patrones, y el inconveniente de las medidas absolutas, es decir, la necesidad de condiciones particularmente esquemáticas para que se conozca la función $y = y\ (x_1, x_2, \ldots x_n)$ del § 9. De hecho, se utilizan casi exclusivamente los *instrumentos calibrados* o *de lectura directa*.

Así se tienen *dinamómetros* para la medida estática de los pesos, ya calibrados en gramos-peso, kilogramos-peso, etc. El índice que señala la deformación elástica del muelle, se mueve sobre una escala en la que se lee en gramos-peso o kilogramos-peso, etc., el valor de la fuerza agente. Por ej., las antiguas romanas, las recientes balanzas de índice, tan difundidas actualmente en el comercio, son instrumentos calibrados.

Y lo son asimismo los innumerables aparatos de medición de empleo corriente: metros, calibres, relojes, termómetros, densímetros, manómetros, amperímetros, watímetros, etc.

El calibrado lo efectúa el constructor del aparato, mediante una medida relativa, o, en algunos casos, absoluta. Se utiliza un aparato calibrado porque se tiene confianza en la habilidad del constructor, y en la bondad de los patrones de que él se ha servido. El precio del aparato está en proporción con el grado de confianza que ha de merecernos.

Cuando se emplea un aparato calibrado, el «efectuar una medición» significa leer la posición que toman determinados índices sobre las escalas correspondientes, ya graduadas mediante la unidad de medida preelegida para la magnitud que se ha de medir.

Los índices están dotados, o bien de un movimiento de traslación (por ejemplo: el menisco de mercurio en un termómetro) o bien de un movimiento de rotación en torno a un eje (por ejemplo: las manecillas de un reloj, la saeta de un manómetro metálico, el índice de un amperímetro, ...); las escalas correspondientes son, pues, *rectilíneas* o *circulares*.

No hay cosa más trivial que el uso de los aparatos calibrados corrientes (reloj, pálmer, termómetro, amperímetro, ...). Pero el empleo racional de aparatos calibrados de gran precisión requiere, aun así, gran cuidado y mucha atención.

§ 11. Índices y escalas. Se puede establecer con mucha aproximación la coincidencia de dos trazos paralelos. Uno de estos trazos o rayas es el índice I; el otro, una de las graduaciones de la escala. Si el índice y la escala están en la posición de la fig. 3, puede establecerse la coincidencia con la aproximación de $\approx 0{,}02$ mm, con tal que las rayas sean finísimas. En la práctica conviene emplear para la lectura una lente de aumento; el aumento no pasará de 5, pero así se logra fácilmente la aproximación de $\approx 0{,}02$ milímetros mucho más fàcilmente que a simple vista.

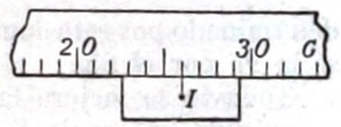
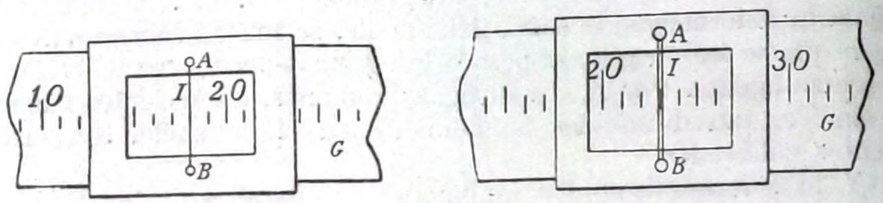


Fig. 3

La disposición de la fig. 4, *a*) (por ejemplo en las reglas de cálculo) presenta algunas ventajas; es excelente la de la fig. 4 *b*) con la cual se llega a establecer la simetría del trazo de la graduación respecto de los dos hilos que forman el índice, con la aproximación de $\approx 0{,}01$ milímetros, a simple vista, a la distancia de la visión distinta.



a) Fig. 4 *b*)

Por consiguiente, el ojo puede llegar a realizar, en este caso, ¡una agudeza visual de $\approx 8''$!

Si el hilo AB estuviese tan aplicado contra la graduación que permitiese la observación simultánea de la graduación y del hilo mediante un microscopio, se apreciaría la coincidencia dentro de 0,001 mm y aun menos. Esta condición no es realizable con aproximación suficiente; por esto no es posible emplear un microscopio potente, ya que cuando el hilo AB se encuentra enfocado, es decir, cuando se ve con nitidez, la escala se ve confusa.

Si el índice AB se halla algo distante del plano de la graduación, se produce, además, un *error de paralaje:* se proyecta el índice en diferentes puntos de la escala, según la posición del ojo observador, y desaparece toda precisión al establecer la coincidencia entre AB y uno de los trazos de la escala.

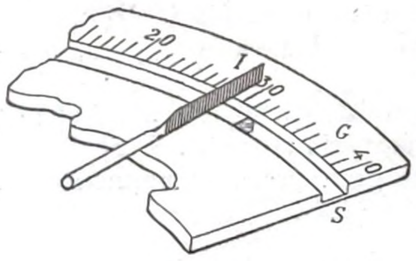


Fig. 5

Se elimina el error de paralaje terminando el índice con una lámina fina, perpendicular al plano de la graduación (*índice de cuchillo*, fig. 5), de modo que se efectúa la lectura cuando el ojo se halla en el plano determinado por esta laminilla, que aparece ahora delgadísima porque se la ve por el filo.

Todavía se mejora la lectura grabando la escala sobre un espejo, o poniendo un espejo S al lado de la escala. Será nulo el error de paralaje si se efectúa la lectura cuando el ojo está en línea recta con el índice y con la imagen que de éste da el espejo.

Otro método para eliminar los dos inconvenientes anteriores consiste en el uso de un *índice óptico* mediante uno de los siguientes artificios.

a] **Índice óptico con instrumento de mira.** Se substituye el índice I (fig. 3) o el AB (fig 4) por un microscopio M (fig. 6, *a*), destinado a apuntar sobre la graduación, que está provisto de un *retículo* R.

Asimismo puede servir un anteojo C (fig. 6, *b*) provisto también de un retículo R, cuando la graduación O esté algo lejana.

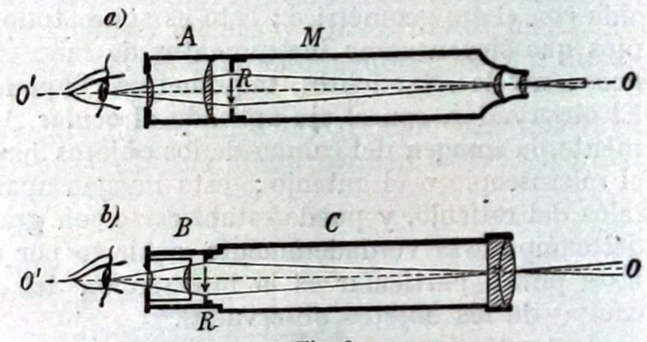


Fig. 6

El microscopio M, y análogamente el anteojo C, provistos del retículo R, funcionan como *instrumentos de mira.*

Está constituído el retículo por el cruce de dos hilos finísimos, montados en un pequeño disco, pudiendo utilizarse hilos de araña, de cuarzo (1), de vidrio, o finísimas rayas trazadas con un diamante sobre una laminilla de vidrio. Las disposiciones más corrientes son las que se indican en la (fig. 7). Se tiene un centro de simetría X de la figura constituída por los hilos, o por lo menos (r_4, r_6), un eje de simetría xy, bien determinado.

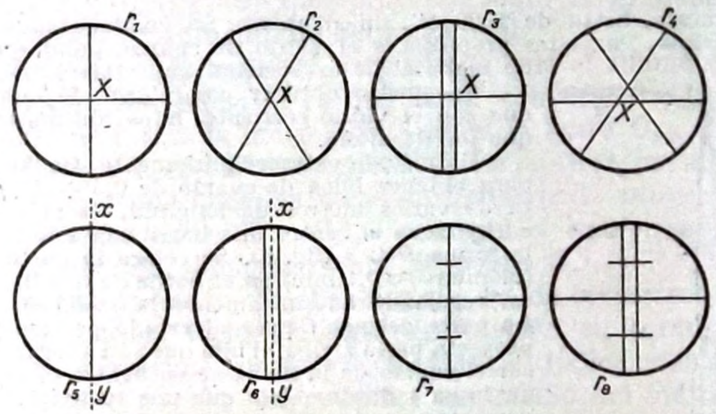


Fig. 7

Se coloca el disco que lleva el retículo en el tubo del microscopio

(1) El *vidrio de cuarzo*, o *cuarzo fundido*, se obtiene ahora fácilmente a partir del cuarzo cristalino mediante fusión a 1500 °C. De aspecto vítreo, límpido y transparente, tanto que permite elaborar piezas de óptica (lentes y prismas), más duro y mucho menos frágil que el vidrio, desprovisto de imperfecciones elásticas (§ 196), toma consistencia pastosa hacia 1500 °C y se puede trabajar como el vidrio, por ejemplo con la llama oxhídrica. A causa de su pequeñísimo coeficiente de dilatación calorífica, puede soportar cambios bruscos

(o del anteojo), de modo que su plano, y, por tanto, el del retículo, sea perpendicular al *eje* del microscopio (o del anteojo) y coincida con el plano donde el objetivo forma la imagen real del objeto a observar. Conviene que el cruce de los hilos se encuentre en el *eje óptico* (véase tomo II) del microscopio (o del anteojo) y que este eje coincida con el eje geométrico ; esto es sobre todo necesario en los anteojos que sirven como instrumentos de mira en los aparatos topográficos : niveles, teodolitos, taquímetros. Supondremos que sucede así. El observador, con el ojo aplicado al ocular A, B, (fig. 6) ve, nítidamente, la imagen del campo de los objetos hacia los cuales se *apunta* el microscopio o el anteojo ; esta imagen aparece atravesada por los hilos del retículo, y puede establecerse con gran exactitud qué punto del campo está verdaderamente cubierto por el cruce X de los hilos. Este punto particular es la intersección del eje óptico $O\,O'$ con el campo de los objetos observados.

Los retículos r_5, r_6, sirven más bien para establecer qué recta del campo tiene su imagen en coincidencia con el eje xy.

Si se corre el microscopio, o se mueven los objetos observados, cambia el punto del campo que coincide con el cruce de los hilos. porque se modifica la intersección de $O\,O'$ con el campo de los objetos,

El eje óptico $O\,O'$ funciona como *recta de mira* o *de colimación* (²),

---

de temperatura, hasta de 1000 °C, sin romperse. Su conductibilidad eléctrica es pequeñísima. Por estas propiedades el vidrio de cuarzo, aunque es caro, es un material de excepcional importancia técnica.

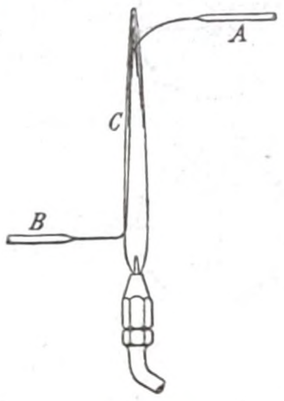


Fig. 8

Se pueden obtener con vidrio de cuarzo, mejor que con el vidrio corriente, hilos finísimos, más finos que los de araña.

Un método extraordinariamente sencillo (Perucca) para obtener hilos de cuarzo de 0,5 ÷ 10 μm y hasta de varios metros de longitud, es el siguiente : se adelgaza en el centro una barrita de cuarzo y se le da la forma $B\,C\,A$ (fig. 8). Se coloca la parte delgada C (diámetro $\approx$ 0,1 mm) en el borde de una llama oxhídrica, regulando adecuadamente la violencia del dardo. La parte delgada C pasa al estado pastoso y la llama proyecta hacia arriba al hilo que se va formando. Al sacar el cuarzo de la llama se encuentra el operador con un largo y finísimo hilo que une todavía A y B y cuyos extremos A y B se manejan cómodamente.

Los hilos de cuarzo no son alargables como los de araña o seda, pero presentan una resistencia a la tracción inexplicablemente elevada, centenares de veces mayor que la del mejor acero. Se trata ciertamente de un fenómeno de tensión superficial. Gracias a esta propiedad, los hilos de cuarzo se emplean muchísimo para la suspensión de equipos en aparatos de física.

(²) Para mayor generalidad, suponemos que el eje óptico OO' no pase por el cruce del retículo X. El objetivo del microscopio (o del anteojo) tiene sobre el eje óptico dos puntos principales P, P', respectivamente en el espacio objeto y en el espacio imagen (véase tomo II) ; la recta XP' es ahora distinta del eje óptico $OO' \equiv PP'$, La *recta de mira* es la recta del espacio objeto que pasa por P y es paralela a XP'. Esta corta al *campo* de los objetos en el punto *colimado*, que aparece al observador coincidiendo con X.

Muy a menudo, pero inadecuadamente, la recta de mira se llama *línea* de mira.

y ésta constituye, a su vez, un índice ideal finísimo, inflexible, sin inercia, que corre sobre los objetos observados sin encontrar ninguna resistencia.

Substituyendo el índice que recorre la graduación por un microscopio M provisto de un retículo R (fig. 6), el observador que mira por el ocular A ve simultáneamente, nítidas y en el mismo plano, las imágenes de la graduación y del retículo, eliminándose los dos inconvenientes antes indicados.

La coincidencia del cruce de los hilos del retículo con una raya bien fina de la graduación, se aprecia ahora con un error del orden de 0,001 mm. Si el retículo tiene una de las formas r_3, r_6, (fig. 7) y sus dos hilos paralelos lo son también a los trazos de la división, se llega a $\approx$ 0,000 1 mm.

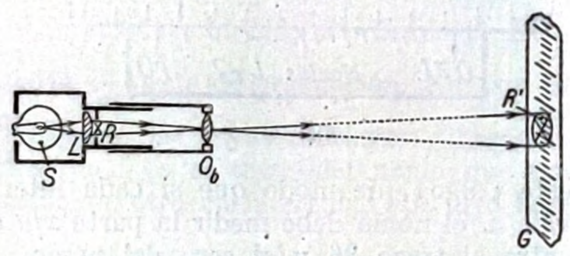


Fig. 9

b] **Índice óptico de proyección.** El índice I (figura 3) está sustituído por un pequeño aparato de proyección SO_b (fig. 9) que proyecta sobre la graduación G la imagen R, nítida (y aumentada) del retículo R.

S es el manantial luminoso, constituído por el filamento incandescente de una bombilla; L es una lente convergente («condensador» de luz) que forma la imagen de S sobre la lente O_b ; inmediatamente después de L se halla el retículo R. La lente O_b es también una lente convergente que hace las veces de objetivo de proyección ; variando la distancia entre R y O_b se consigue el «enfoque», esto es, la formación de una imagen nítida R' sobre G.

c] **Palancas ópticas.** Si el índice que ha de correr sobre la graduación está dotado de movimiento de rotación en torno a un eje (por ejemplo : amperímetros, galvanómetros), el índice mecánico puede ser substituído por un índice óptico por medio del método de la palanca óptica (§ 36), sea el de Poggendorff, en el cual se utiliza un anteojo como instrumento de mira, sea el de Lord Kelvin, en el que se emplea un índice óptico de proyección.

§ 12. Nonio y micrómetro ocular. Es más frecuente tener que determinar la posición de un índice I sobre una escala cuando no coincide con ninguno de los trazos de la misma. Se puede entonces apreciar a ojo la fracción de división, es decir, efectuar una *lectura a estima :* con un poco de ejercicio y empleando índices y escalas buenos se aprecia así hasta la décima del intervalo entre dos rayas.

Pero conviene siempre reducir este caso (que es el más frecuente) al de la coincidencia del índice con un trazo de la graduación. Esto

se logra con varios artificios, siendo los más usados el *nonio* y el *micrómetro ocular*.

a] **Nonio.** El índice que se desliza sobre la graduación de la escala es el trazo inicial *(cero)* de una graduación auxiliar (fig. 10) que se toca con la escala principal. Esta graduación auxiliar o *nonio* consta de una longitud igual a n intervalos de la escala principal, longitud que está dividida en el nonio en $n + 1$ partes iguales; por ejemplo, una longitud igual a 9 partes de la graduación viene sobre el cursor - índice dividida en 10 partes. Se dice que el índice está *provisto de nonio*.

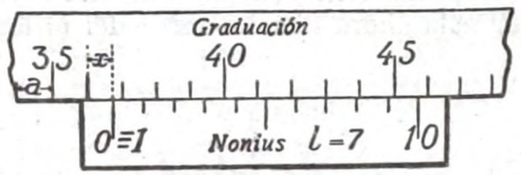


Fig. 10

Por ejemplo, en la figura 10, la posición del índice $I \equiv O$ indica que la lectura es 36 *y algo más*. El *nonio* sirve para apreciar este « algo », de modo que si cada intervalo de la escala principal vale a, el nonio debe medir la parte x/a de graduación comprendida entre el trazo 36 y el cero del nonio.

Se lee sobre el nonio el número de orden l del trazo del nonio, que resulta coincidente con un trazo de la graduación; en la figura es $l = 7$.

Cada intervalo de la graduación vale a; cada intervalo del nonio vale:

$$\frac{n}{n+1}\cdot a\,; \quad \text{en el ejemplo:} \quad \frac{9}{10}\cdot a$$

Se tiene, pues:

$$l\cdot\frac{n}{n+1}\cdot a + x = l\cdot a\,;$$

de donde:

$$x = l\cdot\frac{1}{n+1}\cdot a\,;$$

por lo tanto, el intervalo x buscado es l $(n + 1)$-ésimos de a.

Para el nonio dibujado en la figura:

$$x = \frac{l}{10}\cdot a$$

y puesto que $l = 7$, x es siete décimas de a, esto es, siete décimas del intervalo a de la escala. La *lectura* que establece la posición del índice sobre la escala es, pues, 36,7. Se ha referido la apreciación de la distancia x a la apreciación de la coincidencia de dos trazos, como en la figura 3. Pero ahora se efectúan dos lecturas: una primera sobre la escala principal (en la fig. 10 es 36), y una segunda en el nonio $\left(\text{en la figura 10 es } \frac{7}{10}\right)$.

Si se hubiese obtenido el nonio dividiendo 19 intervalos de la graduación en 20 partes, la indicada coincidencia permitiría apreciar el intervalo x en veinteavos del intervalo de la escala: el nonio *daría el veinteavo* de graduación. Si se hubiese obtenido dividiendo 49 partes de la escala en 50 partes, daría $\frac{1}{50}$ parte de graduación. En este último caso, si $a = 1$ mm, sólo siendo las rayas finísimas y mediante una lente podrá determinarse cuál es el trazo del nonio que está exactamente en la prolongación de otro en la escala. Por otro lado, la apreciación es dudosa y el nonio no da más de $\frac{1}{50}$ mm: es ilusorio construir un nonio con la pretensión de que aprecie más allá de $\frac{1}{50}$ de mm.

También se emplea mucho el nonio para la lectura en escalas circulares (círculos graduados).

Dada la gran variedad de nonios, antes de emplear uno conviene estudiar cómo está graduado y decidir lo que *da*.

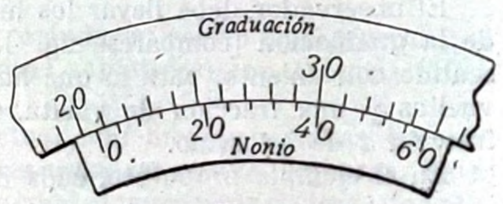


Fig. 11

Así, en la fig. 11 se representa un nonio circular: graduación en grados nonagesimales; nonio constituído por 14 grados divididos en 15 partes; por lo tanto, el nonio da 1/15 de grado; su trazo quinto lleva el número 20, el décimo lleva el número 40, y el trazo quince lleva el número 60; por consiguiente, el nonio ha sido construído teniendo en cuenta una división del grado en 60 partes (minutos); cada trazo del nonio corresponde a 4′.

b] **Micrómetro ocular.** El índice se ha substituído por un microscopio con retículo, siendo éste de la forma r_3 o r_6 de la figura 7. Este retículo va montado en un bastidor $A\ B$ (fig. 12) que puede correrse mediante un *tornillo micrométrico* $T\ V$, cuya cabeza T está dividida, por ejemplo, en 100 partes iguales.

Cada vuelta completa hace progresar al bastidor $A\ B$ paralelamente al eje del tornillo en un trayecto igual al paso de rosca del mismo.

La graduación auxiliar G_1 sirve para determinar el número entero de vueltas dadas por T. Las fracciones de vuelta, hasta la centésima de giro en el ejemplo propuesto, se leen en la cabeza graduada T en correspondencia con el índice I. Por construcción, y modificando ligeramente el *tiraje* del microscopio, o sea la distancia entre el objetivo y el ocular (con lo que se varía el aumento del microscopio), puede lograrse que coincida un número exacto de vueltas, por ejemplo diez, con la distancia entre dos rayas sucesivas de la escala principal G_2.

La posición normal de *cero* del retículo es aquella para la cual son cero las dos lecturas de la escala G_1 y de la cabeza T del tornillo V, pues se tiene entonces cero vueltas y cero fracciones de vuelta. El microscopio funciona en este caso como índice óptico (§ 11 *a*]). Si al mover el microscopio a lo largo de la escala G_2, se le fija en un determinado instante, será casual que un trazo de G_2 caiga entre los dos hilos del retículo. Entre el trazo de la graduación (que, en la figura, tiene el número 23) y los hilos del retículo se tiene una fracción x del intervalo de la graduación G_2.

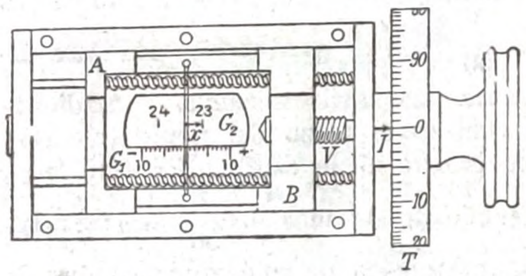


Fig. 12

El observador debe llevar los hilos del retículo sobre el trazo 23 de la graduación [compárese fig. 4. *b*)] girando el tornillo V en el sentido conveniente, para lo que habrá que dar un cierto número de vueltas y una fracción de vuelta. De este modo puede medirse la fracción x de intervalo.

En el ejemplo propuesto, cada división de la cabeza graduada T corresponde a $\frac{1}{1000}$ del intervalo de la escala G_2. Este intervalo puede ser, por ejemplo, de 1 mm, y el micrómetro ocular fija entonces la posición del microscopio, con respecto a la escala G_2, hasta 0,001 mm.

Frecuentemente se substituye la escala G_1 por una simple laminilla dentada, muy cómoda para contar en el campo del microscopio el número entero de vueltas efectuadas por la cabeza T del tornillo, en vez de contar las vueltas sobre la escala G_1.

Existen micrómetros en los cuales es diferente el artificio destinado a trasladar el retículo según una fracción conocida del intervalo de la escala.

Se construyen otros micrómetros oculares, de menos refinamiento, pero mucho más sencillos y actualmente de uso corriente en los aparatos técnicos de precisión, que están constituídos por una laminita de vidrio en la cual está grabada una graduación auxiliar; esta

laminilla sustituye al retículo. El observador ve en el campo del microscopio, nítidas y en el mismo plano, las imágenes de la escala principal, sobre la cual se ha de efectuar la lectura, y de la graduación que sustituye al retículo. Así, la figura 13 representa el campo de observación de uno de estos aparatos. Se trata de una graduación o escala circular, dividida en grados, y de una graduación auxiliar, constituída de 60 partes. que cubren exactamente el intervalo de 1°; se leen directamente los minutos y se aprecia *a estima* hasta una décima de minuto. En la figura 13 el micrómetro ocular señala 45° 23′,6.

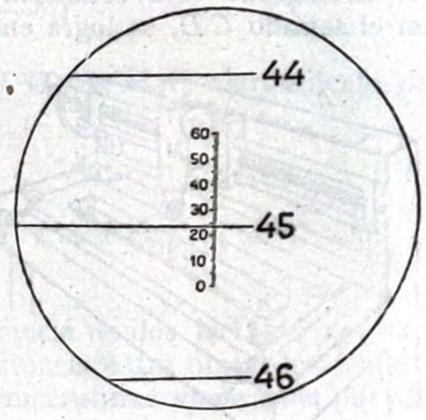


Fig. 13

§ 13. Mediciones físicas en general. Siendo muy grande la precisión con que se puede efectuar la *lectura* de la posición de índices sobre escalas, y fácil la observación, se procura reconducir toda medida (relativa, absoluta, o con aparato calibrado) a la observación de la posición de índices sobre escalas, empleando índices provistos de nonio o, mejor, índices ópticos, y en particular micrómetros oculares.

Esto se logra con los más diversos dispositivos, que es imposible clasificar.

Las pocas medidas que no se reconducen a este tipo general (por ejemplo, las mediciones fotométricas subjetivas) son las más difíciles y menos precisas de la física.

Por lo tanto, en general, efectuar una medida significa hacer la lectura de la posición de los índices sobre las escalas adjuntas. Estas lecturas pueden ser consideradas como magnitudes físicas; longitudes sobre las escalas rectilíneas, ángulos sobre las escalas circulares, e incluso, sobre las escalas calibradas, temperaturas (termómetros), tiempos (relojes), intensidades de corriente (amperímetros), etc.

La magnitud y que ha de medirse es función de las lecturas x_1, x_2, x_3, ... x_n:

$$y = y\ (x_1,\ x_2,\ .....\ x_n) \qquad [1]$$

Para saber cuándo ha de efectuarse la lectura sobre la escala de las observaciones, existen otros índices *indicadores* del momento bueno para la lectura.

Es conveniente fijarse en un ejemplo concreto.

En la figura 14 se representa un *comparador calibrado* (§ 24), destinado a medir longitudes. Se trata de medir la distancia y entre los puntos A y B, bien definidos, de una barra.

El microscopio M está dotado de retículo y debe enfocarse sobre $A\,B$.

Se pone la barra sobre el plato P, y el observador acciona los tornillos de regulación V, V,... para colocar $A\,B$ paralelo a la escala G. Se ha logrado esta condición cuando, moviendo el microscopio M en el sentido $C\,D$, se logra enfocar sucesivamente los puntos A y B en coincidencia con el cruce X de los hilos del retículo.

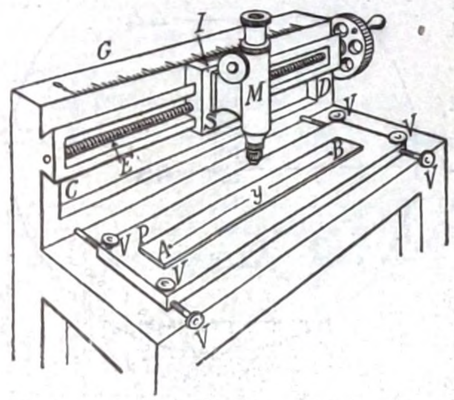


Fig. 14

Se obtiene el movimiento del carro S, sobre el que está fijado el microscopio M, mediante el tornillo E, del cual S constituye la hembra; el movimiento de S está indicado por el del índice I, unido a S, con respecto a la escala G.

El observador corre el microscopio M para dirigirlo sobre A, deteniéndolo cuando X coincide con la imagen de A; efectúa entonces la lectura x_1 de la posición de I sobre la graduación G; repite la operación para B y obtiene la lectura x_2. Se tiene:

$$y = x_2 - x_1 \qquad [2]$$

El microscopio M es el *indicador* del momento bueno para efectuar la lectura.

Así, en la balanza de la figura 1, la aguja I, unida a la cruz, es el *indicador* del momento en que se termina la pesada y en que se puede proceder a la lectura de las pesas colocadas en los platillos.

Hasta en la romana corriente existe el indicador, y establece el momento en que se ha de detener el movimiento del pesón.

Parece a veces que falta indicador del momento bueno para la lectura, porque está reducido a un artificio extraordinariamente simple; por ejemplo, en el dinamómetro de la figura 73, o en un amperímetro intercalado en un circuito para medir la corriente eléctrica, ¿en dónde están los indicadores?

Por el contrario, los indicadores quedan bien evidentes en los *métodos de compensación o de reducción a cero*, de los que veremos numerosos ejemplos (balanzas de HARTMANN y BRAUN, de COULOMB, § 42, ...).

En un aparato construído especialmente para la medida de y y graduado, la ecuación [1] es siempre muy sencilla: $y = x_1$ (termómetro); $y = x_2 - x_1$ (comparador). En otros casos, y puede ser una función muy complicada de las lecturas obtenidas en las escalas.

Así, el coeficiente λ de dilatación lineal de un sólido, en forma de barra, entre las temperaturas θ_1 y θ_2, se calcula a partir de la fórmula

$$\lambda = \frac{a}{l_0\,(\theta_2 - \theta_1)}; \qquad [3]$$

donde l_0 es la longitud de la barra a 0 °C, y a es el alargamiento observado.

Por ejemplo:

$$\lambda = \frac{a \cdot \text{cm}}{l_0 \cdot \text{cm} \cdot (\theta_2 - \theta_1) \cdot {}^{\circ}\text{C}};\ \text{luego, } \lambda = \lambda.[\lambda],\ [\lambda] = {}^{\circ}\text{C}^{-1}.$$

Un comparador mide l_0 como diferencia de dos lecturas $x_2 - x_1$; determina el alargamiento a como diferencia entre otras dos lecturas $a = x_4 - x_3$, y cada una de las dos temperaturas viene dada por una lectura x_5, x_6 del termómetro. Luego:

$$\lambda = \frac{x_4 - x_3}{(x_2 - x_1)\ (x_6 - x_5)} = f\ (x_1, x_2, x_3, \ldots\ x_6)$$

Las cualidades de los instrumentos de medida son la *rapidez*, la *sensibilidad* y la *precisión*.

La rapidez se refiere a cómo el aparato es capaz de seguir y medir las variaciones de la magnitud que se estudia, y sólo más adelante (§ 150, *e*]) podremos definirla más claramente.

La sensibilidad y la precisión son también conceptos de definición algo delicada.

§ 14. Sensibilidad. Fijémonos en el ejemplo del comparador, en el cual se tiene:

$$y = x_2 - x_1.$$

a] **Sensibilidad en una lectura.** Llamaremos *sensibilidad* $|\Delta x_1|$ en la lectura x_1 al mínimo corrimiento de A en la dirección $C\,D$ (fig. 14), que pueda apreciarse al apuntar A con el microscopio. Cooperan a constituir $|\Delta x_1|$ la finura de la señal escogida para individualizar el punto A que se va a colimar, la del retículo de que está provisto el microscopio M de observación, la de la graduación G, el método de lectura de ésta, el aumento del microscopio, etc.

En un buen instrumento deben cuidarse igualmente todos estos elementos, de modo que ninguno se descuide ni sea privilegiado. En tal caso, y cuando se emplea bien el aparato, $\Delta|\ x_1\ |$ es la mínima

fracción del intervalo de la graduación G que puede leerse en la escala; la *sensibilidad* de la indicación coincide con el *límite de sensibilidad de la escala.*

Si, por ejemplo, el índice I del comparador está provisto de un nonio al $\frac{1}{50}$ mm, y si el aparato está bien construído, deben tener una potencia y exactitud, proporcionadas tanto el microscopio M con su retículo, como los movimientos micrométricos para colocar la barra $A\,B$ sobre la plataforma P, así como el movimiento micrométrico para correr el microscopio M, etc.

En tal caso, y con buen uso del instrumento, $|\,\Delta x_1\,|$ es $\frac{1}{50}$ mm. No deberá emplearse para apuntar los extremos romos y mal labrados de una barra, sino puntos o trazos paralelos: A, B, bien definidos.

Un corrimiento en la posición de A será *sentido*, siempre que la modificación de la lectura x_1 sea mayor que $\frac{1}{50}$ mm. Diremos que el aparato da x_1 con error menor que $\frac{1}{50}$ mm; $\frac{1}{50}$ mm puede tomarse como medida de la *sensibilidad* $|\,\Delta x_1\,|$ *de la lectura.* A veces se considera conveniente medir la sensibilidad por un número que resulte tanto mayor cuanto menor sea $|\,\Delta x_1\,|$, y por esto se suele definir la sensibilidad σ de la lectura no como $|\,\Delta x_1\,|$, sino como el valor recíproco $\frac{1}{|\,\Delta x_1\,|}$.

Para probar la sensibilidad se apunta varias veces a A y se efectúa la lectura x_1 cada vez; por ejemplo, n veces. Si el instrumento se ha manejado bien y es bueno, las n *observaciones* habrán dado las lecturas x_{11}, x_{12}, x_{13}, ..., x_{1n}, que pueden diferir entre sí, pero sólo en dos o tres cincuentavos de milímetro como máximo. Se tomará entonces, como valor más conveniente de la lectura x_1, la media de dichos valores,

$$x_1 = \frac{x_{11} + x_{12} + x_{13} + \ldots\ldots + x_{1n}}{n},$$

y, mientras n no sea muy grande (§ 17), podrá tomarse la semidiferencia entre los valores máximo y mínimo de x_{11}, x_{12}, x_{13}, ..., x_{1n} como medida de la sensibilidad $|\,\Delta x_1\,|$. Análogamente haremos para x_2.

Este procedimiento experimental de la repetición de las observaciones es el medio más racional para determinar la sensibilidad correspondiente a una lectura dada; no debe dar un resultado muy diferente al del examen puro y simple de la mínima fracción de graduación determinable sobre la escala G.

Repetimos que $|\,\Delta x_1\,|$ y $|\,\Delta x_2\,|$ miden los *errores* máximos de que pueden estar afectadas las lecturas x_1 y x_2. No se sabe nada más sobre el valor y el signo del error efectivamente cometido, que sólo como caso particularísimo, y sin que lo sepamos, puede ser nulo.

b] **Sensibilidad de una medición.** La cantidad $\varepsilon = |\,\Delta x_2\,| + |\,\Delta x_1\,|$ constituye una medida del *error* que puede afectar a la distancia y que se mide, a causa de la indeterminación de las lecturas x_1, x_2, ; puede tomarse ε, o su valor recíproco, como un índice de la *sensibilidad de la medición.*

Suponiendo ε igual a la suma de los valores absolutos $|\,\Delta x_1\,|$, $|\,\Delta x_2\,|$, casi con certitud se calcula tal error por exceso; pero, ante la ignorancia de los signos efectivos de los errores componentes, es preciso dar particular importancia al caso más desfavorable de que estos errores componentes vengan a sumarse todos.

En general, si se tiene:

$$y = y\,(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n),$$

la sensibilidad de la medida de y viene definida por

$$\varepsilon = \left|\frac{\partial y}{\partial x_1}\,\Delta x_1\right| + \left|\frac{\partial y}{\partial x_2}\,\Delta x_2\right| + \ldots\ldots + \left|\frac{\partial y}{\partial x_r}\,\Delta_r\right| + \ldots\ldots + \left|\frac{\partial y}{\partial x_n}\,\Delta x_n\right|. \quad [1]$$

Cada término de esta suma representa la variación introducida en y por cada error presumible $|\,\Delta x_r\,|$ de x_r; representa, pues, el error que se produce en y por efecto del error $|\,\Delta x_r\,|$.

Para que un instrumento sea muy sensible, ε debe ser muy pequeño, y, por consiguiente, han de ser pequeñas las $\left|\frac{\partial y}{\partial x_r}\right|$ y las $|\,\Delta x_r\,|$ de la expresión [1].

Las derivadas parciales son pequeñas cuando el aparato está bien construído; en general, cuando el dispositivo de medida contiene artificios *amplificadores*, de modo que un corrimiento grande de los índices sobre sus escalas corresponda a una pequeña variación de la magnitud y.

El tornillo micrométrico (§ 12, *b*]) es uno de los ejemplos más corrientes de artificio amplificador: el corrimiento de un paso a lo largo del eje del tornillo corresponde a una vuelta completa de la cabeza del mismo.

En los barómetros metálicos, la deformación que produce el cambio de presión del aire exterior en una caja metálica de paredes muy finas y herméticamente cerrada, se reduce a pocas décimas de milímetro; pero un sistema de palancas y de engranajes la amplifica unas 500 veces, permitiendo así que la escala en la que se leen las presiones abarque hasta unos 20 centímetros.

Un microscopio de observación es un aparato de amplificación óptica. El método del anteojo y escala, ya indicado y que describiremos en el § 36, es otro ejemplo de amplificación óptica *(palanca óptica)*.

Las $|\Delta x_r|$ son pequeñas cuando los anteojos y los microscopios son potentes y están provistos de muy buenos retículos; cuando las escalas están bien grabadas, y, en suma, cuando se puede determinar bien la posición de los índices sobre las mismas. Esto se logra precisamente con los nonios o, mejor todavía, con los micrómetros oculares.

Naturalmente, en los aparatos calibrados, en los cuales la medición se reduce a una simple lectura sobre una escala (por ejemplo: pálmer, termómetros, amperímetros, voltímetros, etc.), se tiene $y = x_1$; y se puede deducir $\varepsilon = \sigma = |\Delta x_1|$ de la simple inspección de la escala (1).

Finalmente, es fundamental observar que *en una buena medición deben ser aproximadamente iguales entre sí todos los términos de la suma* [1]; es decir, todas las lecturas deben contribuir casi igualmente a formar el error de la medida.

Por ejemplo: se ha de preparar una solución acuosa, diluída, de concentración determinada; sea al $1\ ^0/_{00}$. Se entenderá por concentración c la razón

$$c = \frac{P}{P_0} = f(P, P_0);$$

en donde P es el peso del cuerpo disuelto, y P_0 el peso del disolvente; c es función de P y P_0, y se tiene:

$$\varepsilon = \frac{|\Delta P|}{P_0} + \frac{P}{P_0} \cdot \frac{|\Delta P_0|}{P_0}$$

En nuestro ejemplo, $\frac{P}{P_0} = \frac{1}{1000}$; luego, si se pesaran con el mismo cuidado P y P_0, se tendría $|\Delta P| = |\Delta P_0|$, y el error ε estaría constituído de dos partes, $\frac{|\Delta P|}{P_0}$ y $\frac{P}{P_0} \cdot \frac{|\Delta P_0|}{P_0}$, siendo la

(1) En los aparatos calibrados se tiende a dar a conocer la sensibilidad indicando el valor correspondiente a un intervalo entero de la graduación; así se dice «termómetro de 0,1 °C» cuando la escala está dividida en décimas de grado, a pesar de que, a estima, puedan hacerse lecturas hasta 0,02 °C. Hay quien juzga más lógico decir, por ejemplo, «termómetro con sensibilidad de 8 mm para cada grado centígrado», sin prejuzgar nada respecto a si el intervalo de 8 mm está dividido en 5, 10 ó 20 partes iguales, según que se pretenda que en una lectura directa pueda apreciarse $\frac{1}{5}$, 0,1 ó 0,05 °C.

segunda mil veces más pequeña. Es inútil pesar el disolvente con todas las precauciones que son necesarias para pesar el cuerpo disuelto. Aun suponiendo que $|\Delta P_0|$ sea $100 \cdot |\Delta P|$, todavía puede verse que el error de c es debido casi completamente al error en la pesada de P. Si se pesa P al miligramo, basta pesar el agua al decigramo.

Otro ejemplo: Al determinar un coeficiente de dilatación λ con la [3], § 13, se tiene una sensibilidad:

$$\varepsilon = \left|\frac{\partial \lambda}{\partial a}\Delta a\right| + \left|\frac{\partial \lambda}{\partial l_0}\Delta l_0\right| + \left|\frac{\partial \lambda}{\partial \theta_2}\Delta \theta_2\right| + \left|\frac{\partial \lambda}{\partial \theta_1}\Delta \theta_1\right|;$$

$$(|\Delta\theta_1| = |\Delta\theta_2| = |\Delta\theta|);$$

o sea:

$$\varepsilon = \left|\frac{1}{l_0(\theta_2 - \theta_1)}\Delta a\right| + \left|\frac{a}{l_0}\frac{1}{l_0(\theta_1 - \theta_1)}\Delta l_0\right| + \left|\frac{2a}{l_0(\theta_2 - \theta_1)^2}\Delta\theta\right| \quad [2]$$

El alargamiento a es siempre una pequeñísima parte de l_0; por ejemplo, la diezmilésima parte. De modo que si l_0 vale 100 cm y se mide a hasta 0,001 mm, puede determinarse l_0 groseramente con error menor que algunos milímetros; $|\Delta\theta|$ deberá ser tanto menor, es decir, tanto más cuidadosa deberá ser la medida de la temperatura, cuanto menor sea la diferencia de temperatura $(\theta_1 - \theta_1)$ utilizada. Más claramente: igualando el primero y el tercer término de ε, se procurará que sea:

$$\frac{|\Delta\theta|}{\theta_2 - \theta_1} = \frac{1}{2}\frac{|\Delta a|}{a}. \quad [3]$$

§ 15. Precisión y error en una medición. Volvamos al ejemplo del comparador.

Se han tenido ya en cuenta los errores máximos $|\Delta x_1|$, $|\Delta x_2|$ que pueden cometerse, respectivamente, en las lecturas x_1 y x_2. Pero puede suceder que $x_2 - x_1$ no dé exactamente la distancia buscada entre A y B, no sólo por incertidumbre al apuntar los puntos A y B, sino también, por ejemplo, por los motivos siguientes:

a) no son paralelos el segmento $A\,B$ y la dirección $C\,D$ del movimiento del microscopio;

b) la línea de mira del microscopio no permanece paralela a sí misma al mover el carro S a lo largo de $C\,D$;

c) la graduación G está mal hecha por un defecto de construcción; uno de sus intervalos (por ejemplo de 1 mm) ha resultado más pequeño que los demás;

d) dicha escala es exacta para una temperatura determinada (20 °C, en muchos aparatos técnicos), pero la medida se ha efectuado en un local que tiene otra temperatura ;

e) por error, en lugar de apuntar la imagen del punto A se dirige el microscopio a otro punto.....

Por tanto, el valor $y = x_2 - x_1$ puede estar afectado de *errores* de varios orígenes, aparte de los debidos a los errores sencillos $|\Delta x_1|$, $|\Delta x_1|$ cometidos al dirigir el microscopio a los puntos A y B. La *precisión* del resultado viene definida por la suma η de los valores absolutos de todos estos errores, y, por tanto, es inferior, o a lo sumo igual, a la *sensibilidad* ε del instrumento de medida, en el sentido que es : $\eta \geq \varepsilon$.

Entre los errores antes citados, unos son *sistemáticos*, esto es, se cometen en igual medida y signo cuantas veces se repite la medición de y. El error debido a la causa *c*) es sistemático.

Los errores sistemáticos son debidos a un error en la forma de la función $y\ (x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ que relaciona las lecturas $x_1, \ldots\ldots x_n$ con la magnitud y que quiere medirse. Estos errores no se pueden eliminar nunca por completo, pero deben reducirse al mínimo (buena construcción del aparato, perfecta graduación en los aparatos calibrados, uso apropiado de cada aparato, ...).

Existen otros errores *accidentales* debidos a numerosas y pequeñas causas de error inadvertidas, que pueden influir ora en un sentido, ora en otro. El error debido a la causa *a*) es accidental.

La característica de los errores accidentales consiste en ser debidos a causas diversas, actuando desordenadamente, y en no ser posible establecer *a priori* si el error debe resultar en más o en menos.

La repetición completa de la medición (no sólo de las lecturas x_1, x_2) proporciona valores $y_1, y_2 \ldots\ldots, y_m$ de la magnitud y, que no son completamente iguales. Unas veces el resultado de la medición es demasiado grande, y otras veces es demasiado pequeño.

También se supone ahora que la media :

$$y = \frac{y_1 + y_2 + \ldots\ldots + y_m}{m}$$

de un gran número de medidas (repetidas *ex novo*, posiblemente con aparatos y métodos diversos, *que suponemos igualmente buenos*) tiene la máxima probabilidad de estar exenta de error.

Cuando son muy diferentes unos de otros los valores $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_m$, la medida es poca precisa, porque los errores a los cuales atribuímos la diversidad de dichos valores, son notables.

La semidiferencia η entre los valores máximo y mínimo de $y_1, y_1, \ldots\ldots y_m$ da una idea de los errores cometidos y se toma como índice de la precisión de la medición ; cuanto menor es η, mayor es la precisión. Como se ha dicho, siempre se tiene $\eta \geq \varepsilon$ definido por la [1], § 14. En general, en una medición bien efectuada, η es un poco superior (por ejemplo, doble) que ε : la sensibilidad, que se refiere a una sola lectura, es un poco mayor que la precisión, que se refiere a todo el complejo de la medición.

Se dice que la magnitud medida tiene el valor :

$$y \pm \eta,$$

y η da el error admisible, o sea el máximo error que presumiblemente se comete al atribuir el valor y a la magnitud medida.

η nunca es nulo ; no existen en Física mediciones exactas.

η debe indicarse siempre. Y cuando el número que expresa el resultado de medidas experimentales realizadas cuidadosamente no va acompañado del error admisible, es debido al convenio de expresar únicamente las cifras que pueden garantizarse como exactas. Si alguna incertidumbre existe para la última cifra, se escribe a menudo ésta con caracteres más pequeños.

Conviene fijarse bien en que, por ejemplo, 58 cm y 58,0 cm *no son valores equivalentes para el físico : el primero es el resultado de una medición que precisa hasta el centímetro ; el segundo es el resultado de una medición que precisa hasta el milímetro.* Los ceros, aun después de la coma, indican algo.

§ 16. Errores absoluto y relativo. η es el *error absoluto* máximo presumible en la determinación ; $\left|\frac{\eta}{y}\right|$ es el *error relativo.*

Por ejemplo : si la medición de una longitud ha dado como resultado 58,cm ($\pm$ 0,1 cm), el error absoluto η es 0,1 cm ; el error relativo es $\frac{0{,}1}{58{,}0} = \frac{1}{580}$.

Este último se expresa siempre en % ó en ‰. Así, en el ejemplo supuesto, el error relativo es :

$$1 : 580 = 0{,}001\ 72 \ldots\ldots \approx 0{,}002\ ;\ \text{o sea} : \approx 2\ ‰.$$

El error relativo es mucho más expresivo que el error absoluto. La longitud de las bases geodésicas se mide con un error presumible de algunos milímetros ; el error relativo es aproximadamente $\frac{1}{1\,000\,000}$; ¡1 mm por kilómetro !

En la leva militar se determina la altura de los reclutas con un error presumible de algunos milímetros. El error absoluto es el mismo que en el ejemplo anterior, pero se trata de una medición mucho más grosera : el error relativo llega ahora casi al 3 ‰.

Un error absoluto de 7 km es despreciable si se ha cometido al medir la longitud del meridiano terrestre (error relativo 0,17 ‰); el mismo error es inadmisible en la medida del perímetro de la pista para automóviles de Monza (Italia) (¡error mayor del 100 %!).

La medición de longitudes y la de masas con la balanza son ejemplos de mediciones físicas en las que es fácil tener un error relativo pequeñísimo. En otras medidas (calorimetría, pirometría, fotometría, ...) ya se considera buena una medición afectada de un error relativo del 1 %.

§ 17. Justificación de la media. Se ha dicho que, sea al repetir las lecturas, sea al repetir toda la medida, se obtienen resultados algo diversos; tanto en uno como en otro caso se supone que la media de los resultados es el valor más conveniente.

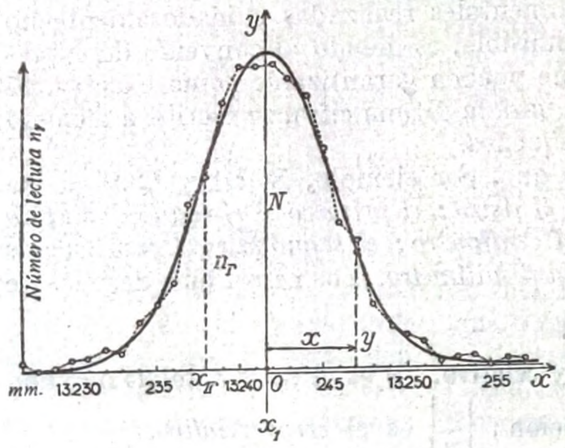


Fig. 15

Para justificarlo, consideremos aún el caso sencillo de la repetición de las lecturas; por ejemplo, la del punto A con el comparador (figura 14). Supondremos que el aparato está provisto de escala particularmente bien construída, sobre la cual se puede leer x_1 hasta apreciar 0,001 mm, mientras que el resto del aparato no está tan afinado.

La repetición de las colimaciones nos llevará a lecturas x_{11}, x_{12}, x_{13}, ... que oscilan dentro de varios 0,001 mm; por ejemplo, dentro de 25 milésimas de mm. Si se efectúa un número de colimaciones muy superior a 25, cada lectura x_r se repite un número n_r de veces. Cuando las causas de los errores que conducen a diversos valores de las lecturas sean verdaderamente *accidentales*, se tiene el gráfico de la figura 15; la curva que pasa por los puntos experimentales es la *curva de* Gauss *de los errores accidentales*.

Puede servir, pues, esta curva para definir y señalar la presencia de errores accidentales.

La curva de Gauss es *simétrica con respecto a una cierta ordenada máxima* N, correspondiente a una abscisa especial x_1, y tiene por ecuación, con respecto a los ejes x y que tienen el origen en O, de abscisa x_1:

$$y = k \cdot e^{-h^2 x^2}; \quad \text{donde} \quad x = (x_1, - x_1). \qquad [1]$$

h y k son constantes, sobre cuyo significado no insistimos.

Se ve fácilmente que x_1 es la media de los valores observados x_{11}, x_{12}, ... x_{1n}. Pues bien: x_1 es el valor más conveniente que debe atribuirse a la lectura:

a] porque, reproduciéndose con mayor frecuencia, es el valor más probable;

b] porque, por razón de simetría, está probablemente exento de errores accidentales que, por definición, actúan indiferentemente en uno u otro sentido.

Pero un aparato, cuya escala sea tan sensible que permita el anterior razonamiento, es inútil; además, casi nunca se tiene tiempo o se tienen ganas de efectuar el número de observaciones necesario para legitimar las conclusiones indicadas. Por ello tienen más valor práctico las consideraciones de los §§ 14 y 15, aunque no sean suficientes para el desarrollo de la *teoría de los errores* y de la *teoría de la combinación de las observaciones*; a estas teorías se llega, por el contrario, a partir de la [1].

Estas teorías consideran particularmente un *error medio* η_m y un *error probable* η_p definidos convencionalmente del siguiente modo.

El error medio η_m de la media x_1 de n lecturas x_{11}, x_{12}, ... x_{1n} es:

$$\eta_m = \sqrt{\frac{\sum_{r=1}^{r=n} (x_{1r} - x_1)^2}{n \cdot (n-1)}} \qquad [2]$$

El error probable η_p de x_1 está relacionado con el error medio por la expresión:

$$\eta_p = 0{,}674 \ldots \cdot \eta_m \approx \frac{2}{3} \cdot \eta_m. \qquad [3]$$

Estos errores η_m, η_p, por poco que sea notable n, son muy inferiores al error $|\Delta x_1|$ definido en § 14, *a]*.

§ 18. Ejemplo. En conclusión, he aquí cómo se procede, por ejemplo, en la medición de la distancia A B mediante el comparador de la figura 14, con nonio al $\frac{1}{50}$ mm.

Montado el objeto en el que se ha de medir la distancia A B, se ensaya si al mover M a lo largo de C D se ven pasar sucesivamente, y enfocadas, las imágenes de A y B por el cruce del retículo de M. Esto se logra accionando los tornillos micrométricos V, que trasladan el objeto sobre la plataforma P.

Lecturas x_1 sobre la escala G cuando se dirige M al punto A:

mm 13,26; 13,26; 13,24; 13,24; 13,26; 13,28.

Media : $(13{,}25_{66} \pm 0{,}02)$ mm.

Lecturas x_2 sobre G cuando se dirige M a B :

mm 127,58 ; 127,62 ; 127,60 ; 127,60 ; 127,62 ; 127,60.

Media : $(127{,}60_{33} \pm 0{,}02)$ mm.

$y_1 = 127{,}60_{33} - 13{,}25_{66} = 114{,}35$ mm (las restantes cifras son ilusorias) $\pm$ 0,04 mm.

Se quita el objeto y se coloca de nuevo sobre el comparador, repitiendo la medida completa. Probablemente se utilizarán en la nueva medida otros trazos de la graduación G.

Se encuentra ahora : $y_2 = (174{,}55_0 - 60{,}21_5)$ mm $= (114{,}33_5 \pm 0{,}04)$ mm.

Se separa de nuevo el objeto y se repite la medida, y así varias veces.

Sean los nuevos resultados :

$$y_3 = (114{,}30 \pm 0{,}05) \text{ mm}$$
$$y_4 = (114{,}37_5 \pm 0{,}04) \text{ mm}$$
$$y_5 = (114{,}33 \pm 0{,}06) \text{ mm}.$$

Se toma como valor definitivo de y la media de las y_r halladas :

$$y = \frac{\sum_1^5 y_r}{5} = (114{,}338 \pm 0{,}04) \text{ mm},$$

y como la última cifra es completamente ilusoria, y aun la penúltima es incierta, se escribirá redondeando :

$$y = (114{,}34 \pm 0{,}04) \text{ mm}.$$

Cuando no se puedan establecer cuantitativamente los límites del error, se escribe aún más simplemente :

$$y = 114{,}3_4 \text{ mm},$$

o todavía :

$$y = 114{,}34 \text{ mm},$$

porque estas expresiones revelan suficientemente, según el convenio explicado (§ 15), el grado de precisión del resultado de la medición.

§ 19. Aparatos registradores. Si han de repetirse con mucha frecuencia las lecturas sobre una escala, convendrá servirse de un aparato registrador, que es generalmente un aparato calibrado.

La escala está sustituída por una hoja de papel, convenientemente graduada, que pasa con movimiento uniforme por debajo del índice I (fig. 16), que es la pluma inscriptora ; por ejemplo, en la figura, la hoja de papel está arrollada en el tambor T, y éste gira por un movimiento de relojería.

Es muy perjudicial el rozamiento de la pluma con el papel, y se han empleado muchos artificios para disminuirlo o eliminarlo, tales como los siguientes : unas veces el papel es satinado y está ahumado, y la punta I deja en él un trazo muy fino al quitar el negro de humo ; otras veces el índice I no toca el papel, pero, gracias a un dispositivo electromagnético, le da un golpe cada minuto (por ejemplo) ; o bien hay un dispositivo que hace saltar cada minuto una chispa eléctrica entre la punta I y el papel, perforándolo ; o, finalmente, un dispositivo fotográfico registra la posición del extremo del índice sobre la escala ;.....

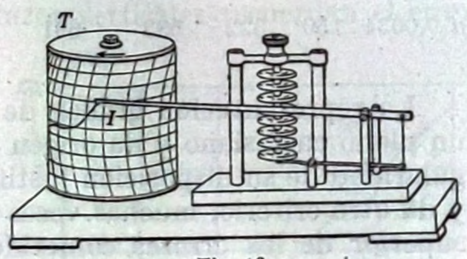


Fig. 16

En todos los casos se comprende cómo el aparato puede servir para una medida continua en el tiempo, y cómo, además, nos proporciona sobre el papel graduado un documento que indica la variación de posición del índice I, y, por tanto, de la magnitud a medir, en función del tiempo. Los aparatos registradores son muy cómodos, pero no son muy precisos, excepción hecha de ciertos tipos muy caros.

Es necesario su empleo siempre que la magnitud a medir (longitud, ángulo, fuerza, velocidad del viento, temperatura, intensidad de una corriente eléctrica, etc.) varía rápidamente con el tiempo. En este caso el valor fundamental del aparato registrador se debe a la rapidez. Se volverá sobre este asunto más adelante (§§ 150, *e*] ; 270).

§ 20. Tablas y representaciones gráficas. Los aparatos registradores constituyen ya un ejemplo de representaciones gráficas de una ley física, pues indican cómo depende del tiempo una magnitud física determinada (longitud, temperatura, intensidad de corriente, ...). En cierto modo puede decirse que un aparato registrador es un cronógrafo (§ 40) que no se limita a señalar el principio y el fin de un fenómeno, sino que, además, da en cada instante la medida de la magnitud física que se estudia.

Más frecuentemente se determina la dependencia entre dos magnitudes físicas mediante experimentos, pero solamente para un nú-

mero finito de valores de una de las magnitudes y, por tanto, de la otra.

Por ejemplo, se ha determinado (BERTHOUD) la masa específica μ (§ 45, *b*]) del vapor de amoníaco saturante (NH_3) a las temperaturas θ siguientes:

θ	0,0	45,0	78,7	98,75	109,25	116,4	121,3	125,45	129,6	132,5 °C
μ	0,0034	150	322	533	691	873	1024	1220	1509	0,2384 $\frac{g}{cm^3}$

La representación gráfica de los resultados puede efectuarse en un plano cartesiano y da origen a los puntos de la figura 17. La regularidad de su disposición justifica el trazado de la curva dibujada, y da otro criterio, muchas veces satisfactorio, para señalar un límite superior de los errores cometidos en las mediciones.

Otras veces la representación gráfica no es tan sencilla. Así sucede, por ejemplo, cuando se estudia cómo una magnitud física z depende de otras dos x, y (ejemplo: masa específica de un gas o vapor en función de la temperatura y de la presión), en cuyo caso la representación gráfica se ha de efectuar en un espacio cartesiano y da origen a una superficie $z = z\,(x, y)$.

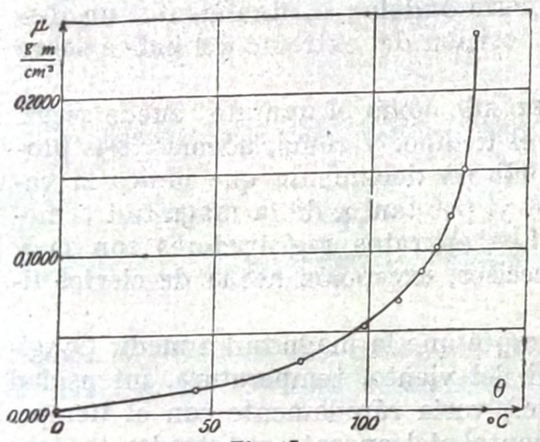


Fig. 17

Volvamos al caso sencillo de una curva (fig. 17), o sea al caso de una dependencia entre dos magnitudes físicas. Cuando las determinaciones no resultan muy precisas y en ellas se puede determinar el error admisible, como se ha indicado en el § 15, conviene sustituir cada punto del gráfico por un pequeño rectángulo cuyos lados representen los errores admisibles (o el error medio, o el error probable) en los valores de las magnitudes físicas representadas en el eje de abscisas y en el de ordenadas, respectivamente.

A menudo, uno de los lados del rectángulo es pequeño con respecto al otro, y el rectángulo se reduce a un segmento.

Este método de representación gráfica de los errores presumibles por medio de un rectángulo, propuesto ya hace tiempo (por ejemplo: PERUCCA, 1919), es extraordinariamente expresivo, pero se difunde poco; ahora se emplea generalmente en la representación gráfica de los resultados de experimentos sobre los rayos cósmicos.

He aquí dos ejemplos sencillos:

a] Un hilo de acero de 2 m de longitud y 0,2 mm de diámetro se alarga por la acción de un peso tensor P; y al aumentar este peso hasta llegar a 15 newton ($\approx 1500\ g_p$; véase § 41), el alargamiento a llega a ≈ 5 mm. Se mide el alargamiento a con la aproximación de $\pm$ 0,1 mm. La figura 18 representa el diagrama de la relación entre a y P. El error en los pesos tensores es tan pequeño que no se puede indicar gráficamente; los trazos verticales recuerdan el error

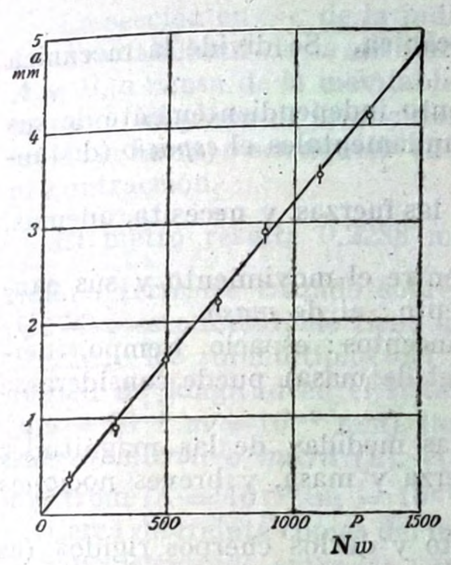


Fig. 18

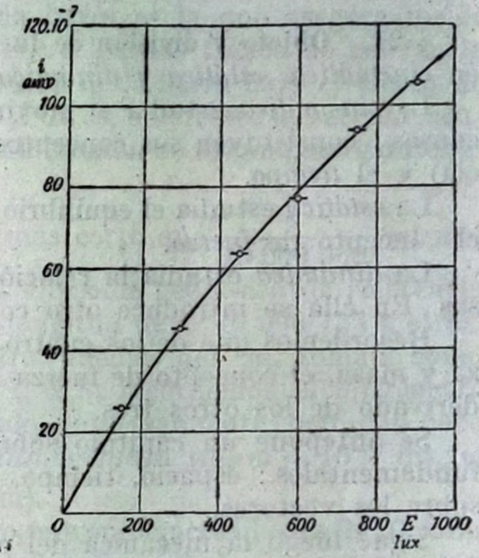


Fig. 19

admisible de $\pm$ 0,1 mm en la medida de los alargamientos. Dentro de los errores experimentales, la línea que representa la función $a = f\,(P)$ es una recta (*ley de* HOOKE, § 188).

b] Si una pila fotoelectrónica de selenio, con capa obstructora (véase tomo II), se monta en corto circuito con un microamperímetro de pequeña resistencia con respecto a la resistencia interna de la pila, se puede determinar la intensidad i de la corriente fotoelectrónica para distintas iluminaciones E, y trazar el gráfico de la figura 19 (curva *característica de corto circuito* de la pila fotoelectrónica). La representación gráfica del error máximo admisible permite deducir que la curvatura de la característica es real y que la característica *no* es una recta.

PRIMERA PARTE

Principios de la mecánica

§ 21. Objeto y división de la mecánica. Se divide la mecánica en *cinemática*, *estática* y *dinámica*.

La *cinemática* estudia el movimiento independientemente de sus causas; constituyen sus conceptos fundamentales el *espacio* (distancia) y el *tiempo*.

La *estática* estudia el equilibrio de las fuerzas, y necesita, además, el concepto de *fuerza*.

La *dinámica* estudia la relación entre el movimiento y sus causas. En ella se introduce otro concepto: el de *masa*.

Recordemos que de los cuatro conceptos: espacio, tiempo, fuerza y masa, el concepto de fuerza (o el de masa) puede considerarse derivado de los otros tres.

Se antepone un capítulo sobre las medidas de las magnitudes fundamentales: espacio, tiempo, fuerza y masa, y breves nociones sobre los vectores.

Sigue luego la mecánica del punto y de los cuerpos rígidos (es decir, indeformables), y, finalmente, se estudia la mecánica de los cuerpos deformables.

CAPÍTULO I

Medición de las magnitudes fundamentales y de algunas de las principales magnitudes derivadas

§ 22. Unidad y patrón de longitud. La unidad de longitud es el *metro* (m), igual a la distancia a 0 °C entre dos trazos paralelos A B (fig. 20), grabados cerca de los extremos de una barra de platino-iridio (90 % Pt; 10 % Ir), que sustituye legalmente, desde 1889, a otra barra anterior de platino puro, construída en la época de la revolución francesa. Esta barra había pretendido representar

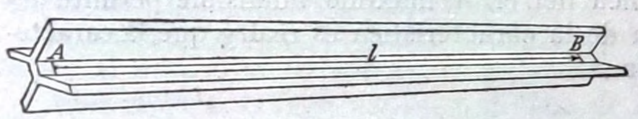


Fig. 20

$\frac{1}{40\,000\,000}$ del meridiano terrestre; pero, por los errores inevitables de la determinación resultó, en realidad más corta. Para no tener que modificar el patrón cada vez que se efectuasen nuevas y más perfeccionadas medidas del meridiano terrestre, prevaleció la idea de tener como patrón de longitud la indicada por la barra patrón, y por esto fué sustituída dicha barra en 1889 por otra de la misma longitud, pero de sección más conveniente (1).

Respecto a la definición interferométrica del metro, véase tomo II.

La sección en >-< de la indicada barra es la que asegura mejor la invariabilidad de la distancia entre los dos trazos de referencia A y B, a causa de la inevitable flexión de la barra bajo el efecto de su peso. El plano de las incisiones A B es, en efecto, la sección neutra de la barra, o sea aquella en que la flexión no origina alargamiento ni contracción.

El metro resulta 0,2288 mm más corto que $\frac{1}{40\,000\,000}$ del meridiano terrestre trazado sobre el elipsoide geodésico de referencia (§ 174); este meridiano tiene una longitud de $\approx$ 40 009 153 metros.

Entre los submúltiplos del metro, además del cm, tomado como unidad de longitud en el sistema C G S, recordemos el *micrómetro* ($\mu m = 10^{-6}$ m $= 10^{-3}$ mm), llamado universalmente, pero con poco acierto, *micrón* o *micra* (μ), el *milimicrómetro* (mμm $= 10^{-9}$ m), el angström (Å $= 10^{-10}$ m $= 10^{-8}$ cm).

Cerca de treinta copias del metro patrón, exactas hasta 0,001 mm, se han distribuído entre las varias oficinas centrales de pesas y medidas de las naciones civilizadas; estas copias sirven como patrones para la confección de ulteriores copias, cada vez menos precisas, hasta llegar a las corrientes cintas graduadas metros plegables, dobles decímetros, etc.

Se encuentran en el comercio metros patrones de *invar* o de *platinita* (§ 308), de sección en >-<, indicada en la figura 20, y divididos en milímetros, con 2 mm adicionales divididos en décimas de milímetro.

Los mejores de estos metros patrones llevan un error en su longitud total no superior a $\pm$ 20 μm; cada intervalo de 1 mm puede llegar a tener un error de $1 \div 2$ μm); el ancho de las rayas que constituyen los trazos de la graduación es de $3 \div 4\mu$m; al colimar con un microscopio micrométrico provisto de retículo del tipo r_3 o r_6 de la figura 7, puede alcanzarse una precisión de 0,1 μm, por lo menos.

Los metros patrones de esta clase destinados a usos técnicos es-

(1) En Inglaterra y sus colonias persiste como unidad legal la *yarda*, equivalente a 3 *pies*, y cada pie, a 12 *pulgadas*. Una pulgada equivale a 25,400 mm.

tán graduados para emplearlos a 20 °C ; de modo que a 20 °C tienen la misma longitud que el patrón de París a 0 °C.

Existen cintas de *invar* para medidas geodésicas que alcanzan hasta 24 m, con las cuales algunos hombres pueden medir una base geodésica de varios kilómetros, en un par de días, con una precisión relativa que alcanza $\frac{1}{1\,000\,000}$, es decir, con un error probable de 1 mm por kilómetro.

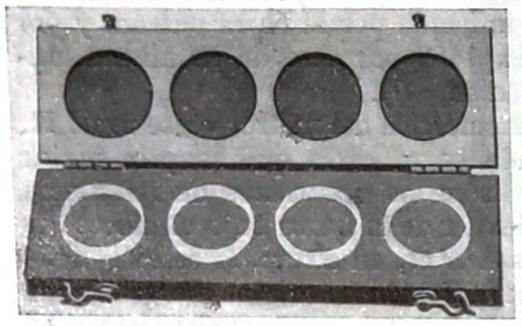


Fig. 21

Los patrones de pequeña longitud que dan dimensiones de comprobación para uso técnico reciben el nombre de *calibres*.

Entre los calibres *de dimensión externa* recordamos los de Zeiss y los de Johansson.

Los calibres Zeiss son discos de vidrio o de vidrio de cuarzo, de un espesor de 10 ÷ 15 mm, exactos hasta 0,1 μm (figura 21).

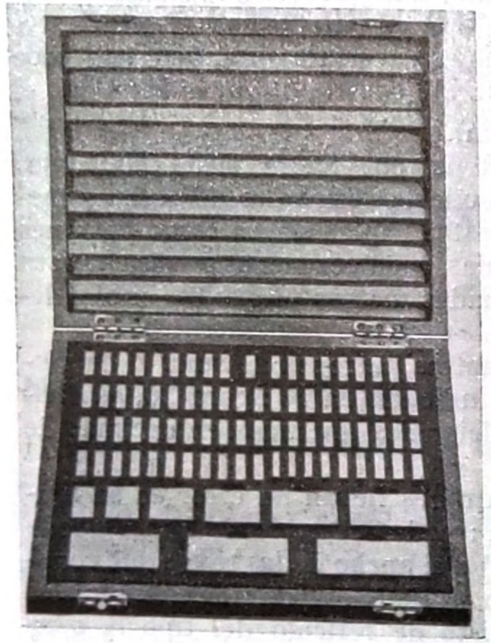


Fig. 22

Los calibres Johansson son bloques prismáticos de acero (figura 22) con dos caras opuestas bien planas y paralelas ; la distancia l entre tales caras viene dada con un error no superior a 0,2 ÷ 0,3 μm para $l \leq 100$ mm, y, aunque aumenta con l, todavía es menor que 0,6 μm para $l = 200$ mm.

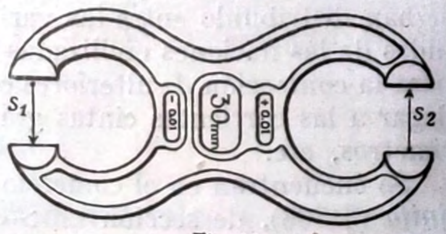


Fig. 23

Teniendo varios de estos calibres de diferentes dimensiones, (por ejemplo, desde 1 mm a 200 mm), por superposición de algunos (cuatro como máximo) se puede obtener cualquier longitud, de micrometro en micrometro, por ejemplo,

desde 1 mm hasta 200 mm. Estas piezas se mantienen juntas gracias a una capa finísima de lubricante (0,02 ÷ 0,03 μm) que crea la adherencia necesaria.

El espesor de una combinación de éstas aun es exacto hasta 0,001 milímetros, más que suficiente todavía para la mecánica técnica de máxima precisión.

Entre los calibres de *dimensiones internas* recordemos los *calibres diferenciales* en forma de mordaza, como el de la figura 23, en el cual es : $s_1 = (30 - 0{,}01)$ mm, $s_2 = (30 + 0{,}01)$ mm. De las dos dimensiones fijadas por el calibre, una de ellas, $s_1 = (30 - 0{,}01)$ mm, establece el « error tolerado en menos » ; la otra, $s_2 = (30 + 0{,}01)$ milímetros, establece el error tolerado en más ; $s_2 - s_1 = 0{,}02$ mm establece la *tolerancia* admitida. El calibre se llama también *calibre de tolerancia*. Pero en el comercio se encuentran las formas más variadas de calibres para llenar las necesidades de las diversas industrias mecánicas.

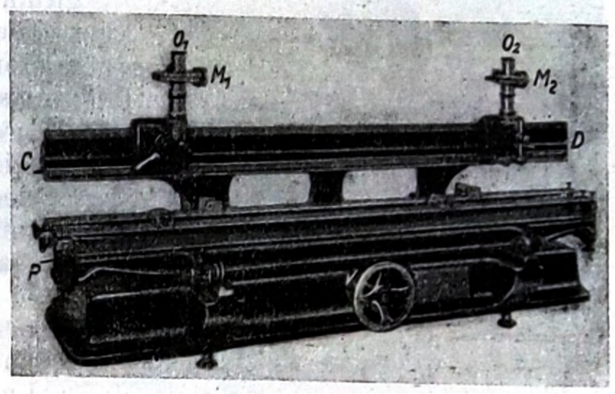


Fig. 24

§ 23. Medición de pequeñas longitudes. Entenderemos por longitudes pequeñas las que no pasen de algunos metros.

La medición de grandes longitudes sea *directa* (ejemplo : *bases geodésicas)* o *indirecta (triangulaciones, telemetría)*, es más bien objeto de la topografía. Sólo daremos en el tomo II una idea sobre los telémetros.

La longitud de un segmento, en cuanto está determinada por sus extremos A y B, es una magnitud vectorial, como lo es un segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ (§ 49). Los tipos más comunes de aparatos para la medición de pequeñas longitudes, de que vamos a hablar, dan solamente el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$, pero no la orientación.

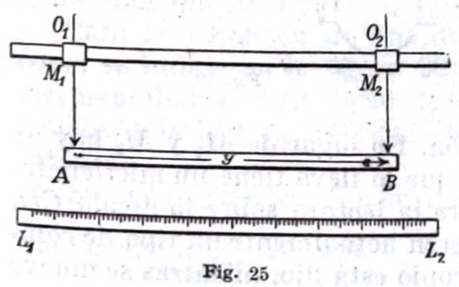


Fig. 25

§ 24. Comparador. La figura 24 representa un gran comparador de precisión. La longitud AB a medir se coloca sobre un plano P paralelamente a una guía CD, a lo largo de la cual corren dos

microscopios M_1, M_2, provistos (por lo menos uno, M_2) de micrómetro ocular apto para medir las fracciones de intervalo de graduación; por ejemplo, 1 mm, con una aproximación que puede llegar a 0,000 1 mm.

Las líneas de mira O_1, O_2 de los microscopios son paralelas entre sí y perpendiculares a CD. Teniendo los micrómetros oculares en la posición normal de cero (§ 12, *b*]), se mueven los dos microscopios hasta lograr que los extremos A y B de la longitud a medir se encuentren, respectivamente, en las línees de mira O_1 y O_2. Después se sustituye AB por un metro patrón L_1 L_2, dividido en milímetros en toda su longitud.

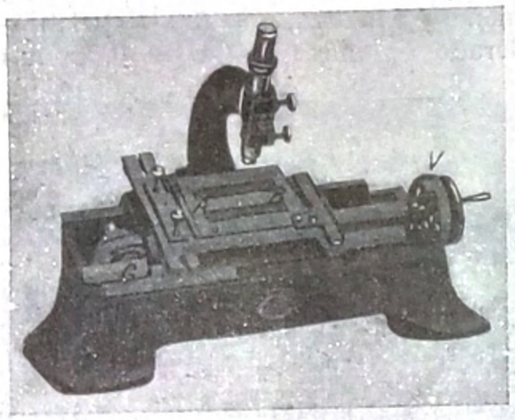


Fig. 26

Mediante los movimientos micrométricos de que está provisto el plano P, se lleva el cero del metro patrón a la posición que ocupaba antes A, es decir, se lleva a la línea de mira O_1; después se efectúa la lectura con el microscopio M_2, que lleva micrómetro ocular, sobre la graduación del metro patrón.

La figura 25 da el esquema del comparador; resulta evidente que el comparador es un compás. Los microscopios, los distintos movimientos micrométricos de los mismos y de la base P, y un metro patrón suficientemente preciso, permiten alcanzar la sensibilidad de 0,000 1 mm. Pero para longitudes de algunos decímetros, esta sensibilidad es ya muy superior a la precisión, especialmente por efecto de las dilataciones térmicas.

El comparador descrito sirve para medidas de alta precisión en laboratorios especializados.

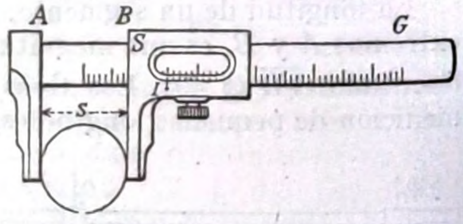


Fig. 27

Más corrientemente se encuentran en el comercio comparadores para medir longitudes de algunos decímetros como máximo; ejemplo: el de la figura 14. La barra CD (fig. 24) lleva la graduación en milímetros y sustituye al metro patrón. En lugar de M_1 y M_2 hay un solo microscopio de mira, y el carro que lo lleva tiene un micrómetro ocular, o por lo menos un nonio, para la lectura sobre la escala CD.

Pero muchos constructores prefieren actualmente un tipo de comparador (fig. 26), en el que el microscopio está fijo, mientras se mueve

el plano donde se apoya el objeto a medir, por ser la hembra de un grueso tornillo micrométrico muy bien construído.

En estos aparatos se obtiene aún la sensibilidad de 0,001 mm en cada lectura, pero es difícil garantizar, aun para una longitud de pocos centímetros, la precisión de 0,005 mm, especialmente por las imperfecciones del tornillo micrométrico, por el paralelismo imperfecto en el movimiento del plano de apoyo y por la influencia de la temperatura.

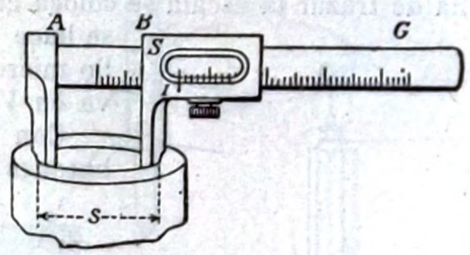


Fig. 28

Finalmente, también se llaman «comparadores» algunos tipos de minímetros (§ 28).

El *pie de rey* calibrador (figura 27), empleado por los mecánicos, es un comparador calibrado y muy simplificado, construído especialmente para la medición de los diámetros exteriores o interiores de tubos cilíndricos.

La longitud s a medir se coloca entre las dos mandíbulas A, B, paralelamente a la escala. Cuando se lleva la mandíbula movible B en contacto con la A, el índice I del carro S, que guía a B,

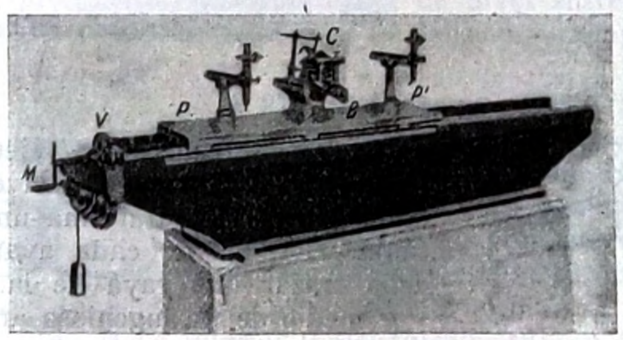


Fig. 29

coincide con el cero de la graduación G. Así, una sola lectura da la dimensión que se busca.

Para la medición de una dimensión interna se emplea el calibre como se indica en la figura 28. El espesor de las extremidades de las mandíbulas es en total de 1 cm; luego debe añadirse un centímetro a la lectura efectuada para obtener el valor de la dimensión interior.

Se encuentran en el comercio muy buenos calibres de esta clase con nonio a $\frac{1}{50}$ de mm.

§ 25. Máquina para dividir rectas. Es un verdadero comparador del tipo de la figura 24. Pero, además de los dos microscopios, tiene un complicado *castillo* C (fig. 29; la máquina de dividir representada tiene dos microscopios de observación, cada uno provisto de micrómetro ocular), que lleva un buril B destinado a trazar las rayas de la graduación que ha de hacerse. El objeto sobre el cual se ha de trazar la escala se coloca encima de la plataforma $P\,P'$. Ésta se hace deslizar mediante un grueso tornillo micrométrico, cuya cabeza graduada se ve en V.

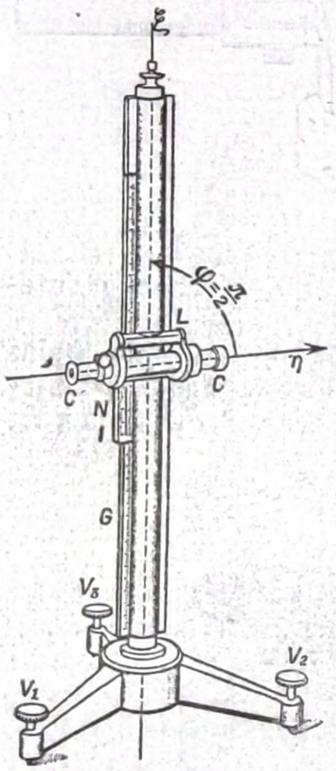


Fig. 30

Con una rueda libre anexa a V y dos botones de paro regulables, se hace de modo que la manivela M ejecute rotaciones alternadas; en cada vaivén de la manivela corre la plataforma un paso constante. Después de cada avance el buril debe trazar una raya de la graduación. Por medio de un ingenioso artificio se logra que las rayas sucesivas resulten más o menos largas según un ritmo preestablecido.

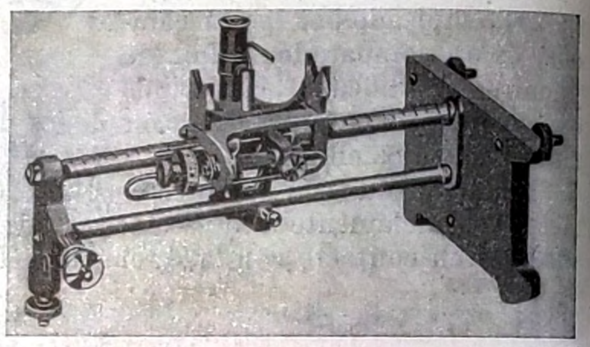


Fig. 31

En estas máquinas de dividir todos los movimientos son automáticos, y así la graduación puede realizarse en un ambiente a temperatura constante, no perturbado por la presencia de un operador.

§ 26. Catetómetro. Es un comparador (calibrado) cuya escala es vertical (fig. 30), por estar destinado este aparato a la medición de desniveles; por ejemplo, la de la altura del mercurio en el barómetro. También se construyen ahora *comparadores universales* de uso corriente (fig. 31), que pueden colocarse con la escala vertical y funcionar así como catetómetros.

El catetómetro (fig. 30) tiene una barra vertical graduada que puede girar alrededor de su eje ξ; se logra la verticalidad mediante un soporte o trípode de tornillos niveladores. Para establecer la verticalidad del eje de rotación se emplea un nivel L (§ 35, c], 2º), montado sobre el anteojo (1) de observación; también sirve este nivel para garantizar la horizontalidad de la línea de mira η del colimador. En efecto, el catetómetro permite determinar correctamente el desnivel entre dos puntos A y B, aunque no pertenezcan a la misma vertical, únicamente cuando se cumplen las dos condiciones indicadas.

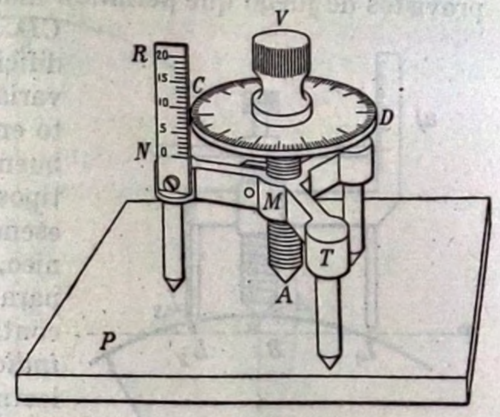


Fig. 32

Las comprobaciones necesarias para asegurarse de que se cumplen aquellas dos condiciones son largas, más bien complicadas y no completamente iguales en todos los tipos de catetómetos. Pero, en cambio, el catetómetro permite medir una diferencia de nivel entre dos puntos A y B con una precisión análoga a la del comparador.

§ 27. Esferómetro. En un trípode T (figura 32), las puntas de cuyos pies son vértices de un triángulo equilátero al apoyarse sobre el plano P, está la hembra M de un excelente tornillo micrométrico V, cuyo paso es, por ejemplo, de 0,5 mm, y cuyo eje es perpendicular al plano P. El extremo inferior A del tornillo sube o baja 0,5 mm por cada vuelta de la cabeza CD; ésta se halla dividida en partes iguales (por ejemplo, 500), lo que permite leer sobre el limbo de la cabeza del tornillo $\frac{1}{500}$ de vuelta, en correspondencia con un movimiento de 0,001 mm de la punta A

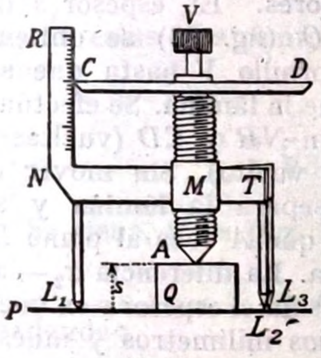


Fig. 33

(1) Con el catetómetro se miden desniveles; por ejemplo: barométricos, capilares, de manómetros de líquido. El anteojo de observación está adaptado para visar a varios decímetros de distancia, siendo, pues, un intermedio entre el microscopio y el anteojo. Según la definición que daremos del «microscopio» (véase tomo II), el aparato de mira del catetómetro es un «anteojo», porque en éste el enfoque sobre varios objetos se consigue modificando la distancia entre el ocular y el objetivo.

del tornillo. La regla NR sirve para medir el número de vueltas completas de V, y, además, sirve de índice para la graduación grabada sobre CD, destinada a valorar las fracciones de vuelta.

Se pueden construir tornillos micrométricos tan precisos y desprovistos de juego que permitan una sensibilidad en la lectura sobre CD de 0,000 1 mm; pero es muy difícil realizar un indicador fiel e invariable del momento del contacto entre A y P, esto es, del momento bueno para la lectura. Los diversos tipos de esferómetros se distinguen esencialmente por el artificio (mecánico, óptico o eléctrico), que sirve para establecer el momento de dicho contacto. Este artificio constituye el *indicador* del momento bueno para la lectura (§ 13).

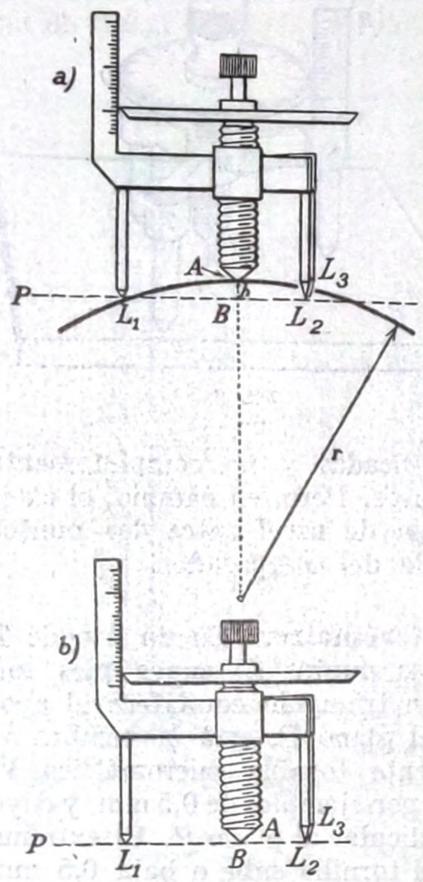


Fig. 34

El esferómetro sirve para la medición de espesores (esto es, de la distancia entre dos planos paralelos que limitan el objeto; por ejemplo, una lámina) y para medir el radio de una superficie esférica, y de ahí proviene su nombre.

a] **Espesores.** El espesor s de una lámina Q (fig. 33) se obtiene girando el tornillo V hasta que su punta A toque la lámina. Se efectúan las lecturas en NR y CD (vueltas y fracciones de vuelta). Sin mover el trípode, se separa la lámina y se gira V hasta que A toca al plano P. Nueva lectura. La diferencia $x_2 - x_1$ de las lecturas da el espesor s en vueltas y fracciones de vuelta (por ej., en medios milímetros y milésimas de milímetro).

b] **Radios de esferas.** La esfera (o casquete esférico) debe ser suficientemente grande para que el esferómetro pueda colocarse sobre ella. Llamaremos r al radio desconocido de la esfera. Se gira el tornillo V hasta lograr que su punta A se apoye sobre la esfera (figura 34, *a*), y se efectúan las lecturas en $N\,R$ y $C\,D$. Se coloca después el esferómetro sobre una lámina bien plana P (fig. 34, *b*) y se baja A hasta tocar al plano de apoyo. Nueva lectura. La diferencia entre las dos lecturas da la flecha h.

Por otro lado, el radio a del círculo $L_1\ L_2\ L_3$ de contacto entre el casquete esférico $A\ L_1\ L_2\ L_3$, y el plano P, no es más que el radio a de la circunferencia circunscrita al triángulo equilátero formado por las puntas. Tomando una vez para siempre la distancia d entre

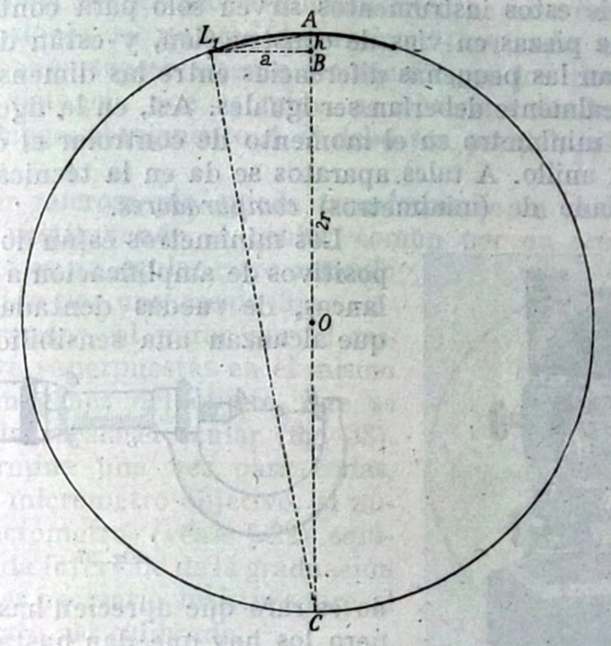


Fig. 35

dos de estas tres puntas, o sea el lado del triángulo equilátero, se tiene:

$$a = \frac{d}{\sqrt{3}}, \text{ constante del instrumento.}$$

Se tiene, pues (fig. 35):

$$(2r - h) : a = a : h;$$

de donde:

$$r = \frac{a^2 + h^2}{2h} = \frac{d^2 + 3h^2}{6h}. \qquad [1]$$

Como d es conocido, y se ha medido h, puede calcularse el radio r; para los valores corrientes de r y de d cabe medir r con la aproximación de $20 \div 40\ \mu$m.

Los ópticos emplean un aparato, que es precisamente un pequeño esferómetro, calibrado de modo que, en vez de dar el radio, da directamente las dioptrías de las lentes.

§ 28. Palmer. Es muy frecuente en la tecnología mecánica la medición de espesores, existiendo aparatos adecuados (minímetros, optímetros, etc.) para medir espesores de láminas o diámetros de cilindros.

Muchos de estos instrumentos sirven sólo para controlar las dimensiones de piezas en vías de construcción, y están dispuestos de modo que dan las pequeñas diferencias entre las dimensiones de objetos que idealmente deberían ser iguales. Así, en la figura 36 se representa un minímetro en el momento de controlar el diámetro exterior de un anillo. A tales aparatos se da en la técnica el nombre muy apropiado de (minímetros) *comparadores*.

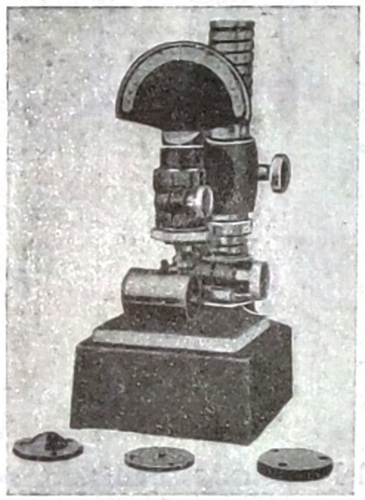


Fig. 36

Los minímetros están dotados de dispositivos de amplificación a base de palancas, de ruedas dentadas u ópticos, que alcanzan una sensibilidad elevada ;

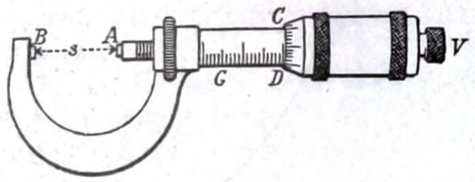


Fig. 37

no es raro que aprecien hasta 0,001 mm pero los hay que dan hasta 0,000 1 mm e incluso hasta 0,000 05 mm. Pero describiremos únicamente el *palmer* (fig. 37).

Este instrumento puede considerarse como un esferómetro sencillo y robusto. La cabeza graduada *CD* (figura 37) tiene la forma de un tubo ; al girar el tornillo *V*, la cabeza *CD* va cu briendo nuevos trazos de la escala *G*. Se leen así en *G* las vueltas y en *C D* las fracciones de vuelta. La escala está graduada de modo que señala cero vueltas y cero fracciones de vuelta cuando *A* toca a *B*. De este modo con una sola lectura de vueltas y fracciones de vuelta se obtiene el espesor *s* del cuerpo. Generalmente, el paso de rosca de *V* es de 1 mm y la cabeza cilíndrica *C D* está dividida en 100 partes. Así se tiene el espesor en milímetros (leídos sobre *G*) y centésimas de milímetro (leídos en *C D*).

§ 29. Microscopio micrométrico. Un microscopio provisto de micrómetro ocular (fig. 12) permite medir rápidamente y con precisión las dimensiones de objetos muy pequeños (por ejemplo, cuyo diámetro es una fracción de milímetro).

El micrómetro ha de estar calibrado. Sirve como patrón un *micrómetro objetivo*, constituído por una laminilla de vidrio en la cual

está grabada una escala, constituída por 1 mm dividido en 100 partes. Se visa con el microscopio micrométrico el micrómetro objetivo y se comprueba si, por ejemplo, 10 vueltas enteras del tornillo *V* (fig. 12) hacen correr el retículo de uno a otro extremo del milímetro patrón. Comprobado así el microscopio micrométrico, se mira con él el objeto cuyas dimensiones se quieren determinar. Corriendo el retículo de modo que venga sucesivamente a coincidir con los dos extremos *A* y *B* de la distancia que se mide, se obtendrá fácilmente su valor. Desde luego, el segmento *A B* debe ser paralelo al corrimiento del retículo.

Cualquier microscopio puede transformarse en microscopio micrométrico, sustituyendo el ocular común por un *ocular micrométrico* (1), que es un ocular cuyo retículo será sustituído por una escala fija.

El observador, al mirar por el microscopio, ve superpuestas en el mismo plano las imágenes del objeto que se mide y de la escala el ocular (fig. 38).

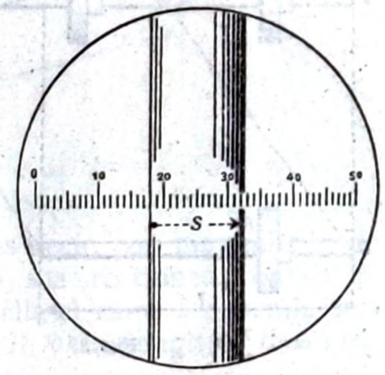


Fig. 38

Se determina una vez para todas, mediante el micrómetro objetivo, el número de micrómetros (véase § 22) equivalente a cada intervalo de la graduación ocular. No es necesario insistir sobre el uso del aparato así calibrado.

Se emplea muy corrientemente un instrumento parecido para determinar el diámetro *s* (fig. 38) de hilos finísimos, en particular de fibras textiles.

El empleo del microscopio micrométrico se extiende más cada día, debido a su elevada sensibilidad y a la comodidad de su uso. El dibujo que hace de micrómetro puede ser una escala rectilínea o circular, una cuadrícula de mallas cuadradas o rectangulares, un perfil-modelo de tornillo, un perfil-modelo de diente de rueda dentada, etc.

§ 30. Otros métodos. Artificios especiales permiten al físico medir pequeñísimas longitudes, llegando a precisiones, o, por lo menos, a sensibilidades, increíbles, hasta 10^{-8} cm ; esto es, ¡el orden de magnitud de los átomos! Se trata de dispositivos mecánicos (ROHMANN), térmicos (PÉLABON), ópticos (interferómetros y comparadores interferenciales), eléctricos (ultramicrómetro de WIDDINGTON) o electromagnéticos (DEAGLIO), de alguno de los cuales tendremos ocasión de tratar.

(1) Es conveniente poner en guardia al lector para que no confunda el ocular micrométrico que ahora se describe, con el micrómetro ocular antes citado y que se explicó en el § 12, *b*]. — *N. del T.*

§ 31. Áreas. El área, o, menos propiamente, la superficie S, está definida en el caso de un cuadrado, mediante la expresión

$$S = l^2,$$

en donde l es el lado del cuadrado (§ 6, 3º). Para otras figuras, planas o no, con tal de que sean suficientemente regulares, el área S puede suponerse formada por la suma de infinitos cuadraditos infinitesimales de lado dl, y se tiene $S = \int dl^2$.

Por consiguiente, el área es una magnitud física derivada de la longitud, según la ecuación dimensional

$$[S] = [l]^2; \qquad [1]$$

el área «es el cuadrado de una longitud». La unidad coherente de área $[S]$ es el área del cuadrado de lado $[l]$; si $[l]$ se expresa en cm, m, km, ..., $[S]$ resulta ser, respectivamente, cm^2, m^2, km^2, ... (1).

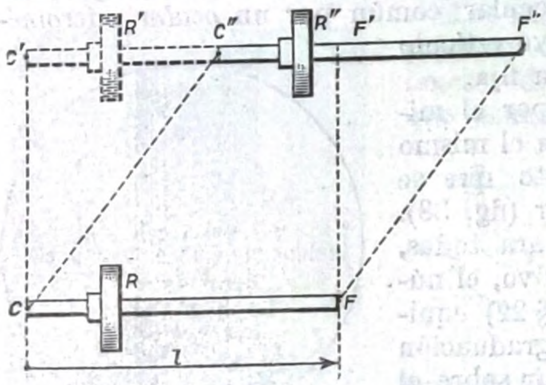


Fig. 39

La medición de las áreas no es muy frecuente en Física. El caso más corriente es el de determinar el área limitada por una curva plana en un diagrama.

Si éste se halla dibujado sobre papel milimetrado, se efectúa sencillamente (aunque el resultado sea sólo aproximado) contando los cuadraditos que contiene la curva cerrada.

No siendo así, conviene emplear un *planímetro*.

Describiremos someramente un *planímetro polar*.

Observemos primero que si CF (fig. 39) es una barra que lleva en R una ruedecita apoyada sobre el plano del dibujo, y la trasladamos en dirección perpendicular a sí misma hasta la posición $C'F'$, la ruedecita R gira un ángulo $\Delta\varphi$ proporcional a la altura CC', y, por tanto, proporcional al área del rectángulo $CFC'F'$ (por ser CF constante). Si la barra se trasladara oblicuamente, sin girar, hasta llegar a $C''F''$, la ruedecita R giraría, por efecto de la sola componente paralela a CC' contenida en el corrimiento oblicuo CC'', porque la componente de éste, paralela a CF, no hace girar, sino sólo deslizar, a la ruedecita R. De modo que en la traslación oblicua CC'' es tam-

(1) cm^2, km^2, ... por costumbre, en la actualidad ya sancionada, en vez de $(cm)^2$, $(km)^2$, ... El *área* (= 100 m^2), la *hectárea* (= 10^4 m^2) no son unidades coherentes.

bién $\Delta\varphi$ el ángulo que gira la ruedecita, proporcional a CC'' y, por tanto, al área ΔS del paralelogramo descrito $CFC''F''$:

$$\Delta S = k \cdot \Delta\varphi. \qquad [2]$$

Es fácil convencerse de que la proporcionalidad entre el área descrita por CF y la rotación $\Delta\varphi$ de R también se cumple siempre que

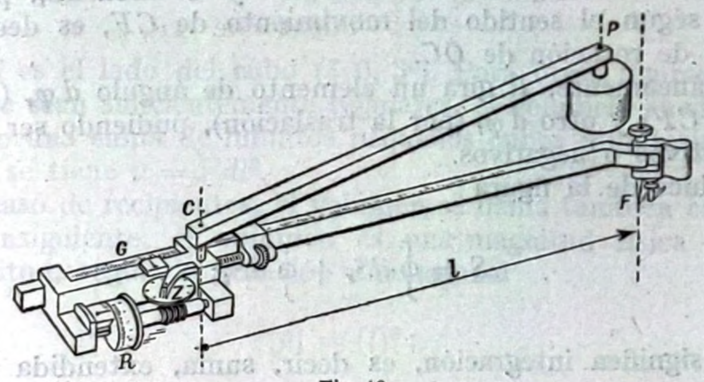


Fig. 40

CF se mueve paralelamente a sí misma, es decir, con movimiento de traslación, aunque la trayectoria CC'' no sea rectilínea. Luego la fórmula [2] sirve en todos los casos, y en ella el valor k depende únicamente de la razón entre el radio de R y la longitud $l = CF$.

El planímetro polar de Amsler consta de dos brazos, PC, CF (figura 40), articulados en C. En el extremo P hay un bloque pesado, prácticamente fijo sobre el dibujo; el brazo PC puede girar alrededor de P. El extremo F lleva una punta con la cual se recorre el perímetro del área S a medir. P debe quedar fuera de esta área. Mientras se recorre el perímetro, la ruedecita R, que está apoyada en el papel del dibujo, gira (y a la vez desliza) ya en sentido directo, ya en sentido inverso. Al terminar el recorrido del perímetro, las graduaciones Z y R darán a conocer la suma algebraica φ de las vueltas y fracciones de vuelta que ha dado R. Este número es proporcional al área buscada: $S = k \cdot \varphi$.

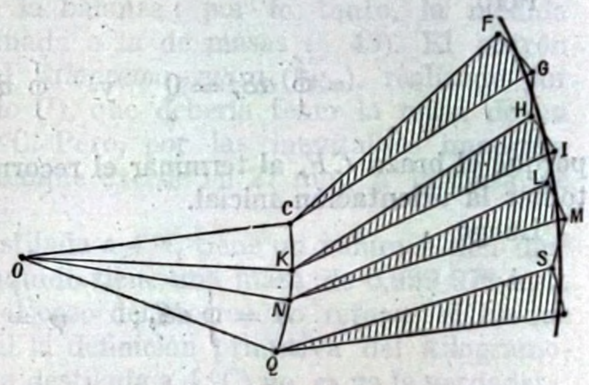


Fig. 41

En efecto, puede suponerse que el perímetro está recorrido por sucesivos trazos elementales (fig. 41) FG, GH, HI, IL, ... com-

puestos alternativamente de rotaciones alrededor de C (o K, o N, ...) y de traslaciones.

Cada uno de los movimientos elementales de rotación hace describir a CF un sector circular infinitésimo de radio $CF = l$ y área dS_r, positiva o negativa, según el sentido de la rotación de CF. Cada movimiento elemental de traslación hace describir a CF un paralelogramo infinitésimo de base CF y de área dS_t, positiva o negativa, según el sentido del movimiento de CF, es decir, según el sentido de rotación de OC.

Simultáneamente, R gira un elemento de ángulo $d\varphi_r$ (por la rotación de CF) y otro $d\varphi_t$ (por la traslación), pudiendo ser estos ángulos positivos o negativos.

Se deduce de la figura :

$$S = \oint dS_r + \oint dS_t; \qquad [3]$$

donde $\oint$ significa integración, es decir, suma, extendida a todo el recorrido del perímetro. Análogamente :

$$\varphi = \oint d\varphi_r + \oint d\varphi_t. \qquad [4]$$

Pero

$$\oint dS_r = 0 \quad \text{y} \quad \oint d\varphi_r = 0, \qquad [5]$$

porque el brazo CF, al terminar el recorrido del perímetro, vuelve a tomar la orientación inicial.

Luego

$$S = \oint dS_t; \qquad \varphi = \oint d\varphi_t.$$

Además,

$$dS_t = k \cdot d\varphi_t. \qquad [6]$$

Luego, por fin,

$$S = \oint dS_t = \oint k \cdot d\varphi_t = k \cdot \oint d\varphi_t = k \cdot \varphi. \qquad [7]$$

La constante de proporcionalidad depende del radio de la ruedecita R y de la longitud l del brazo CF. Se gradúa la longitud del

brazo de modo que k sea un número sencillo ; por ejemplo, 10. Puede efectuarse una comprobación midiendo una área conocida ; por ejemplo, un cuadrado del que se conozca el lado.

§ 32. Volúmenes. Para un cubo, el volumen v está definido por

$$v = l^3, \qquad [1]$$

en donde l es el lado del cubo (§ 6, 3º). Para otras figuras sólidas, con tal que sean suficientemente regulares, el volumen puede imaginarse como una suma de infinitos pequeños cubos infinitesimales de lado dl, y se tiene $v = \int dl^3$.

En el caso de recipientes, el volumen se llama también *capacidad*.

Por consiguiente, el volumen es una magnitud física derivada de la longitud, según la ecuación dimensional

$$[v] = [l]^3 ; \qquad [2]$$

el volumen «es el cubo de una longitud». La unidad coherente de volumen $[v]$ es el volumen de un cubo de lado $[l]$; si $[l]$ se expresa en cm, m, km, ..., $[v]$ viene dado, respectivamente, en cm^3, m^3, km^3, ...

En la práctica y en el terreno legal, se sigue otro procedimiento. Los volúmenes se determinan esencialmente midiendo el empuje de ARQUÍMEDES (§§ 46, 48) con la balanza ; por lo tanto, la medida de volúmenes queda subordinada a la de masas (§ 43). El patrón internacional de masa es el *kilogramo - masa* (kg_m), realizado por un bloque de platino - iridiado (1), que debería tener la masa de un dm^3 de agua destilada a 4 ºC. Pero, por las inevitables imperfecciones de construcción, este bloque excede en 27 mg_m a la masa de dicha cantidad de agua.

Luego, un kg_m de agua destilada a 4 ºC tiene un volumen de 1 dm^3 y 27 mm^3 ; y 1 dm^3 de este líquido tiene una masa de 0,999 973 kg_m.

Se ha decidido (como en el caso del metro) no retocar el bloque patrón defectuoso, con lo cual la definición primitiva del kilogramo-masa (masa de un dm^3 de agua destilada a 4 ºC) no es ya la verdadera, y queda sustituída por la siguiente : *el kilogramo - masa es la masa del patrón internacional.* Luego la unidad de masa sólo adquiere el carácter de unidad fundamental independiente, desligándose de la unidad de longitud (dm).

Dado el frecuente empleo de la balanza de ARQUÍMEDES, pareció más conveniente introducir, como *unidad de volumen, el volumen de la unidad de masa del agua* (destilada, y a 4 ºC). Si la unidad de masa es el kg_m,

(1) El mismo que sirve también como kilogramo - peso (§ 41).

la unidad del volumen que así resulta es el litro : *litro es el volumen de 1 kg_m de agua (destilada, y a 4 °C)*.

Así, la unidad de volumen viene a derivarse de la unidad de masa ; dimensionalmente se tiene

$$[v] = [m] \; ; \qquad [3]$$

el volumen... « es una masa » ; la ecuación básica para la definición del volumen ha de ser $v = m$; la unidad coherente de medida de volúmenes es el kg_m (de agua), unidad llamada « litro ».

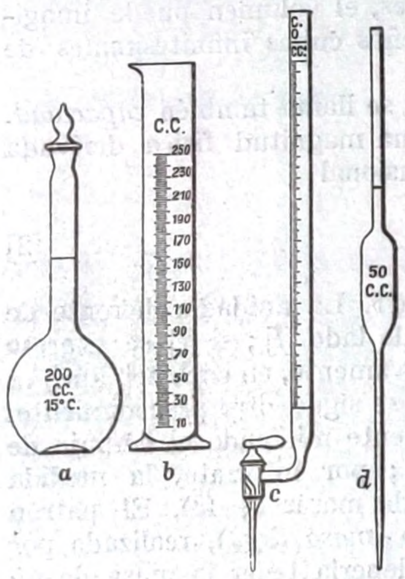


Fig. 42

Éste es uno de los ejemplos más claros del significado convencional de las ecuaciones entre magnitudes y entre unidades ; parece absurdo declarar que el volumen « es una masa », y parece axiomático afirmar que el área « es el cuadrado de una longitud ».

Es un hecho que o bien se acepta el sistema de las ecuaciones básicas [1], § 7, como hacen todos los físicos, y entonces se tiene el litro como unidad de volumen ; o bien la 4ª ecuación de las [1], § 7 se sustituye por las dos ecuaciones siguientes :

$$v = m, \qquad [4]$$

y entonces el litro es la unidad coherente con el kg_m,

$$v = k_v \cdot l^3, \qquad [5]$$

y esta expresión define k_v, constante universal (§ 6,3º) ; es

$$[k_v] = \frac{[v]}{[l^3]} = \frac{[m]}{[l^3]} \; ; \text{ en particular :}$$

$$k_v = 0{,}999\,973 \; \frac{kg_m \text{ (agua)}}{dm^3} = 0{,}999\,973 \; \frac{\text{litro}}{dm^3} \qquad [6]$$

Luego, 1 litro = 1 dm^3 + 27 mm^3.

Solamente cuando sea despreciable un error relativo de 27 en 1 000 000 ($\approx$0,03 ‰) coinciden el litro y el dm^3, y son iguales la masa de 1 kg_m y la de 1 dm^3 de agua. En tal caso, 1 dm^3 ($\approx$ 1 litro) de agua es 1 kg_m ; 1 cm^3 es 1 g_m ; m^3 es 1 tonelada-masa, etc. ; es decir, que si se emplean unidades convenientes para medir la masa y el volumen, el mismo número representa a la vez el volumen, la masa (y también el peso) de una cierta cantidad de agua (1).

La medición corriente del volumen de los líquidos se efectúa con recipientes (fig. 42) graduados como se dirá en el § 48, *a*]. La medición del volumen de los sólidos se averigua por corrimiento de líquido en probetas : el aumento (aparente) del volumen del líquido, al sumergir el sólido, da el volumen de éste.

Estas determinaciones no son muy precisas, pero sí muy cómodas y sencillas.

No es difícil construir patrones de volumen muy exactos que tengan la forma de cilindro recto de base circular.

Pero el caso más común de la determinación exacta del volumen de un cuerpo se encuentra al tener que hallar su densidad, y se reconduce la operación a la determinación de una masa con la balanza (§§ 45 ÷ 47).

Muchas otras veces (compresibilidad de los cuerpos, § 185 ; coeficiente de Poisson, § 190 ; dilatación térmica, § 307 ; etc.) tienen que medirse variaciones de volumen utilizándose en esencia el mismo artificio en que se basa el termómetro de mercurio.

§ 33. Los ángulos y su unidad de medida.

a] **Ángulos planos.** El ángulo plano φ está definido por la ecuación

$$\varphi = k_\varphi \frac{a}{r} \; ; \qquad [1]$$

en donde r es el radio de una circunferencia con centro en el vértice del ángulo, a es el arco de dicha circunferencia comprendido en el ángulo φ ; véanse fig. 2, y [22], § 6, 3.º.

Suele considerarse k_φ como un simple coeficiente numérico, de manera que se tiene :

$$[\varphi] = [l] \cdot [l]^{-1} = [l^0 \, m^0 \, t^0] \; ; \qquad [2]$$

el ángulo es una magnitud sin dimensiones.

Según que se ponga (§ 6, 3º ; [24] ÷ [26]) :

(1) Acaso está madurando la idea de definir como litro el dm^3 exactamente. Será un bien. En efecto : o las medidas son burdas, y la distinción es inútil, o bien se hacen con una precisión superior al 0,03 ‰ arriba indicado, y, en este caso, el cuidado con que ha de operarse y las correcciones que hay que introducir en la medición son tales que hacen resulte tarea fácil el convertir en dm^3 el « volumen de 1 kg_m de agua (destilada, y a 4° C) ».

$$k_\varphi = \frac{360}{2\pi}, \quad = \frac{400}{2\pi}, \quad = 1, \qquad [3]$$

se tienen las siguientes unidades :

1.º El *grado nonagesimal* o *sexagesimal* (º), 90-ava parte del ángulo recto. Está dividido, no decimalmente, en *minutos* y *segundos* ; 60 minutos forman 1 grado sexagesimal ; 60 segundos, forman 1 minuto. El segundo, en cambio, está dividido decimalmente (décimas, centésimas, milésimas, ...).

Existe un intenso movimiento a favor de la « decimalización » del grado sexagesimal, esto es, de la división del grado en décimas, centésimas, ...

2 º El *grado centesimal*, centésima parte del ángulo recto, dividido decimalmente ; a pesar de que ofrecería alguna ventaja (cada grado de latitud valdría entonces, exactamente, 100 km, según la definición originaria del metro), no se ha consolidado mucho, porque las conexiones que existen entre el grado sexagesimal y la unidad de medida de tiempo (hora, minuto) confieren una posición privilegiada al grado sexagesimal.

3.º El *radián* (ángulo que subtiende un arco de longitud igual al radio ; vale 57º 17′ 44,8″ ... = 57,295 779 5 ... º.

En todos aquellos casos en que haya de hacerse uso del cálculo infinitesimal es conveniente medir los ángulos en radianes, para evitar burdos errores.

Por el contrario, las tablas logarítmicas de las funciones trigonométricas catalogan los ángulos en grados sexagesimales, minutos, y segundos. También se han publicado tablas logarítmicas en grados centesimales.

El submúltiplo más notable del radián es el milirradián, llamado simplemente, pero con poca lógica, *milésimo*. Para tal ángulo se tiene

$$a = \frac{1}{1000}\, r ;$$

esto es, el arco abarcado es la milésima parte del radio ; el ángulo de 1 milirradián comprende un arco de 1 mm sobre una circunferencia cuyo radio sea de 1 m, y comprende un arco de 1 m sobre una circunferencia de 1 km de radio, etc.

El milésimo de radián corresponde a 3′ 26,26 ...″.

El ángulo de 1″ es aproximadamente $\frac{1}{200}$ del milirradián ; abarca un arco de $\frac{1}{200}$ de mm en una circunferencia de 1 m de radio ;

y de 0,5 cm en otra de 1 km. Es, pues, un ángulo pequeñísimo.

b] **Ángulos diedros.** El ángulo diedro es el que forman las dos rectas de una sección normal. O también, el ángulo que forman dos normales a las dos caras del diedro. Las dos definiciones coinciden y reducen la medida de un ángulo diedro a la medida de un ángulo plano.

c] **Ángulos sólidos.** Sea un cono de vértice *O* (fig. 43), cuya curva directriz *C*, cerrada, puede tener una forma cualquiera. To-

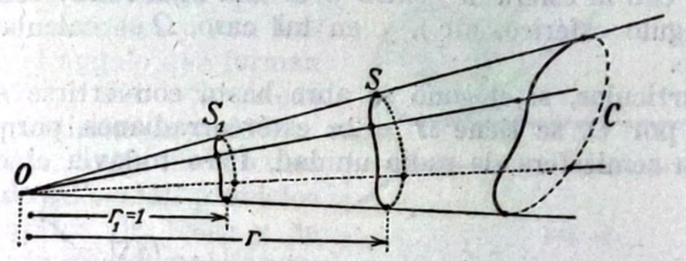


Fig. 43

mando una esfera de centro *O* y de radio *r*, en la superficie de esta esfera intercepta el cono una cierta superficie de área *S*. Se tiene :

$$\frac{S}{r^2} = \text{const. al variar } r.$$

Esta relación constante se da como definición de la medida del *ángulo sólido* considerado, medida que se representa por Ω. Luego,

$$S = \Omega r^2, \qquad [4]$$

que es una ecuación básica que hay que agregar a las [1], § 7. Se tiene :

$$[\Omega] = \frac{[S]}{[l]^2} = [l^o\, m^o\, t^o] ;$$

el ángulo sólido no tiene dimensiones.

Para la coherencia, si *r* está expresado en cm, m, mm, ..., *S* se mide en cm^2, m^2, mm^2, ... respectivamente. El ángulo sólido Ω tiene el valor 1 cuando el área *S* es igual al área de un cuadrado de lado *r* ; ésta es la unidad de medida coherente para los ángulos sólidos, la cual, aunque sin dimensiones, lleva el nombre de *estereorradián*.

En particular, suponiendo, con centro en *O*, una esfera de radio unidad $[l]$, el área $S_1 = S_1.[l]^2$, intersección del cono con dicha es-

fera, y el ángulo sólido Ω, tienen la misma medida; en efecto, la [4] da:

$$S_1 = \Omega, \qquad (r = 1);$$

por ejemplo, si $r = 1$ m, el valor del área S_1 en m^2 es igual al valor de Ω en estéreorradianes.

La medición de Ω sería muy difícil si se tratase de un cono cualquiera, pero en la práctica se trata generalmente de conos cuya intersección con la esfera de centro O es una figura muy sencilla (círculo, rectángulo esférico, etc.), y en tal caso, Ω se calcula a menudo fácilmente.

En particular, si el cono se abre hasta convertirse en un plano que pasa por O, se tiene $\Omega = 2\pi$ estéreorradianes, porque 2π es el área de la semiesfera de radio unidad. Pero todavía el cono puede

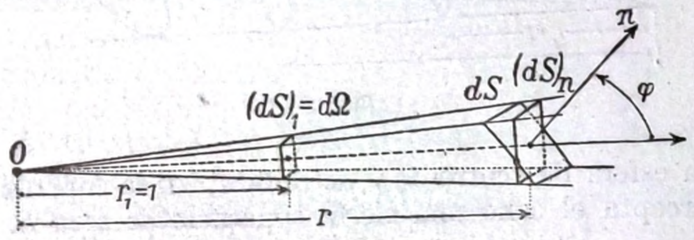


Fig. 44

abrirse más hasta que sea $\Omega > 2\pi$, e incluso ocupar todo el espacio, siendo entonces $\Omega = 4\pi$ estéreorradianes.

Por fin, en un ángulo sólido infinitesimal $d\Omega$ (fig. 44) existen, entre la sección recta $(dS)_n$ y otra sección cualquiera dS, las relaciones:

$$dS = \frac{(dS)_n}{\cos\varphi} = \frac{r^2 \cdot d\Omega}{\cos\varphi}, \qquad [5]$$

siendo φ el ángulo formado por las normales a las dos secciones.

§ 34. Ángulos patrón. Los patrones de ángulos planos más comúnmente usados son los transportadores de dibujo y las escuadras, y no tienen gran interés para el físico, porque sin necesidad de ellos se puede medir un ángulo con la misma precisión mediante la regla, el compás, el metro y las tablas trigonométricas.

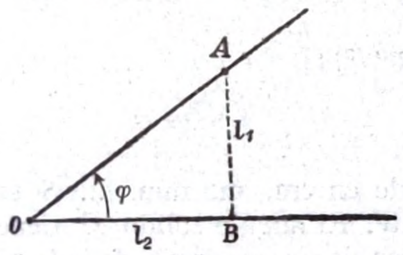


Fig. 45

Así, para medir el ángulo φ (figura 45), desde un punto cualquiera A de uno de los lados, se baja una perpendicular al otro lado, y se miden las longitudes $l_1 = BA$ y $l_2 = OB$. Es sabido que $\operatorname{tg}\varphi = \frac{l_1}{l_2}$,

bastando unas tablas trigonométricas para conocer el valor de φ.

Para ciertos valores de $\frac{l_1}{l_2}$, tales como 1, 1/2, etc., ni siquiera se necesitarán las tablas.

Para los ángulos diedros se construyen patrones técnicos fijos (escuadras, prismas, «paralelas», etc.), y patrones variables graduados. La figura 46 representa uno de estos últimos. En la charnela C está escondida la graduación, que se lee mediante un índice y una lente L, dando el ángulo que forman las caras AA' y BB'. Se puede alcanzar la precisión de $\approx 0{,}1°$.

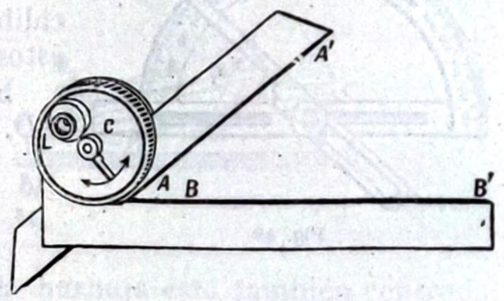


Fig. 46

Finalmente, todos los círculos graduados de que están provistos muchos aparatos de física y de topografía, son patrones de ángulos, como los metros graduados corrientes son patrones de longitud.

Estos círculos graduados se obtienen con una *máquina de dividir círculos* (fig. 47). Está constituída por: un círculo G, en el que se dibujó cuidadosamente con mucho trabajo la graduación patrón; un dispositivo micrométrico, para hacerlo girar en un ángulo determinado, y un castillo análogo al de la máquina de dividir rectas, dotado de un buril B, para trazar, del modo más automático posible, las rayas de la división a realizar. La rotación del círculo G se comprueba por medio de microscopios M. En el centro del círculo graduado patrón hay un robusto eje cónico A, con el que se puede centrar fácilmente, sobre la máquina, el círculo que se ha de dividir.

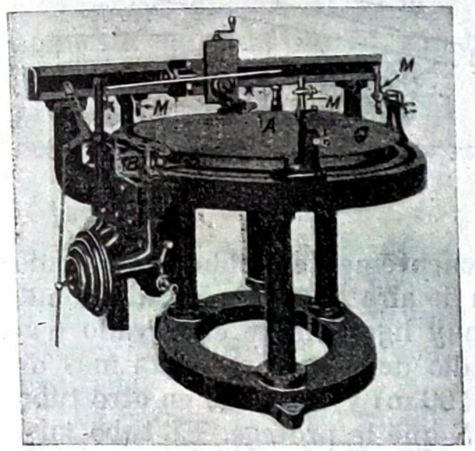


Fig. 47

§ 35. Aparatos para la medición de ángulos. Además del sextante, del que trataremos en el tomo II, recordemos el goniómetro de aplicación, el seno lineal, el nivel, el teodolito y el goniómetro de reflexión.

a] El **goniómetro de aplicación** (fig. 48) sirve para medir ángulos diedros φ entre caras planas (por ejemplo, entre caras cristalinas).

El instrumento es de uso sencillísimo, pero poco preciso.

El aparato de la fig. 46 es también un goniómetro de aplicación.

b] **El seno lineal** (fig. 49) sirve para la medida de ángulos diedros cóncavos, muy agudos.

Está constituído por una lámina de caras planas y paralelas $A\ B$, provista de dos pernios cilíndricos iguales P_1, P_2. Llamaremos l a la distancia entre los ejes de los pernios.

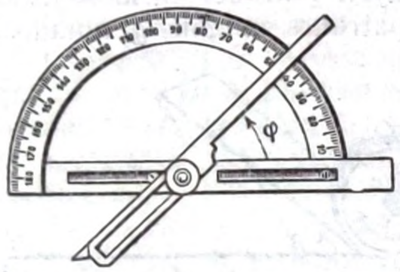


Fig. 48

Esta lámina está apoyada en dos calibres, de alturas conocidas h_1, h_2, y éstos descansan sobre un plano $C\ D$.

El ángulo φ entre las dos caras $A\ B$, $C\ D$, vale, pues,

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{h_2 - h_1}{l}$$

Disponiendo de un seno lineal y de una serie de calibres, se puede construir cualquier ángulo φ, agudo y no muy grande. Para medir un ángulo diedro dado, basta construir por tanteos, con el seno lineal, un ángulo φ que encaje con el diedro que nos ocupa.

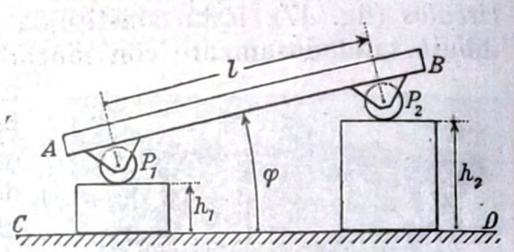


Fig. 49

c] **El nivel** sirve para medir (o, por lo menos, señalar) ángulos, generalmente pequeñísimos, obtenidos por rotación de una recta en un plano vertical.

El nivel de burbuja de aire consta de un tubo de vidrio casi completamente lleno de un líquido muy movible (éter, menos frecuentemente alcohol) y cerrado herméticamente. Queda una burbuja de aire $A\ A$ (fig. 50), de donde le viene su nombre. El tubo está muy ligeramente encorvado (radio de curvatura hasta más de 100 m) y montado en otro tubo S que le protege. El tubo mismo, o la guarda, tienen una graduación G que sirve para establecer la posición de la burbuja de aire, en particular para indicar si está o no *centrada*.

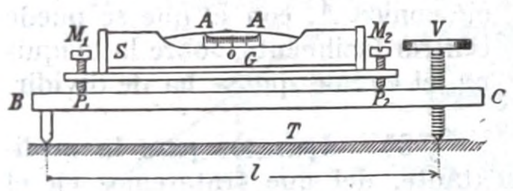


Fig. 50

$M_1\ P_1$ y $M_2\ P_2$ son los *apoyos* del nivel. Mediante éstos se apoya el nivel en una base $B\ C$, a su vez colocada sobre una mesa T. El tornillo micrométrico V permite inclinar la base B según pequeños ángulos φ, que serán conocidos, con mucha aproximación, si se tienen la distancia l y el paso p del tornillo V: para cada giro de V,

el ángulo φ vale $\frac{p}{l}$ radianes. Cada vez que, por medio del tornillo V, se centra la burbuja del nivel, la recta $P_1 \longrightarrow P_2$, determinada por los puntos de apoyo, toma la misma inclinación respecto de la vertical.

Cuando la burbuja está centrada, $P_1 \longrightarrow P_2$ ¿es horizontal?

Para decidirlo, una vez centrada la burbuja [fig. 51, *a*], se gira el nivel en 180°, de modo que los apoyos $M_1\ P_1$, $M_2\ P_2$, resulten permu-

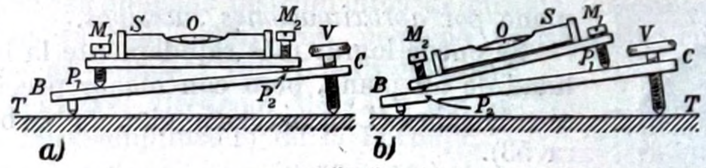


Fig. 51

tados entre sí [figura 51, *b*]. Si la burbuja está también centrada, $P_1 \longrightarrow P_2$ es horizontal; también lo era después del primer centrado de la burbuja.

El nivel está entonces *corregido* y puede servir para establecer la horizontalidad de la recta $B\ C$ en que se apoya.

Pero, en general, al girar en 180° el nivel, deja de estar centrada la burbuja.

Los dos apoyos M_1P_1 y M_2P_2 no son ignales, y cuando la burbuja está centrada [fig. 51, *a*)], la recta $P_1 \longrightarrow P_2$ no es horizontal: se ha compensado la mayor altura de M_1P_1 con una inclinación de la base BC.

Invertido el nivel, el apoyo corto viene precisamente a colocarse en la parte baja de la base BC; $P_1 \longrightarrow P_2$ no vuelve a tomar la inclinación primitiva, y la burbuja no queda centrada.

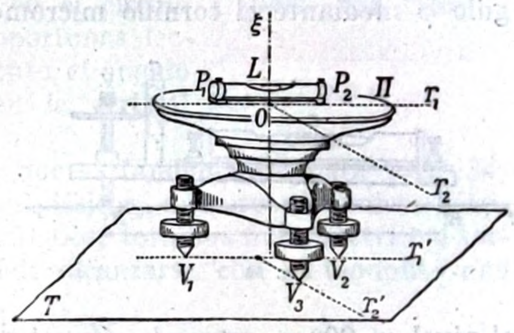


Fig. 52

Se corrige el nivel modificando la longitud de los apoyos M_1P_1 y M_2P_2, que por esto se han representado en la figura por dos tornillos. Es prudente comprobar la exactitud del nivel cada vez que se utiliza.

Disponiendo de un nivel corregido, se puede:

1.° Poner horizontal un plano Π montado en un trípode, provisto de tornillos niveladores V_1, V_2, V_3, (fig. 52), y apoyado sobre un tablero T.

Para ello se pone el nivel en la dirección de la recta r_1, paralela a la recta $V_1\ V_2$, y, girando en sentido inverso V_1 y V_2, se centra

la burbuja. La recta r_1 es, pues, horizontal. Se pone después el nivel en la dirección r_2, normal a r_1, y se actúa sólo sobre el tornillo V_3 para centrar la burbuja : r_2 queda horizontal. Siendo horizontales r_1 y r_2, lo será cualquiera otra recta del plano Π : luego, el plano es horizontal, y su normal, vertical.

Como las rectas r_1 y r_2 se han escogido a ojo, la segunda operación perturba un poco la horizontalidad ya alcanzada para r_1. Conviene repetir la operación. Se logra la horizontalidad del plano *por aproximaciones sucesivas*.

Fig. 53

Se puede lograr más rápidamente la horizontalidad de un plano, pero con menor precisión, poniendo sobre él un nivel circular de burbuja (figura 53).

2.º Poner vertical un eje de rotación ξ montado con tres tornillos niveladores (fig. 30).

Es la operación fundamental para instalar el catetómetro, y los teodolitos, taquímetros y niveles.

Un nivel L (fig. 30), unido al eje, gira con éste. Al principiar, el eje ya está próximo a la vertical, y el nivel es casi horizontal.

Girando el eje, se coloca L paralelo a $V_1 V_2$, y se centra la burbuja, girando V_1 y V_2 en sentido inverso ; se gira el eje en 180º y se centra de nuevo la burbuja, mitad girando en sentido inverso los tornillos V_1, V_2, y mitad inclinando L, es decir, modificando el ángulo φ mediante el tornillo micrométrico del nivel. Se gira después

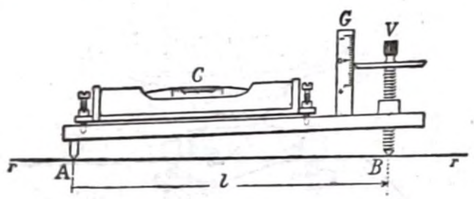


Fig. 54

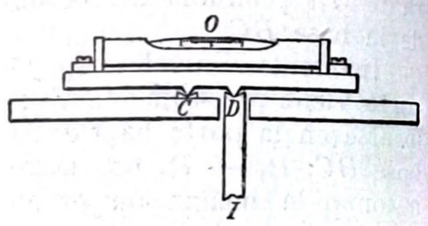


Fig. 55

el nivel en 90º y, *actuando sólo sobre el tornillo* V_3, se centra la burbuja. También ahora se logra la verticalidad del eje por aproximaciones sucesivas, repitiendo en el mismo orden las tres operaciones indicadas.

3.º Medir el ángulo de inclinación con respecto a la horizontal.

El tornillo micrométrico V (fig. 54), completamente análogo al de un esferómetro, está graduado directamente en ángulos, y señala cero cuando el instrumento se apoya sobre un plano horizontal y el nivel está centrado. Apoyando el nivel sobre la recta *rr*, cuya inclinación desea conocerse, se gira V hasta centrar la burbuja, y se lee el ángulo de inclinación en la escala.

El nivel es el *indicador* del momento bueno para la lectura.

Como se ve claramente en este caso, el nivel es, en esencia, un aparato *de cero* extraordinariamente sensible, capaz de apreciar inclinaciones menores de $1'' \left(= \frac{1}{3600}{}^{0}\right)$. Gracias a esta alta sensibilidad, se le emplea para nivelaciones de precisión. Es una parte fundamental de los aparatos astronómicos ; constituye un artificio amplificador en muchos instrumentos de medida (esferómetros, extensómetros [§ 190], etc.) : un pequeño corrimiento en sentido vertical de un índice I (fig. 55) origina una rotación del nivel alrededor de C, y un corrimiento muy amplificado de la burbuja.

d] El **teodolito universal** (fig. 56) tiene dos círculos graduados : uno horizontal y otro vertical. Un anteojo con retículo determina la línea de mira. La montura del anteojo puede girar alrededor de un eje vertical ξ, leyéndose los ángulos de giro en el círculo horizontal *(acimutal)*. Mide éste ángulos diedros formados por planos que pasan por el eje ξ del instrumento *(ángulos acimutales)*.

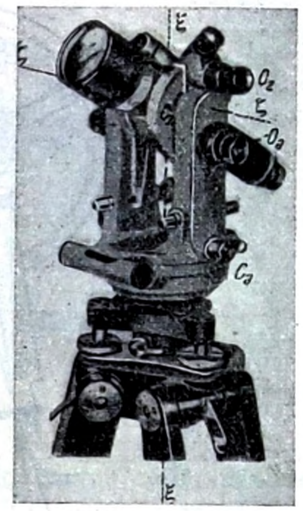


Fig. 56

El anteojo, junto con el círculo vertical, puede girar alrededor de un eje horizontal $\zeta\zeta$, y se leen los ángulos de giro en el círculo vertical *(cenital)* ; efectuando oportunas lecturas conjugadas, da el instrumento el ángulo que forma la línea de mira con la vertical del lugar *(ángulo cenital)*.

Completan este instrumento, que es fundamental para todas las operaciones de levantamientos geodésicos, microscopios micrométricos para las lecturas sobre los círculos, tornillos micrométricos, tornillos niveladores, y nivel ; puede alcanzarse con el teodolito una precisión de $1'' \div 2'' \left(\approx \frac{1}{3000}{}^{0}\right)$.

Observemos que los círculos graduados están siempre provistos de dos microscopios micrométricos diametralmente opuestos (y a veces de cuatro, distando 90º uno de otro). La « lectura » que se toma es la media de las dos lecturas de los microscopios opuestos, con el fin de eliminar el *error de excentricidad* de la graduación, debido a que el centro de la graduación no está situado exactamente en el eje de rotación.

Los mejores teodolitos son *repetidores*, es decir, permiten hacer girar por fricción el círculo graduado, con el fin de repetir la medida del ángulo utilizando otra parte de la escala.

Tomando la media de las diversas lecturas así efectuadas, se eliminan las eventuales imperfecciones del círculo graduado.

e] El **goniómetro de reflexión** (figs. 57 y 58) sirve para medir el ángulo diedro que forman dos caras planas reflectantes (caras de un prisma, caras de un cristal).

Una plataforma horizontal P (fig. 57), que puede girar alrededor del eje O, perpendicular al plano de la figura, lleva un índice I que

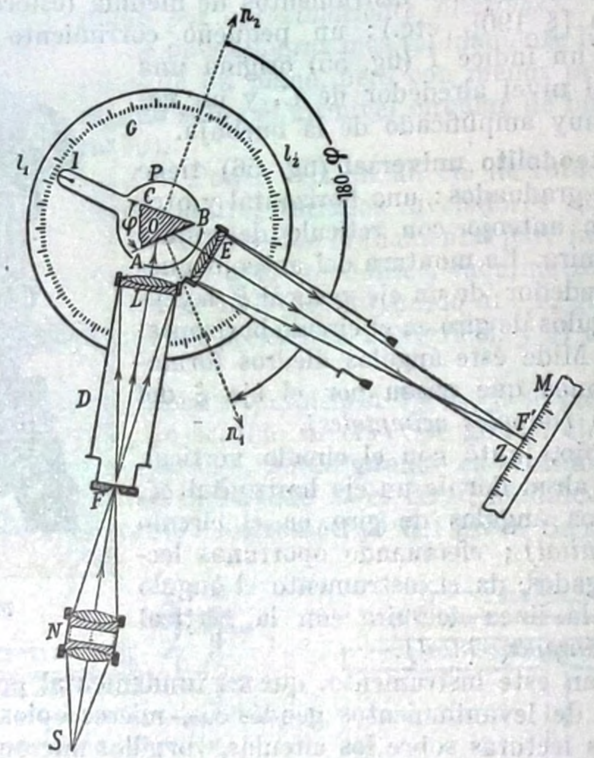


Fig. 57

recorre un círculo graduado G. En realidad (fig. 58), hay dos índices (nonios o micrómetros oculares) diametralmente opuestos, como en los teodolitos, para eliminar el error de excentricidad.

Se monta encima de la plataforma P (fig. 57) el cuerpo cuyas dos caras $A\,B$, $C\,B$, forman el ángulo diedro φ que ha de medirse. La arista B del diedro debe ser paralela al eje de rotación $O\,\xi\,\xi$; F es una rendija fuertemente iluminada, por ejemplo, haciendo converger sobre ella los rayos del manantial de luz S mediante el condensador N. La rendija se halla en el plano focal de la lente u objetivo L, de modo que los rayos luminosos que entran por la rendija salen paralelos al abandonar el *colimador* D. Después de reflejarse estos

rayos en la cara $A\,B$, atraviesan el objetivo E, obteniéndose sobre la pantalla M, colocada en el plano focal posterior del objetivo E, una imagen nítida F' de la rendija F. En la pantalla hay una escala cuyo cero supondremos que se halla en Z. Si se gira P, y por tanto el prisma $A\,B\,C$, el haz reflejado recogido por E también gira, y la imagen de la rendija recorre la escala.

Cuando la imagen F' cae en Z, se efectúa la lectura l_1, que el índice I señala en el limbo G.

Después se gira P hasta que la cara $C\,B$ sustituya a la $A\,B$, es decir, hasta que la normal n_2 sustituya a la n_1. Esto es sencillo,

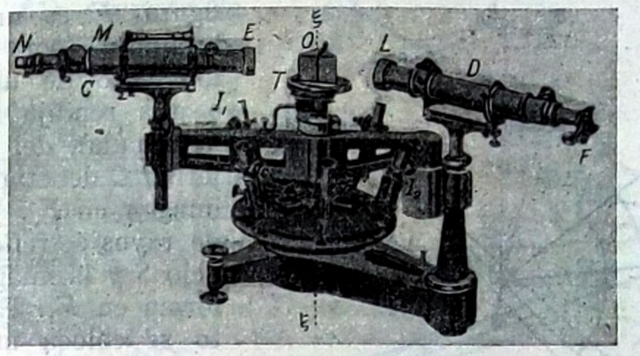


Fig. 58

porque entonces la imagen F', formada por los rayos reflejados en la cara $C\,B$, vuelve a caer en Z.

Se efectúa una segunda lectura l_2 con el índice I en G para esta nueva posición de la plataforma P; la diferencia $l_2 - l_1$ mide el ángulo entre las normales n_1 y n_2, que es el suplemento $180^\circ - \varphi$ del ángulo φ buscado.

En la práctica, el haz de rayos que sale del colimador va a un anteojo $E\,N$ provisto de retículo (fig. 58) enfocado al infinito, que sirve para la observación nítida de la imagen de la hendidura F, formada en el infinito por la lente L; esta imagen gira en el campo del anteojo al girar la cara reflectante, y debe llevarse a coincidir con el hilo vertical del retículo. El eje óptico del anteojo ha de ser perpendicular al eje O. Prescindimos de los detalles de construcción (tornillos micrométricos, tornillo de paro, etc.), y del procedimiento para lograr que la arista B y el eje óptico del anteojo tomen las direcciones debidas.

En los mejores goniómetros de reflexión puede alcanzarse una precisión de $\approx 2''$ $\left(\approx \frac{1}{2000}{}^\circ\right)$.

§ 36. Palanca óptica. Se miden pequeños giros de una superficie especular mediante la rotación de un rayo luminoso reflejado en ella. En efecto, se trata del mismo principio del goniómetro de reflexión. El haz de rayos, que forma la imagen de un manantial luminoso, encuentra en su camino al espejo giratorio, y se refleja en él. Las dos maneras citadas de recoger la imagen sobre una pantalla M y de observarla con un anteojo, corresponden en esencia, respectivamente, al método de Lord Kelvin y al de Poggendorff.

a] **Método de Lord Kelvin.** Un espejo S (fig. 59) puede girar alrededor del eje O, perpendicular al plano de la figura. F es un manantial luminoso (por ejemplo, el filamento de una lámpara o una rendija fuertemente iluminada), del cual el objetivo C debería formar una imagen en F'. Pero el haz de rayos se refleja en el espejo S y la imagen de F se forma en F_1. En este punto se coloca una pantalla graduada G.

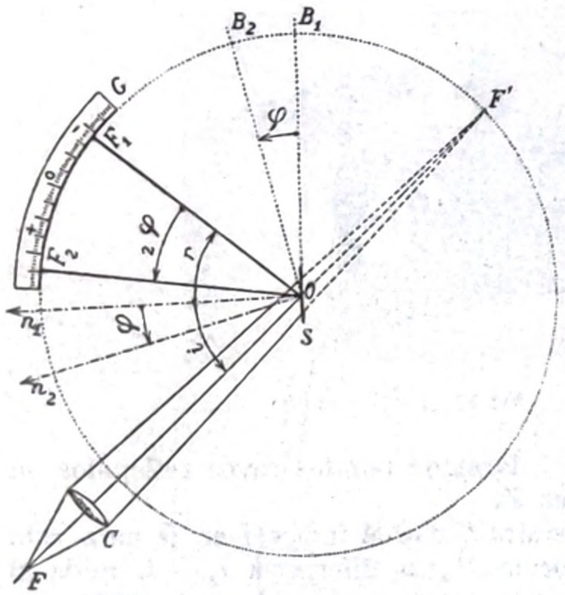


Fig. 59

Se deduce de las leyes de la reflexión que F_1 es simétrico de F' con respecto al plano OB_1 del espejo.

Si el espejo S gira un ángulo φ alrededor de O, la imagen F_1 se corre, describiendo un arco de radio $O\,F' = O\,F_1$.

En efecto, se tiene:

$$O\,F' = O\,F_1 = O\,F_2 = \text{const.}$$

Además,

$$\widehat{F'OB_1} = \widehat{B_1OF_1}\,; \quad \widehat{F'OB_2} = \widehat{B_2OF_2}\,; \quad \widehat{B_1OB_2} = \varphi\,;$$

luego,

$$\widehat{F'OB_2} = \widehat{F'OB_1} + \varphi$$

y

$$\widehat{F_1OF_2} = 2\varphi\,.$$

La imagen se ha corrido sobre la escala G porque el «rayo» OF_1 ha girado 2φ. Se suele decir que la imagen gira un ángulo 2φ.

El dispositivo se compone de un pequeño proyector FC (fig. 60), que contiene el manantial luminoso y el objetivo C, y de una escala, ambos montados en un mismo soporte; debe operarse en la oscuridad o en un local poco iluminado.

Puede servir el mismo espejo S, si es cóncavo, para formar la imagen de F; en tal caso no se necesita el objetivo C.

b] **Método de Poggendorff, de anteojo y escala.** El haz reflejado, en lugar de ir a la pantalla, es recogido por un anteojo C (fig. 61), provisto de retículo, y con el tiraje apropiado para la observación del manantial de luz.

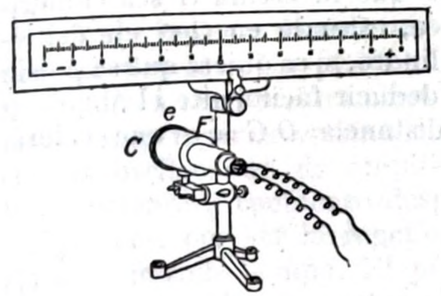


Fig. 60

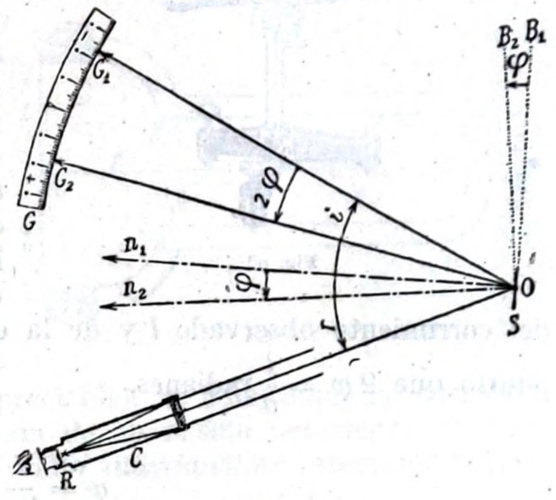


Fig. 61

Este manantial está ahora constituído por una escala G fuertemente iluminada. Al girar el espejo, cambia el trazo de la graduación G que aparece en coincidencia con el retículo del anteojo de observación. Por el principio de la inversión del camino óptico (véase tomo II) se puede establecer el cambio de lectura en la escala, imaginando que el retículo R sea luminoso y que envíe rayos a través del objetivo del anteojo hacia el espejo S; entonces se formaría en la pantalla G la imagen del retículo en el mismo sitio de la escala en que parece coincidir con la cruz del hilo del retículo cuando se mira por el anteojo. Así, el problema óptico es idéntico al del método de Lord Kelvin: un giro φ del espejo S produce una rotación (aparente) de la escala, alrededor de O, de un ángulo 2φ. Generalmente, van unidos en un mismo soporte el anteojo y la escala, como se indica en la figura 62.

Este método es tal vez un poco más sensible que el de Lord Kelvin por la perfección que puede lograrse en el anteojo y especialmente en el retículo; pero es un método *subjetivo*, es decir, adaptado para la observación por parte de una sola persona, mientras que el

método de LORD KELVIN es *objetivo*, en el sentido de que la imagen de F (fig. 59), proyectada en la escala G, puede ser observada por un grupo de personas.

A este último método se puede adaptar fácilmente un dispositivo de registro fotográfico: la rendija F se ha de substituir por un simple diafragma que lleva un pequeño agujero fuertemente iluminado, y la pantalla G ha de ser una hoja de papel fotográfico que se desenvuelve moviéndose uniformemente en dirección perpendicular al plano de la figura 59.

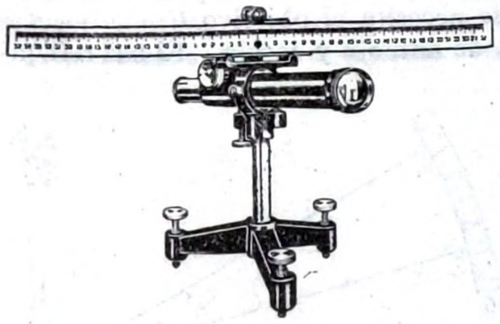


Fig. 62

En los dos métodos conviene que i sea pequeño. Además, es menester que φ sea pequeño o que la escala G sea cilíndrica, estando en O el eje del cilindro, si se quiere que se pueda deducir fácilmente el ángulo φ del corrimiento observado l y de la distancia $O\,G = a$ que valdrá, puesto que $2\,\varphi = \frac{l}{a}$ radianes,

$$\varphi = \frac{l}{2\,a} \qquad [1]$$

La sensibilidad de uno u otro método es:

$$\varepsilon = \frac{\Delta\, l}{2\,a};$$

en donde $\Delta\, l$ es el menor corrimiento que puede observarse en la escala G.

Se puede llegar a la sensibilidad de $\approx 1''$ $\left(\approx \frac{1}{3600}{}^{0}\right)$ gracias a la rigidez (¡unida a la falta de inercia!) del índice óptico, constituído por el hacecillo luminoso que se utiliza, a la feliz circunstancia de duplicarse el ángulo de giro en virtud de la ley de reflexión, y a la posibilidad de utilizar valores notables de $O\,G = a$, que funciona como brazo de palanca, de donde viene el nombre de *palanca óptica* que se da al dispositivo. No conviene, sin embargo, que a pase de algunos metros, porque entonces lo que se gana en a se pierde en $\Delta\, l$, o sea en la sensibilidad de la lectura sobre la escala.

La precisión en la medición de φ no es tan buena, por lo que se prefiere utilizar este dispositivo como *método de cero*, apto para indicar si gira o no el espejo, *compensando* la eventual rotación del espejo S.

Las ventajas del método de la palanca óptica pueden utilizarse también para señalar pequeñísimos movimientos de traslación. En la figura 63 se indica uno de los muchos dispositivos imaginados, muy empleado para estudiar micromovimientos de una membrana elástica L, como sucede en los manómetros, en los reproductores gramofónicos, en los teléfonos, etc.

La deformación de la lámina L produce, gracias al hilo f arrollado en el delgado cilindro $B\,C$ y al resorte de restitución M, una rotación del cilindro $B\,C$, y, por tanto, del espejito S unido al cilindro; esta rotación se mide por uno de los dos métodos descritos.

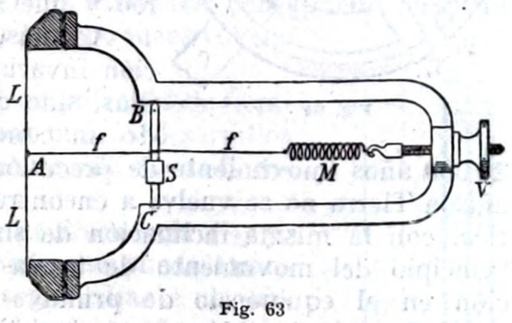


Fig. 63

§ **37. Medición de un intervalo de tiempo.** Un péndulo, mantenido a temperatura constante, en un lugar determinado, efectúa oscilaciones de amplitud constante (rozamiento despreciable). Se admite que las sucesivas oscilaciones, por ser la repetición de un mismo fenómeno, emplean todas el mismo tiempo. El péndulo individualiza intervalos sucesivos de tiempo iguales entre sí.

Un intervalo de tiempo está fijado por sus dos instantes extremos, realizados, por ejemplo, con un destello de luz, de tan breve duración que el péndulo que oscila aparezca prácticamente en reposo. Se puede así establecer el número de períodos de oscilación contenidos en un intervalo dado de tiempo.

Se pueden así definir, por lo menos *en un mismo lugar*, intervalos de tiempo iguales, uno doble que otro, etc.

De este modo se ha podido establecer que es constante el intervalo de tiempo transcurrido entre dos pasos sucesivos de una misma estrella fija (cualquiera que sea) por el meridiano de un lugar determinado. Este intervalo de tiempo constante se llama *día sidéreo*, y para los astrónomos es una unidad natural de tiempo muy conveniente.

Esta unidad se subdivide en veinticuatro horas sidéreas, cada una de las cuales comprende sesenta minutos sidéreos, subdivididos a su vez en sesenta segundos sidéreos.

Un año sidéreo, o sea el tiempo necesario para que se cumpla una vuelta de la Tierra alrededor del Sol, de modo que el Sol vuelva a coincidir con el mismo punto (estrella) de la eclíptica, está formado por 366,256... días sidéreos.

Para la vida práctica, conviene emplear como unidad de tiempo el día solar, o sea el intervalo de tiempo transcurrido entre dos pasos sucesivos del Sol por el meridiano.

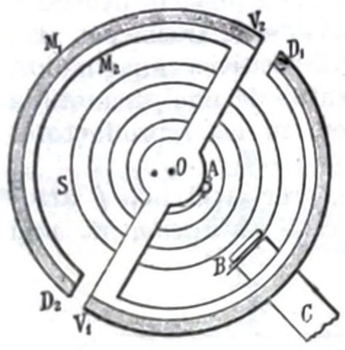


Fig. 64

Pero la Tierra da vueltas alrededor del Sol en el mismo sentido con que gira alrededor de su eje. Un año sidéreo contiene solamente 365,256... días solares. Y este movimiento de traslación no es rigurosamente circular ni uniforme, resultando que el día solar es más largo que el día sidéreo y que no es constante.

Además, el eje polar no tiene una dirección invariable con respecto a las estrellas fijas, sino que gira lentamente, describiendo un cono de abertura igual a 23°,5 en 26 000 años (movimiento de precesión). Por lo tanto, al cabo de un año la Tierra no se vuelve a encontrar, al término de su órbita elíptica, con la misma inclinación de su eje. Si se conviene en fijar el principio del movimiento de traslación en el equinoccio de primavera, el fin del año sidéreo no coincide con el equinoccio siguiente, sino que ocurre unos 20^{min} más tarde. El *año trópico*, que es el intervalo entre dos equinoccios de primavera sucesivos, es más corto que el año sidéreo en $20^{\text{min}} \approx 0{,}014$ días solares, siendo el único socialmente interesante.

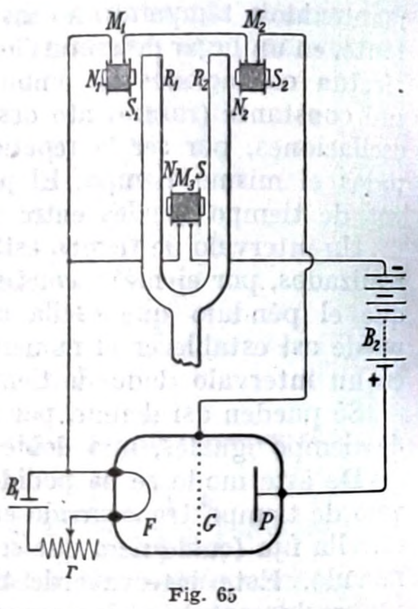


Fig. 65

Se puede suponer que el año trópico es prácticamente constante, y contiene, pues, 365,242... días solares, no todos igualmente largos.

Se define el *día solar medio* como la fracción $\frac{1}{365{,}242\,201...}$ del año trópico. El día solar medio, que es el día corriente, se divide en 24 horas solares medias; cada una de éstas, en sesenta minutos solares medios, y el minuto se divide en 60 *segundos solares medios* (seg).

Luego, se tiene:

1 día solar medio = 86 400 segundos solares medios = = (1 día + 3 minutos + 56,555..... segundos) sidéreos;

1 día sidéreo = 86 400 segundos sidéreos = 86 164,091... segundos solares medios.

§ 38. Unidad y patrones de tiempo. El *segundo solar medio* (seg) es la unidad de medida del tiempo adoptada en Física.

Un péndulo que efectúa 86 164,091 oscilaciones *simples* en un día sidéreo, *bate segundos*, y realiza un patrón de tiempo.

El *balancín* (fig. 64) de los cronómetros y de los relojes de bolsillo está constituído por un pequeño volante V_1 V_2, al que un delicado resorte en espiral S impone una posición de equilibrio estable. Alrededor de esta posición, el balancín oscila con un período característico, que depende del momento de inercia del balancín (§ 157) y de la elasticidad del resorte, pero que es prácticamente independiente de la amplitud de oscilación. Este balancín puede sustituir al péndulo como patrón de intervalos sucesivos de tiempo iguales entre sí.

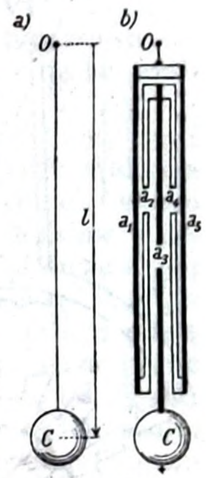


Fig. 66

Se ha agudizado la necesidad de patrones de tiempos muy pequeños, a causa de los nuevos desarrollos de la acústica y, más especialmente, de las radiocomunicaciones.

Se puede obtener un patrón de frecuencia (1), y, por tanto, de intervalo de tiempo, que puede alcanzar hasta poco menos de 0,001 seg, mediante un diapasón entretenido electromagnéticamente (figura 65), con sus dos ramas R_1, R_2, en un mismo plano horizontal, a fin de que las variaciones de la gravedad no influyan en su período de vibración. Los cuarzos piezoeléctricos (§ 264, 2.°; y tomo II) y los más recientes osciladores de magnetostricción (véase tomo II) son patrones de frecuencias mucho más elevadas: su período de vibración desciende hasta unos 10^{-7} seg.

Todos estos patrones de tiempo dependen de la temperatura. Para eliminar este inconveniente, los péndulos y los balancines son *compensados*. Al aumentar la temperatura, se alarga el péndulo y aumenta su período de oscilación. En el dispositivo de compensación más corriente [fig. 66, *b*)], el aumento de temperatura alarga

(1) La *frecuencia* es inversa del período: un diapasón con período $T = \frac{1}{200}$ segundos (para la vibración completa) tiene la frecuencia 200 por segundo; y adoptando la unidad *hertz*, en honor del físico Hertz, se dirá que tal diapasón tiene una frecuencia de 200 hertz.

El dispositivo de la figura 65 puede entretener electromagnéticamente las vibraciones del diapasón, sin contactos mecánicos. Las vibraciones de las ramas R_1, R_2, inducen en las bobinas M_1, M_2, con imanes N_1 S_1, N_2 S_2, por núcleo *(electroimanes polarizados)*, una pequeña diferencia de potencial alterna que actúa sobre el *filamento* F y la *rejilla* G de una válvula termoeléctrica de 3 electrodos *(triodo)*; resulta una notable variación alterna en la *corriente de placa* recogida por la placa P y que fluye en el circuito P B_2 M_3 F, por lo cual el electroimán M_3, también polarizado, atrae en *fase* oportuna (§§ 56, *c*] ; 62, *a*]) las ramas del diapasón, impidiendo el amortiguamiento. La energía de vibración disipada por las resistencias pasivas se restituye continuamente a las ramas por medio de la pila B_2, mediante la acción del electroimán M_3.

las cinco varillas a_1, a_2, a_3, a_4, a_5; pero el alargamiento de las varillas impares tiende a alargar el péndulo, mientras que el de los pares tiende a acortarlo; por elección adecuada de la naturaleza de los metales de que están construídas las varillas impares y pares, respectivamente, y calculando su longitud, el período de oscilación del péndulo puede permanecer constante con independencia de la temperatura.

En los balancines, los arcos $D_1\ V_1$ y $D_2\ V_2$ del volante (fig. 64) son bimetálicos, quedando del lado externo el metal más dilatable.

Así, el aumento de temperatura alarga los brazos $O\ V_1$, $O\ V_2$, pero encorva los arcos $V_1\ D_1$ y $V_2\ D_2$. Además, la fuerza elástica del resorte S disminuye al aumentar la temperatura.

Se logra así, al aumentar la temperatura, disminuir el momento de inercia del volante en la misma proporción que el momento de la fuerza elástica del resorte S, con lo cual el período de oscilación permanece sensiblemente constante (§ 162).

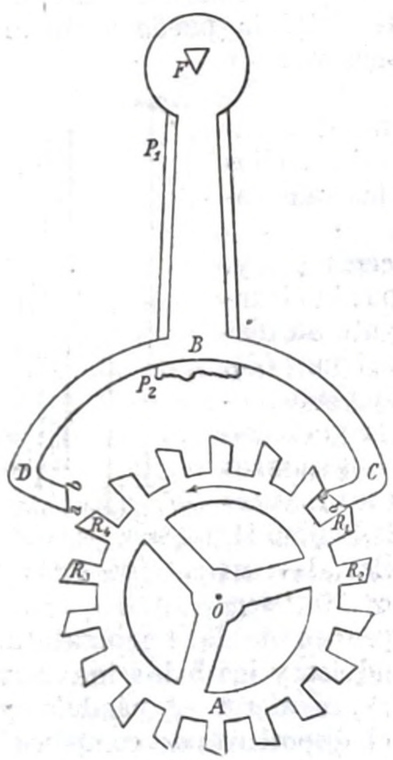


Fig. 67

Actualmente se construyen péndulos y balancines de invar (§ 308).

En los relojes de balancín se puede así mantener prácticamente constante el momento de inercia, aunque varíe la temperatura; pero en los aceros ordinarios, como se ha dicho, al aumentar la temperatura disminuye la fuerza elástica del resorte que produce las oscilaciones: el reloj atrasa. Se elimina este inconveniente construyendo el muelle del balancín de *elinvar*.

Este material (GUILLAUME) es una aleación ternaria análoga al invar, y como ésta, de dilatación casi nula; además de hierro y níquel, lleva un tercer componente (por ejemplo, cromo al 12 %). Las propiedades elásticas de esta aleación son prácticamente independientes de la temperatura, y de aquí su nombre. El elinvar es, pues, particularmente adecuado para la construcción de diapasones destinados a servir como patrones de frecuencia.

§ 39. Relojes. Como en el diapasón, en el péndulo y en el balancín las oscilaciones han de ser *entretenidas* para que conserven la misma amplitud, a pesar de los rozamientos, que son inevitables;

se necesita, pues, un artificio que suministre periódicamente al sistema oscilante los impulsos necesarios para mantener constante la amplitud de oscilación, sin influir sobre el período.

Facilita la resolución de este problema el hecho de que las pequeñas oscilaciones pendulares o elásticas son isócronas; es decir, su período es independiente de la amplitud, cuando ésta varía a causa de un débil amortiguamiento.

Se necesita, además, un artificio destinado a contar automáticamente las oscilaciones.

El péndulo, patrón de tiempo, se transforma así en un *reloj* de péndulo; el balancín se convierte en *reloj* de balancín. Recientemente se han construído relojes de diapasón.

El escape es el mecanismo que permite contar el número de oscilaciones y entretener su amplitud constante, a pesar de los rozamientos.

Los dos tipos fundamentales de escape son:

a] **Escape de áncora** (fig. 67). El péndulo $P_1\ P_2$ oscila alrededor de la cuchilla F y lleva el áncora $B\ C\ D$ que oscila con él. Cuando el péndulo se encuentra en la posición de elongación máxima y comienza una oscilación, una de las dos puntas C, D, del áncora (por ejemplo, C) se encuentra inserta entre dos de los dientes R_1, R_2... de la rueda de escape A, e impide el movimiento que ésta tiende a efectuar, en el sentido de la flecha, bajo la acción de la fuerza motriz (muelle o peso); la otra punta D está ahora separada de los dientes de A. Durante la semioscilación del péndulo, y por tanto del áncora, la punta C se separa de la rueda de escape, y ésta, empujando con el diente R_1 contra el plano inclinado $a\,b$, da un impulso al áncora y, por lo tanto, al péndulo. Pero en seguida la punta D se inserta entre dos de los dientes R_3, R_4...; la rueda de escape no puede adelantar más que la mitad del paso que lleva un diente al lugar del sucesivo.

En la semioscilación siguiente se invierte la función de las puntas C, D.

Si la rueda tiene, por ejemplo, treinta dientes, y el péndulo bate segundos en cada semioscilación, una vuelta de la rueda da el minuto. Mediante un juego conveniente de engranajes movido por la rueda de escape, se obtienen ruedas que dan una vuelta en una hora, en doce horas, etc. La rueda de escape permite, pues, contar las oscilaciones y eliminar la acción amortiguadora de los rozamientos.

b] **Escape de cilindro.** Un tubo cilíndrico $B\ C\ D$ (fig. 68), perpendicular al plano de la figura, y al que le falta el sector $B\ D$, oscila alrededor de su eje O, que es el mismo eje del balancín. La rueda dentada A, cuyos dientes tienen la forma especial que indica la figura, pasa diente por diente a través del cilindro; los bordes de cada diente empujan sucesivamente, en cada oscilación del balancín,

las aristas B, D, del cilindro, y dan el impulso necesario para suplir el amortiguamiento. También ahora en cada semioscilación avanza la rueda de escape un intervalo igual a la mitad del que va de un diente al sucesivo.

El escape de áncora funciona cuando el áncora ejecuta una oscilación de pocos grados, por lo cual se aplica directamente al péndulo; el escape de cilindro funciona cuando el cilindro $B\,C\,D$ ejecuta una oscilación de amplitud muy grande (por ejemplo, 120°), y, por tanto, se aplica directamente a los balancines.

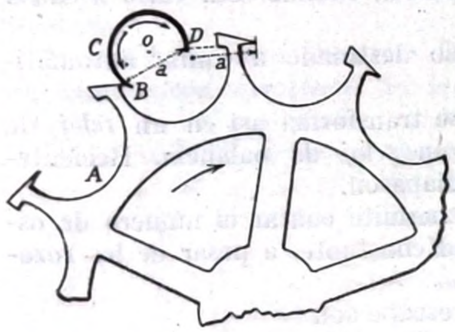


Fig. 68

Pero actualmente es muy común aplicar a estos últimos un escape de áncora (fig. 69); pues la forma especial del áncora $A\,C$ permite, mediante la acción del saliente P sobre el extremo del áncora, que las oscilaciones muy amplias del balancín se transformen en otras mucho menos amplias del áncora.

Los *cuentasegundos* son unos relojes provistos de una manecilla grande (análoga a la ordinaria de los minutos) que recorre toda la vuelta de la esfera en 60 seg; se lee en la esfera hasta $\frac{1}{5}$ de seg; la manecilla anda por saltos, correspondientes a $\frac{1}{5}$ de seg, por ser éste el semiperíodo de la oscilación del balancin.

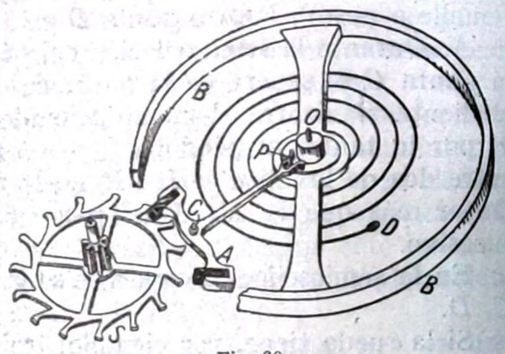


Fig. 69

El observador aprieta un pequeño botón al iniciarse el fenómeno cuya duración se ha de medir, con lo cual se pone en movimiento la manecilla; una nueva presión, al terminar el fenómeno, para la manecilla. Se leen así intervalos de tiempo, que pueden ser largos, con un error menor de $\frac{2}{5}$ de seg.

Actualmente se construyen cuentasegundos en los que el semiperíodo del sistema oscilante vale $\frac{1}{100}$ de seg, y la manecilla gira rápidamente (por ejemplo, una vuelta en dos segundos), pudiendo leerse directamente sobre la esfera 0,01 de segundo.

Pero tal sensibilidad es ilusoria si se maneja el cuentasegundos con la mano del observador.

Un buen reloj de péndulo y un buen cronómetro de balancín sólo varían al día en 0,1 seg y aun menos, es decir, que varían únicamente en un 0,001 ‰, o sea en 1 en 10^6; pero los segundos no son todos iguales entre sí, sino que unos son más largos y otros más cortos, con un error que llega hasta $\frac{1}{10\,000}$ de segundo.

La regularidad de «marcha» de un diapasón electromagnético puede ser mayor todavía si se mantienen bien constantes todos los factores que influyen, aunque sea levemente, en la frecuencia de oscilación [solidez del soporte, presión atmosférica, temperatura, amplitud de vibración (1), características eléctricas y magnéticas de

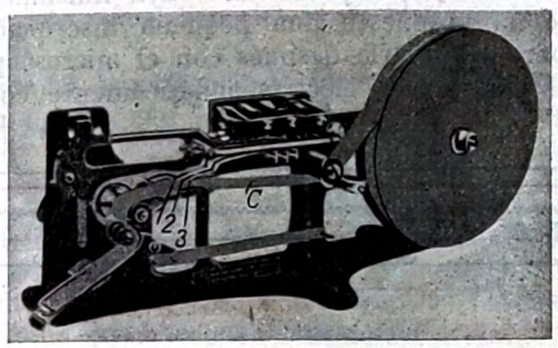


Fig. 70

dispositivo de alimentación, etc.]; Dye y Essen han podido limitar las variaciones de frecuencia de un diapasón patrón a 5 sobre 10^8, para unas horas de funcionamiento, y a 3 sobre 10^7 durante una semana; también han construído un cronógrafo (§ 40) capaz de contrastar la regularidad de marcha del diapasón y de un cronómetro patrón con la aproximación de 1 sobre 10^7.

Los continuos perfeccionamientos en la técnica de las radiocomunicaciones han hecho necesarias estas aproximaciones tan elevadas.

Recordemos que la transmisión de las señales horarias mediante la radio (servicio de la hora) permite comprobar en cualquier parte la marcha de los cronómetros propios, sin tenerse que poner en co-

(1) Un aumento de la presión atmosférica de 10 mm_{Hg} reduce la frecuencia de vibración en $\approx$ 4 sobre 10^6 en los diapasones de acero, y sólo en $\approx$ 1 sobre 10^7 en los cuarzos piezoeléctricos. En un diapasón de elinvar, la frecuencia varía todavía en $\approx$ 10 sobre 10^6 por cada grado centígrado de variación de la temperatura. La frecuencia disminuye al aumentar la amplitud de las vibraciones. En un diapasón de dimensiones corrientes, un aumento de amplitud de 0,5 a 2,5 mm reduce la frecuencia en $\approx$ 100 sobre 10^6.

municación directa con un observatorio astronómico. Esta ventaja se aprecia particularmente en las operaciones de *determinación del punto* durante la navegación.

§ 40. Cronógrafos. Sirven para el registro gráfico de un intervalo de tiempo.

Indiquemos uno de los tipos más corrientes de cronógrafos de contactos eléctricos.

Un movimiento de relojería, parecido al del telégrafo de MORSE, da un movimiento uniforme a la cinta de papel C (fig. 70). Tres puntas trazadoras 1, 2, 3, muy próximas, se apoyan sobre la cinta y dejan una raya cuando ésta se mueve.

Conviene que la cinta sea de papel satinado y ahumada ; la punta se desliza así fácilmente, dejando una raya finísima.

También se ha propuesto una pequeña inscripción sobre cinta de celuloide, para observarla después con el microscopio.

La punta 1 está unida electromagnéticamente con un péndulo

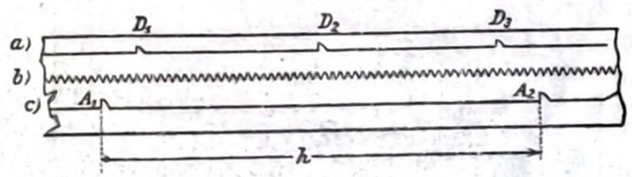


Fig. 71

que bate segundos ; en cada segundo recibe un impulso lateral y la raya presenta una desviación brusca [fig. 71, *a*)].

La punta 3 recibe análogo impulso lateral al principiar y al terminar el fenómeno que se estudia [fig. 71, *c*)].

La punta 2 puede servir para registrar simultáneamente la duración de otro fenómeno, o bien, conectada a un patrón apropiado de tiempo, puede señalar intervalos de tiempo iguales y más pequeños ; por ejemplo, décimas de segundo.

En algunos tipos, la punta 2 está gobernada por las ramas de un diapasón entretenido electromagnéticamente, de frecuencia, por ejemplo, igual a 100 hertz : la línea trazada por esta punta es una sinusoide [fig. 71, *b*)].

Ha de graduarse la velocidad de la cinta, de modo que se vea esta sinusoide con sus ondas bien dibujadas.

Cada una de estas ondas corresdonde a una oscilación completa del diapasón y, por tanto, a 0,01 seg ; de este modo se podrá comprobar la frecuencia de vibración del diapasón por medio de la raya *a*), comandada por el péndulo. Así se obtiene una determinación absoluta de la frecuencia de un diapasón electromagnético.

Después del experimento, la cinta presenta tres trazos [fig. 71, *a*), *b*), *c*)]. El intervalo h de la línea *c*) permite medir la duración del fenómeno en segundos [sobre la línea *a*)] y en fracciones de segundo [sobre la línea *b*)].

Se puede llegar a apreciar décimas partes de la onda producida por un diapasón de frecuencia 100 hertz. Luego, el aparato da 0,001 seg ; se han construído algunos que dan 0,0001 de segundo.

Un campo de aplicación corriente del cronógrafo lo constituye, por ejemplo, la determinación de la velocidad inicial de los proyectiles.

Dispositivos eléctricos especiales (descarga de un condensador, tiempo de propagación de un impulso eléctrico a lo largo de un hilo conductor, tubo de BRAUN, célula KAROLUS) o no eléctricos (método del espejo giratorio) permiten apreciar intervalos brevísimos de tiempo con una aproximación bastante mayor, hasta 10^{-8} seg, o poco menos. Se hablará de estos dispositivos en el tomo II.

§ 41. Unidades y patrones de fuerza y de masa. La fuerza y la masa están ligadas por la segunda ley de la Dinámica (§ 115) :

$$F = m \cdot a_c, \qquad [1]$$

en donde a_c es la aceleración que la masa m adquiere bajo la acción de la fuerza F. Fuerza y aceleración son magnitudes vectoriales (§ 49) ; por ahora nos bastará considerar los módulos.

La [1] se toma como ecuación básica.

Inicialmente, los físicos partieron de esta ecuación para definir la masa m, y la fuerza F tenía entonces el carácter de magnitud fundamental. Así se adoptaba en Mecánica el sistema de medidas con las tres magnitudes fundamentales, longitud, tiempo, fuerza, y la unidad coherente de masa resultaba derivada según la ecuación dimensional :

$$[m] = [l^{-1} \cdot t^2 \cdot F]. \qquad [2]$$

Con la idea de tomar como unidad de fuerza el peso de 1 cm^3 de agua, se realizó un bloque de platino-iridio, de forma cilíndrica, que debiera haber pesado exactamente lo mismo que 1 dm^3 de agua destilada a 4°. Pero la realización no pudo ser sino aproximada, de manera que, lo mismo que en el caso del metro, se abandonó la definición originaria, y como patrón primario de fuerza *(kilogramo-peso)* se tomó la fuerza que dicho bloque ejerce sobre su apoyo cuando ambos están fijos con respecto a la Tierra y cuando el mencionado bloque se halla en el vacío y en un lugar en donde la aceleración de la gravedad tiene el valor normal (1) $g_{norm} = 980{,}665 \ \frac{cm}{seg^2}$ (§ 174).

(1) Originariamente, a 45° de latitud y al nivel del mar.

La milésima parte de tal peso es el *gramo-peso* (g_p).

Pero, puesto que la masa tiene la gran ventaja de ser invariable con el lugar, resulta muy preferible considerar la expresión [1] como definición de la fuerza, dando a la masa el rango de magnitud fundamental (GAUSS). Entonces se tiene:

$$[F] = [l \cdot m \cdot t^{-2}]. \qquad [3]$$

El mismo bloque de platino-iridio, antes mencionado, que se conserva en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas de Sèvres (París), fué considerado patrón primario de masa con el nombre de *kilogramo-masa*; su milésima parte es el *gramo-masa* (1) (g_m).

Este bloque, del que ya se habló en el § 32, tiene una masa igual a la de 1 $dm^3 + 27$ mm^3 de agua destilada a 4 °C., y no coincide, como se pretendía, con la masa de 1 dm^3 de agua.

Lo mismo que en el caso del metro, se han obtenido copias del kilogramo patrón, cada vez menos precisas, hasta llegar a las *pesas* corrientes.

Una serie de pesas graduadas constituye una *caja de pesas*, y es exacta a los 45° de latitud, al nivel del mar y en el vacío.

Solamente cuando se desprecia un error del 2,5 ‰ puede considerarse constante el peso de un cuerpo en todos los puntos de la Tierra.

En los países de la zona templada, a las alturas corrientes, el error máximo no llega al 0,5 ‰; dentro de estos límites, el gramo-peso y sus múltiplos son buenos patrones de fuerza, prácticamente invariables de un lugar a otro; tenemos que 1 g_p vale 980 dinas.

Con estas aproximaciones puede despreciarse el empuje de ARQUÍMEDES que produce el aire sobre las pesas.

El mismo *juego de pesas* constituye también una serie de patrones de masa, exactos, salvo eventuales defectos de construcción, en cualquier lugar de la Tierra, en el vacío o no.

El error en la construcción de los mejores patrones de masa es muy pequeño; con masas del orden de un centenar de g_m, el error puede reducirse a menos de 1 sobre 10^6. El empleo y conservación de los patrones no es, sin embargo, tarea fácil: echar el aliento sobre ellos, tocarlos, untarlos, ensuciarlos, rozarlos, equivale a renunciar a su perfección. Ya el mero uso de los patrones en un ambiente muy húmedo reduce la precisión: la superficie de un patrón de 1 kg_m puede absorber hasta algunos mg_m de humedad.

(1) Es de prever que pronto se llegue a un acuerdo internacional por el cual, dando nombre a la unidad de masa, se remedie el inconveniente de haber dado la misma denominación «gramo» a unidades de magnitudes físicas tan distintas como la fuerza y la masa, sólo porque se realizan mediante el mismo patrón. Se ha propuesto (SACCO) el nombre de *iners*, en lugar de «kilogramo - masa», y bajo muchos aspectos dicho nombre parece muy acertado. ¿Logrará imponerse?

Los patrones de un juego de pesas de precisión están platinados o dorados. Pero en este último caso existe siempre alguna gotita de mercurio lo bastante indiscreta para atacar el dorado.

Los patrones niquelados son ya de categoría inferior. Los patrones de vidrio son higroscópicos; los de cuarzo se electrizan cuando se los pule de manera que no se logra ya librarlos del polvo que les cae encima...

Se tienen, por lo tanto, las siguientes unidades coherentes:

a] — en el sistema cm, g_m, seg (CGS):
unidad de masa: gramo-masa (g_m)
unidad de fuerza: $[F]_{CGS} = cm \cdot g_m \cdot seg^{-2} = dina$, fuerza que imprime a 1 g_m la aceleración de 1 $\frac{cm}{seg^2}$.

b] — en el sistema m, kg_m, seg (MKS):
unidad de masa: kilogramo-masa (kg_m)
unidad de fuerza: $[F]_{MKS} = m \cdot kg_m \cdot seg^{-2} = newton$ (Nw), fuerza que imprime a 1 kg_m la aceleración de 1 $\frac{m}{seg^2}$.

c] — En el sistema m, kg_p, seg [*sistema de los ingenieros* (1)]:
unidad de fuerza: kilogramo-peso (kg_p)
unidad de masa: $[m]_{m, kg_p, seg} = m^{-1} kg_p \cdot seg^2$, masa a la cual la fuerza de 1 kg_p imprime la aceleración de 1 $\frac{m}{seg^2}$.

Se tienen las siguientes relaciones de conversión:

1 newton $= 10^5$ dinas.
1 kg_p = 980 665 dinas = 9,806 65 newton.
1 $[m]_{m, kg_p, seg}$ = 9,806 65 kg_m.

Con una aproximación del 2 %:

10 newton = 1 kg_p.

Finalmente, quien desease sustituir la [1] por la ecuación básica

$$F = \frac{1}{9{,}806\,6} m \cdot a_c, \qquad [4]$$

(1) Pero no de los ingenieros electrotécnicos, todos los cuales siguen el sistema precedente.

dando a $\frac{1}{9{,}806\,65}$ el rango de factor numérico como a los de [9], [25], [26], (§ 6) usará como unidades coherentes m, seg, kg_p y kg_m; todavía se tiene

$$[F] = [m]\ [a_c],$$

pero es unidad de fuerza aquella que, aplicada a la unidad de masa, le imprime 9,806 65 veces la unidad de aceleración (véase el caso análogo de la energía cinética en el § 6).

La unidad de fuerza tiene tanta importancia en la técnica como para justificar el tesón con que muchos grupos de ingenieros defienden el sistema de medidas *c*], a pesar de los inconvenientes mencionados resultantes de tomar la fuerza como magnitud fundamental. Es de suponer que la resistencia para con el sistema MKS acogido ya por los ingenieros electrotécnicos, cesaría cuando se hallasen en el comercio (lo que no es difícil) patrones relativos de fuerza; esto es, un bloque de latón de $\approx 102\ g_m$ para realizar el newton, y bloques análogos para sus múltiplos y submúltiplos, como se tienen patrones de masa en los llamados « juegos de pesas ».

§ 42. **Medición de las fuerzas.** Las fuerzas son magnitudes vectoriales (§ 49); para caracterizarlas es preciso conocer su punto de aplicación, y su dirección, sentido y magnitud. Una fuerza que actúa en un punto A se representa, pues, por medio de un segmento orientado $\vec{F}$ (fig. 72), cuyo origen se halla en A y cuya longitud representa, a una escala convenida, la *intensidad* o *magnitud* de la fuerza; por ejemplo, 1 mm por cada dina.

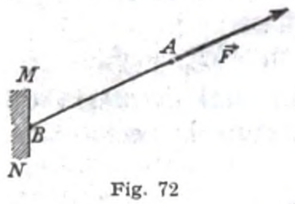


Fig. 72

Se pueden determinar estáticamente la *dirección* y el *sentido* de una fuerza de tracción que actúa en el punto B del cuerpo $M\,N$ (fig. 72), cuando sea posible hacer actuar la fuerza en el extremo A de un hilo fino, de peso despreciable, cuyo otro extremo se ha fijado en B. El hilo $B\,A$ toma una posición de equilibrio que señala la dirección y el sentido de la fuerza aplicada en A; análogamente, la *plomada* determina la dirección y sentido de la fuerza peso que actúa sobre el plomo, señalando la *vertical*. La misma dirección y sentido tiene la fuerza que el hilo que la transmite y la aplica en B (véase también el § 77).

La medida de la *magnitud* de una fuerza puede efectuarse sea estática sea dinámicamente. Puede hacerse *estáticamente*:

1.º La fuerza a medir produce una deformación elástica, y es equilibrada por la fuerza elástica de restitución que esta deformación engendra. Corresponden a ese procedimiento los *dinamómetros* y las *balanzas de torsión unifilar*.

2.º La fuerza a medir está equilibrada por una fuerza peso colocada en posición conveniente. Se tienen las *balanzas*.

3.º La fuerza a medir está equilibrada en parte por una fuerza elástica y en parte por una fuerza peso, como en las *balanzas de torsión bifilar*.

Puede efectuarse la medición *dinámicamente*: se mide la fuerza por la variación de velocidad que produce al actuar sobre un cuerpo de masa conocida. El método solamente es preciso y práctico en casos especiales: la fuerza produce oscilaciones (véase, por ejemplo, péndulo, § 145); la fuerza es instantánea (choque, percusión; § 142).

Para medir fuerzas que varían rápidamente, como son las llamadas « instantáneas », se necesitan dispositivos especiales, según el caso (véase, por ejemplo, acelerómetros, § 262).

La diferencia entre una medición estática y otra dinámica es aparentemente notable, pero en último análisis los dos métodos coinciden conceptualmente; el primer método conduce lógicamente a considerar la fuerza como magnitud fundamental y el kilogramo-peso como su unidad (véase figura 73); el segundo método conduce lógicamente a considerar la fuerza como magnitud derivada y la dina (o el newton) como su unidad.

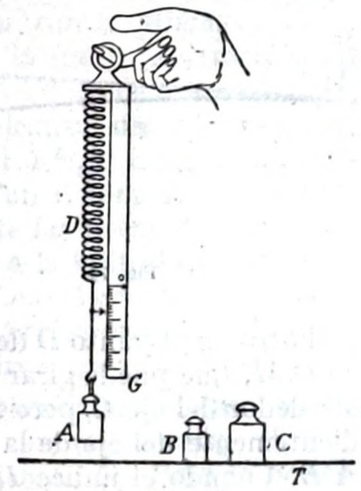


Fig. 73

Los *dinamómetros* pueden tener formas variadísimas. Una de las más corrientes es la balanza de resorte (fig. 73; medición del peso), que utiliza la deformación de un muelle en forma de hélice, cuyo eje se mantiene paralelo a la fuerza que se ha de medir.

Una tal balanza de resorte sirve de forma característica para la medición directa de las fuerzas-peso: son pesos iguales aquellos que, suspendidos del gancho del dinamómetro, originan iguales alargamientos. Si A y B son pesos iguales y el peso C por sí solo produce un alargamiento semejante al causado por la acción simultánea de A y B, se dirá que C pesa el doble que A o B; análogamente se definen pesos triples, etc...

Resta escoger la unidad de peso; por ejemplo, el kilogramo-peso. La simplicidad y comodidad de estas operaciones han constituído, y para algunos constituyen todavía, un motivo suficiente para atribuir a la fuerza el rango de magnitud fundamental y al kilogramo-peso el de unidad fundamental.

Un hilo de cuarzo finísimo (fig. 74), fijado en A y sometido a una fuerza $\vec{F}$ aplicada en B, perpendicularmente a $A\,B$, es un *micro-*

dinamómetro. *Si A B* es horizontal, puede medir pesos aplicados en *B* y ser sensible a 10^{-4} dinas, con una carga total de varias dinas, cuando se observa la posición del índice *I* con un microscopio micrométrico.

No es muy diferente el principio de la balanza llamada « de torsión », de HARTMANN y BRAUN (fig. 75), que, en realidad, es un dinamómetro de flexión.

Una palanca *L L B A* gira alrededor del eje horizontal *C*, que funciona como apoyo y lleva en su extremo el platillo *P* y el índice I_1. El centro de gravedad del sistema *L L B A P* I_1 se halla en el eje *C*. El resorte en espiral *R*, análogo al del balancín de los relojes, tiene un extremo fijo en *B*,

Fig. 74

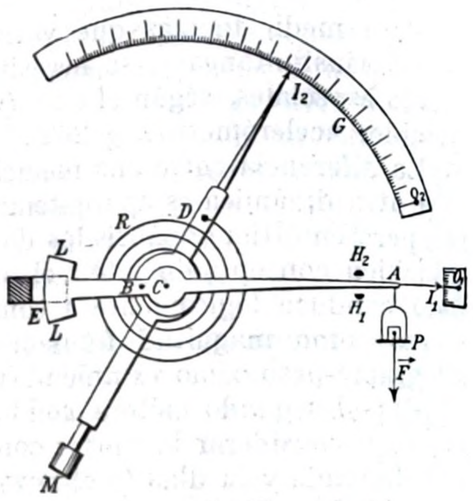


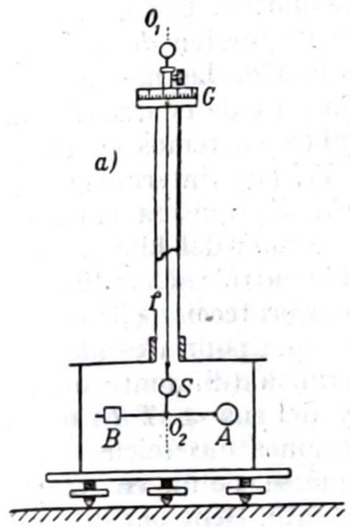
Fig. 75

y el otro en el punto *D* de un brazo *D M*, que puede girar también alrededor del eje *C*, pero independientemente del eje de la palanca *A B*. Cuando el índice I_2 está en el cero de la escala *G*, y en el platillo *P* no hay ningún peso, la palanca *L L B A* se encuentra en equilibrio bajo el efecto de su fuerza peso y de la tensión del muelle *R*; el índice I_1 coincide con el cero O_1.

Colocando un peso en *P*, cae el brazo *C A*, que viene a apoyarse en el tope H_1; girando convenientemente la palanca *D M* mediante el mango *M*, se puede levantar el brazo *C A* y llevar de nuevo el índice I_1 en coincidencia con O_1 (indicador del momento bueno para la lectura); el índice I_2 señala entonces en la escala *G* el peso buscado. El aparato está calibrado. *E* es un imán entre cuyos polos oscila la lámina metálica *L L*, extremo de la palanca *L L B A*; el dispositivo constituye un amortiguador electromagnético de las oscilaciones. La balanza de HARTMANN y BRAUN es un ejemplo característico de instrumento de medida por el *método de compensación y de cero*: la fuerza peso que se ha de medir está compensada por una fuerza elástica y, bajo la acción de las dos, el brazo *C A* es llevado a la posición de cero.

Según la fuerza del resorte, el aparato mide pesos hasta 1000 dinas o sólo hasta 5 dinas. La precisión alcanza $\approx \frac{1}{500}$ de la carga máxima.

La fuerza a medir puede no ser una fuerza peso; por ejemplo, puede ser una tensión superficial (fig. 441); pero siempre debe estar aplicada al gancho *A*, como indica la flecha $\vec{F}$.



Por otra parte, empleando muelles muy robustos, pueden servir los dinamómetros para equilibrar fuerzas poderosas, como sucede en los varios tipos de dinamómetros que, montados en *carros dinamométricos*, sirven para medir la fuerza de tracción de las locomotoras de los trenes.

Pocas veces alcanza un dinamómetro la sensibilidad del 1 $^0/_{00}$. Luego, es siempre lícito calibrar un dinamómetro en gramos-peso, mediante las pesas de una caja, aunque no se esté a la latitud de 45°, ni al nivel del mar, ni en el vacío.

La *balanza de torsión monofilar* de COULOMB (fig. 76) sirve para descubrir una fuerza débil $\vec{F}$, aplicada al axtremo *A*, en dirección a la vez normal al brazo $O_2 A$ y al hilo de suspensión $O_1 O_2$. Bajo la acción de esta fuerza, el *equipo A B* gira hasta que la fuerza elástica desarrollada en el hilo $O_1 O_2$ equilibra la acción de la fuerza que se estudia. Más exactamente: la balanza de torsión mide el *momento* de una fuerza $\vec{F}$, perpendicular al eje de torsión $O_1 O_2$, respecto a este eje; es decir, mide el producto de la intensidad de la fuerza $\vec{F}$ por la longitud del *brazo*, siendo éste la distancia de la recta de acción de la fuerza al eje de rotación $O_1 O_2$.

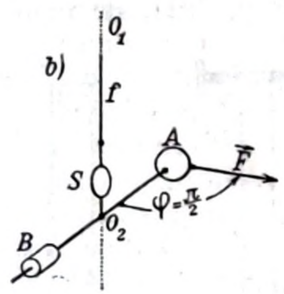


Fig. 76

Conviene emplear el instrumento como *aparato de cero*, compensando la acción de la fuerza $\vec{F}$ con una torsión conveniente del extremo O_1 del hilo, y midiendo esta torsión sobre el círculo graduado *G*: el equipo debe conservar su posición bajo las acciones simultáneas del momento de la fuerza $\vec{F}$ y del momento de la fuerza elástica originada por la torsión del hilo de suspensión (§ 189). Cumplen perfectamente este objeto un espejo *S* y el método del anteojo y escala. El hilo de suspensión puede ser de seda (hebra de gusano sencilla,

¡sin retorcer!), de bronce fosforoso (conductor de la corriente eléctrica) o de cuarzo. Este último material es muy recomendable por sus propiedades elásticas, y puede hacérsele conductor, cuando así conviene, bañándolo en ácido fosfórico, o mejor *metalizándolo*, es decir, recubriéndolo de una capa finísima de metal (oro, platino, plata, etc.).

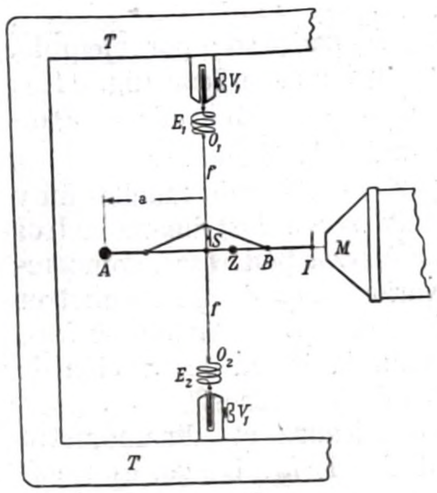


Fig. 77

La balanza de torsión *de hilo tenso* (fig. 77) es una de las mejores. El hilo de torsión *f* es de cuarzo y está fijado por ambos extremos en abrazaderas V_1, V_2, por intermedio de muellecitos E_1, E_2 que, además de asegurar una tensión del hilo *f*, fácilmente regulable entre anchos límites, constituyen una protección eficaz contra su rotura, que podría producirse por acción térmica (diferente dilatabilidad de *f* y del marco *T T*) o por inevitables acciones mecánicas.

La fuerza, cuya existencia quiere determinarse, actúa en *A*, perpendicularmente al plano de la figura, y, por tanto, tiene por brazo *a*. En *Z* hay un contrapeso que equilibra el equipo *B A*, de modo que el centro de gravedad de este equipo se encuentre sobre *f*. *S* es el espejito para el procedimiento del anteojo y escala; pero un índice *I* de hilo de cuarzo, que se observa con el microscopio micrométrico *M*, permite alcanzar análoga sensibilidad en el descubrimiento de rotaciones pequeñísimas del equipo.

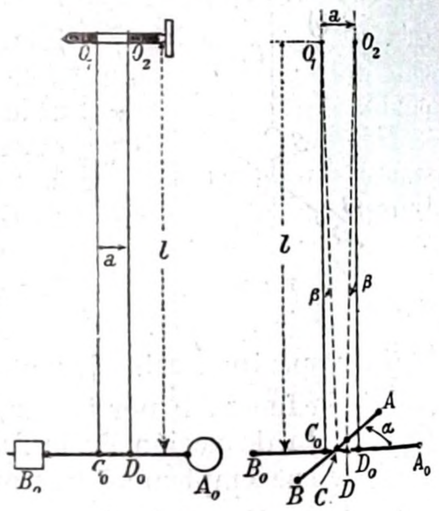


Fig. 78

El diámetro del hilo *f* puede reducirse a $\approx 1\ \mu$m; el peso del equipo *S B Z A I*, puede reducirse a ≈ 2 dinas (≈ 2 mg$_p$) para $a = 1{,}5$ cm. La sensibilidad en la medida de la fuerza puede llegar a 10^{-7} dinas·cm.

Se debe a las balanzas de torsión la maravillosa sensibilidad lograda en algunos aparatos fundamentales de física, como la balanza gravimétrica de Eötvös (§ 175), el galvanómetro, el electrómetro, etc.; en la forma más moderna de estos aparatos se tiende a utilizar la suspensión de hilo tenso, que, a costa de un ligero menoscabo en la sensibilidad, ofrece una robustez y seguridad mucho mayores.

La *balanza de torsión bifilar* de Snow Harris es parecida a la balanza de Coulomb, pero el equipo *A B* está sostenido por dos hilos de suspensión, por ejemplo, paralelos (fig. 78), de longitud *l* y situados a la distancia *a*.

Una rotación del equipo produce una torsión de los dos hilos de suspensión en un ángulo α, y, a la vez, se levanta el centro de gravedad. Si, por ejemplo, C_0 se traslada a *C*, el centro de gravedad se eleva en $l - l\cdot\cos\beta$, en donde β es el ángulo $\widehat{C_0 O_1 C}$, y se tiene, aproximadamente:

$$\beta = \frac{C_0 C}{l} = \frac{\alpha \cdot a}{l \cdot 2}.$$

La fuerza que se estudia es equilibrada por la acción simultánea de la fuerza elástica de torsión y de la fuerza peso, que se opone al levantamiento del equipo.

La balanza bifilar es menos sensible que la monofilar, pero posee respecto a ésta la notable ventaja de tener una sensibilidad que puede variarse fácilmente, con sólo cambiar la distancia entre los dos hilos, aunque sea únicamente en los puntos de suspensión.

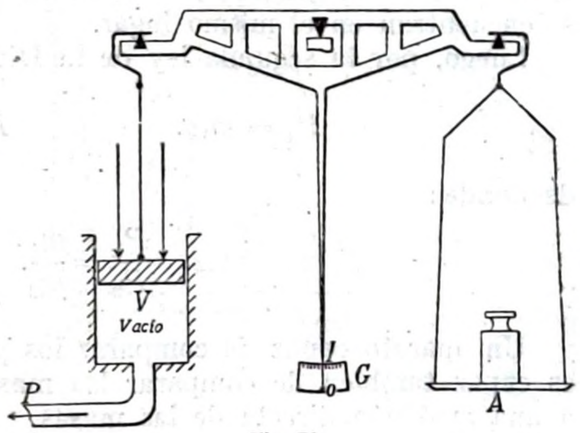


Fig. 79

Por poco sensibles que sean las balanzas de torsión, monofilares o bifilares, han de estar herméticamente cerradas en una vitrina para que estén defendidas de las corrientes de aire: una corriente convectiva de aire, por pequeña que sea, debida a diferencias de temperatura imperceptibles en el interior de la vitrina, convierte en ilusoria la elevada sensibilidad de las balanzas de torsión más delicadas.

Finalmente, en las *balanzas*, la fuerza a medir está equilibrada por un peso, y es a su vez un peso (balanza ordinaria, romana, báscula, §§ 44; 111 *b*], *c*]) o es otra fuerza cualquiera.

Así, una balanza puede servir para medir:

a] una presión, —por ejemplo— la presión atmosférica *p* (fig. 79), con tal que el émbolo pueda moverse dentro del cilindro con débil rozamiento; la balanza mide la presión total *F*, es decir, la presión sobre toda la superficie *S* del émbolo, y se tiene:

$$p = \frac{F}{S};$$

b] una tensión superficial (§ 217):

c] una fuerza de tracción aplicada a una barra, como sucede en las balanzas para el ensayo de materiales de construcción;

d] una fuerza eléctrica —por ejemplo, una tensión electrostática— como en el electrómetro absoluto de W. THOMSON (véase tomo II);

e] una fuerza electromagnética, es decir, entre una corriente eléctrica y un campo magnético, como en la balanza de COTTON; o una fuerza electrodinámica, es decir, entre dos corrientes eléctricas, como en el electrodinamómetro absoluto (véase tomo II).

§ 43. Medición de las masas. Sean dos cuerpos en un mismo lugar de la Tierra: P_1, P_2 son sus pesos y m_1, m_2 las masas respectivas. La experiencia (tubo de NEWTON, péndulo) demuestra que la aceleración g de la gravedad es la misma para todos los cuerpos que se encuentran en el mismo lugar.

Luego, por la segunda ley de la Dinámica (§ 115),

$$P_1 = m_1 g, \qquad P_2 = m_2 g; \qquad [1]$$

de donde:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{m_1}{m_2}. \qquad [2]$$

Un aparato capaz de comparar los pesos (por medición directa) es capaz también de comparar las masas; por lo tanto, se presta a una medición directa de las masas.

Las balanzas, en las cuales se mide una fuerza-peso equilibrándola con otra fuerza-peso (balanza ordinaria, romana, básculas), son palancas o sistemas de palancas que comparan dos pesos y, por consiguiente, también dos masas.

Teóricamente es preferible considerar estas balanzas como apatos para la medición de las masas, puesto que las masas de la caja se han de considerar, según se ha dicho, más bien como patrones de masa, exactos en cualquier lugar de la Tierra.

De todos modos, incluso los físicos dicen frecuentemente que con las balanzas se *pesan* los cuerpos; nadie se atreve a ser el primero en enseñar que con las balanzas se... «masan» las masas.

§ 44. Balanza para análisis. La parte fundamental es la *cruz* $C_1\ F\ C_2$ (fig. 80), palanca de primer género, de brazos iguales, con el apoyo en F.

El apoyo F está constituído por la arista viva de una *cuchilla* de acero, apoyada sobre un plano de ágata P; luego el apoyo o fulcro F es un eje horizontal de rotación de la cruz. La cruz es simétrica con respecto al plano vertical que pasa por la arista de la cuchilla, y tiene una forma adecuada para asegurar a la vez una gran rigidez y una gran ligereza. C_1 y C_2 son otras dos cuchillas en las que van montados los estribos S_1 y S_2, provistos de planos de ágata, que sostienen los *platillos* A_1 y A_2 de la balanza (figs. 81, 82).

Las posiciones de las cuchillas C_1 y C_2 están controladas con tornillos para que las tres cuchillas C_1, F y C_2 puedan ponerse bien

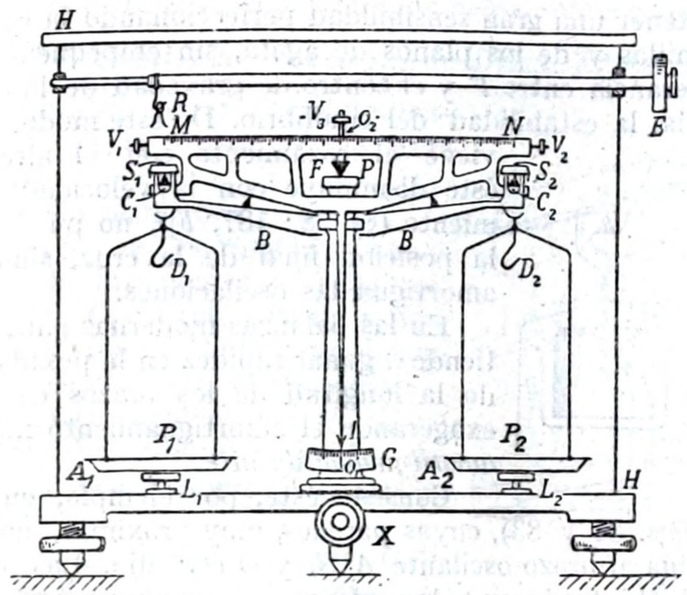


Fig. 80

paralelas y en el mismo plano, con la mayor aproximación posible, y sean iguales las distancias $C_1\ F$ y $F\ C_2$.

Cuando el índice I se halla en el cero de la graduación G, la cruz está aproximadamente horizontal, y en tal posición ha de estar en equilibrio, y, por tanto, su centro de gravedad debe hallarse en el plano vertical que pasa por la arista F, un poco por debajo de esta arista. Las tuercas V_1, V_2 y V_3 funcionan como contrapesos para poder realizar estas condiciones.

Deben construirse cuidadosamente las cuchillas y los planos de apoyo para que las oscilaciones de la cruz sean regulares y prácticamente no amortiguadas; así, observando las oscilaciones del índice I, se puede establecer si el centro de estas oscilaciones coincide con el cero de G: en tal caso se dice que la balanza está *equilibrada*. Esta observación debe efectuarse durante la oscilación de la cruz, para que sea seguro que ésta está libre. Hay a veces una pequeña pera de caucho para producir un soplo inicial que ponga delicadamente la cruz en oscilación.

Poniendo una *carga* cualquiera en uno de los platillos de la balanza, puede equilibrarse mediante otra carga conveniente colocada en el otro platillo. Cuanto más cerca está el centro de gravedad de la cruz de la arista F de la cuchilla, mayor es la sensibilidad de la balanza: la maniobra de la tuerca V_3 puede variar esta sensibilidad entre límites amplísimos.

Pero al aumentar la sensibilidad de la balanza aumenta el período de oscilación de la cruz y la balanza pierde en *rapidez*. Por ello, se procura obtener una gran sensibilidad perfeccionando la construcción de las cuchillas y de los planos de ágata, sin empequeñecer demasiado la distancia entre F y el centro de gravedad de la cruz, y, en consecuencia, la estabilidad del equilibrio. De este modo, sólo interviene el rozamiento con el aire, y como éste disminuye con la velocidad del movimiento (§§ 78; 187, *b*]), no puede influir en la posición final de la cruz, sino que sólo amortigua las oscilaciones.

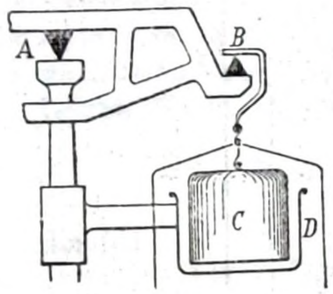


Fig. 81

En las balanzas modernas para análisis se tiende a ganar rapidez en la pesada reduciendo la longitud de los brazos de la cruz y exagerando el amortiguamiento mediante un *amortiguador de aire*.

Consiste éste, por ejemplo, en dos vasijas C, D (figs. 81 y 83), cuyas paredes, muy próximas, no se tocan. C está unida al brazo oscilante $A\,B$, y D está fija. Las oscilaciones del brazo $A\,B$ introducen más o menos a C (como un émbolo) dentro de D, y el aire, obligado a fluir en el estrecho espacio comprendido entre C y B, origina el rozamiento amortiguador.

La balanza está en equilibrio cuando, después de amortiguadas las oscilaciones, el índice de la cruz se detiene en el cero de su escala. Con un poco de práctica, el experimentador nota fácilmente si la cruz se para por el amortiguamiento del aire o si la cruz está *encantada*.

En fin, es indispensable que las balanzas de precisión vayan dentro de una vitrina cerrada herméticamente e isoterma, para evitar las eventuales corrientes de aire, especialmente las verticales, que ejercen una sensible acción perturbadora.

Las cuchillas de la balanza son muy delicadas y solamente deben trabajar durante el uso de la misma; por ello, ésta va provista de un mecanismo que mantiene levantada la cruz y separada del plano P (fig. 80), quedando también los estribos S_1, S_2 separados de sus respectivas cuchillas, cuando no se emplea la balanza o cuando, durante una pesada, es preciso tocar los platillos o la carga que llevan.

En las cajas de pesas de precisión hay fracciones del g_m, hasta el mg_m, generalmente en forma de laminitas de aluminio; pero las más pequeñas de estas fracciones son sustituídas muy ventajosamente por el *jinetillo* o *reiter* R (fig. 80). Éste es un hilito de aluminio cuya masa es generalmente de 10 mg_m, doblado en forma que pueda mantenerse cabalgando sobre la barra $V_1\,M\,N\,V_2$. Ésta lleva una graduación $M\,N = C_1\,C_2$, dividida en 200 partes (cero en el centro O_2). Substancialmente, el reiter R funciona como el *pesón* de una romana, y sólo equivale a una masa de 10 mg_m si está colocado en los extremos M, N, de la escala. Corriendo el reiter un trazo de la división $N\,M$, la acción correspondiente sobre el platillo subyacente equivale a variar la carga en $\frac{1}{100}$ de 10 mg_m, esto es, en 0,1 mg_m.

La maniobra del reiter se efectúa desde el exterior de la vitrina H mediante el brazo ER.

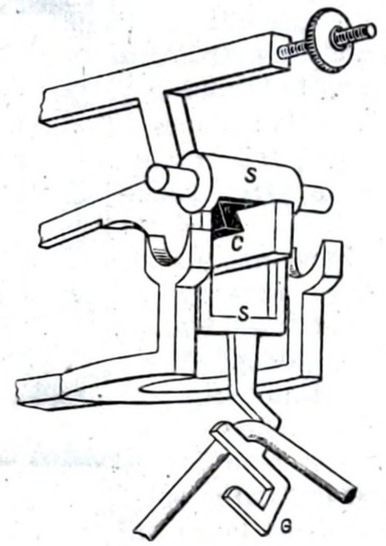


Fig. 82

Digamos, sin demostrarlo, que:

a] si la cruz no es rígida (y nunca puede serlo absolutamente) o si las tres cuchillas C_1, F, C_2 no están en un mismo plano, la sensibilidad de la balanza depende de la carga que llevan los platillos;

b] si las tres cuchillas C_1, F, C_2 no son paralelas, el equilibrio de la cruz depende del lugar ocupado por las cargas en los platillos;

c] si no son iguales las distancias C_1F, FC_2, no son iguales los dos brazos de la cruz, y se alcanza el equilibrio para cargas diferentes de los platillos.

Sólo es grave el defecto *b*], y debe ser eliminado con cuidado por el constructor; se comprueba la ausencia de este defecto probando si una carga dada Z_1, fija en uno de los platillos, es equilibrada por otra carga constante Z_2 colocada en cualquier punto del otro platillo. Sirven para eliminar este defecto los tornillos de regulación de las cuchillas C_1, C_2, y la suspensión de estribo y gancho (fig. 82).

Los otros dos defectos no tienen interés, porque su acción es nula cuando se efectúa la pesada por el método llamado *a carga constante* (MENDELEJEFF); se carga uno de los platillos, por ejemplo A_1, con pesas cuya suma sea mayor que la masa máxima que ha de determinarse en toda la serie de medidas a efectuar, y se equilibra poniendo tara (por ejemplo, perdigones) en el otro platillo. Si la balanza no tiene la sensibilidad conveniente, se modifica ésta maniobrando la tuerca V_3 (fig. 80).

El cuerpo a pesar se pone en A_1; la balanza se inclina, y se restablece el equilibrio quitando pesas del platillo A_1 y maniobrando el reiter. La suma de las masas quitadas da la masa del cuerpo. Co-

rrientemente las balanzas de análisis son sensibles al mg_m; las de precisión (fig. 83; con amortiguadores de aire y maniobra automática de las masas pequeñas desde fuera de la vitrina) alcanzan hasta 0,1 mg_m, con una carga máxima *(fuerza)* que llega a veces a 1 kg_m (sobre cada plato); las balanzas del tipo de la figura 83, capaces de una fuerza máxima de unos 20 g_m, pueden alcanzar la sensibilidad de 0,01 ÷ 0,001 mg_m; el error relativo de la sensibilidad se reduce

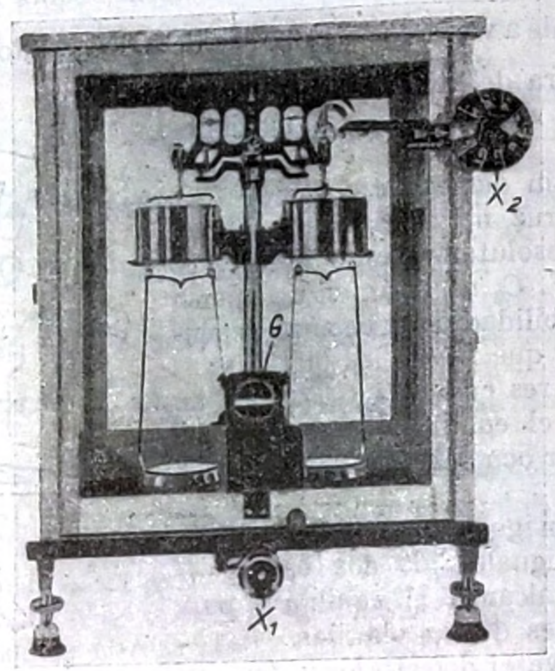


Fig. 83

a ≈ 1 sobre $10^6 \div 10^7$, análogo al de las mejores medidas de longitud y de tiempo.

Pero no llega a tanto la precisión, principalmente, por las siguientes causas:

1.ª A pesar de la vitrina que tiene siempre la balanza, hay corrientes de aire, debidas a desequilibrios de temperatura, que constituyen una carga desigual e irregular para los dos platillos.

2.ª En la superficie de la mayor parte de los cuerpos se condensa una cantidad importante de humedad, que no es fácil determinar; si los cuerpos son pulverulentos y, por tanto, tienen gran superficie, el error puede ser notable.

3.ª También hay error cuando se desprecia indebidamente el empuje de ARQUÍMEDES, debido al aire.

Para lo referente a esta última causa de error, valga el siguiente ejemplo: Los patrones de masa son corrientemente de latón (masa

específica: 8,4 $\frac{g_m}{cm^3}$) y en química se pesan substancias cuya masa específica no suele exceder de $2 \div 3$ $\frac{g_m}{cm^3}$. En tal caso, para una carga de 100 g_m, el empuje de ARQUÍMEDES es igual al peso de ≈ 12 cm^3 de aire para los patrones de masa, y al de ≈ 40 cm^3 para los cuerpos en estudio; esto representa un empuje de ≈ 20 mg_p en las pesas y otro de ≈ 50 mg_p en el cuerpo; cometiéndose un error de ≈ 30 mg_p en el equilibrio de las fuerzas peso, y un error de igual número de mg_m en la comparación de las masas. La sensibilidad de la balanza será todavía de 0,1 mg_m, pero la precisión es muy distinta; es ya difícil lograr una precisión de 1 mg_m en 100 g_m.

Los dinamómetros de las figuras 74 y 75 son microbalanzas sensibilísimas cuando se calibran con masas patrón en la localidad donde han de emplearse. Se obtienen masas patrón del orden de 0,01 mg_m mediante un hilo finísimo, bien calibrado, de plata. Se pesan, por ejemplo, 10 mg_m y después se corta la milésima parte de la longitud.

Recordemos, por fin, la microbalanza de STEELE-GRANT, verdadera balanza del tipo de la de la figura 80, pequeña, ligerísima, construída completamente de hilo de cuarzo, sensible hasta $1 \cdot 10^{-6}$ mg_m. Las oscilaciones de la cruz no se observan con el índice I (fig. 80), sino por el método de POGGENDORFF, empleando un espejito unido a la cruz. La balanza está dentro de un tubo cerrado, en donde puede variarse a voluntad la presión del aire. Se equilibra el peso a determinar mediante el empuje de ARQUÍMEDES, ejercido sobre un baloncito unido a uno de los brazos de la cruz, como en el conocido baroscopio.

El empuje de ARQUÍMEDES depende de la presión del aire circundante; la determinación del peso se efectúa midiendo la presión del aire en el que está sumergida la balanza.

§ 45. Densidad de los sólidos y de los líquidos. Se definen en todos los cuerpos la siguientes razones, que son constantes para cada substancia sólida o líquida, homogénea, a una temperatura dada (1).

a] **Densidad** es la razón

$$\delta = \frac{m}{m_a} \qquad [1]$$

(1) La compresibilidad de los sólidos y de los líquidos es pequeña, aunque no nula, y diferente para cada cuerpo. Hablando con todo rigor, se habría de fijar la presión a que están los cuerpos de que se trata; pero se sobrentiende que tal presión es la presión atmosférica corriente.

entre la masa m de cierto volumen del cuerpo y la masa m_a de un volumen igual de agua (destilada y a 4 °C); δ es la densidad del cuerpo *respecto al agua*.

Esta relación es independiente del lugar, lo mismo que las masas m y m_a, y, como se entiende que estas masas se han determinado con la misma unidad de medida, δ resulta también independiente de tal unidad; δ es una magnitud sin dimensiones:

$$[\delta] = [m^0 \cdot l^0 \cdot t^0].$$

Por ejemplo, la densidad del mercurio a 0 °C es 13,595 45, y no es necesario establecer el lugar ni la unidad de medida escogida para las masas o para los volúmenes, o para cualquier otra magnitud física.

Se puede definir también la densidad δ' respecto a un líquido b, diferente del agua y que tenga una densidad δ_b referida al agua; es:

$$\delta' = \frac{m}{m_b}$$

razón entre la masas de volúmenes iguales del cuerpo y del líquido de referencia.

Se tiene:

$$\delta = \frac{m}{m_a} \cdot \frac{m_b}{m_b} = \frac{m}{m_b} \cdot \frac{m_b}{m_a} = \delta' \cdot \delta_b. \qquad [2]$$

Por lo tanto, la densidad con respecto al agua es el producto de la densidad con respecto a otro líquido por la densidad δ_b de este último respecto al agua.

b] **Masa específica** es la razón

$$\mu = \frac{m}{v} \qquad [3]$$

entre la masa y el volumen de un cuerpo; la masa específica es la masa «referida» a la unidad de volumen del cuerpo.

De la [3] se tiene para $v = 1$, $\mu = m_{v=1}$; es decir, la masa específica puede definirse también como la masa de la unidad de volumen del cuerpo. Luego, la masa específica, a diferencia de la densidad, depende de las unidades de medida de la masa y del volumen:

$$[\mu] = \frac{[m]}{[v]} = \frac{[m]}{[l^3]} = [m]\,[l^{-3}] = [m \cdot l^{-3}].$$

Ejemplo: La masa específica del mercurio a 0 °C es 13 595,08 g_m/dm^3.

En cambio, aceptando el litro como unidad de volumen, la masa específica del mercurio a 0 °C es 13,595 45 kg_m/litro; en este caso, la masa específica todavía tendría por dimensiones $[m]/[v]$, pero ya no $[m]/[l]^3$. En fin, si se adaptase la expresión [3], § 32, la masa específica carecería de dimensiones.

De las [1] y [3] se deduce:

$$\mu = \delta \frac{m_a}{v}. \qquad [4]$$

La razón $\frac{m_a}{v}$ es la masa específica del agua, constante característica de este líquido (para una temperatura y una presión determinadas); luego, la masa específica de un cuerpo es proporcional a la densidad, y su medida coincide con la medida de ésta, si se tiene $\frac{m_a}{v} = 1$, es decir, si el mismo número mide el volumen y la masa del agua.

Sucede exactamente así en el agua destilada y a 4 °C cuando los volúmenes se miden en litros y las masas en kg_m, porque, por definición, un litro de agua tiene la masa 1 kg_m. Con mucha aproximación, también es $\frac{m_a}{v} = 1$ cuando se miden las masas en g_m, kg_m, toneladas (-masa)... y los volúmenes, respectivamente, en cm^3, dm^3, m^3 ...; esto es lo corriente en Física.

Masa específica y densidad vienen entonces medidas por el mismo número:

$$\mu = \delta.$$

c] **Peso específico relativo** (1) es la razón

$$\psi = \frac{P}{P_a} \qquad [5]$$

entre el peso del cuerpo y el peso de un volumen igual de agua; se supone, naturalmente, que P y P_a se han medido con la misma unidad; ψ es una magnitud sin dimensiones.

(1) En el original se usa la palabra «pesantezza», en lugar de peso específico relativo, como más conveniente; pero no la hemos traducido por no ser empleada en castellano ninguna palabra equivalente. — *N. del T.*

Además, se tiene (§ 43 [2]):

$$\frac{P}{P_a} = \frac{m}{m_a}$$

Luego, siempre es:

$$\psi = \delta \qquad [6]$$

El mismo número mide el peso específico relativo y la densidad.

d] **Peso específico** es la razón

$$\varrho = \frac{P}{v} \qquad [7]$$

entre el peso y el volumen de un cuerpo, o, también, el peso de la unidad de volumen del cuerpo. El peso específico, como la masa específica, depende de las unidades de medida; el peso específico del hierro vale 7500 kg_p/m^3, o bien 7,5 kg /dm^3.

Teniendo en cuenta que las dimensiones de un peso son las de una fuerza, las dimensiones del peso específico, en nuestro sistema de mediciones (§ 7, [1]), que excluye el litro, serán:

$$[\varrho] = \frac{[P]}{[v]} = \frac{[l \cdot m \cdot t^{-2}]}{[l^3]} = [l^{-2} \cdot m \cdot t^{-2}].$$

Además, el peso específico de un determinado cuerpo depende del lugar, puesto que de éste depende el peso.

De las [5], [6] y [7] se tiene:

$$\varrho = \frac{P}{P_a} \cdot \frac{P_a}{v} = \psi \cdot \frac{P_a}{v} = \delta \cdot \frac{P_a}{v}\ ; \qquad [8]$$

donde $\frac{P_a}{v}$ es una constante, precisamente el peso específico del agua.

Luego, el peso específico de un cuerpo es proporcional a la densidad y al peso específico relativo, y coincide con éste cuando $\frac{P_a}{v} = 1$, o sea, cuando se representan por el mismo número el peso y el volumen de cierta cantidad de agua. Esto sucede con exactitud solamente a 4 °C, en los lugares en donde la aceleración de la gravedad tiene el valor normal, y cuando se miden los volúmenes en litros y los pesos en kg_p; se cumple también con suficiente aproximación cuando se miden los volúmenes en cm^3, dm^3, m^3 ..... y los pesos, respectivamente, en g_p, kg_p, toneladas (-peso) .....

Pero *no* ocurre así cuando se emplea el sistema CGS, porque en éste la unidad de fuerza, y por tanto la de peso, *no* es el g_p, sino la *dina*; ni tampoco en el sistema MKS, porque en éste la unidad de fuerza *no* es el kg_p, sino el *newton* (§ 41).

e] **Volumen específico** es la razón

$$\vartheta = \frac{v}{m} = \frac{1}{\mu}, \qquad [9]$$

valor recíproco de la masa específica; por tanto, es el volumen de la unidad de masa del cuerpo.

De todos estos entes, el más importante es la densidad; los demás pueden expresarse en función de ella.

Cuando un cuerpo no es homogéneo, las definiciones precedentes dan los valores medios de la densidad, de la masa específica, etc.

En los cuerpos no homogéneos, pero cuyas propiedades varían de una manera continua de un punto a otro, se han de sustituir las definiciones anteriores por definiciones infinitesimales.

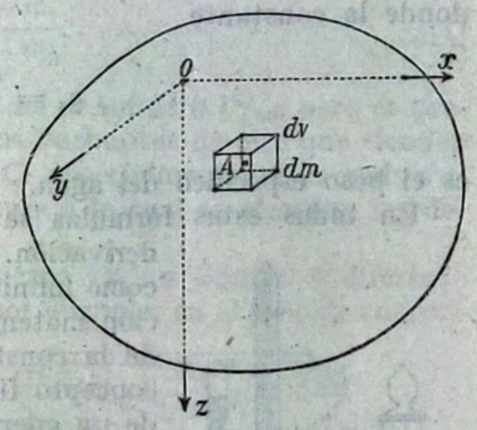


Fig. 84

Por ejemplo, se define la masa específica en el punto *A* (fig. 84) imaginando un elemento de volumen infinitésimo *dv* alrededor del punto *A*. Si *dm* es la masa contenida en el volumen *dv*, la masa específica verdadera en *A* valdrá:

$$\mu = \frac{dm}{dv}. \qquad [10]$$

Análogamente, el peso específico verdadero en *A* es:

$$\varrho = \frac{dP}{dv} \qquad [11]$$

en donde *dP* es el peso contenido en *dv*; la densidad en *A* es:

$$\delta = \frac{dm}{dm_a} = \frac{dm}{dv} \cdot \frac{dv}{dm_a} = \mu \cdot \frac{1}{\mu_a}\ ; \qquad [12]$$

siendo dm_a la masa de un volumen dv de agua, y, por tanto, la constante $\mu_a = \frac{dm_a}{dv} = \frac{m_a}{v}$ es la masa específica del agua.

El peso específico relativo y la densidad en el punto A están medidos por el mismo número:

$$\psi = \frac{dP}{dP_a} = \frac{dm}{dm_a} = \delta, \qquad [13]$$

y también:

$$\psi = \frac{dP}{dv} \cdot \frac{dv}{dP_a} = \varrho \cdot \frac{1}{\varrho_a}, \qquad [14]$$

donde la constante

$$\varrho_a = \frac{dP_a}{dv} = \frac{P_a}{v}$$

es el peso específico del agua.

En todas estas fórmulas se observa un caso característico de derivación. Por ejemplo, en la [10], dv se indica como infinitésimo, porque así lo exige la definición matemática de la derivada; pero, a causa de la constitución molecular de la materia, el concepto físico de masa específica en un punto de un cuerpo sólo tiene significado si dv es suficientemente grande para que contenga un gran número de moléculas, de modo que no se llegue a revelar la estructura discontinua de la materia. Si dv alrededor de un punto A se redujese a un volumen del orden del volumen de una molécula, μ saltaría bruscamente de cero a valores elevadísimos al variar la posición del punto A, según que dv cayese en un espacio intermolecular o contuviese una molécula. Resumiendo, dv debe ser ..... infinitésimo, pero no demasiado.

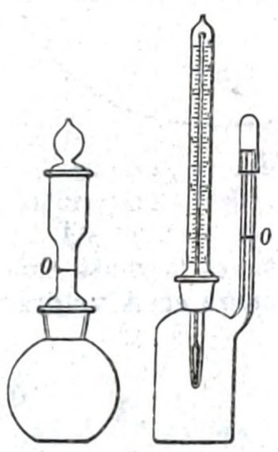


Fig. 85

Veremos un gran número de ejemplos de derivaciones efectuadas de este modo.

§ 46. Medición de la densidad de los sólidos.

a] **Picnómetro.** Este aparato (fig. 85) es un frasquito, con un tapón largo bien esmerilado, provisto de cuello capilar, donde hay una raya O de referencia. Los mejores picnómetros están provistos de termómetro. El cuerpo C, cuya densidad quiere determinarse, se

toma en pedacitos (varios cm^3), que puedan introducirse en el picnómetro.

Se ha de disponer de una balanza para análisis, con la cual se determinan:

1.º, la masa m_1 del picnómetro, lleno de agua destilada hasta el trazo de enrase O;

2.º, la masa m_2 del picnómetro, lleno como antes y teniendo al lado, en el mismo platillo, el cuerpo C;

3.º, la masa m_3 del picnómetro, lleno de agua, pero teniendo en su interior el cuerpo C. En total, tres pesadas.

Por tanto, $m_2 - m_1$ es la masa del cuerpo C; $m_2 - m_3$ es la masa del agua desalojada por el cuerpo C, es decir, la masa de un volumen igual de agua. Luego, la densidad δ vale:

$$\delta = \frac{m_2 - m_1}{m_2 - m_3}. \qquad [1]$$

El método puede dar δ con error del orden de $0{,}1\,^0/_{00}$, pero es preciso eliminar con el mayor cuidado las burbujitas de aire que tienden a permanecer adheridas al cuerpo C, especialmente si es pulverulento, y tener en cuenta la temperatura a la cual se efectúan las determinaciones.

A veces conviene sumergir el cuerpo en un líquido b diferente del agua y de densidad δ_b conocida (por ejemplo, en el caso de cuerpos solubles en agua) (§ 47).

En este caso, el picnómetro da la densidad δ' respecto a este líquido; y se tiene (§ 45, [2]):

$$\delta = \delta' \cdot \delta_b. \qquad [2]$$

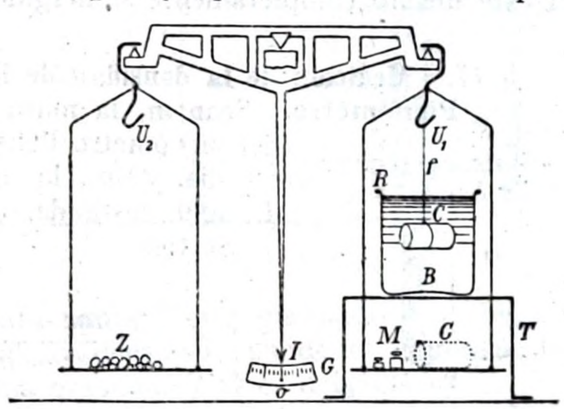


Fig. 86

Las densidades se suelen determinar respecto al agua, pero a la temperatura ambiente (por ejemplo, a 20 ºC); el agua tiene entonces una densidad $\delta_{a,20} + 1$; $\delta_{a,20}$ es una constante a determinar (§ 307) una vez para siempre.

A partir de la densidad determinada δ'_{20} se calcula la verdadera a 20 ºC:

$$\delta_{20} = \delta_{20}' \cdot \delta_{a,20} \qquad [3]$$

b] **Balanza hidrostática (de Arquímedes).** Actualmente todas las balanzas son hidrostáticas, porque están provistas de ganchos U_1, U_2 (fig. 86). De U_1 pende un hilo finísimo f, que termina en el

agua del recipiente R, apoyado en el tablerito T, que no impide el funcionamiento de la balanza. Equilibrada ésta por el método de MENDELEJEFF (§ 44), se pone el cuerpo C que se estudia sobre el platillo A, y los pesos P, que se han quitado de A para restablecer el equilibrio, miden el peso de C.

Después se ata el cuerpo C con el hilo f de modo que aquél quede todo sumergido en el agua de R. Se altera de nuevo el equilibrio de la balanza, y se restablece añadiendo en A los pesos P_a, que miden el empuje de ARQUÍMEDES, es decir, el peso del líquido desalojado. Se tiene:

$$\frac{P}{P_a} = \psi = \delta.$$

Como de costumbre, la balanza mide las dos fuerzas P, P_a, en unidades no exactas (salvo en los lugares en donde la aceleración tiene el valor normal; pero la razón $\frac{P}{P_a} = \frac{m}{m_a}$ es independiente del lugar.

También ahora puede no ser el agua a 4 °C el líquido de referencia. Pero conviene que la densidad del líquido sea menor que la del sólido C, con el fin de que no se necesite un dispositivo para mantener a este último completamente sumergido.

§ 47. Medición de la densidad de los líquidos.

a] **Picnométro.** Sean m_1 la masa del picnómetro vacío; m_2, la del picnómetro lleno del líquido que se estudia, y m_3, la del picnómetro lleno de agua destilada.

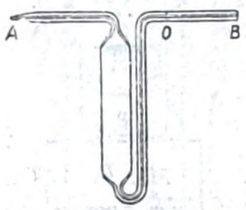


Fig. 87

Se tiene:

$$\frac{m_2 - m_1}{m^3 - m_1} = \delta.$$

Las mismas observaciones (§ 46 *a*]), si el agua no está a 4 °C.

No conviene ahora una embocadura ancha (fig. 85): basta el sencillo picnómetro de SPRENGEL (fig. 87), cómodo de lavar y de llenar por simple aspiración.

b] **Balanza hidrostática (de Arquímedes).** Se suspende en U_1 (fig. 86) un cuerpo $C\,T$ (fig. 88), en el que está contenido un termómetro. Se equilibra con tara puesta en el otro platillo. Se determinan los empujes de ARQUÍMEDES

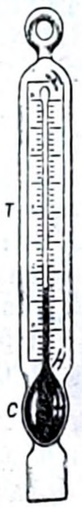


Fig. 88

P y P_a, aplicados a CT por el líquido en examen y por el agua, respectivamente. Se tiene:

$$\frac{P}{P_a} = \psi = \delta.$$

El empuje del agua P_a es una constante característica del cuerpo CT, que se determina una vez para siempre.

La balanza puede reducirse a la sencilla forma de la fig. 89 (MOHR-WESTPHAL). El cuerpo $C\,T$ está equilibrado en el aire por el contrapeso Z. Al sumergir el cuerpo en el líquido que se examina, se equilibra el empuje por el peso de los reiters R_1, R_2 ..... de diverso tamaño y que pueden moverse sobre el brazo AB a modo del pesón de una romana. Los pesos de los reiters están graduados de modo que dan sucesivamente las unidades, décimas, centésimas, etc., de la densidad buscada. Se alcanza en sensibilidad la 4.ª cifra decimal.

Entre los otros muchos métodos para la medida de las densidades de los líquidos, recordemos, como mucho más cómodos, pero menos precisos, el del densímetro y el de RETGERS.

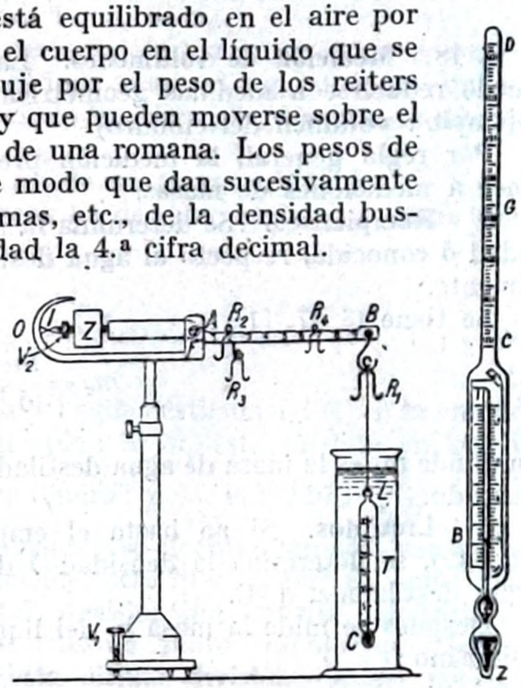


Fig. 89

Fig. 90

El *densímetro* es un flotador lastrado (fig. 90), para que flote verticalmente en el líquido que se estudia; entonces el peso del líquido desalojado es igual al peso del densímetro. Éste queda más o menos sumergido, según la densidad del líquido. El aparato está graduado y puede dar hasta la 4.ª cifra decimal de la densidad cuando el volumen del bulbo B es grande y la varilla graduada CD es delgada.

Los alcoholímetros, pesaácidos, pesaéteres, etc., son variantes de este instrumento, y están caracterizados por el tipo de su graduación.

El método de RETGERS consiste sencillamente en disponer de un buen número de ampollitas de vidrio de diferentes y conocidos pesos específicos. Se echan en el líquido que se examina: unas se hunden, otras flotan. La ampollita que demuestra una tendencia especial a permanecer en suspensión en el líquido es la que tiene la densidad más aproximada a la de dicho líquido.

También este método puede servir para los sólidos. Se dispone de un juego de líquidos miscibles en todas proporciones; por ejemplo,

yoduro de metileno ($\delta_1 = 3{,}3$) y benzol ($\delta_2 = 0{,}88$), con los cuales se puede obtener una mezcla cuya densidad varíe entre anchos límites. Para los líquidos indicados, la densidad puede estar comprendida entre $\delta_1 = 3{,}3$ y $\delta_2 = 0{,}88$.

Se echan dentro de la mezcla pedacitos del cuerpo que se estudia y la serie de las ampollitas antes mencionada, y se va variando la composición del líquido hasta que queden en suspensión los pedacitos del cuerpo. La ampollita de vidrio que está entonces en suspensión determina la densidad del sólido.

§ 48. **Medición de volúmenes.** La medición del volumen sólo puede reducirse a medidas geométricas en casos muy particulares (ejemplo : volumen del cilindro).

Por regla general, la medición precisa de volúmenes se reconduce a mediciones de masas.

a] **Recipientes.** Se determina la masa m de un líquido, de densidad δ conocida, respecto al agua destilada a 4 °C, que llena el recipiente.

Se tiene (§ 47, [1]) :

$$m_a = \frac{m}{\delta}, \qquad [1]$$

en donde m_a es la masa de agua destilada a 4 °C que tiene el volumen buscado.

b] **Líquidos.** Si no basta el empleo de recipientes graduados (fig. 42), se determina la densidad δ del líquido (§ 47), respecto al agua destilada a 4 °C.

Después se mide la masa m del líquido que se estudia. Se tiene asimismo :

$$m_a = \frac{m}{\delta},$$

en donde m_a es la masa de agua destilada a 4 °C que tiene el volumen buscado.

c] **Sólidos.** El método por desalojamiento de líquido en un recipiente graduado, explicado en el § 32, es poco aproximado, y para afinarlo conviene efectuar la determinación del volumen del sólido por medio de un picnómetro (§ 46, *a*]) de boca suficientemente ancha ; de este modo se determina la masa m_l de un volumen del líquido picnométrico, igual al volumen buscado.

Análogamente, con la balanza de ARQUÍMEDES, sumergiendo el sólido en un líquido, se determina, a base del empuje recibido, la masa m_l del líquido desalojado ; es decir, la masa de un volumen de dicho líquido igual al volumen buscado.

En ambos casos, conocida o determinada la densidad δ del líquido respecto al agua destilada a 4 °C, se tiene :

$$m_a = \frac{m_l}{\delta}, \qquad [2]$$

en donde m_a es la masa de agua destilada a 4 °C que tiene el volumen buscado.

Si el líquido que se emplea es agua destilada a 4 °C, lo que no ocurre casi nunca, se tiene $\delta = 1$; $m_a = m_l$.

Por lo tanto, en todos los casos se efectúa la medición de m_a.

Si se emplearan como unidad de masa el kg_m y como unidad de volumen el litro, la medida m_a en kg_m de m_a da, sin más, la medida v de v, en litros.

Es aquí en donde el litro revela su mayor utilidad.

Si, por el contrario, el volumen ha de estar medido en otras unidades (cm^3, dm^3 .....), se tiene :

$$v = \frac{m_a}{\mu_a}, \qquad [3]$$

en donde μ_a es la masa específica del agua destilada a 4 °C en la unidad escogida de antemano ; por ejemplo : Si m_a está medida en kg_m y se quiere obtener v en dm^3, se tendrá : $\mu_a = 0{,}999\,973\ \frac{kg_m}{dm^3}$.

Notemos que, o bien las mediciones se efectúan tan sólo con aproximación del $0{,}1\,^0/_{00}$, y la distinción entre litro y dm^3 es superflua, o bien se hacen aquéllas con tal precisión que resulta necesaria la distinción ; pero entonces éstas cuestan tanto trabajo que hacen inútil la ventaja de ahorrarse esta última división de m_a por μ_a que exige la [3].

CAPÍTULO II

Nociones sobre los vectores

§ 49. **Vectores.** En sentido estricto, *vector* es sinónimo de segmento orientado $\vec{V} = \overrightarrow{AB}$ (fig. 91) ; es decir, vector es un segmento en el cual son distintos, o sea, no confundibles, el punto de origen A y el punto extremo B. Tal segmento tiene una longitud AB, una *dirección* (la de la recta r sobre la que yace $\overrightarrow{AB}$) y un *sentido* (el de A hacia B). A es el *punto de aplicación*, r es la *recta de acción* del vector.

Si la longitud AB se considera desprovista de signo, constituye el *módulo* $|V|$ del vector $\vec{V}$. Pero si r tiene un sentido, en particular si es un eje cartesiano, se convendrá en que la medida de la longitud AB sea positiva o negativa, según que el sentido de $\vec{V} = \overrightarrow{AB}$ concuerde o no con el sentido de r; en tal caso, la magnitud física «longitud AB», en valor y signo, se llamará *magnitud* V del vector $\vec{V}$ respecto al eje r.

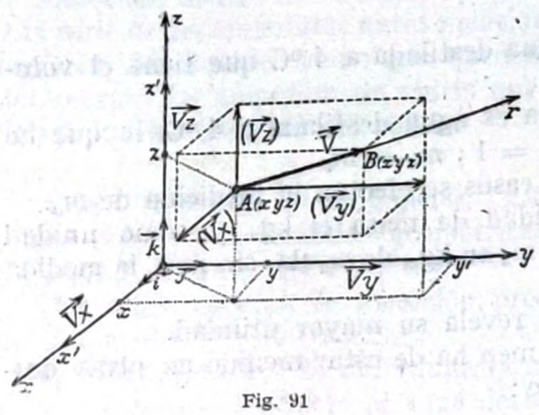


Fig. 91

Muchas propiedades de un vector no dependen de su punto de aplicación; por ser los vectores $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ (fig. 92), iguales en módulo, dirección y sentido, son indiscriminables; respecto de tal propiedad el vector es *no aplicado*. Pero habrá propiedades que sólo son independientes del punto de aplicación cuando éste permanece sobre la recta de acción r (fig. 91); entonces el *vector* se llama *deslizante*. Finalmente, ciertas propiedades dependen precisamente del punto de aplicación; con relación a este punto, el *vector* se llama *aplicado*.

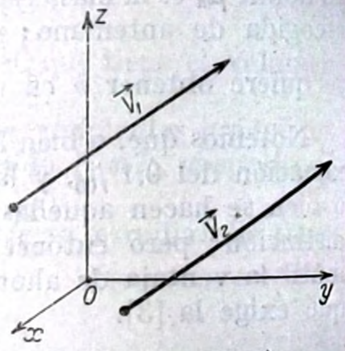


Fig. 92

Adoptando un sistema de tres ejes cartesianos octogonales, el segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ queda determinado por las coordenadas x, y, z, del punto de aplicación A y las x', y', z' del extremo B (1). Las proyecciones de $\vec{V} = \overrightarrow{AB}$ sobre los ejes son tres vectores $\vec{V}_x$, $\vec{V}_y$, $\vec{V}_z$ que se llaman *vectores componentes* del vector $\vec{V}$ según los tres ejes; también se da este nombre a los vectores $(\vec{V}_x)$, $(\vec{V}_y)$, $(\vec{V}_z)$, aplicados en A.

Las magnitudes de estos vectores (cada uno sobre su propio eje) son, *en valor* y *signo*:

$$V_x = x' - x\,; \qquad V_y = y' - y\,; \qquad V_z = z' - z, \qquad [1]$$

(1) Para determinar un vector no puede prescindirse de un sistema de referencia; por ejemplo, del sistema de ejes cartesianos perpendiculares que hemos supuesto. Pero en el cálculo vectorial se puede prescindir del sistema de referencia al estudiar las propiedades que no dependen del mismo. Estas propiedades resultan *invariantes* cuando se emplea un sistema de referencia. Ejemplos: ángulo de dos vectores, magnitud de la resultante de dos vectores; ángulo que la resultante forma con cada uno de los vectores componentes; etc.

y se denominan *componentes* del vector $\vec{V} = \overrightarrow{AB}$ respecto a los tres ejes.

En particular, si $\overrightarrow{AB}$ coincide con uno de los ejes cartesianos (por ejemplo, con el x), se tendrá que $\vec{V} = \overrightarrow{AB} = \vec{V}_x$; $|V_x| = |x' - x|$ es el módulo de tal vector, y $V_x = x' - x$ es su medida en valor y signo.

Un segundo método para determinar un vector *(aplicado)* $\vec{V} = \overrightarrow{AB}$ es dar el punto de aplicación A, es decir, sus coordenadas x, y, z, y la orientación. Si el vector no es aplicado, el módulo $|V|$ y la orientación son suficientes para determinarlo.

La orientación con respecto a los tres ejes de referencia viene determinada por los cosenos directores: $\cos(x\,V)$, $\cos(y\,V)$, $\cos(z\,V)$, siendo $(x\,V)$, $(y\,V)$, $(z\,V)$ los ángulos que forma $\vec{V}$, respectivamente, con los ejes x, y, z. Se tiene:

$$\cos^2(x\,V) + \cos^2(y\,V) + \cos^2(z\,V) = 1. \qquad [2]$$

De los tres cosenos directores, sólo dos son independientes, en virtud de la relación [2].

Se tiene:

$$\left.\begin{aligned} V_x &= x' - x = |V|.\cos(x\,V) \\ V_y &= y' - y = |V|.\cos(y\,V) \\ V_z &= z' - z = |V|.\cos(z\,V) \end{aligned}\right\} \qquad [3]$$

Luego, quedan así también determinadas las componentes V_x, V_y, V_z del vector y las coordenadas x', y', z' de su extremo B.

Un tercer modo de determinar el vector *(aplicado)* $\vec{V} = \overrightarrow{AB}$ consiste, en fin, en dar su punto de aplicación, es decir, las coordenadas de este punto x, y, z, y sus componentes V_x, V_y, V_z. Si el vector no es aplicado, basta dar sus componentes V_x, V_y, V_z. Entonces vienen determinados $|V|$ y los cosenos directores por las fórmulas:

$$\left.\begin{aligned} |V| &= \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \\ \cos(x\,V) &= \frac{X}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}} \\ \cos(y\,V) &= \frac{Y}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}} \\ \cos(z\,V) &= \frac{Z}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}} \end{aligned}\right\} \qquad [4]$$

El *punto de aplicación*, la *orientación* y los *componentes* de un vector son conceptos relativos, puesto que varían al cambiar el sis-

tema de ejes de referencia El módulo $|V|$ del vector es, por el contrario, independiente de los ejes de referencia.

En sentido lato se llama en Física *vector* a toda *magnitud física vectorial*. De hecho, las magnitudes físicas han de dividirse en magnitudes *escalares* (por ejemplo, la masa de un cuerpo) y magnitudes *vectoriales* (por ejemplo, el corrimiento de un punto).

Se individualiza por completo un escalar indicando la especie (§ 5), la medida y la unidad; por ejemplo: masa de 30 g_m, carga eléctrica de — 20 microcoulomb (carga «resinosa» a la que conviene atribuir el signo —).

Pero el *corrimiento* de un punto, que es el segmento orientado individualizado por la posición inicial y la posición final de aquél, no queda definido cuando se indica su valor (por ejemplo, 7 cm); es menester establecer, además, la dirección y el sentido.

Así son magnitudes vectoriales la *velocidad* de un punto, la *velocidad de rotación*, la *fuerza* aplicada a un punto, el *momento magnético* de un imán, la *corriente eléctrica* .....

Cada una de dichas magnitudes vectoriales, más que «ser un vector», como se dice por razones de comodidad, *está representada por un vector*, esto es, por un segmento orientado, que, con su dirección y sentido, recuerda los elementos orientadores de la magnitud vectorial (¿cuáles serán, éstos, por ejemplo, en la velocidad de rotación?; véase § 76, *b*]); la longitud de tal segmento indica, según una escala a propósito, el módulo del vector. Por ejemplo, la velocidad de 30 $\frac{m}{seg}$ se indicará mediante una flecha (segmento orientado) cuya longitud sea de 30 cm, cuando se convenga que 1 cm del segmento orientado representa 1 $\frac{m}{seg}$ de velocidad.

También un corrimiento $\overrightarrow{AB}$, que en sentido estricto ya es un vector, es una magnitud física vectorial que puede ser representada mediante un vector paralelo y concorde con $\overrightarrow{AB}$, según una escala conveniente; por ejemplo, 1 cm del vector puede representar un metro de corrimiento efectivo $\overrightarrow{AB}$.

Esta representación geométrica de las magnitudes físicas vectoriales por medio de vectores es muy útil y justifica este capítulo.

En todos estos casos físicos no tienen ningún interés las coordenadas del punto P (fig. 91), extremo del segmento representativo de la magnitud vectorial. Pero, en cambio, son interesantes las coordenadas x, y, z, del punto en el que se supone aplicado el vector, el módulo $|V|$, las componentes V_x, V_y, V_z, o bien los cosenos directores. $\vec{V}$ y sus componentes vectoriales $\vec{V}_x$, $\vec{V}_y$, $\vec{V}_z$ son magnitudes de la misma especie; por ejemplo, $\vec{V}_x$, proyección sobre el eje x de

una velocidad, $\vec{V}$, también es una velocidad; por lo tanto, $|V|$, V_x, V_y, V_z, deberán medirse en la misma unidad (por ej.: $\frac{m}{seg}$ para la velocidad) y representarse en la misma escala (por ej.: 1 cm por cada $\frac{cm}{seg}$). Así, en la figura, la proyección sobre un eje x del segmento representante orientado $\vec{V}$ será un segmento orientado que represente, sin más, $\vec{V}_x$.

Por esto, *dar un vector* (aplicado) significará para nosotros determinarlo mediante el segundo o el tercer método antes expuestos; esto es, indicando el punto de aplicación, el módulo y los cosenos directores, o bien indicando el punto de aplicación y los componentes.

Para fijar las ideas, supondremos que los vectores considerados representan, en una escala determinada, fuerzas aplicadas a un punto; por lo tanto, son vectores aplicados.

Pero también encontraremos magnitudes vectoriales para las que no tiene físicamente ningún interés el punto de aplicación. Así, en el equilibrio de los cuerpos rígidos (§ 105), se verá que el punto de aplicación puede imaginarse trasladado a lo largo de la recta de aplicación de la fuerza; el momento de un par es un vector cuyo punto de aplicación puede trasladarse a cualquier punto (§ 108), es decir, es un vector *no aplicado*.

§ 50. **Suma de vectores.** Sean dos vectores aplicados, por ejemplo, en A (fig. 93); para fijar las ideas, supondremos que actúan simultáneamente en A dos fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, de componentes F_{1x}, F_{1y}, F_{1z}; para simplificar, se suponen las fuerzas en el plano $x\,y$, que es el de la figura. Definiremos como su *suma* o *resultante*, al vector $\vec{F}$, determinado por la diagonal del paralelogramo:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}. \qquad [1]$$

Esta definición de *suma* está justificada por consideraciones de orden matemático y físico.

a] La operación geométrica con la cual se obtiene la suma $\vec{F}$ *(regla del paralelogramo)* goza de las propiedades asociativa, conmutativa, etc., de la suma ordinaria; además, por un conocido teorema relativo a las proyecciones, proyectando el paralelogramo de la figura 93 sobre cada uno de los ejes cartesianos de referencia, se tiene, respectivamente (en el espacio):

$$F_x = F_{1x} + F_{2x}, \qquad F_y = F_{1y} + F_{2y}, \qquad F_z = F_{1z} + F_{2z}; \qquad [2]$$

por lo tanto, las componentes F_x, F_y, F_z, del vector suma, son la suma de las componentes homólogas de los vectores sumandos.

b] Físicamente, el experimento del *paralelogramo de las fuerzas* demuestra que la fuerza única equivalente a dos fuerzas dadas se obtiene mediante la construcción de la figura 93. Análogas consideraciones físicas sirven también para justificar la definición de suma en el caso de otras magnitudes diferentes de la fuerza.

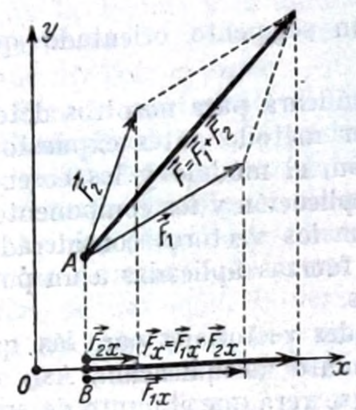


Fig. 93

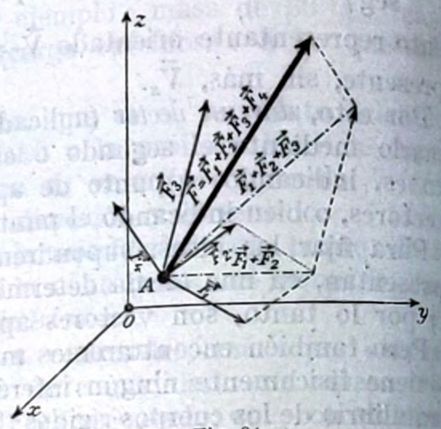


Fig. 94

La definición de suma se extiende al caso de n vectores $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, ... $\vec{F}_n$, aplicados al punto A.

La suma o resultante de los n vectores se obtiene componiendo los dos primeros para obtener su vector resultante, luego componiendo este resultante con el tercer vector, y así sucesivamente (fig. 94); se obtiene así la regla del *polígono* de los vectores y, como caso particular, del *polígono de las fuerzas*. Empleando las componentes, resulta :

$$\left.\begin{aligned} F_x &= F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} \ldots\ldots + F_{nx} \\ F_y &= F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} \ldots\ldots + F_{ny} \\ F_z &= F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} \ldots\ldots + F_{nz} \end{aligned}\right\} \qquad [3]$$

Tanto geométricamente como a partir de estas fórmulas, se ve en seguida que tal suma goza de las propiedades conmutativa y asociativa.

Observemos que, en particular, se tiene (fig. 91) :

$$\vec{V} = (\vec{V}_x) + (\vec{V}_y) + (\vec{V}_z) \qquad \text{(¡suma vectorial!)} \qquad [4]$$

Y también escribiremos, aunque $\vec{V}_x$, $\vec{V}_y$, $\vec{V}_z$ sean vectores no aplicados a un mismo punto :

$$V = V_x + V_y + V_z, \qquad [5]$$

porque, efectivamente, se deducen las mismas relaciones escalares [3] tanto de la [4] como de la [5].

En particular, para una fuerza es :

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z.$$

Viceversa: dado un vector [por ejemplo, una fuerza $\vec{F}$ (fig. 93)] y dos direcciones formando un plano con él, la regla del paralelogramo permite *descomponer* el vector $\vec{F}$ en dos *componentes*. En el espacio, dado un vector (por ejemplo, una fuerza $\vec{F}$) y tres direcciones (por ejemplo, las de los tres ejes cartesianos perpendiculares, figura 91), se puede descomponer el vector $\vec{F}$ en tres componentes, que son las aristas concurrentes de un paralelepípedo, cuya diagonal es $\vec{F}$.

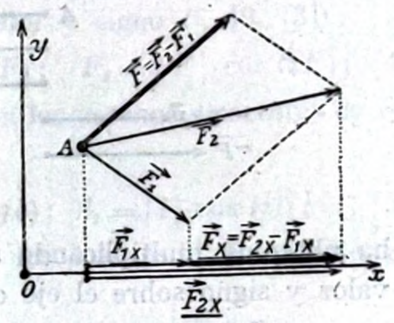


Fig. 95

Cada una de estas componentes puede luego descomponerse. Es, pues, posible descomponer un vector en n componentes.

§ **51. Diferencia de vectores.** Dados dos vectores $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ (por ejemplo, dos fuerzas aplicadas al punto A), se llama *diferencia* $\vec{F}_2 - \vec{F}_1$ de los dos vectores a un tercer vector $\vec{F}$, que, sumado con $\vec{F}_1$, dé $\vec{F}_2$. Se obtiene geométricamente el vector $\vec{F}$ mediante la construcción de la figura 95, o sea, en último análisis, con la misma regla del paralelogramo. Refiriéndonos a las componentes, se tiene :

$$F_x = F_{2x} - F_{1x}, \qquad F_y = F_{2y} - F_{1y}, \qquad F_z = F_{2z} - F_{1z}. \qquad [1]$$

Obsérvese que el vector diferencia puede resultar mayor (en módulo) que cada uno de los dos términos de la diferencia.

§ **52. Productos.** Se llama producto a cada una de las tres operaciones siguientes :

a] Dado el vector $\vec{F}$ (por ejemplo, una fuerza aplicada al punto A), se define como producto $m \cdot \vec{F} = \vec{F} \cdot m$ de un escalar m por un vector $\vec{F}$, al vector cuyo módulo es $|m| . |F|$ y cuya orientación es la misma que la de $\vec{F}$ u opuesta, según que m sea positivo o negativo. Así, en la figura 96 se indica una fuerza $\vec{F}$ de 20 dinas (escala : 1 mm por cada dina) aplicada al punto A ; y se representan debajo los vectores :

$$0{,}5 \cdot \vec{F}\,; \qquad 2{,}5 \cdot \vec{F}\,; \qquad -0{,}8 \cdot \vec{F}\,; \qquad -1 \cdot \vec{F}.$$

En particular, el vector $-1\cdot\vec{F}=-\vec{F}$ es igual y opuesto al vector $\vec{F}$.

Este producto goza de las propiedades conmutativa y distributiva, como el producto de dos números.

Si se escoge un vector unidad $\vec{i}$ sobre el eje cartesiano x (fig. 91), es decir, un vector orientado como el eje x, y de módulo 1, cualquier otro vector $\vec{V}_x$, coincidente con el eje x, puede imaginarse que se

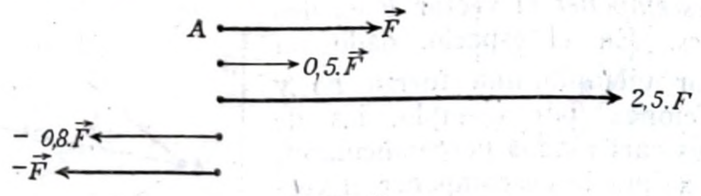


Fig. 96

ha obtenido multiplicando su magnitud $V_x=x'-x$, medida en valor y signo sobre el eje de las x, por el vector unitario $\vec{i}$:

$$\vec{V}_x=V_x\cdot\vec{i}. \qquad [1]$$

Por lo tanto, la expresión [5] del § 50 se puede escribir en la forma más corriente:

$$\vec{V}=V_x\cdot\vec{i}+V_y\cdot\vec{j}+V_z\cdot\vec{k}, \qquad [2]$$

en la cual $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ son los vectores unidad o *versores* correspondientes a los tres ejes x, y, z.

b] **Producto interno o producto escalar.** El punto A_1 (fig. 97) describe el segmento $\overrightarrow{A_1A_2}=\vec{l}$, mientras se le aplica la fuerza continua y constante $\vec{F}$. El trabajo $\mathfrak{L}$ de la fuerza $\vec{F}$ a lo largo del camino $\vec{l}$ es, por definición, el producto del espacio $|l|$ (módulo del vector $\vec{l}$) por la fuerza $|F|$ (módulo del vector $\vec{F}$) y por el coseno del ángulo comprendido φ:

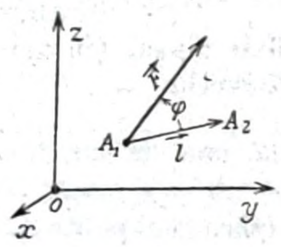


Fig. 97

$$\mathfrak{L}=|l|\cdot|F|.\cos\varphi\,.$$

Se dice que el *escalar* $\mathfrak{L}$, positivo o negativo, según sea φ agudo u obtuso, es el *producto escalar* o *producto interno* de los dos vectores $\vec{F}$ y l, y se escribe:

$$\mathfrak{L}=\vec{F}\cdot\vec{l}=\vec{l}\cdot\vec{F}=|l|\cdot|F|\cdot\cos\varphi=|l|\cdot F_n. \qquad [3]$$

en donde F_n es, en valor y signo, la componente de $\vec{F}$ a lo largo de un eje paralelo y concorde con $\vec{l}$.

Si los dos vectores, como hemos supuesto, son la fuerza y el camino, el producto escalar mide un trabajo: he aquí un ejemplo que demuestra la importancia que tiene en Física este producto de dos vectores.

Sean F_x, F_y, F_z las componentes de $\vec{F}$ sobre los tres ejes cartesianos de referencia; $\vec{l}_x$, $\vec{l}_y$, $\vec{l}_z$ son las componentes de $\vec{l}=\overrightarrow{A_1A_1}$ sobre los mismos ejes. Se tiene, en valor y signo (§ 49, [3]):

$$F_x=|F|\cdot\cos(xF);\quad F_y=|F|\cdot\cos(yF);\quad F_z=|F|\cdot\cos(zF); \qquad [4]$$

en donde $\cos(xF)$, $\cos(yF)$, $\cos(zF)$ son los cosenos directores de $\vec{F}$.

Análogamente:

$$l_x=|l|\cdot\cos(xl);\quad l_y=|l|\cdot\cos(yb);\quad l_z=|l|\cdot\cos(zl); \qquad [5]$$

en donde $\cos(xl)$, $\cos(yl)$, $\cos(zl)$ son los cosenos directores de φ. Pero se tiene:

$$\cos\varphi=\cos(xF)\cdot\cos(xl)+\cos(yF)\cdot\cos(yl)+\cos(zF)\cdot\cos(zl).$$

Luego, la [3], mediante esta última fórmula y recordando las [4] y [5], da:

$$\mathfrak{L}=F_x\cdot l_x+F_y\cdot l_y+F_z\cdot l_z \qquad [6]$$

que es la expresión del producto interno, valiéndose de las componentes.

Tanto a partir de la [3] como de la [6], se ve que el producto interno goza de la propiedad conmutativa.

La [6] permite demostrar la validez de la propiedad distributiva. En efecto, sean dos fuerzas $\vec{F}_1$ (F_{1x}, F_{1y}, F_{1z}) y $\vec{F}_2$ (F_{2x}, F_{2y}, F_{2z}) aplicadas al punto A_1, cuyo resultante será $\vec{F}$ $[(F_{1x}+F_{2x}), (F_{1y}+F_{2y}), (F_{1z}+F_{2z})]$.

Se tiene:

$$\mathfrak{L}_1=F_{1x}\,l_x+F_{1y}\,l_y+F_{1z}\,l_z;$$
$$\mathfrak{L}_2=F_{2x}\,l_x+F_{2y}\,l_y+F_{2z}\,l_z$$

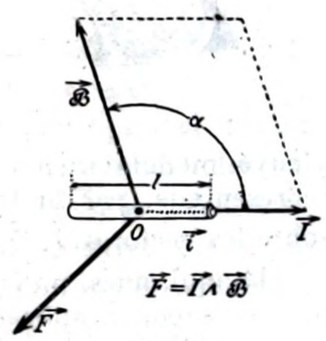


Fig. 98

Luego:

$$\left.\begin{aligned}\vec{F}_1\vec{l}+\vec{F}_2\vec{l}=\mathfrak{L}_1+\mathfrak{L}_2=(F_{1x}+F_{2x})\,l_x+(F_{1y}+F_{2y})\,l_y+\\+(F_{1z}+F_{2z})\,l_z=(\vec{F}_1+\vec{F}_2)\cdot\vec{l}\end{aligned}\right\} \qquad [7]$$

La demostración puede aplicarse al caso de n componentes $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, ... $\vec{F}_n$.

Físicamente, la suma de los trabajos de las fuerzas aplicadas es igual al trabajo de la resultante de estas fuerzas.

c] **Producto externo o producto vector.** Fijémonos aún en el caso de dos vectores que tengan una significación física determinada.

Sea un elemento rectilíneo de conductor de longitud l (fig. 98) recorrido por una corriente de intensidad i. El producto $l \cdot i$ se puede tomar como medida de un vector $\vec{I} = (\vec{l \cdot i})$ que tiene la misma dirección que l y el sentido de i.

El conductor se encuentra en un campo magnético de intensidad $\vec{\mathfrak{B}}$.

Más exactamente, $\vec{\mathfrak{B}}$ es la *inducción magnética* (véase tomo II) en los puntos del conductor l. Demuestra la experiencia que el conductor se encuentra entonces sometido a una fuerza $\vec{F}$ perpendicular al plano $(I, \vec{\mathfrak{B}})$, dirigida en el sentido que da la regla de FLEMING, llamada de los tres dedos de la mano izquierda, ilustrada en la figura 99, y cuyo módulo viene dado por el producto $|I| \cdot |\mathfrak{B}| \cdot |\text{sen } \alpha|$, y representada, por lo tanto, por el área del paralelogramo trazado sobre los vectores $\vec{I}, \vec{\mathfrak{B}}$.

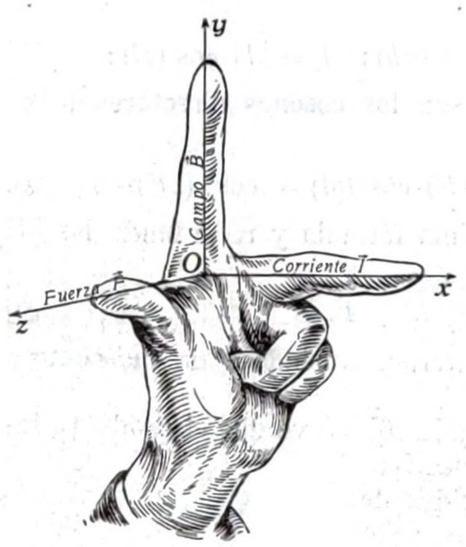


Fig. 99

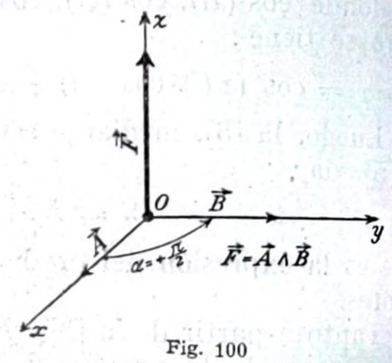


Fig. 100

He aquí, pues, un caso (y no es el único) en que dos vectores, $\vec{A}$, $\vec{B}$ (que se suponen aplicados a un mismo punto O), sirven para determinar un nuevo vector, $\vec{F}$, perpendicular al plano $(\vec{A}, \vec{B})$, de módulo $|F| = |A| \cdot |B| \cdot |\text{sen } \alpha|$, en donde α es el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

El sentido del vector $\vec{F}$ viene dado por la regla de FLEMING o también por la llamada «regla del hombre», de AMPERE: Si el vector $\vec{F}$ atraviesa, en el sentido que va de los pies a la cabeza, a un hombre que está de pie en O sobre el plano $(\vec{A}, \vec{B})$, este hombre debe hacer girar sus pies en sentido contrario al de las agujas de un reloj

(sentido *antirreloj*, positivo) para que el vector $\vec{A}$ venga a colocarse en la dirección $\vec{B}$, girando un ángulo menor que π.

Se escribe:

$$\vec{F} = \vec{A} \wedge \vec{B}, \qquad [8]$$

y se dice que $\vec{F}$ es el *producto vector* o *producto externo* de $\vec{A}$ por $\vec{B}$.

Si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares entre sí, $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{F}$ (fig. 100), determinan, por su orden, la terna de ejes cartesianos en el espacio x, y, z, generalmente adoptada por nosotros (terna *sinistrorse*, antirreloj, positiva o directa).

En particular, los tres vectores unidad $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, correspondientes a una terna de ejes ortogonales (fig. 91) dan origen a las siguientes igualdades:

$$\left.\begin{array}{c} \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}, \text{ y, por permutación circular, } \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}, \\ \vec{i} \wedge \vec{i} = 0, \quad \vec{j} \wedge \vec{j} = 0, \quad \vec{k} \wedge \vec{k} = 0. \end{array}\right\} \qquad [9]$$

Se ve inmediatamente que el producto vector *no* goza de la propiedad conmutativa, pero se tiene:

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = -(\vec{B} \wedge \vec{A}). \qquad [10]$$

y aplicando la regla de FLEMING o «la del hombre» de AMPERE, los dos vectores $\vec{A} \wedge \vec{B}$ y $\vec{B} \wedge \vec{A}$ resultan efectivamente iguales y opuestos.

Especialmente:

$$\vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}, \text{ y, por permutación circular, } \vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}, \; \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}. \qquad [11]$$

Si los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$, se encuentran en el plano xy, el vector $\vec{F} = \vec{A} \wedge \vec{B}$ es perpendicular a este plano, es decir, paralelo al eje z; el ángulo α (menor que π), que $\vec{B}$ forma con $\vec{A}$, se toma positivo o negativo según que $\vec{A}$ deba girar en sentido positivo o negativo en el plano xy para coindidir, en dirección y sentido, con el vector $\vec{B}$; si la terna cartesiana es directa, $\vec{F} = |A| \cdot |B| \cdot \text{sen } \alpha$ es la magnitud, en valor y signo, del vector $\vec{F}$ a lo largo del eje z.

El producto vector goza de la propiedad distributiva:

$$\vec{A} \wedge (\vec{B}_1 + \vec{B}_2) = \vec{A} \wedge \vec{B}_1 + \vec{A} \wedge \vec{B}_2 \quad \text{(suma vectorial)}, \qquad [12]$$

y abreviadamente se dice que: «la resultante (suma vectorial) de los productos externos es el producto externo de la resultante».

Demostremos la [12]. Se puede suponer, sin perder la generalidad del razonamiento, que el vector $\vec{A}$ esté orientado a lo largo del eje x (fig. 101); que el plano $(\vec{A}, \vec{B}_1)$ sea el plano xy, y que el eje y concuerde con $\vec{B}_1$, es decir, forme con $\vec{B}_1$ un ángulo agudo; entonces el vector $\vec{F}_1 = \vec{A} \wedge \vec{B}_1$ tiene la orientación del eje de las z. El módulo $|F_1|$ de $\vec{F}_1$ es $|A| \cdot |B_1| \cdot \operatorname{sen}(AB_1) = |A| \cdot |B_{1n}|$, donde $|B_{1n}|$ es el módulo del vector $\vec{B}_{1n}$, proyección de $\vec{B}_1$ sobre el plano yz. Por la elección especial del plano xy, $\vec{B}_{1n}$ coincide con el semieje positivo de las y.

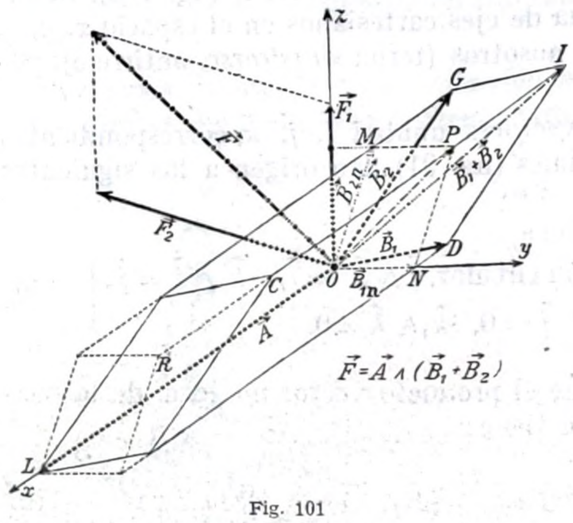


Fig. 101

Análogamente, sea $\vec{B}_{2n}$ el vector proyección de $\vec{B}_2$ sobre el plano yz. El producto vector $\vec{F}_2 = \vec{A} \wedge \vec{B}_2$ es perpendicular al plano $(\vec{A}; \vec{B}_2) = (\vec{A}; \vec{B}_{2n})$, que coincide con el plano yz, y es normal a $\vec{B}_{2n}$; además, se tiene $|F_2| = |A| \cdot |B_{2n}|$.

Luego, $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ determinan un paralelogramo semejante al paralelogramo construído sobre $\vec{B}_{1n}$ y $\vec{B}_{2n}$, que se obtiene de este último haciéndolo girar 90° alrededor de O en el plano yz y multiplicando los lados por $|A|$.

La resultante de los productos externos es $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ y se halla situada en el plano yz, como los vectores $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$.

Mostremos que $\vec{F}$ es también el producto externo de la resultante $\vec{B}_1 + \vec{B}_2$.

En el paralelogramo $ODGI$, el vector $\overrightarrow{OI}$ es la suma $\vec{B}_1 + \vec{B}_2$. Proyectando este paralelogramo sobre el plano yz, se tiene el paralelogramo $OMNP$; el vector $\overrightarrow{OP}$ es la suma vectorial $\vec{B}_{1n} + \vec{B}_{2n}$ y también la proyección $(\vec{B}_1 + \vec{B}_2)_n$ de la resultante $\vec{B}_1 + \vec{B}_2$; la proyección de la resultante es la resultante de las proyecciones.

Por lo tanto, el producto externo de la resultante $\vec{B}_1 + \vec{B}_2$ es un vector de magnitud igual al área $OLIC$ = área $OPLR$, esto es, de magnitud igual al producto de los módulos de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}_{1n} + \vec{B}_{2n}$; luego, es igual a $|A| \cdot |OP|$, perpendicular al plano LOP, y, por tanto, normal a OP. Resulta que el producto externo de la resultante se obtiene girando 90° el vector $\overrightarrow{OP} = \vec{B}_{1n} + \vec{B}_{2n}$

y multiplicándolo por $|A|$. Se deduce, de la indicada semejanza entre los dos paralelogramos $(\vec{B}_{1n}, \vec{B}_2)$, $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$, que este producto externo es precisamente la diagonal del paralelogramo $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$; luego, $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ es también el producto externo de la resultante, como se quería demostrar.

Se verá más adelante que el *momento* de una fuerza respecto a un punto tiene las características de un producto vector, y la propiedad asociativa ahora demostrada permitirá enunciar, sin más, el importante teorema siguiente: La resultante de los momentos de varias fuerzas respecto a un punto, es el momento, respecto a este punto, de la resultante de las fuerzas.

Recordando la [10] y la [12] se obtiene fácilmente:

$$(\vec{A}_1 + \vec{A}_2) \wedge \vec{B} = \vec{A}_1 \wedge \vec{B} + \vec{A}_2 \wedge \vec{B}, \qquad [13]$$

y con más generalidad:

$$\left.\begin{array}{c}(\vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3 + \ldots\ldots) \wedge (\vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \ldots\ldots) = \\ = \vec{A}_1 \wedge \vec{B}_1 + \vec{A}_1 \wedge \vec{B}_2 + \ldots\ldots + \vec{A}_2 \wedge \vec{B}_1 + \vec{A}_2 \wedge \vec{B}_2 + \ldots\ldots\end{array}\right\} \qquad [14]$$

Si A_x, A_y, A_z son las componentes del vector $\vec{A}$, y B_x, B_y, B_z, las del vector $\vec{B}$, se deduce de [2]:

$$\vec{A} = A_x \cdot \vec{i} + A_y \cdot \vec{j} + A_z \cdot \vec{k}; \qquad \vec{B} = B_x \cdot \vec{i} + B_y \cdot \vec{j} + B_z \cdot \vec{k};$$

luego:

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = A_x \cdot \vec{i} + A_y \cdot \vec{j} + A_z \vec{k}) \wedge (B_x \cdot \vec{i} + B_y \cdot \vec{j} + B_z \cdot \vec{k}).$$

Desarrollando según [14] y recordando las [9] y [11], se obtiene en seguida:

$$\left.\begin{array}{c}\vec{F} = \vec{A} \wedge \vec{B} = (A_y \cdot B_z - A_z \cdot B_y)\,\vec{i} + \\ + (A_z \cdot B_x - A_x \cdot B_z) \cdot j + (A_x \cdot B_y - A_y \cdot B_x) \cdot \vec{k}\end{array}\right\} \qquad [15]$$

o también:

$$\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}. \qquad [16]$$

Las tres componentes F_x, F_y, F_z del producto vector $\vec{F}$ son los

tres complementos algebraicos de $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, respectivamente, en el determinante [16]:

$$\left.\begin{aligned} F_x &= A_y \cdot B_z - A_z \cdot B_y \\ F_y &= A_z \cdot B_x - A_x \cdot B_z \\ F_z &= A_x \cdot B_y - A_y \cdot B_x \end{aligned}\right\} \qquad [17]$$

La simetría del determinante [16] permite recordar las fórmulas [17] sin inseguridad de signo; a este objeto puede servir también la regla mnemónica siguiente: En la primera componente de $\vec{A} \wedge \vec{B}$, el primer término $A_y B_z$ contiene tanto a A, B, como a y, z, en orden alfabético. Escrito dicho término, todos los restantes se recuerdan por su orden y con su signo sin ambigüedad ulterior.

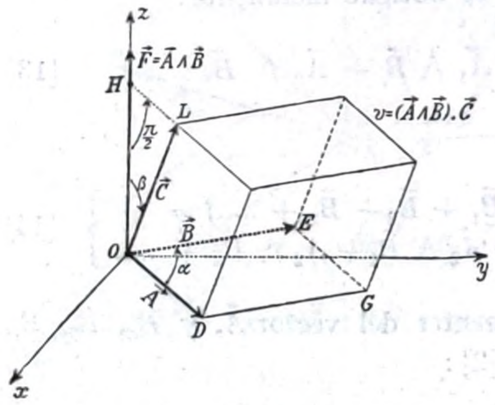


Fig. 102

§ **53. Producto triplo.** Se llama por definición *producto triplo* de los tres vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, aplicados, por ejemplo, en O (figura 102), el producto

$$(\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot C$$

Si $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ son tres segmentos orientados, es evidente el significado geométrico del producto triplo: $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ determinan un paralelepípedo; $\vec{F} = \vec{A} \wedge \vec{B}$ tiene por módulo el área de la base $ODEG$. Luego,

$$(\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{C} = \vec{F} \cdot \vec{C} = |F| \cdot |C| \cdot \cos\beta = |F| \cdot |OH|$$

es la medida del volumen v del paralelepípedo, porque $|OH| = |C| \cdot \cos\beta$ es la proyección de $\vec{C}$ sobre la normal z a la base $ODEG$, y, por tanto, la altura del paralelepípedo.

El volumen, dado por la expresión:

$$(\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{C} = |A| \cdot |B| \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot |C| \cdot \cos\beta = |A| \cdot |B| \cdot |C| \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta \quad [1]$$

puede resultar positivo o negativo, según que la terna $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ esté en el orden sinistrorse o dextrorse. Se tiene, pues:

$$(\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{C} = (\vec{B} \wedge \vec{C}) \cdot \vec{A} = (\vec{C} \wedge \vec{A}) \cdot \vec{B} =$$
$$= -(\vec{B} \wedge \vec{A}) \cdot \vec{C} = -(\vec{A} \wedge \vec{C}) \cdot \vec{B} = -(\vec{C} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{A},$$

porque estos seis productos representan siempre el volumen del mismo paralelepípedo, considerado unas veces como positivo y otras como negativo.

Si $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ tienen otro significado físico, es diferente el significado físico del producto triplo; por ejemplo: si en las condiciones de la figura 98 el conductor l se traslada según un trayecto $\vec{s}$, el producto triplo $(\vec{I} \wedge \vec{\mathfrak{B}}) \cdot \vec{s}$ representa el trabajo efectuado por la fuerza ponderomotriz del campo magnético $\vec{\mathfrak{B}}$ sobre el conductor recorrido por la corriente i. Si se subordina la unidad de medida de los volúmenes a la escala utilizada para representar mediante segmentos los tres vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, también en este caso el volumen del paralelepípedo construído sobre los segmentos representativos de los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, da la medida del producto triplo.

CAPÍTULO III

Cinemática

§ **54. Objeto de la cinemática.** La *cinemática* estudia los movimientos con relación al tiempo, sin tener en cuenta las causas que los producen.

La posición y el movimiento de un cuerpo o, simplemente, de un punto, son siempre relativos, porque sólo podemos establecer la posición de un punto o de un cuerpo y juzgar si ésta cambia o no, si adoptamos un sistema de referencia; por ejemplo, tres ejes cartesianos determinados.

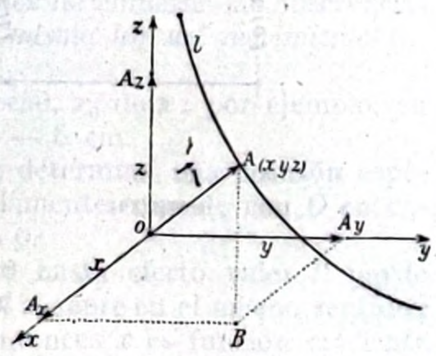


Fig. 103

Se establece la posición de un punto en una habitación dando sus coordenadas con respecto a los tres ejes que determinan los tres ángulos constituídos por las intersecciones de dos paredes contiguas y el pavimento. Decir que el punto A (fig. 103) *se mueve respecto a los ejes* x, y, z, equivale a decir que las coordenadas de A respecto a tales ejes, que son las que determinan su posición, varían con el tiempo: x, y, z son funciones del tiempo t:

$$x = x\,(t)\,; \qquad y = y\ (t)\,; \qquad z = z\,(t). \qquad [1]$$

También se puede decir que el vector $\overrightarrow{OA} = \vec{l}$, cuyas componentes son x, y, z, es función del tiempo.

En unos casos, es más cómoda la descripción vectorial del movimiento mediante el vector $\vec{l} = \vec{l}\,(t)$; en otros casos, resulta más adecuada la descripción cartesiana por medio de la [1].

El punto A describe en su movimiento una línea continua, y generalmente regular, que se llama la *trayectoria* del movimiento; ésta puede ser *rectilínea* o *curvilínea*, y se dice que el movimiento correspondiente es *rectilíneo* o *curvilíneo*.

Como en los otros capítulos de la Mecánica, nos limitaremos en éste a establecer los hechos experimentales fundamentales, y únicamente desarrollaremos la parte de la *cinemática del punto* que corresponde a los movimientos más sencillos e importantes que aparecen en Física.

A. — MOVIMIENTO DE UN PUNTO

§ 55. Movimiento rectilíneo. La trayectoria del punto móvil A es una recta l (fig. 104). Se fijan sobre l un origen O, un sentido positivo y una unidad de medida; de este modo, l se convierte en un eje cartesiano x. Al moverse A, el vector $\overrightarrow{OA} = \vec{l}$ (fig. 103) coincide siempre con el eje x, y para determinar el movimiento basta dar la abscisa x del punto A en función del tiempo t. La forma de la función

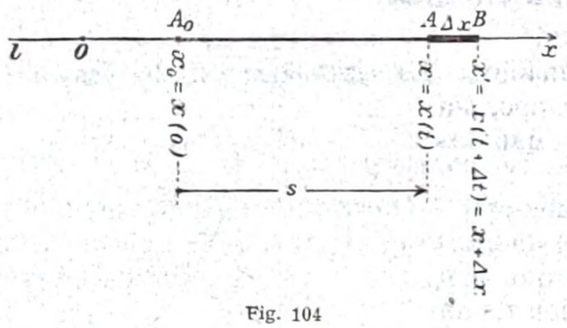


Fig. 104

$$x = x\,(t) \qquad [1]$$

fija la *ley del movimiento*, y también se llama *ecuación horaria*. Por ejemplo:

$$x = at + b\,; \qquad [2]$$

para la homogeneidad (§ 7), x y b son longitudes, y a resulta una longitud dividida por un tiempo, esto es, una velocidad; así, a su vez, $a \cdot t$ es una longitud.

La [2], ecuación entre magnitudes, sustituye a la expresión siguiente:

$$\mathrm{x}\ [l] = \mathrm{a} \cdot \frac{[l]}{[t]} \cdot \mathrm{t} \cdot [t] + \mathrm{b}\ [l]\,; \qquad [3]$$

de la cual, en unidades corrientes, se tiene la relación entre medidas:

$$\mathrm{x} = \mathrm{a} \cdot \mathrm{t} + \mathrm{b}. \qquad [4]$$

En un ejemplo numérico tendríamos que escribir, por ejemplo:

$$x\ \mathrm{cm} = 3\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{seg}} \cdot \mathrm{t\ seg} - 6\ \mathrm{cm}\,; \qquad [5]$$

en lugar de esto, se escribe la simple relación entre las medidas, en la forma siguiente:

$$x = 3 \cdot t - 6 \qquad \begin{matrix} t \text{ en seg}\,;\ x \text{ en cm}\,; \\ \text{de donde 6 son cm, 3 son } \frac{\text{cm}}{\text{seg}} \end{matrix} \qquad [6]$$

indicando aparte las unidades.

El instante $t = 0$ se llama *instante inicial*, porque físicamente suele ser el instante en que se empieza a observar el movimiento. Tomando valores negativos de t, la función [1] permite calcular las posiciones que ocupaba el punto A antes de empezar las observaciones, *suponiendo que A obedeciese a la misma ley del movimiento incluso antes del instante inicial.*

Para $t = 0$, la [1] da un valor especial, x_0 de x; por ejemplo, en la [2]: $x_0 = b$; en las [5], [6]: $x_0 = -6$ cm.

Este valor especial x_0 de la abscisa determina una posición especial A_0 de A *(posición inicial)*, que solamente coincide con O en casos particulares, y entonces es: $x_0 = 0$.

Aumentando el tiempo desde $t = 0$ hasta cierto valor t, puede suceder que el punto A se mueva sobre l siempre en el mismo sentido; por ejemplo, en el sentido positivo; entonces x es función creciente del tiempo. Si, además, se supone que A_0 coincide con el origen O, el segmento $A_0 A = OA$, medido mediante $x = x\,(t)$, representa el *espacio s recorrido* por A en el tiempo t, es decir, en el intervalo de tiempo que va desde $t = 0$ a $t = t$. Si el movimiento de A se efectúa todavía en sentido constante, pero A_0 no coincide con el origen, el espacio recorrido es $A_0 A$, es decir,

$$s = x\,(t) - x_0 + x\,(t). \qquad [7]$$

Pero si el sentido del movimiento no es constante, $x\,(t)$ y s no están en una relación tan sencilla. La ley del movimiento [1] da el espacio recorrido por el punto sólo en el caso particular que el origen O coincida con la posición inicial y que sea constante el sentido del movimiento.

Se representan, en un plano cartesiano, los tiempos t sobre el eje de abscisas (por ejemplo, cada segundo corresponde a 10 mm, figura 105) y los valores correspondientes de x en una escala adecuada sobre el eje de ordenadas (por ejemplo, cada centímetro de corrimiento de A sobre la recta l de la fig. 104 se representa por 0,8 cm en la fig. 105).

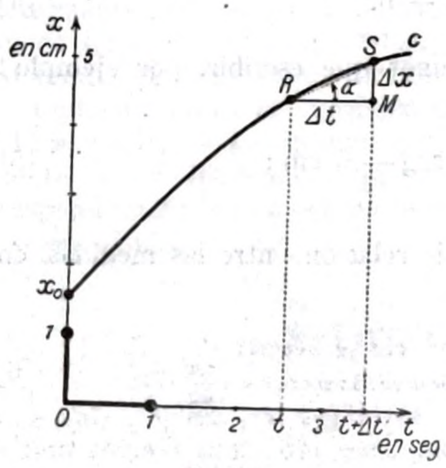


Fig. 105

La ley del movimiento $x = x\,(t)$ es la ecuación explícita de una curva c del plano (t, x), y la figura 105 es el *gráfico* que representa la ley del movimiento del punto A, aunque este movimiento se efectúa sobre la recta l de la figura 104.

En el caso especial [6], el movimiento es rectilíneo uniforme [figura 106, *a*)]. En la fig. 106, *b*) se da el gráfico tiempo-espacio correspondiente (escala de los tiempos, 11 mm por cada segundo; escala de los espacios, 11 mm por cada 5 cm). El gráfico es una recta que determina en el eje de las x (ordenadas) el segmento representativo de $x_0 = -6$ cm.

Si en el instante t el punto se halla en A (fig. 104), y después del breve tiempo Δt el punto se encuentra en B, será $AB = \Delta x$ *el espacio recorrido en el tiempo* Δt; por definición, $u_m = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ se llama *velocidad media* de A en el intervalo de tiempo Δt o en el trayecto AB.

La magnitud física «velocidad (media)» se deriva de las magnitudes fundamentales longitud y tiempo. Se tiene la ecuación dimensional:

$$[u] = \frac{[l]}{[t]} = [l \cdot t^{-1}]; \qquad [8]$$

en unidades coherentes, la unidad de velocidad está subordinada («derivada») a las de longitud y tiempo; por ejemplo, midiendo l en cm, t en seg, la velocidad tiene que estar medida en la unidad $[u] = \dfrac{\text{cm}}{\text{seg}}$.

En la figura 105, la velocidad media $u_m = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ viene dada por el cociente de las medidas de los dos catetos $\Delta x = MS$ y $\Delta t = RM$, según las unidades especiales de medida empleadas para construir el gráfico. Luego, es $u_m = \text{tg}\,\alpha$ *solamente cuando la unidad de longitud* (para nosotros: 1 cm) *sobre el eje de las ordenadas y la unidad de tiempo* (para nosotros: 1 seg) *sobre el eje de las abcisas están representadas*

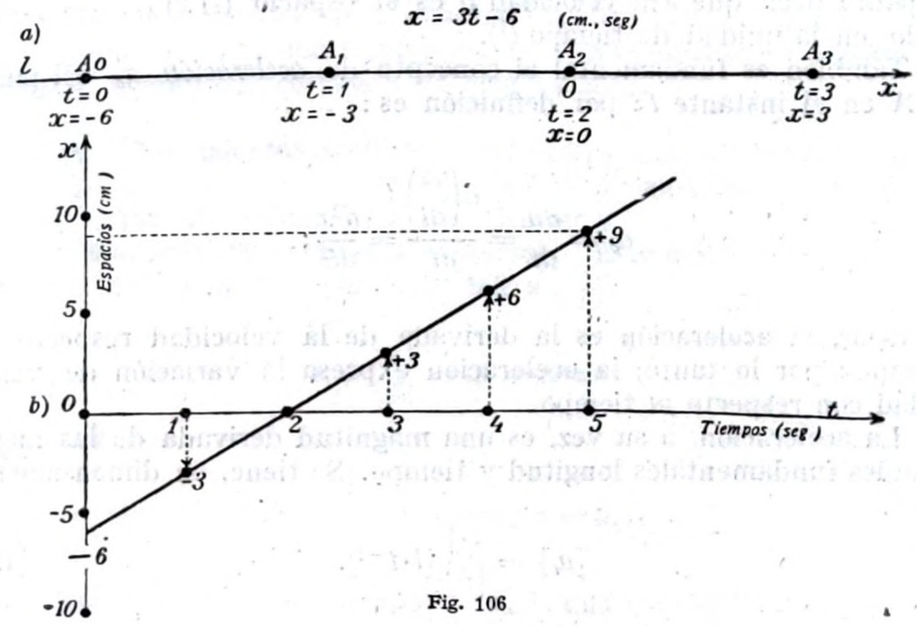


Fig. 106

por segmentos iguales. Esto no sucede casi nunca en la práctica, por lo cual tg α (fig. 105) *no* mide u_m: solamente es proporcional a u_m.

Si Δt tiende a cero, el cociente $\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ se convierte en la derivada de x respecto a t, que mide físicamente la *velocidad* u del punto A en el instante t:

$$u = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \qquad [9]$$

La velocidad puede definirse como «el espacio recorrido referido a la unidad de tiempo».

La velocidad positiva indica que x es función creciente de t, es decir, que A se mueve en el sentido fijado sobre l como positivo; y la velocidad negativa indica que x disminuye al aumentar el tiempo, siendo el sentido del movimiento opuesto al designado como positivo sobre l. En el gráfico de la figura 105 la curva c ascendente en el primer caso, y descendente en el segundo.

Cuando, para $\Delta t = 1$ [t], por ejemplo, para $\Delta t = 1$ seg, resulte $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ tan. próximo al valor límite u que pueda escribirse:

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} = (\Delta x)_{\Delta t = 1\,[t]}, \qquad [10]$$

se podrá decir que «la velocidad u es el espacio $(\Delta x)_{\Delta t = 1\,[t]}$ recorrido en la unidad de tiempo (1).

También es fundamental el concepto de *aceleración* a_c del punto A en el instante t; por definición es:

$$a_c = \frac{du}{dt} = \frac{d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; \qquad [11]$$

es decir, la aceleración es la derivada de la velocidad respecto al tiempo; por lo tanto, la aceleración expresa la variación de velocidad con respecto al tiempo.

La aceleración, a su vez, es una magnitud derivada de las magnitudes fundamentales longitud y tiempo. Se tiene, en dimensiones:

$$[a_c] = \frac{[l]}{[t^2]}\,[l \cdot t^{-2}]. \qquad [12]$$

En unidades coherentes, si se mide, por ejemplo, l en cm y t en seg, la aceleración tiene que medirse en la unidad $[a_c] = \frac{\text{cm}}{\text{seg}^2}$; a esta unidad del sistema CGS se le ha dado el nombre de *gal* en honor de GALILEO (2); tiene la aceleración de 1 gal un punto cuya velocidad aumenta en 1 cm por segundo en cada segundo.

La aceleración de la gravedad es $\approx 9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{seg}^2}$; porque un cuerpo que cae libremente en el vacío experimenta una variación de velocidad de $\approx 9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{seg}}$ en cada segundo.

(1) Aunque no perdiendo de vista que las exigencias de la homogeneidad no impiden llegar a la conclusión de que la velocidad es un espacio.

(2) Es de agradecer el homenaje al creador del método experimental, aunque hubiera sido más indicado reservar este nombre para una unidad de medida del sistema práctico y no darlo a una unidad del sistema $C\,G\,S$, como es el $\frac{\text{cm}}{\text{seg}^2}$. Sin embargo, el *gal* se usa mucho, especialmente en gravimetría; véanse §§ 174 ÷ 176.

También la aceleración es positiva o negativa, según el signo de $\frac{d^2x}{dt^2}$; si la aceleración y la velocidad son positivas, se tiene un movimiento acelerado, según el significado elemental, y este movimiento se efectúa en el sentido fijado como positivo sobre la recta l (fig. 104). Si la aceleración y la velocidad son negativas, se tiene un movimiento acelerado, según el significado elemental, pero el movimiento se efectúa en el sentido negativo de la recta l.

Cuando u y a_c tienen signo opuesto, el movimiento es retardado, según el significado corriente de esta palabra.

§ **56. Movimientos rectilíneos más importantes.** Se caracteriza cada uno de ellos por la forma de la ley del movimiento, es decir, por la forma de la función x del tiempo t.

a] **Movimiento rectilíneo uniforme.** Este movimiento, por definición, tiene constante la velocidad u:

$$u = \frac{dx}{dt} = u_c = \text{const.} \qquad [1]$$

Integrando:

$$x = \int_t u_0 \cdot dt;\ \text{o sea,}\ x = u_0 \cdot t + x_0; \qquad [2]$$

x es *función* lineal del tiempo, y x_0 es una constante arbitraria de la integración y establece la «posición inicial» del móvil.

No basta dar la velocidad u_0 de un movimiento uniforme sobre un eje x para determinarlo completamente; se necesita, además, indicar la posición inicial x_0 del móvil.

El gráfico de este movimiento es una recta cuya pendiente es u_0 cuando las unidades de longitud y de tiempo corresponden a segmentos iguales sobre los dos ejes; de otro modo, la pendiente es proporcional a u_0. En la figura 106 se representan el movimiento efectivo [fig. 106, *a*)] y su gráfico [fig. 106, *b*)] en el caso [5], [6], § 55:

$$x = 3\,t - 6. \qquad \begin{matrix} t \text{ en cm} \\ t \text{ en seg} \end{matrix} \qquad [3]$$

Para $t < 0$ se obtienen a partir de [3] las abscisas que A hubiese ocupado antes de iniciarse la observación del movimiento, en el supuesto del que el movimiento preexistiera según la misma ley [3].

En el movimiento uniforme, que progresa siempre en el mismo sentido, el espacio recorrido s vale:

$$s = x - x_0 = u_0 \cdot t.$$

El movimiento rectilíneo uniforme es fundamental en física por constituir el movimiento de un punto material sobre el que no está aplicada ninguna fuerza.

b] **Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.** Por definición, es un movimiento cuya aceleración a_c es constante respecto al tiempo :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a_c = \text{const.} \qquad [4]$$

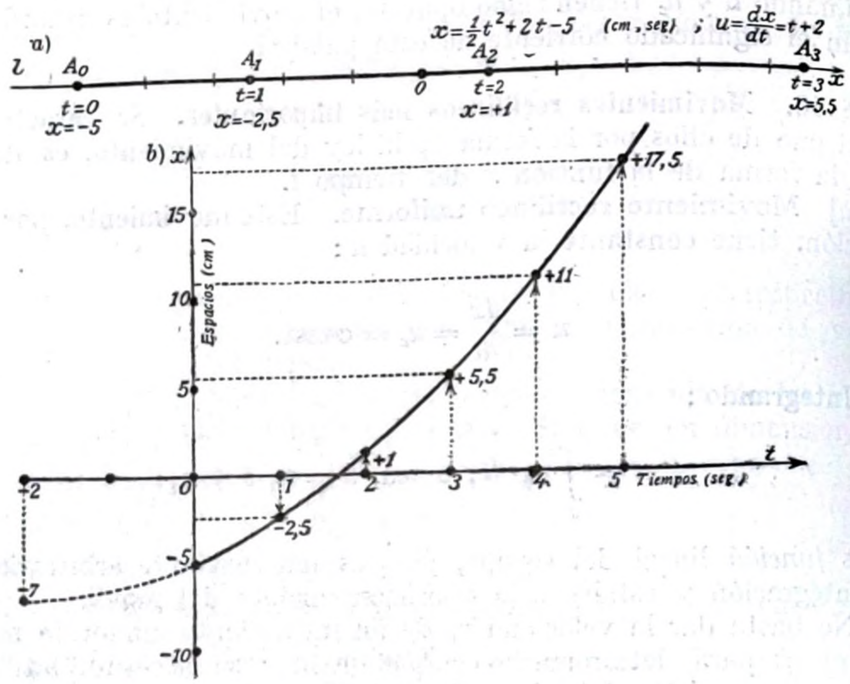


Fig. 107

La ley del movimiento, o sea, la función $x = x(t)$, debe ser tal que sea constante su segunda derivada con respecto a t.

Integrando [4] se tiene :

$$\frac{dx}{dt} = u = \int_t a_c \cdot d\,t = a_c \cdot t + u_0. \qquad [5]$$

En el movimiento uniformemente acelerado, la velocidad es función lineal del tiempo.

La constante aditiva u_0 es la *velocidad inicial*, esto es, la velocidad en el instante $t = 0$.

Integrando por segunda vez :

$$x = \int_t u \cdot dt = \int_t (a_c \cdot t + u_0)\, dt = \frac{1}{2}\, a_c \cdot t^2 + u_0 \cdot t + x_0. \qquad [6]$$

Así, pues, el movimiento se realiza sobre la recta l [fig. 107, *a*)], y la gráfica [fig. 107, *b*)] del movimiento uniformemente acelerado es una parábola cuya ecuación $x = x(t)$ viene dada por la [6] ; el eje de tal parábola es paralelo al eje de las x.

En la figura, la ecuación del movimiento (ecuación entre medidas, véase [6], § 55) es :

$$x = \frac{1}{2}\, t^2 + 2t - 5;$$

x en cm, t en seg ; por consiguiente, 5 son cm, 2 son $\frac{\text{cm}}{\text{seg}}$ y la aceleración a_c es 1 $\frac{\text{cm}}{\text{seg}^2}$; en la fig. 107, *a*), 1 cm de espacio recorrido está representado por 8,5 mm ; en la fig. 107, *b*), 11 mm sobre las abcisas representan 1 seg ; 11 mm sobre las ordenadas representan 5 cm de espacio.

El movimiento no queda completamente determinado cuando se da la aceleración constante a_c ; faltan todavía la posición inicial x_c y la velocidad inicial u_0 ; por ejemplo, si un grave cae siguiendo una vertical, se mueve con movimiento uniformemente acelerado, cuya aceleración, $g = 980$ $\frac{\text{cm}}{\text{seg}^2}$, es conocida. Pero para determinar el movimiento es preciso fijar aún en qué punto de la vertical se encontraba el grave en el instante inicial y cuál era su velocidad.

Si el origen O de las abscisas x en la recta l [fig. 107, *a*)] coincide con la posición inicial A_0 del móvil, se tiene la fórmula más sencilla :

$$x = \frac{1}{2}\, a_c \cdot t^2 + u_0 \cdot t. \qquad [7]$$

El movimiento es uniformemente acelerado o uniformemente retardado, en el significado elemental, según que a_c y u_0 sean del mismo signo o de signo opuesto. Además, la expresión [7] da el «espacio recorrido» desde el instante inicial $t = 0$ hasta un instante cualquiera t (> 0) únicamente cuando a_c y u_0 tienen el mismo signo (movimiento uniformemente acelerado, según el lenguaje corriente).

Éste es el caso de la figura. Si a_c y u_0 tienen signo opuesto, el móvil corre a lo largo de la recta l, a partir la posición inicial en el sentido dado por u_0, con movimiento uniformemente retardado hasta detenerse. De [5] se deduce, precisamente :

$$u = 0 \qquad \text{para} \qquad t = -\frac{u_0}{a_c}.$$

Después el punto A rehace el camino recorrido retrocediendo con movimiento uniformemente acelerado (porque entonces a_c y u tienen el mismo signo).

Si A_0 coincide con O (luego : $x_0 = 0$), y, además, la velocidad inicial es nula ($u_0 = 0$), la fórmula [6] se reduce simplemente a

$$x = s = \frac{1}{2} a_c \cdot t^2; \qquad [8]$$

y cuando a_c sea la aceleración de la gravedad, [8] es la fórmula elemental tan conocida de la caída de los graves en el vacío con velocidad inicial nula (caída *libre; movimiento naturalmente acelerado*).

La [8] da también el espacio recorrido.

En el caso [7], la parábola de la figura 107, *b*) pasa por el origen ; en el caso [8] tiene, además, su vértice en el origen.

Cualquier movimiento uniformemente acelerado puede tomar la forma sencilla [8] mediante un corrimiento conveniente del origen de los tiempos t y del origen de los espacios x.

c] **Movimiento armónico simple.** Viene definido por la ley del movimiento :

$$x = a \cdot \cos(\omega t + \varphi_0), \qquad [9]$$

en donde a, ω, φ_0 son constantes respecto a t. La velocidad con que crece el ángulo $\varphi = \omega t + \varphi_0$ con respecto al tiempo *(velocidad angular)* es :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega = \text{const.}, \quad [\omega] = \frac{[\varphi]}{[t]};$$

al aumentar el tiempo t, φ toma todos los valores desde φ_0 (para $t = 0$) en adelante, y $\cos(\omega t + \varphi_0)$ oscila entre $+1$ y -1 ; A [fig. 108, *a*)] se mueve sobre l a uno y otro lado entre los puntos M y N, de abscisas $+a$ y $-a$, respectivamente, según una ley sinusoidal : el gráfico del movimiento $x = x(t)$ [fig. 107, *b*)] es una sinusoide.

La longitud a se llama *amplitud* del movimiento armónico ; el valor $\varphi = \omega t + \varphi_0$ se llama *fase* en el instante t ; φ_0 es la *fase inicial* ; ω es la velocidad angular, cuyo significado geométrico veremos más adelante (§ 67) ; O es el *centro de oscilación* y x se llama también *elongación*.

En la figura, la ecuación del movimiento (ecuación entre medidas ; véase [6], § 55) es :

$$x = 30 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{12} t - \frac{\pi}{3}\right)$$

x en mm, t en seg, ángulos en radianes ; por consiguiente, 30 son mm, $\frac{\pi}{3}$ son radianes, $\frac{2\pi}{12}$ son $\frac{\text{rad}}{\text{seg}}$; la fig. 108, *a*), está en tamaño natural ; en la fig. 108, *b*), 4,5 mm sobre las abcisas representan 1 seg ; 0,5 mm sobre las ordenadas representan 1 mm de espacio.

Se tiene :

$$(-a) \cdot \cos\varphi = a \cdot \cos(\varphi \pm \pi);$$

es decir, un cambio de signo de la amplitud equivale a un *corrimiento de fase* igual a π. Luego, se puede siempre suponer $a > 0$ con tal de cambiar la fase inicial en $\pm \pi$.

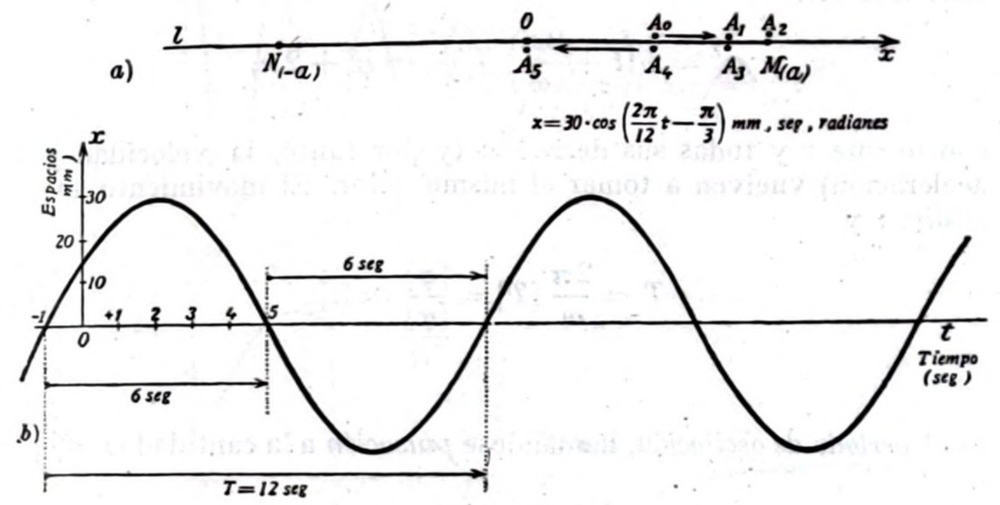


Fig. 108

La velocidad del movimiento en cada instante (1) vale :

$$u = \frac{dx}{dt} = -a \cdot \omega \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_0), \qquad [10]$$

de modo que también varía según una ley sinusoidal.

---

(1) cos φ, sen φ, razón de los lados de un triángulo rectángulo, son magnitudes sin dimensiones, y tenemos :

$$\frac{d\cos\varphi}{d\varphi} = -\text{sen}\,\varphi \qquad (\varphi \text{ en radianes});$$

pero, tomando también [φ] como dimensión de referencia, resulta entonces :

$$[\text{sen}\,\varphi] = [\varphi^{-1}]$$

Por consiguiente, en la [10] la ω del paréntesis tiene como dimensiones $[\omega] = [\varphi \cdot t^{-1}]$; pero ω como factor tiene las dimensiones $[\omega] = [t^{-1}]$, no distinguibles de $[\omega]$ más que en cuanto se ignore $[\varphi]$, porque en nuestro sistema de medidas carece de dimensiones.

La aceleración es:

$$a_c = \frac{d^2x}{dt^2} = -a\cdot\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2\cdot x. \qquad [11]$$

La aceleración varía también según una ley sinusoidal, y es en cada instante *proporcional a la elongación* x y opuesta a ésta. *Esta propiedad es característica del movimiento armónico.*

Si t aumenta en un valor constante $T = \frac{2\pi}{\omega}$, $\varphi = \omega t + \varphi_0$ se convierte en:

$$\varphi' = \omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \varphi_0 = \varphi + 2\pi,$$

con lo que x y todas sus derivadas (y por tanto, la velocidad y la aceleración) vuelven a tomar el mismo valor. El movimiento es *periódico*; y

$$T = \frac{2\pi}{\omega}\,[T] = \frac{[\varphi]}{\frac{[\varphi]}{[t]}} = [t] \qquad [12]$$

es el *período de oscilación*, llamándose *pulsación* a la cantidad $\omega = \frac{2\pi}{T}$;

$$\nu = \frac{1}{T} \qquad [13]$$

expresa el número de períodos T contenidos en la unidad de tiempo, y se llama *frecuencia de la oscilación*.

En la dinámica de las oscilaciones (§ 144) se pondrá $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$, pero será $[\omega] = [t^{-1}]$, y se encontrará un oscilación armónica como la [9], en donde $[\omega] = \varphi\cdot t^{-1}$.

Asimismo, veremos en el movimiento circular (§ 58) que la velocidad periférica es u con $[u] = [l\cdot t^{-1}]$; la velocidad angular es $\omega = [\varphi\cdot t^{-1}]$ y $u = \omega\cdot r$, pero ahora se tiene $[\omega] = [t^{-1}]$.

Estos inconvenientes dimensionales se eliminarían si se renunciase, por ejemplo, a la primera de las [22], § 6; es decir, si se considerasen de la misma especie los arcos a_r y las longitudes l ($a_r = l$), pero no los radios r de arcos y las longitudes l.

Señalemos aquí todavía otra curiosidad dimensional que puede traer alguna dificultad en la comprobación de la homogeneidad (véase tomo II, nota del § 527): en el plano, 2π es a veces magnitud sin dimensiones como relación entre la circunferencia y el radio r de un círculo, y otras veces está medida en radianes según el ángulo de rotación, y se debería escribir 2π rad para evitar el peligro de incongruencias dimensionales.

Se tiene:

$$[\nu] = [t^{-1}].$$

Si la unidad de tiempo es el segundo, la unidad de frecuencia correspondiente es el seg^{-1}: se llama *hertz*.

El movimiento armónico es el más sencillo e importante de todos los movimientos oscilatorios, razón por la cual también se llama *movimiento periódico simple* y *movimiento oscilatorio simple*. Se ha

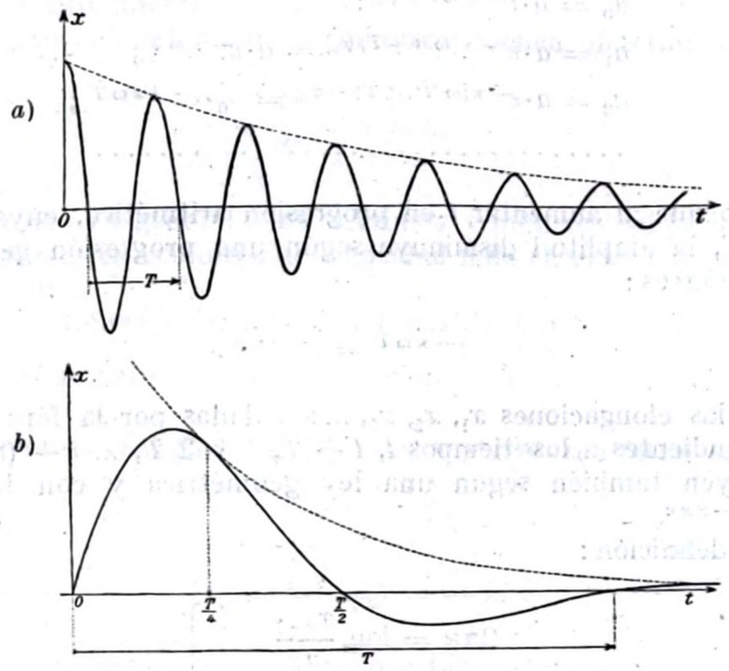


Fig. 109

llamado también *movimiento pendular*, porque es el que tiene un péndulo cuando realiza oscilaciones de amplitud pequeña (§ 144).

d] **Movimiento armónico amortiguado.** Viene definido por:

$$x = a\cdot e^{-\varkappa(\omega t + \varphi_0)}\cdot\cos(\omega t + \varphi_0); \qquad [14]$$

siendo $\varkappa$, ω, constantes positivas; φ_0 es la fase inicial; $\varkappa\cdot\varphi$ ha de ser un número puro; por lo tanto, es $[\varkappa] = [\varphi^{-1}]$; $\varkappa$, por más que carece de dimensiones, como φ, no es, sin embargo, un número puro, pues es el recíproco de un ángulo.

Puede imaginarse el movimiento [14] como un movimiento armónico cuya amplitud $a\cdot e^{-\varkappa(\omega t + \varphi_0)}$ no es constante, sino que disminuye, al crecer el tiempo, según una ley exponencial.

El gráfico (t, x) (fig. 109) es una sinusoide amortiguada; mucho más amortiguada en cada oscilación en el caso *b*) que en el caso *a*).

La amplitud disminuye exponencialmente con el tiempo como indica la curva de puntos.

También ahora puede definirse un período $T = \frac{2\varkappa}{\omega}$; si t aumenta en T, $2T$, $3T$....., cos $(\omega t + \varphi_0)$ va tomando cada vez el mismo valor, pero la amplitud de las vibraciones disminuye, valiendo sucesivamente:

$$a_0 = a \cdot e^{-\varkappa(\omega t + \varphi_0)};$$
$$a_1 = a \cdot e^{-\varkappa[\omega(t+T)\varphi_0]} = a \cdot e^{-\varkappa\omega T};$$
$$a_2 = a \cdot e^{-\varkappa[\omega(t+2T)+\varphi_0]} = a_0 \cdot e^{-2\varkappa\omega T};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

de modo que al aumentar t en progresión aritmética, cuya diferencia es T, la amplitud disminuye según una progresión geométrica, cuya razón es:

$$e^{-\varkappa\omega T} = e^{-2\pi\varkappa}.$$

Así, las elongaciones $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, dadas por la fórmula [14], correspondientes a los tiempos t, $t+T$, $t+2T$, ... $t+(n-1)T$, disminuyen también según una ley geométrica y con la misma razón $e^{-2\pi\varkappa}$.

Por definición:

$$\left.\begin{aligned} 2\pi\varkappa &= \log_e \frac{x_{n-1}}{x_n} \\ x &= \frac{1}{2\pi}\log_e \frac{x_{n-1}}{x_n} \\ 1 - e^{-2\pi\varkappa} &= \frac{x_{n-1}-x_n}{x_{n-1}} \end{aligned}\right\} \qquad [15]$$

llamándose respectivamente *decremento logarítmico*, *coeficiente de amortiguamiento* y *factor de amortiguamiento* de las oscilaciones del movimiento [14].

También es interesante considerar el producto $\varkappa \cdot \omega$, que tiene el significado de decremento logarítmico referido a la unidad de tiempo, en vez de referirse al período T; es $[\varkappa \cdot \omega] = [t^{-1}]$.

Este producto puede suponerse una medida de lo que podría llamarse «velocidad» del amortiguamiento; su recíproco $\frac{1}{\varkappa \cdot \omega}$ tiene las dimensiones de un tiempo y se llama *constante de tiempo* de la

amplitud del movimiento [14]: en el tiempo $\Delta t = \frac{1}{\varkappa \cdot \omega}$ la amplitud de la vibración se reduce en la relación e.

Es fácil observar que la curva [14] corta el eje de los tiempos del gráfico en puntos equidistantes $\left(\text{la equidistancia es } \frac{T}{2}\right)$; pero los máximos y mínimos *no* corresponden exactamente a los instantes $t_1, t_2, t_3, \ldots$, en los cuales cos $(\omega t + \varphi_0)$ toma los valores $+1$ ó -1, respectivamente.

En efecto, los máximos y mínimos vienen determinados por

$$\frac{dx}{dt} = u = 0.$$

Este hecho es general: los máximos y mínimos del gráfico (t, x) corresponden a los instantes de velocidad nula en el movimiento efectivo del punto.

Luego, se tienen máximos o mínimos de x para los valores $t_{\substack{\text{máx}\\\text{mín}}}$ del tiempo que satisfacen a la ecuación:

$$-\varkappa\omega \cdot e^{-\varkappa(\omega t+\varphi_0)} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) - \omega \cdot e^{-\varkappa(\omega t+\varphi_0)} \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0) = 0;$$

esto es para:

$$\operatorname{tg}(\omega t + \varphi_0) = -\varkappa, \qquad [16]$$

y no para sen $(\omega t + \varphi_0) = 0$, y, por tanto, tampoco para

$$\operatorname{tg}(\omega t + \varphi_0) = 0, \qquad [17]$$

como sucede en el movimiento armónico no amortiguado.

El intervalo entre un máximo y un mínimo sucesivos es todavía $\frac{T}{2}$, pero el intervalo entre un máximo (o mínimo) y el valor cero sucesivo es mayor que $\frac{T}{4}$.

Los valores $t_{\substack{\text{máx}\\\text{mín}}}$ dados por [16] son tanto menores que los valores $t_{\substack{\text{máx}\\\text{mín}}}$ dados en [17] cuanto mayor es el coeficiente de amortiguamiento $\varkappa$.

El movimiento oscilatorio de un péndulo es de hecho un movimiento armónico amortiguado, como consecuencia de los rozamien-

tos ; con mucha aproximación puede tomarse como ley de su movimiento la fórmula [14].

§ 57. Movimiento curvilíneo. Para mayor sencillez consideraremos un movimiento curvilíneo plano. Sea l la trayectoria dada (fig. 110) del movimiento.

Se fijarán un origen O en l, y un sentido positivo. La posición del punto A viene determinada por la longitud, en valor y signo, del arco $OA = l$; por lo tanto, l está medido en la unidad $[l]$; por ejemplo, m si se ha convenido en medir las longitudes en m. Si A se mueve, l es función del tiempo : $l = l\,(t)$.

Éste es el procedimiento más natural para definir un movimiento curvilíneo ; $\frac{dl}{dt}$ y $\frac{d^2l}{dt^2}$ miden, respectivamente, la velocidad y la aceleración del punto A a lo *largo de la trayectoria*.

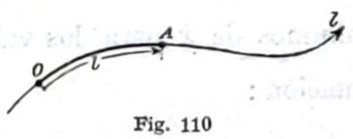


Fig. 110

Pero es mucho más conveniente determinar el movimiento de un modo vectorial.

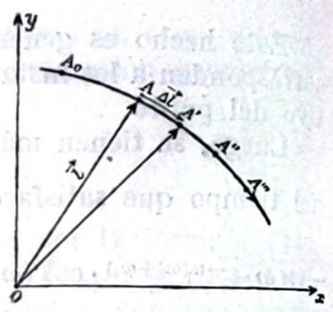


Fig. 111.

Si se conoce la ley según la cual varía con el tiempo el vector $\vec{l} = \overrightarrow{OA}$ (fig. 111), se conocerá el movimiento de A y, en particular, la trayectoria.

Además, la velocidad y la aceleración, que también son vectores, resultan determinadas de un modo más completo,

a] **Velocidad.** Si en el instante t el punto está en A, y en el instante $t' = t + \Delta t$ está en A', se habrá efectuado el corrimiento AA' en el tiempo Δt.

Si Δt es bastante pequeño, el arco AA' es prácticamente rectilíneo (1), y el corrimiento $\Delta \vec{l} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OA}$ es un vector (2) de longitud infinitesimal cuando también es infinitesimal $\Delta t = t' - t$.

$\frac{\Delta \vec{l}}{\Delta t}$ es un vector paralelo y del mismo sentido que $\Delta \vec{l}$.

El módulo de tal vector es $\left|\frac{\Delta l}{\Delta t}\right|$, donde $|\Delta l|$ es la longitud (en valor absoluto) del pequeño arco AA'. En el límite, para $\Delta t = 0$,

(1) Salvo en los puntos singulares de la trayectoria *(puntos de retroceso)*.

(2) $\Delta \vec{l}$ puede leerse « diferencia de los dos vectores $\vec{l}' = \overrightarrow{OA'}$ y $\vec{l} = \overrightarrow{OA}$ », o bien, « vector elemental $\Delta \vec{l} = \overrightarrow{AA'}$ ».

el vector $\vec{u} = \frac{d\vec{l}}{dt}$ resulta tangente en A a la trayectoria, dirigido en el sentido del movimiento, siendo su módulo $\left|\frac{dl}{dt}\right|$.

Así, la derivada $\frac{dl}{dt}$ mide, en valor y signo, la magnitud del vector velocidad del punto A, teniendo en cuenta el sentido fijado en l. La derivada $\vec{u} = \frac{d\vec{l}}{dt}$ da la velocidad de A en magnitud, dirección y sentido, es decir, de una manera más completa.

Puesto que $\Delta \vec{l} = \overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OA}$ (fig. 111), se puede escribir $\Delta \vec{l} = \Delta\,(\overrightarrow{OA})$ y, por tanto :

$$\vec{u} = \frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OA}}{t' - t}.$$

El vector $\vec{u}$, que se obtiene a partir del vector $\vec{l} = \overrightarrow{OA}$ mediante dicho paso al límite, se llama *derivada vectorial* de $\vec{l} = \overrightarrow{OA}$; luego, $\frac{d\vec{l}}{dt}$ puede también llamarse « derivada del vector $\vec{l}$ con respecto a t ».

Si el movimiento es plano, la posición del móvil A puede darse por medio de sus dos coordenadas cartesianas $x = x\,(t)$, $y = y\,(t)$. El corrimiento $\overrightarrow{AA'} = d\vec{l}$ se puede considerar resultante de los dos vectores $d\vec{x}, d\vec{y}$ (fig. 112), cuyas medidas dx, dy son las componentes de $d\vec{l}$.

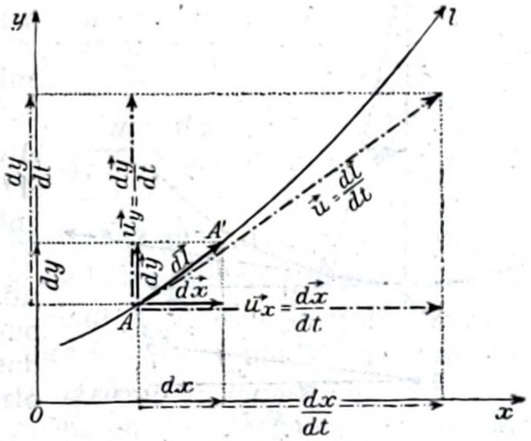


Fig. 112

Se tiene, pues :

$$\vec{u} = \frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{d\vec{x} + d\vec{y}}{dt} = \frac{d\vec{x}}{dt} + \frac{d\vec{y}}{dt} \qquad [1]$$

Los dos vectores $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u}_x$, $\frac{d\vec{y}}{dt} = \vec{u}_y$ son las componentes de la velocidad $\vec{u}$ según los ejes x, y ; sus magnitudes, en valor y signo,

$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ son las componentes de la velocidad $\vec{u}$. La velocidad $\vec{u}$ en el movimiento curvilíneo es la resultante de las velocidades que tienen las proyecciones del movimiento sobre sus ejes. Véase también § 66, *b*].

En el espacio vale una propiedad análoga: Si $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ son las ecuaciones que definen el movimiento del punto x, y, z, las componentes de su velocidad $\vec{u}$ serán $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$.

b] **Aceleración.** Análogamente al vector $\vec{u}$ definiremos el vector aceleración $\vec{a}_c$:

$$\vec{a}_c = \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\left(\frac{d\vec{l}}{dt}\right)}{dt} = \frac{d^2\vec{l}}{dt^2} = \frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2}; \qquad [2]$$

$\vec{a}_c$ es un vector que se obtiene buscando el límite del cociente (fig. 113)

$$\frac{\vec{u}' - u}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{u}}{\Delta t}$$

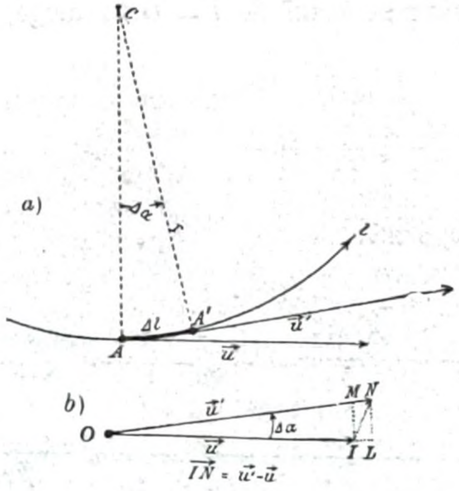


Fig. 113

entre la variación (vectorial) $\Delta \vec{u} = \vec{u}' - \vec{u}$ de la velocidad desde A a A' y el intervalo de tiempo Δt en que se efectúa el movimiento entre A y A'.

Este vector $\vec{a}_c$ *no* es, en general, tangente a la trayectoria, y se puede, por tanto, descomponer en dos, uno normal a la misma y otro tangente:

$$\vec{a}_c = \vec{a}_n + \vec{a}_t. \qquad [3]$$

De hecho, para obtener el vector $\vec{u}' - \vec{u}$, diferencia entre los vectores que se suponen aplicados a los puntos A y A', se consideran los vectores equipolentes a $\vec{u}$ y $\vec{u}'$, trazados desde un mismo punto O [fig. 113, *b*)]. El vector $\overrightarrow{IN}$ es el vector diferencia $(\vec{u}' - \vec{u})$ buscado. Se tiene:

$$\vec{a}_c = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\overrightarrow{IN}}{\Delta t}.$$

Pero despreciando los infinitésimos de orden superior, resulta:

$$\overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IL}.$$

Luego:

$$\vec{a}_c = \lim_{\Delta t = 0}\left(\frac{\overrightarrow{IM}}{\Delta t} + \frac{\overrightarrow{IL}}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t = 0}\frac{\overrightarrow{IM}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t = 0}\frac{\overrightarrow{IL}}{\Delta t}.$$

El vector $\lim_{\Delta t = 0} \frac{IM}{\Delta t}$ es perpendicular a $\vec{u}$, y, por tanto, también normal a l en A; el vector $\lim_{\Delta t = 0} \frac{\overrightarrow{IL}}{\Delta t}$ es paralelo a $\vec{u}$ y, por ende, tangente a la trayectoria en A; la aceleración $\vec{a}_c$ se ha descompuesto así en las componentes $\vec{a}_n = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\overrightarrow{IM}}{\Delta t}$ y $\vec{a}_t = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\overrightarrow{IL}}{\Delta t}$.

Si r es el radio de curvatura CA de l en el punto A; y si $\Delta\alpha = \frac{\Delta l}{r}$ es el ángulo ACA', también será $\widehat{IOM} = \Delta\alpha$, porque CA y CA' son respectivamente perpendiculares a OI y OM. Luego:

$$a_n = \lim_{\Delta t = 0} \frac{IM}{\Delta t} = \frac{u \cdot d\alpha}{dt} = \frac{u \cdot dl}{r \cdot dt} = \frac{u \cdot u}{r} = \frac{u^2}{r} \qquad [4]$$

$$a_t = \lim_{\Delta t = 0} \frac{IL}{\Delta t} = \lim_{\Delta t = 0} \frac{u' - u}{\Delta t} = \frac{du}{dt} = \frac{d^2l}{dt^2}. \qquad [5]$$

a_t es positiva o negativa, según que la magnitud u (en valor y signo) de la velocidad $\vec{u}$ a lo largo de la trayectoria l, aumente o disminuya al pasar de A a A'; en cambio, $\vec{a}_n$ está siempre dirigida hacia el centro de curvatura C, por lo que toma el nombre de *aceleración centrípeta*; $\vec{a}_t$ se llama *aceleración tangencial*.

La fórmula [4] se deduce también en física elemental para el caso particular del movimiento circular uniforme.

Se obtiene análogamente la descomposición de la aceleración en los dos vectores $\vec{a}_n$ y $\vec{a}_t$ cuando la trayectoria l no es una curva plana. Basta repetir el razonamiento anterior considerando el plano osculador en A de la trayectoria alabeada l.

En el movimiento curvilíneo ($u \neq 0$, $r \neq 0$) siempre hay aceleración centrípeta [4], y únicamente cuando $r = \infty$, es decir, cuando la trayectoria es rectilínea, se anula esta aceleración. Si el movimiento curvilíneo es uniforme, de modo que el módulo $u = \frac{dl}{dt}$

de la velocidad a lo largo de la trayectoria permanece constante, falta la aceleración tangencial por anularse $\frac{d^2l}{dt^2}$, pero existe una aceleración centrípeta $\frac{u^2}{r}$.

Puede también descomponerse la aceleración $\vec{a_c}$ tomando componentes paralelas a los ejes cartesianos de referencia. En un movimiento plano $x = x(t)$, $y = y(t)$, se tiene:

$$\vec{a_c} = \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d(\vec{u_x} + \vec{u_y})}{dt} = \frac{d\vec{u_x}}{dt} + \frac{d\vec{u_y}}{dt} = \vec{a}_{c,x} + \vec{a}_{c,y}. \qquad [6]$$

La aceleración $\vec{a_c}$ es resultante de dos vectores $\vec{a}_{c,x}$, $\vec{a}_{c,y}$, respectivamente paralelos a los ejes coordenados, y cuyas magnitudes, en valor y signo, son:

$$a_{c,x} = \frac{d^2x}{dt^2}; \qquad a_{c,y} = \frac{d^2y}{dt^2}; \qquad [7]$$

y dan las componentes de $\vec{a_c}$ sobre los ejes; $\vec{a}_{c,x}$, $\vec{a}_{c,y}$, son las aceleraciones de las proyecciones del movimiento sobre sus ejes. Véase también § 62.

Análogamente, en el espacio: las componentes sobre los ejes cartesianos de la aceleración del movimiento del punto $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, son:

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2}.$$

En el caso del movimiento rectilíneo, los vectores velocidad $\vec{u}$ y aceleración $\vec{a_c}$ son constantemente paralelos a la recta trayectoria, y puede prescindirse de su carácter vectorial; tomando el eje x en coincidencia con la trayectoria, pueden sustituirse los vectores por sus magnitudes $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{d^2x}{dt^2}$ sobre el eje x.

§ 58. Ejemplos de movimientos curvilíneos. Indicaremos solamente dos ejemplos.

a] **Movimiento circular uniforme.** La trayectoria es una circunferencia de radio a (fig. 114); la velocidad u es constante en todos los puntos de la trayectoria, pero el vector $\vec{u}$, aunque de módulo constante, cambia constantemente de dirección.

Sean x, y dos ejes cartesianos, cuyo origen se encuentra en el centro de la trayectoria. La posición de A sobre la circunferencia de radio a se conoce en cualquier instante, si se da el valor del ángulo $\varphi = MOA$ en función del tiempo. Se fijará una unidad de medida para los ángulos y un sentido positivo para las rotaciones; por ejemplo, el sentido que llevaría el semieje positivo x hacia el semieje positivo y, girando un ángulo recto.

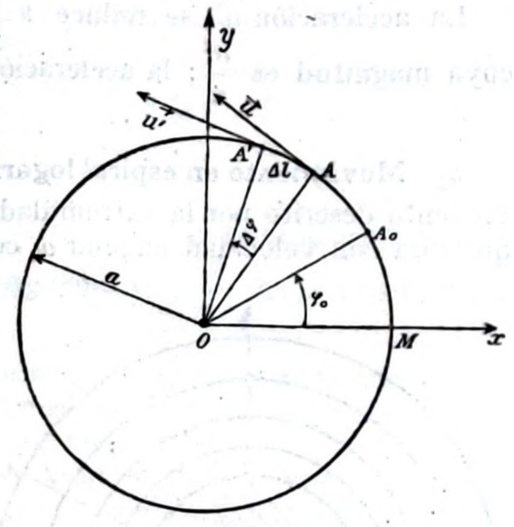


Fig. 114

Se llama *velocidad angular* ω del movimiento, a la velocidad angular ω del radio vector $\overrightarrow{OA}$.

Luego, por definición, $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$; y como $dl = a \cdot d\varphi$, se tiene:

$$\omega = \frac{1}{a} \cdot \frac{dl}{dt} = \frac{u}{a}.$$

Es cómodo considerar ω como módulo de un vector $\vec{\omega}$ perpendicular en O al plano de la trayectoria, y dirigido en tal sentido, que un observador, de pie sobre el plano del círculo, atravesado de pies a cabeza por el vector $\vec{\omega}$, vea la rotación de A en sentido contrario al del movimiento de las agujas de un reloj. Se tiene entonces:

$$\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OA} = \vec{u}. \qquad [1]$$

En el movimiento circular uniforme, u y a son constantes; y por tanto, ω es una constante positiva o negativa, según el signo de u, es decir, según que A gire en el sentido fijado como positivo o en sentido opuesto.

De $\frac{d\varphi}{dt} = \omega = \text{const.}$ se deduce, por integración:

$$\varphi = \omega t + \varphi_0; \qquad [2]$$

de modo que φ es función lineal del tiempo; φ_0 es la fase inicial; ω mide el ángulo $\Delta\varphi$ descrito por el radio vector $\overrightarrow{OA}$ en la unidad de tiempo. El radio vector $\overrightarrow{OA}$ efectúa una vuelta completa en el tiempo T *(período)*, dado por

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \qquad [3]$$

Análogamente, la longitud l del arco MA es función lineal del tiempo:

$$l = a\varphi = a\omega t + a\varphi_0 = u \cdot t + l_0. \qquad [4]$$

La aceleración $\vec{a}_c$ se reduce a la única componente centrípeta, cuya magnitud es $\frac{u^2}{a}$; la aceleración tangencial es nula.

b] **Movimiento en espiral logarítmica.** Se da este nombre al movimiento descrito por la extremidad de un vector $\overrightarrow{OA} = \vec{r}$ (fig. 115), que gira con velocidad angular ω constante en torno del origen O, y cuya longitud r varía según la siguiente ley exponencial:

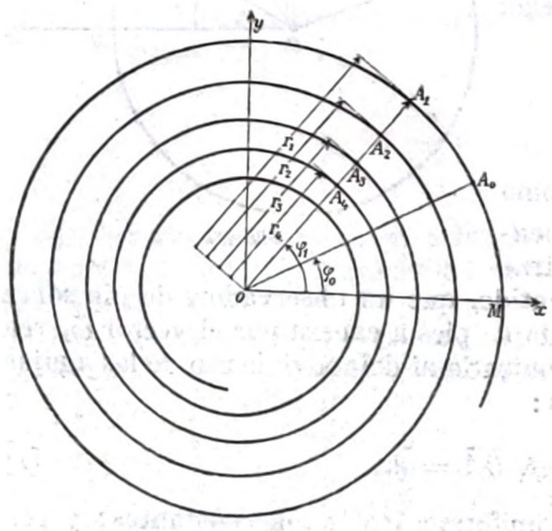


Fig. 115

$$r = a \cdot e^{-\varkappa(\omega t + \varphi_0)} \qquad (\varkappa > 0;\ \omega > 0) \qquad [5]$$

También ahora $\varphi = \omega t + \varphi_0$ es el ángulo que el radio vector $\overrightarrow{OA}$ forma en cada momento con el eje fijo de referencia x.

La longitud r disminuye según una ley exponencial. El radio vector da una vuelta completa en el tiempo $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Si t aumenta en T, $2T$, $3T$, ..., r va tomando cada vez la misma orientación, pero su magnitud disminuye, valiendo sucesivamente:

$$r_0 = a \cdot e^{-\varkappa(\omega t + \varphi_0)};$$

$$r_1 = a \cdot e^{-\varkappa[\omega(t+T) + \varphi_0]} = r_0 \cdot e^{-\varkappa\omega T};$$

$$r_2 = a \cdot e^{-\varkappa[\omega(t+2T) + \varphi_0]} = r_0 \cdot e^{-2\varkappa\omega T};$$

.....

Luego, mientras t aumenta en progresión aritmética, cuya diferencia es T, el radio r disminuye según una ley geométrica, cuya razón es $e^{-\varkappa\omega T} = e^{-2\pi\varkappa}$.

Como en el § 56, *d*]:

$$2\pi\varkappa = \log_e \frac{r_{n-1}}{r_n};$$

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi} \log_e \frac{r_{n-1}}{r_n};$$

$$1 - e^{-2\pi\varkappa} = \frac{r_{n-1} - r_n}{r_{n-1}}$$

que se llaman, respectivamente, *decremento logarítmico, coeficiente de amortiguamiento* y *factor de amortiguamiento*; $\frac{1}{\varkappa\omega}$ es la constante de tiempo.

Se ve fácilmente que si t varía en progresión aritmética (cualquiera que sea su razón o diferencia), los valores correspondientes de r constituyen una progresión geométrica.

Si suponemos que empiezan a contarse los tiempos desde uno de los instantes en que A está sobre el eje x (fig. 115), se tendrá en la [5] que $\varphi_0 = 0$.

B. — COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS

§ 59. Composición de corrimientos. En física elemental se citan varios dispositivos mecánicos para «demostrar» la *regla del paralelogramo de los corrimientos*. Uno de ellos está representado en la figura 116. La bolita E se traslada lateralmente al moverse el carrito BB', al cual está unida rígidamente la varilla F; al mismo tiempo la bolita E baja siguiendo la varilla F por desenvolverse el hilo G de la rueda D.

Es mucho más lógico considerar la regla del paralelogramo de los corrimientos como una propiedad puramente geométrica del *movimiento* llamado *relativo*.

Limitémonos al caso de movimientos sobre un plano y consideremos primero el ejemplo siguiente: Una bolita A (fig. 117) tiene que seguir sobre el tablero Π una trayectoria AQA' en el tiempo Δt. Simultáneamente el tablero se mueve con *movimiento de traslación rígido*, es decir, *paralelamente a sí mismo*, hasta Π'. La bolita viene entonces a encontrarse en la posición A'''.

Hablando con mayor precisión, diremos que el movimiento de la bolita sobre el tablero está determinado con respecto a dos ejes OX y OY fijos al tablero.

Las coordenadas X, Y del punto móvil A, con respecto a estos ejes, son funciones determinadas del tiempo:

$$X = X(t); \qquad Y = Y(t). \tag{1}$$

El tablero se desplaza con movimiento de traslación (es decir, paralelamente a sí mismo) *con respecto a ciertos ejes, ox, oy*, que se imaginan fijos en el suelo. Este movimiento de traslación queda determinado si se dan las coordenadas a, b, del origen O, con respecto a los ejes x, y, en función del tiempo:

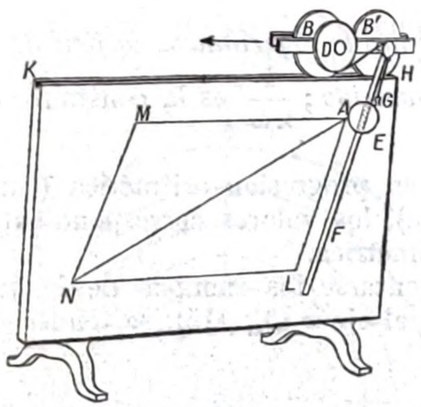


Fig. 116

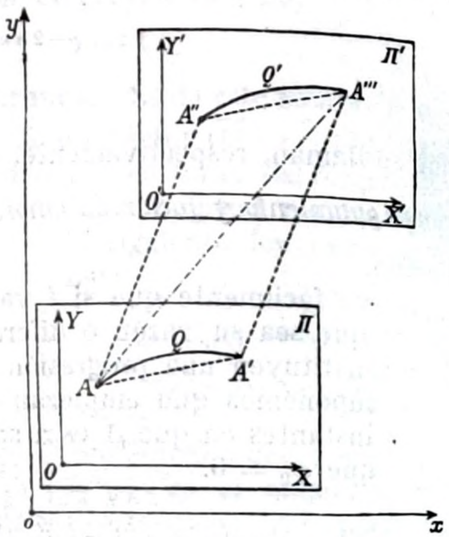


Fig. 117

$$a = a(t); \quad b = b(t). \tag{2}$$

No se pierde generalidad suponiendo que los ejes x, y, y X, Y son, respectivamente, paralelos y del mismo sentido.

Se dice impropiamente que, el movimiento de A respecto a los ejes x, y es un *movimiento absoluto*; que *x, y son los ejes fijos*, y que X, Y son los *ejes móviles*. Es una nomenclatura cómoda si se imagina que el observador está fijo con respecto a los ejes x, y.

Cuando se desea conocer el *movimiento resultante* de los dos movimientos, el de la bolita sobre el tablero Π y el del tablero (y, por tanto, también el de la bolita) sobre el suelo:

se considera conocido el movimiento de A respecto a los ejes X, Y, es decir, conocer las coordenadas $X(t)$, $Y(t)$ de A respecto a los ejes X, Y;

se considera conocido el movimiento de traslación de Π respecto a los ejes x, y, es decir, conocer las coordenadas $a(t)$, $b(t)$ de O respecto a los ejes x, y;

se desea conocer el movimiento relativo de A respecto a los ejes x, y; esto es, las coordenadas x, y del punto A respecto a los ejes x, y.

Se tiene por geometría analítica:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= a(t) + X(t) \\ y(t) &= b(t) + Y(t) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Si se aplican las ecuaciones [3] en los instantes t y $t' = t + \Delta t$, relativos a las posiciones inicial y final del tablero y de la bolita en la figura 117, y se resta, se tiene:

$$\left.\begin{aligned} \Delta x &= \Delta a + \Delta X \\ \Delta y &= \Delta b + \Delta Y \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Pero $\Delta x = x(t') - x(t)$; $\Delta y = y(t') - y(t)$ son las componentes del vector $\overrightarrow{AA'''}$ según los ejes x, y; Δa, Δb son las componentes del vector $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{AA''}$ según los ejes x, y. Por fin, ΔX, ΔY son las componentes del vector $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{A''A'''}$, tanto según X, Y, como también respecto a x, y.

Luego, según § 50 [2], las igualdades [4] pueden expresarse vectorialmente por

$$\overrightarrow{AA'''} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AA''}, \tag{5}$$

que dan la regla de la composición de los corrimientos: *el corrimiento resultante $\overrightarrow{AA'''}$ se obtiene a partir de los corrimientos componentes $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{A'A''}$, por medio de la regla del paralelogramo.*

Obsérvese que los movimientos de A a A' y de O a O' pueden no ser rectilíneos, pues únicamente interesan los vectores *corrimiento*, determinando los extremos AA' y OO' de las trayectorias.

Cuando el movimiento rígido del tablero respecto a los ejes x, y no es simplemente de traslación, los ejes X', Y', en el instante $t = t + \Delta t$ no son ya paralelos a X, Y. La figura $AA''A'''A'$ no es un paralelogramo, y ya no es válida la regla anterior.

Pero si en lugar de Δt se considera un intervalo infinitesimal de tiempo dt, los vectores $\overrightarrow{AA'}$ y $\overrightarrow{AA''}$ son infinitesimales, y el ángulo, entre $\overrightarrow{AA'}$ y $\overrightarrow{A''A'''}$ también es infinitamente pequeño; luego, $\overrightarrow{AA''}$ y $\overrightarrow{A'A'''}$ son iguales salvo un infinitésimo de orden superior; por tanto, $AA'A''A'''$ puede todavía considerarse como un paralelogramo.

En la composición de corrimientos infinitesimales es válida la regla del paralelogramo, cualquiera que sea el movimiento del tablero respecto a los ejes x, y.

§ 60. Composición y descomposición de movimientos. Limitémonos de nuevo, para mayor sencillez, al movimiento de traslación de Π (fig. 117), respecto a los ejes x, y; entonces, $a\,(t)$, $b\,(t)$ determinan el movimiento de O respecto a los ejes x, y. Si se prefiere, el vector $\overrightarrow{oO} = \overrightarrow{oO}\,(t)$, función del tiempo, de componentes $a\,(t)$, $b\,(t)$, es el que determina el movimiento de O. Puesto que el tablero se mueve con movimiento rígido de traslación, también queda determinado el movimiento de cualquier punto A del tablero respecto a los ejes x, y; la trayectoria y la ley del movimiento de A vienen determinados por el vector resultante $\overrightarrow{oO} + \overrightarrow{OA}\,(t)$ (suma vectorial), en donde $\overrightarrow{oO} = \overrightarrow{oO}\,(t)$ es función del tiempo y $\overrightarrow{OA}$ es un vector constante.

Si el punto considerado A se mueve sobre el tablero, también el vector $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA}\,(t)$, de componentes $X\,(t)$, $Y\,(t)$, es función del tiempo.

Se ha dicho (§ 59) que el movimiento relativo respecto a los ejes x, y, caracterizado por el vector $\overrightarrow{oO} + \overrightarrow{OA}$, se llama *movimiento resultante* de los dos movimientos componentes $\overrightarrow{oO}\,(t)$ y $\overrightarrow{OA}\,(t)$. En un gran número de casos (§§ 63 ÷ 74) se le denomina movimiento resultante de los dos movimientos componentes $\overrightarrow{oO}\,(t)$, $\overrightarrow{OA}\,(t)$ «del punto A»; verdaderamente, el movimiento $\overrightarrow{oO}\,(t)$ es el movimiento del punto O e individualiza el movimiento de traslación del tablero.

Dados, en coordenadas cartesianas, los dos *movimientos componentes*

$$x_1\,(t) = a\,(t), \qquad y_1\,(t) = b\,(t), \qquad [1]$$

$$x_2\,(t) = X\,(t), \qquad y_2\,(t) = Y\,(t), \qquad [2]$$

el movimiento resultante viene determinado sobre los ejes x, y, por

$$\left.\begin{aligned} x\,(t) &= a\,(t) + X\,(t) \\ y\,(t) &= b\,(t) + Y\,(t) \end{aligned}\right\}. \qquad [3]$$

Esta *composición de movimientos* comprende, como caso particular, la composición de corrimientos.

Basta suponer que en un instante (por ejemplo, $t = 0$) el origen O de los ejes en el tablero coincide con o, y, además, que el punto A del tablero coincide en aquel instante con O. Entonces, $\overrightarrow{oO}$ y $\overrightarrow{OA}$ pasan a ser en cualquier otro instante, $t \neq 0$, los corrimientos componentes del punto A respecto a la posición inicial; $\overrightarrow{oO} + \overrightarrow{OA}$ (suma vectorial) es el corrimiento resultante.

En muchos casos concretos son arbitrarias las elecciones del instante inicial $t = 0$ y de los ejes x, y y X, Y; las suposiciones anteriores no limitan la generalidad del problema, y la «composición de los movimientos» viene a coincidir con la «composición de los corrimientos».

Son interesantísimos los dos casos particulares siguientes:

a] **Composición de movimientos rectilíneos sobre un mismo eje.** El movimiento del tablero respecto a los ejes x, y, y el del punto A sobre el tablero, son rectilíneos y se efectúan sobre una misma recta. Se puede tomar ésta como eje de las x, coincidiendo en dirección y sentido con el eje de las X. Resulta constantemente:

$$y\,(t) = b\,(t) = Y\,(t) = 0,$$

y el movimiento de A *respecto al eje* x tiene por ecuación:

$$x\,(t) = a\,(t) + X\,(t).$$

Se puede decir que este movimiento de A es resultante de los dos movimientos componentes:

$$a\,(t) = x_1\,(t); \qquad X\,(t) = x_2\,(t).$$

El movimiento resultante es:

$$x\,(t) = x_1\,(t) + x_2\,(t). \qquad [4]$$

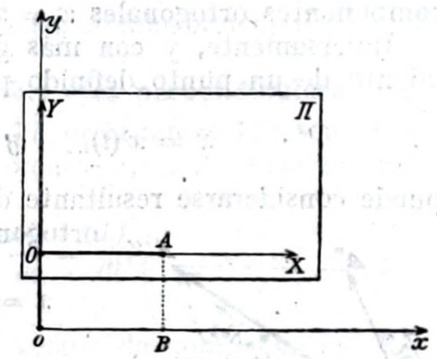


Fig. 118

Inversamente, y con más generalidad, si la ley del movimiento es un polinomio,

$$x\,(t) = x_1\,(t) + x_2\,(t) + x_3\,(t) + \ldots + x_n\,(t),$$

puede considerarse el movimiento como resultante de n movimientos componentes:

$$x_1 = x_1\,(t), \quad x_2 = x_2\,(t), \quad x_3 = x_3\,(t), \ldots\ldots \quad x_n = x_n\,(t).$$

Se tiene *descomposición* del movimiento en n movimientos componentes.

b] **Composición de movimientos rectilíneos sobre ejes perpendiculares.** El movimiento del tablero es rectilíneo, según un *eje* y (figura 118); el movimiento de A sobre el tablero es rectilíneo según un eje X perpendicular al eje y. Sin perder generalidad, se puede suponer que el eje Y sobre el tablero coincide con y, mientras que A se mueve sobre X.

Los movimientos componentes son ahora:
movimiento de A sobre el tablero,

$$X = X(t); \qquad Y = 0;$$

movimiento de traslación del tablero,

$$a = 0; \qquad b = b(t).$$

Las igualdades [3] dan para el movimiento resultante:

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) = X(t) \\ y &= y(t) = b(t) \end{aligned}\right\}; \qquad [5]$$

es decir, las coordenadas $X(t)$, $b(t)$, que determinan los movimientos componentes, son las coordenadas cartesianas ortogonales del movimiento resultante $x = x(t)$, $y = y(t)$, Más brevemente: se dirá que las [5] dan el movimiento resultante de los dos movimientos componentes ortogonales $x = x(t)$ y $y = y(t)$.

Inversamente, y con más generalidad: en el espacio, el movimiento de un punto definido por

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t),$$

puede considerarse resultante de los tres movimientos componentes ortogonales

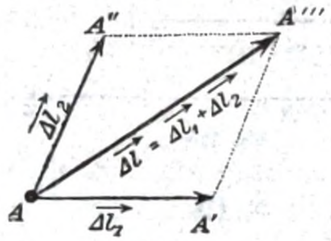


Fig 119

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t).$$

Se tiene *descomposición* del movimiento en tres movimientos componentes, rectilíneos, realizados sobre ejes ortogonales entre sí.

§ 61. Paralelogramo de las velocidades. Durante un tiempo infinitesimal dt, el punto A (fig. 119), sujeto a los dos movimientos que lo trasladarían a A' y A'' respectivamente, se traslada hasta A''' (véase fig. 117).

Ahora bien, siendo dt infinitesimal, $\overrightarrow{AA'} = \Delta\vec{l}_1$, $\overrightarrow{AA''} = \Delta\vec{l}_2$, $\overrightarrow{AA'''} = \Delta\vec{l}$, se pueden suponer coincidentes con los respectivos arcos de la trayectoria. Dividiendo la igualdad [5] del § 59 por Δt y pasando al límite cuando Δt tiende a cero, se tiene:

$$\frac{d\vec{l}_1}{dt} + \frac{d\vec{l}_2}{dt} = \frac{d\vec{l}}{dt}, \quad \text{o sea,} \quad \vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \vec{u}. \qquad [1]$$

Por consiguiente, si el punto A está dotado simultáneamente de las dos velocidades $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$, se mueve con la velocidad resultante $\vec{u}$, que se obtiene a partir de las velocidades componentes $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ por medio de la regla del paralelogramo.

Más exactamente: la velocidad $\vec{u}$ del punto A respecto a los ejes x, y (fig. 117), se obtiene componiendo por la regla del paralelogramo la velocidad $\vec{u}_1$ relativa a los ejes X, Y, y la *velocidad de arrastre* $\vec{u}_2$ de los ejes móviles respecto a los ejes fijos x, y.

Puesto que para la demostración es preciso considerar corrimientos infinitamente pequeños $d\vec{l}_1$ y $d\vec{l}_2$, la regla del paralelogramo de las velocidades es válida, cualquiera que sea el movimiento de los ejes X, Y, respecto a x, y; véase final del § 59.

En los dos casos particulares del § 60 se tiene:

a] **Movimientos componentes sobre el mismo eje:** Se tiene

$$u = u_1 + u_2;$$

es decir, la velocidad resultante es la suma (algebraica) de las velocidades componentes.

b] **Movimientos componentes sobre ejes perpendiculares.** Los dos corrimientos componentes $\Delta\vec{l}_1$ y $\Delta\vec{l}_2$ de la figura 119 son respectivamente paralelos a las ejes de referencia x, y. Se tiene entonces:

$$\frac{dl_1}{dt} = \frac{dx}{dt}; \qquad \frac{dl_2}{dt} = \frac{dy}{dt}.$$

La velocidad resultante $\vec{u}$ es el vector de componentes

$$u_x = \frac{dx}{dt}; \qquad u_y = \frac{dy}{dt}, \qquad [2]$$

como se ha visto en el § 57, *a*].

La velocidad resultante $\vec{u}$ tiene por módulo:

$$|u| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \qquad [3]$$

§ 62. Paralelogramo de las aceleraciones. Si $\vec{u}_1$ varía en $d\vec{u}_1$ (fig. 120) y $\vec{u}_2$ varía en $d\vec{u}_2$, durante un tiempo infinitesimal dt, las aceleraciones de los dos movimientos componentes son:

$$\vec{a}_{c1} = \frac{d\vec{u}_1}{dt}; \qquad \vec{a}_{c2} = \frac{d\vec{u}_2}{dt}. \qquad [1]$$

La aceleración del movimiento resultante es:

$$\vec{a}_c = \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d(\vec{u}_1 + \vec{u}_2)}{dt}$$

Pero

$$\frac{d(\vec{u}_1 + \vec{u}_2)}{dt} = \lim_{\Delta t=0} \frac{[(\vec{u}_1 + \Delta\vec{u}_1) + (\vec{u}_2 + \Delta\vec{u}_2)] - [\vec{u}_1 + \vec{u}_2]}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t=0} \left\{ \frac{\Delta\vec{u}_1}{\Delta t} + \frac{\Delta\vec{u}_2}{\Delta t} \right\}$$

Luego:

$$a_c = \frac{d\vec{u}_1}{dt} + \frac{d\vec{u}_2}{dt} = \vec{a}_{c1} + \vec{a}_{c2}. \qquad [2]$$

Las aceleraciones se componen según la regla del paralelogramo. Esto no es cierto cuando el movimiento de XY respecto a los ejes xy no es de traslación: el ángulo infinitesimal comprendido entre $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_2'$ resulta alterado en un ángulo también infinitesimal (y del mismo orden), que es el que han girado los ejes móviles durante el tiempo dt. En mecánica racional se deduce la fórmula más compleja que sustituye entonces a la [2].

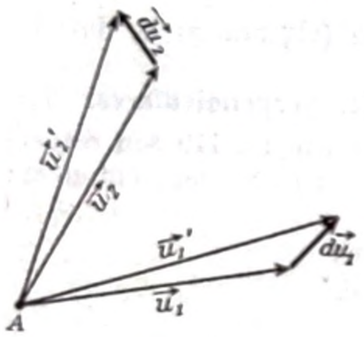


Fig. 120

En los dos casos particulares del § 60 se tiene:

a] **Movimientos componentes sobre el mismo eje. Es:**

$$a_c = a_{c1} + a_{c2}; \quad a_c = \frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{d^2x_2}{dt^2} \qquad [3]$$

La aceleración resultante es la suma (algebraica) de las aceleraciones componentes.

b] **Movimientos componentes sobre ejes perpendiculares.** La aceleración resultante es un vector $\vec{a}_c$ de componentes $a_{c1} = a_{cx}$ y $a_{c2} = a_{cy}$, y se tiene:

$$a_{cx} = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad a_{cy} = \frac{d^2y}{dt^2}; \quad |a_c| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}, \qquad [4]$$

como se ha visto en el § 57, *b*].

§ 63. Movimientos rectilíneos y movimientos curvilíneos. Se ha dicho que el movimiento en un plano

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad [1]$$

puede considerarse como resultante de los dos movimientos perpendiculares $x = x(t)$ e $y = y(t)$.

La velocidad resultante $\vec{u}$ tiene por componentes

$$u_x = \frac{dx}{dt}, \quad u_y = \frac{dy}{dt},$$

y su módulo es:

$$|u| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

Se obtiene la ecuación de la trayectoria eliminando el tiempo entre las igualdades [1]. Resulta, además:

$$|dl| = |u| \cdot dt = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \cdot dt = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} \cdot dt;$$

mientras que, fijando un sentido positivo sobre la trayectoria resultante l, se obtiene, en valor y signo: $u = u_x \cdot \cos(xl) + u_y \cdot \cos(yl)$, donde $\cos(xl)$, $\cos(yl)$ son los cosenos directores de la tangente a la trayectoria en los puntos del elemento dl, dirigida en el sentido fijado sobre l como positivo.

Se tiene entonces:

$$l = \int [u_x \cdot \cos(xl) + u_y \cdot \cos(y\,l)]\, dt, \qquad [2]$$

que da la ley del movimiento sobre la trayectoria.

En el espacio se dirá que el movimiento

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \qquad [3]$$

es el movimiento resultante de los tres movimientos ortogonales componentes $x = x(t)$, $y = y(t)$ y $z = z(t)$.

La velocidad resultante $\vec{u}$ tiene por componentes

$$u_x = \frac{dx}{dt}; \quad u_y = \frac{dy}{dt}; \quad a_z = \frac{dz}{dt};$$

y su módulo es

$$|u| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}. \qquad [4]$$

Análogamente a [2] se tiene las del movimiento:

$$l = \int [u_x \cdot \cos(xl) + u_y \cdot \cos(yl) + u_z \cdot \cos(zl)]\, dt. \qquad [5]$$

La aceleración $\vec{a}_c$ tiene por componentes:

$$a_{cx} = \frac{d^2x}{dt^2}; \qquad a_{cy} = \frac{d^2y}{dt^2}; \qquad a_{cz} = \frac{d^2z}{dt^2}; \qquad [6]$$

y su módulo es:

$$|a_c| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2} \qquad [7]$$

Un movimiento cualquiera de un punto en un plano se puede siempre imaginar como resultante de dos movimientos rectilíneos apropiados sobre ejes ortogonales.

En el espacio, el movimiento de un punto se puede concebir como resultante de tres movimientos rectilíneos apropiados sobre ejes ortogonales.

El movimiento curvilíneo de un punto no puede considerarse como movimiento simple, sino como movimiento resultante de movimientos rectilíneos.

§ 64. Ejemplos de composición de movimientos sobre un mismo eje.

a] **Dos movimientos uniformes.** Los dos movimientos uniformes

$$x_1 = x_{01} + u_1 t, \qquad x_2 = x_{02} + u_2 t,$$

dan un movimiento resultante uniforme:

$$x = x_1 + x_2 = (x_{01} + x_{02}) + (u_1 + u_2)\, t. \qquad [1]$$

La velocidad resultante u es:

$$u = \frac{dx}{dt} = u_1 + u_2 = \frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_2}{dt}.$$

b] **Dos movimientos uniformemente acelerados.** Los dos movimientos uniformemente acelerados

$$x_1 = x_{01} + u_{01} t + \frac{1}{2} a_{c1} t^2, \qquad x_2 = x_{02} + u_{02} t + \frac{1}{2} a_{c2} t^2,$$

dan un movimiento resultante uniformemente acelerado:

$$x = (x_{01} + x_{02}) + (u_{01} + u_{02})\, t + \frac{1}{2}(a_{c1} + a_{c2})\, t. \qquad [2]$$

la velocidad y la aceleración del cual son, respectivamente:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{dx}{dt} = \frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_2}{dt} = (u_{01} + u_{02}) + (a_{c1} + a_{c2})\, t \\ a_c &= \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{d^2x_2}{dt^2} = a_{c1} + a_{c2} \end{aligned}\right\}. \qquad [3]$$

c] **Un movimiento uniforme y un movimiento naturalmente acelerado.** El movimiento uniforme $x_1 = x_{01} + u_0 t$ y el movimiento naturalmente acelerado $x_2 = x_{02} + \frac{1}{2} a_c t^2$ dan el movimiento resultante:

$$x = x_0 + u_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2 \qquad (x_0 = x_{01} + x_{02}). \qquad [4]$$

Por lo tanto, un movimiento uniformemente acelerado se puede imaginar como resultante de un movimiento uniforme cuya velocidad es la velocidad inicial u_0, y de un movimiento *naturalmente* acelerado, esto es, de un movimiento uniformemente acelerado con velocidad inicial nula.

Con más generalidad, un movimiento uniforme

$$x_1 = x_{01} + u_{01} t$$

y un movimiento uniformemente acelerado

$$x_2 = x_{02} + u_{02} t + \frac{1}{2} a_c t^2$$

se componen dando nuevo movimiento uniformemente acelerado

$$x = x_0 + u_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2 \qquad \begin{cases} x_0 = x_{01} + x_{02} \\ u_0 = u_{01} + u_{02} \end{cases}$$

dotado de la misma aceleración a_c.

§ 65. Ejemplos de composición de movimientos sobre dos ejes ortogonales.

a] **Dos movimientos rectilíneos uniformes.** Sean las ecuaciones de los movimientos componentes

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + u_{0x} t \\ y &= y_0 + u_{0y} t \end{aligned}\right\}. \qquad [1]$$

La trayectoria resultante es una resta, porque las [1] son las ecuaciones paramétricas de una recta. Ésta pasa por el punto (x_0, y_0) y tiene la pendiente $\frac{u_{0y}}{u_{0x}}$.

La velocidad resultante tiene por módulo:

$$|u| = \sqrt{u_{0x}^2 + u_{0y}^2} = \text{const.}$$

Luego, el movimiento resultante es rectilíneo y uniforme.

La ley del movimiento sobre la trayectoria resultante es, pues,

$$l = l_0 + ut. \qquad [2]$$

La constante l_0 queda indeterminada si no se fija un origen sobre la trayectoria resultante. Si, además, en la [2] se supone $u > 0$, ello equivale a fijar como positivo, sobre la trayectoria resultante, el sentido del movimiento resultante.

Si el origen O, de la trayectoria l, se hace coincidir con el punto (x_0, y_0), resulta $l_0 = 0$.

b] **Dos movimientos rectilíneos naturalmente acelerados.** Sean las ecuaciones de los movimientos componentes

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{1}{2} a_{cx} t^2 \qquad u_x = a_{cx} t \\ y &= y_0 + \frac{1}{2} a_{cy} t^2 \qquad u_y = a_{cy} t \end{aligned}\right\}. \qquad [3]$$

Eliminando t se tiene una relación lineal entre x e y; la trayectoria resultante es todavía una recta que pasa por el punto (x_0, y_0).

La ley del movimiento sobre la trayectoria es:

$$l = l_0 + \frac{1}{2} a_c t^2; \qquad |a_c| = \sqrt{a_{cx}^2 + a_{cy}^2}. \qquad [4]$$

El movimiento resultante también es rectilíneo naturalmente acelerado. En lo concerniente al signo de a_c y al valor de la constante aditiva l_0, valen las mismas consideraciones del caso anterior.

c] **Movimiento rectilíneo uniforme y movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.** Sean las ecuaciones de los dos movimientos:

$$x = x_0 + u_{0x} t \qquad y = y_0 + u_{0y} t + \frac{1}{2} a_{cy} t^2. \qquad [5]$$

También son éstas las ecuaciones paramétricas de la trayectoria resultante, que es, por tanto, una parábola cuyo eje es paralelo al eje y.

§ 66. Composición de dos movimientos armónicos de igual período. Si los dos movimientos armónicos, alrededor del mismo centro, tienen igual período, se dice que están *en sincronismo*. Se tienen dos casos fundamentales:

a] **Movimientos sobre un mismo eje.** Sean las ecuaciones de los movimientos componentes:

$$x_1 = a_1 \cos(\omega t + \varphi_{01}), \quad x_2 = a_2 \cos(\omega t + \varphi_{02}); \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad [1]$$

empleando el simbolismo del § 56, *c*].

La diferencia

$$\Delta\varphi = (\omega t + \varphi_{02}) - (\omega t + \varphi_{01}) = \varphi_{02} - \varphi_{01}$$

mide, en valor y signo, la *diferencia de fase* del segundo movimiento armónico respecto al primero. Como los dos movimientos armónicos tienen igual período y, por lo tanto, igual pulsación ω, su diferencia de fase $\Delta\varphi$ es *constante* con relación al tiempo; viceversa: si $\Delta\varphi$ es constante, los dos movimientos armónicos tienen igual período. En tal caso se puede suponer siempre que $|\Delta\varphi| \leq \pi$.

La diferencia de fase $\Delta\varphi$ es un ángulo y, por lo tanto, puede medirse en radianes o en grados; alguna vez se mide en vueltas; y a menudo se expresa en tiempos τ, puesto que $\Delta\varphi = \omega\tau$. Para $\tau = T$ se tiene $\Delta\varphi = \omega T = 2\pi$. Un *retardo de fase de 1 período T* significa un retardo de fase $\Delta\varphi = 2\pi$, es decir, 1 *vuelta*. Análogamente, se hablará de retardo de fase de medio período o de media vuelta

$\left(\tau = \frac{1}{2}T;\ \Delta\varphi = \pi\right)$; de un cuarto de período $\left(\tau = \frac{1}{4}T;\ \Delta\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$, etc.; si, en fin, se tiene $\Delta\varphi = 0$ (es decir, $\varphi_{01} = \varphi_{02}$), se dice que los dos movimientos están *en concordancia de fase*. Dos oscilaciones para las cuales $\Delta\varphi = \pm\pi$, se hallan *en oposición de fase*; y si $\Delta\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$, se dice que se encuentran *en cuadratura*.

El movimiento resultante

$$x = x_1 + x_2 = a_1 \cos(\omega t + \varphi_{01}) + a_2 \cos(\omega t + \varphi_{02}) \qquad [2]$$

es todavía un movimiento armónico de período igual al de los movimientos componentes.

Se comprobará esto geométricamente, con la elegante construcción de FRESNEL, en el § 69; analíticamente se demuestra probando que, para cualquier valor de t, se puede escribir:

$$a_1 \cos(\omega t + \varphi_{01}) + a_2 \cos(\omega t + \varphi_{02}) = \mathrm{A} \cos(\omega t + \Phi_0), \qquad [3]$$

o sea:

$$a_1 \cos(\omega t + \varphi_{01}) + a_2 \cos(\omega t + \varphi_{02}) - \mathrm{A} \cos(\omega t + \Phi_0) = 0. \qquad [4]$$

Basta, en efecto, desarrollar los cosenos que aparecen en la [4] y reunir los términos en sen (ωt) y los en cos (ωt). La ecuación [4] se satisface para todos los valores de t, si son nulos los coeficientes de sen (ωt) y de cos (ωt). Resultan así dos ecuaciones en A y Φ_0, de cuya resolución se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{A}^2 &= (a_1 \cos\varphi_{01} + a_2 \cos\varphi_{02})^2 + (a_1 \operatorname{sen}\varphi_{01} + a_2 \operatorname{sen}\varphi_{02})^2 = \\ &= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\varphi_{01} - \varphi_{02}) \end{aligned}\right\}; \qquad [5]$$

$$\operatorname{tg}\Phi_0 = \frac{a_1 \operatorname{sen}\varphi_{01} + a_2 \operatorname{sen}\varphi_{02}}{a_1 \cos\varphi_{01} + a_2 \cos\varphi_{02}}. \qquad [6]$$

Estas dos ecuaciones dan la amplitud y la fase inicial del movimiento armónico resultante.

En particular, para $a_1 = a_2 = a$, $\varphi_{02} = \varphi_{01} = \varphi_0$, los movimientos componentes están *en concordancia de fase* y tienen por ecuaciones:

$$x_1 = a \cos(\omega t + \varphi_0), \qquad x_2 = a \cos(\omega t + \varphi_0);$$

el movimiento resultante tiene doble amplitud que los movimientos componentes:

$$x = x_1 + x_2 = 2a \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Si se tiene también $a_1 = a_2 = a$, pero $\varphi_{02} = \varphi_{01} \pm \pi$, los movimientos componentes son:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a \cos(\omega t + \varphi_{01}), \\ x_2 &= a \cos(\omega t + \varphi_{01} \pm \pi) = -a \cos(\omega t + \varphi_{01}) \end{aligned}\right\} \qquad [7]$$

de igual amplitud, pero *en oposición de fase*, y el movimiento resultante es:

$$x = x_1 + x_2 = 0.$$

El punto que debe obedecer a las dos oscilaciones [7] está fijo en el centro común O. Éste es el caso más característico de *interferencia*, es decir, de superposición de dos movimientos, resultando el reposo.

Pero, actualmente, se tiende a indicar con el nombre de «interferencia» cualquier fenómeno resultante de la composición de fenómenos oscilatorios (§§ 66 ÷ 73).

Por fin, puesto que

$$x = a \cos(\omega t + \varphi_0) = a \cos\varphi_0 \cdot \cos\omega t - a \operatorname{sen}\varphi_0 \cdot \operatorname{sen}\omega t,$$

poniendo

$$a_1 = a \cos\varphi_0, \qquad a_2 = a \operatorname{sen}\varphi_0,$$

resulta:

$$\left.\begin{aligned} x &= a \cos(\omega t + \varphi_0) = a_1 \cos\omega t - a_2 \operatorname{sen}\omega t = \\ &= a_1 \cos\omega t + a_2 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}\right\}. \qquad [8]$$

Cualquier movimiento armónico con fase inicial $\varphi_0 \neq 0$ se puede imaginar como resultante de dos movimientos armónicos de igual período, de amplitudes convenientes, y *en cuadratura*, es decir, con una *diferencia de fase*: $\Delta\varphi = \left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) - \omega t = \frac{\pi}{2}$.

b] **Movimientos sobre ejes ortogonales.** Sean los dos movimientos componentes

$$x = a \cos(\omega t + \varphi_{0x}); \qquad y = b \cos(\omega t + \varphi_{0y}). \qquad [9]$$

La diferencia

$$\Delta\varphi = (\omega t + \varphi_{0y}) - (\omega t + \varphi_{0x}) = \varphi_{0y} - \varphi_{0x},$$

constante respecto a t, es la diferencia de fase entre los dos movimientos. Se puede suponer siempre: $|\varphi_{0y} - \varphi_{0x}| \leq \pi$.

Las [9] son las ecuaciones paramétricas del movimiento resultante.

La ecuación ordinaria de la trayectoria resultante se obtiene eliminando t entre las [9].

Resulta así:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}\cos(\varphi_{0y}-\varphi_{0x})=\operatorname{sen}^2(\varphi_{0y}-\varphi_{0x}). \qquad [10]$$

La trayectoria resultante es una elipse; el centro común de oscilación O de los dos movimientos armónicos componentes es el centro de la elipse.

La razón $\frac{B}{A}=\operatorname{tg}\psi$ de los ejes de la elipse (fig. 121) es conocida cuando lo sea ψ; y este ángulo viene dado por la fórmula:

$$\operatorname{sen} 2\psi=-\frac{2ab}{a^2+b^2}\operatorname{sen}(\varphi_{0y}-\varphi_{0x}); \qquad [11]$$

$\psi>0$ significa que el sentido del recorrido del punto sobre la elipse es el que lleva, a través de un ángulo $\frac{\pi}{2}$, el semieje positivo de las x sobre el semieje positivo de las y (en la figura, el sentido antirreloj).

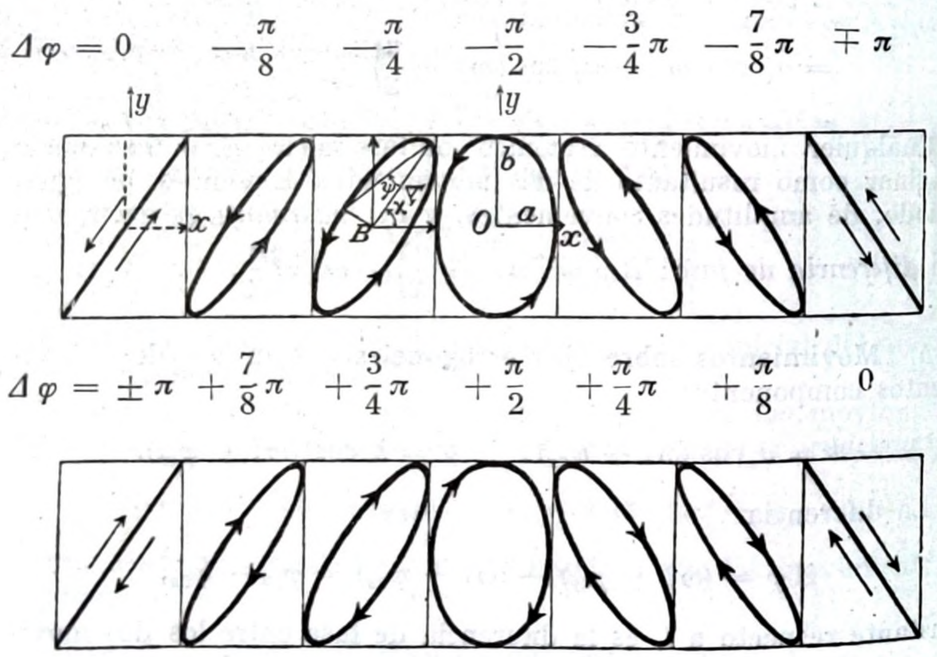


Fig. 121

El acimut χ del eje mayor, es decir, el ángulo χ que éste forma con el eje de las x, viene dado en valor y signo por:

$$\operatorname{tg} 2\chi=\frac{2ab}{a^2-b^2}\cos(\varphi_{0y}-\varphi_{0x}). \qquad [12]$$

Fijados a y b, al variar la diferencia de fase $\Delta\varphi$, la elipse toma sucesivamente todas las formas de la figura 121, y el movimiento resultante recorre la elipse con movimiento periódico, cuyo período es $T=\frac{2\pi}{\omega}$, igual al de los movimientos componentes.

El sentido del movimiento es positivo o negativo según el valor de $\Delta\varphi$.

Son notables los casos $\Delta\varphi=0$ y $\Delta\varphi=\pm\pi$ (movimientos componentes *en fase concordante* o *en fase opuesta)*; en ellos se tiene:

$$x=a\cos(\omega t+\varphi_{0x}),\qquad y=\pm b\cos(\omega t+\varphi_{0x}). \qquad [13]$$

Dividiendo estas dos expresiones, se elimina el tiempo:

$$\frac{y}{x}=\pm\frac{b}{a},$$

y se tiene la ecuación de la trayectoria, que es una recta de pendiente $+\frac{b}{a}$ ó $-\frac{b}{a}$, según que $\Delta\varphi=0$ ó $\Delta\varphi=\pm\pi$. La velocidad del movimiento resultante tiene por componentes:

$$u_x=\frac{dx}{dt},\qquad u_y=\frac{dy}{dt},$$

y por módulo:

$$|u|=\sqrt{u_x^2+u_y^2}.$$

Derivando la [13] y teniendo en cuenta la [2] del § 63, se deduce para la ley del movimiento resultante:

$$l=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\cos(\omega t+\varphi_{0x}).$$

El movimiento resultante es armónico y en concordancia de fase con los movimientos componentes ($\Delta\varphi=0$) o, por lo menos, ($\Delta\varphi=\pm\pi$), con el movimiento armónico sobre el eje de las x.

Si los movimientos componentes están *en cuadratura*, $\Delta\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$, la elipse resultante tiene sus ejes en coincidencia con los ejes x, y.

Por fin, si $a = b$ y $\Delta\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$, las [9] se convierten en:

$$x = a\cos(\omega t + \varphi_{0x}), \qquad y = \pm a\,\mathrm{sen}\,(\omega t + \varphi_{0x}). \qquad [14]$$

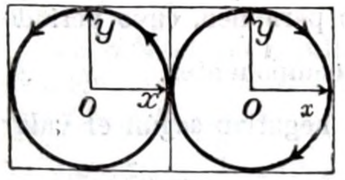


Fig. 122

El movimiento resultante es circular (figura 122). La velocidad en el movimiento resultante libre por componentes:

$$u_x = \frac{dx}{dt}, \qquad u_y = \frac{dy}{dt},$$

y por módulo:

$$|u| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}.$$

Resulta:

$$|u| = \sqrt{a^2\omega^2\,\mathrm{sen}^2(\omega t + \varphi_{0x}) + a^2\omega^2\cos^2(\omega t + \varphi_{0x})} = |a\omega| = \text{const.}$$

El movimiento circular resultante es uniforme; y si se supone ω siempre positivo, el sentido de la rotación será positivo o negativo, según que (fig. 122)

$$\Delta\varphi = -\frac{\pi}{2} \quad \text{ó} \quad \Delta\varphi = +\frac{\pi}{2}.$$

La constante $\omega\,(>0)$ toma el significado geométrico de velocidad angular (positiva, sentido antirreloj, respecto al par de ejes x, y) del radio vector $\overrightarrow{OA}$ (fig. 125), que va desde el centro común de oscilación O al punto móvil A de la circunferencia: el período de la rotación es $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Entre los diversos dispositivos ideados para la demostración experimental de los resultados anteriores, y destinados al trazado de las trayectorias que resultan de la combinación de dos movimientos armónicos, citaremos los dos siguientes:

1.º **Péndulo doble de Righi.** El embudo P (fig. 123), por el que sale un chorrito de arena, deja una línea sobre el cartón Q que oscila en la dirección del eje x. Simultáneamente, el embudo P oscila según el eje y. La longitud del péndulo, cuya lenteja es el embudo,

depende de la posición del cursor C; para una altura conveniente de C, oscilan los dos péndulos P y Q con igual período. La arena dibuja sobre el cartón una trayectoria elíptica, resultante de los dos movimientos pendulares, que, como ya se ha advertido § 56, *c*]), son movimientos armónicos.

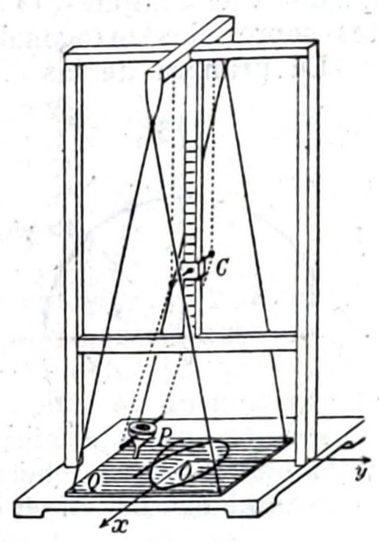


Fig. 123

2.º **Diapasones vibrantes.** Un rayo de luz $R\,R$ (fig. 124) cae sobre un espejito S_1 fijo en una de las ramas del diapasón D_1; después cae sobre el espejito análogo del diapasón D_2, y va a incidir sobre la pantalla Π. Las vibraciones de D_1 hacen describir al punto luminoso P, en la pantalla, oscilaciones según un eje horizontal x; las vibraciones de D_2 hacen efectuar a P oscilaciones según un eje vertical y.

Si D_1 y D_2 vibran simultáneamente con período igual, el punto P describe sobre la pantalla una elipse, que es la resultante de la composición de los dos movimientos anteriores.

Los diapasones utilizados tienen una frecuencia ν bastante alta (por ejemplo, $\nu = 100$ hertz); luego, para estudiar el movimiento

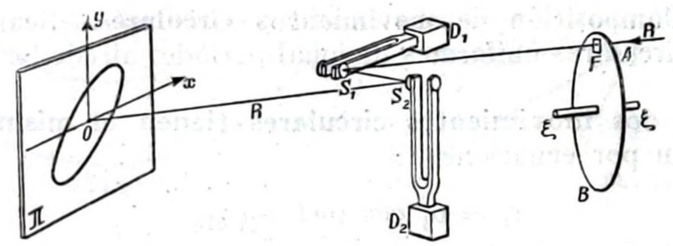


Fig 124

resultante descrito por P sobre la pantalla Π, conviene emplear el disco estroboscópico B (§ 75).

§ **67. Movimiento circular y movimiento armónico.** Volvamos sobre las ecuaciones [14] del § 66, que escribiremos sencillamente:

$$x = a\cos(\omega t + \varphi_0), \qquad y = a\,\mathrm{sen}\,(\omega t + \varphi_0). \qquad [1]$$

El movimiento resultante de estos dos movimientos armónicos es un movimiento circular uniforme de período $T = \frac{2\pi}{\omega}$, de radio a

y de sentido positivo o negativo, según sea positiva o negativa la velocidad angular ω.

Inversamente: cualquier movimiento circular uniforme puede imaginarse «descompuesto» en dos movimientos armónicos componentes sobre ejes ortogonales, teniendo por ecuaciones las [1].

La primera de las [1] determina el movimiento de la proyección Q (fig. 125), sobre el eje de las x, del punto A, que gira con movimiento circular uniforme.

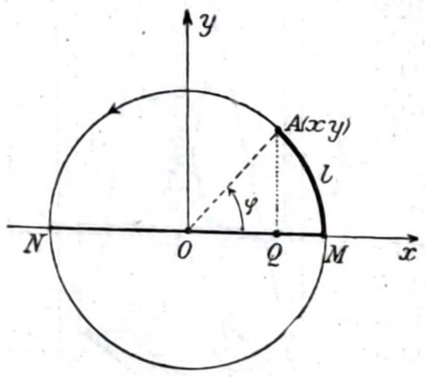


Fig. 125

Se dice, sencillamente, que *la proyección de un movimiento circular uniforme es un movimiento armónico.*

Al girar el radio vector $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ con velocidad angular constante ω, la proyección Q oscila entre M y N con movimiento armónico de amplitud a y período $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

El ángulo $\widehat{MOA} = \varphi = \omega t + \varphi_0$ es la *fase*.

Análogamente, el movimiento armónico amortiguado [14], § 56, es la proyección del movimiento espiral logarítmico de la figura 115.

§ 68. Composición de movimientos circulares. Sean dos movimientos circulares uniformes de igual período, alrededor del mismo centro.

a] **Los dos movimientos circulares tienen el mismo sentido.** Éstos tienen por ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_1 \cos(\omega t + \varphi_{01}) \\ y_1 &= a_1 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_{01}) \end{aligned}\right\}; \qquad [1]$$

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= a_2 \cos(\omega t + \varphi_{02}) \\ y_2 &= a_2 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_{02}) \end{aligned}\right\}. \qquad [2]$$

$\Delta\varphi = \varphi_{02} - \varphi_{01}$ es la diferencia de fase.

Se componen, primero, los dos movimientos sobre cada uno de los ejes. Se tiene (§ 66, *a*]):

$$x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega t + \Phi_0), \qquad [3]$$

con:

$$\left.\begin{aligned} A^2 &= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\varphi_{01} - \varphi_{02}) \\ \operatorname{tg}\Phi_0 &= \frac{a_1 \operatorname{sen}\varphi_{01} + a_2 \operatorname{sen}\varphi_{02}}{a_1 \cos\varphi_{01} + a_2 \cos\varphi_{02}} \end{aligned}\right\}; \qquad [4]$$

y análogamente:

$$y = y_1 + y_2 = B \operatorname{sen}(\omega t + \Psi_0), \qquad [5]$$

con

$$\left.\begin{aligned} B^2 &= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\varphi_{01} - \varphi_{02}) = A^2 \\ \operatorname{tg}\Psi_0 &= \frac{a_1 \operatorname{sen}\varphi_{01} + a_2 \operatorname{sen}\varphi_{02}}{a_1 \cos\varphi_{01} + a_2 \cos\varphi_{02}} = \operatorname{tg}\Phi_0 \end{aligned}\right\}; \qquad [6]$$

luego,

$$y = A \operatorname{sen}(\omega t + \Phi_0).$$

El movimiento resultante de los movimientos [1] y [2] es el movimiento resultante de los movimientos [3] y [7]; por lo tanto, es un movimiento circular uniforme con centro, período y sentido iguales a los de los movimientos componentes.

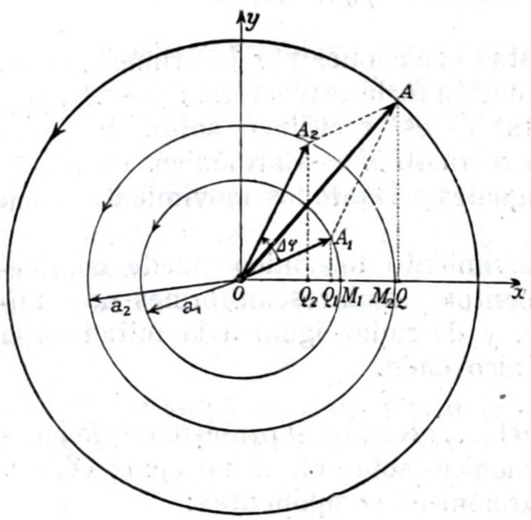


Fig. 126

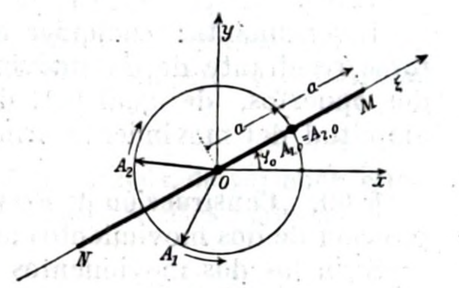


Fig. 127

Geométricamente (fig. 126), $\overrightarrow{OA_1}$ gira alrededor de O con movimiento circular uniforme, y $\overrightarrow{OA_2}$ gira también con el mismo período y en el mismo sentido.

Por tanto, $\widehat{A_1 O A_2} = \Delta\varphi$ permanece constante al girar A_1 y A_2. La posición resultante del punto A, obtenida con $\overrightarrow{OA_1}$ y $\overrightarrow{OA_2}$, mediante la regla del paralelogramo, gira con movimiento circular uniforme del mismo período y de radio igual a la diagonal $\overrightarrow{OA}$.

b] **Los dos movimientos circulares tienen sentidos opuestos e igual amplitud** a. — Los movimientos componentes tienen efecto sobre la misma circunferencia de radio a; se efectúan en sentidos opuestos, y, por tanto, en determinados instantes se superponen $\overrightarrow{OA_1}$ y $\overrightarrow{OA_2}$ (fig. 127), pasando por la misma recta MN. Considere-

mos uno de estos instantes como el momento inicial. Entonces la fase inicial φ_0 es igual para los dos movimientos, y las ecuaciones de éstos son:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a\ \cos\ (\omega t + \varphi_0) \\ y_1 &= a\ \text{sen}\ (\omega t + \varphi_0) \end{aligned}\right\};$$
$$\left.\begin{aligned} x_2 &= a\ \cos\ ([-\omega] t + \varphi_0) \\ y_2 &= a\ \text{sen}\ ([-\omega] t + \varphi_0) \end{aligned}\right\}.$$

El movimiento resultante tiene por ecuaciones:

$$x = x_1 + x_2 = 2a\ \cos\ \varphi_0 \cos\ \omega t;$$
$$y = y_1 + y_2 = 2a\ \text{sen}\ \varphi_0 \cos\ \omega t.$$

Dividiendo la segunda de estas ecuaciones por la primera, se elimina el tiempo y se obtiene la ecuación de la trayectoria: $y = x \cdot \text{tg}\ \varphi_0$. Luego, el movimiento resultante es rectilíneo sobre la recta $y = x \cdot \text{tg}\ \varphi_0$; es decir, sobre la recta MN; es armónico, de amplitud $2a$, y de período y centro iguales a los de los movimientos componentes.

Inversamente: cualquier movimiento armónico puede considerarse resultante de dos movimientos circulares uniformes de sentidos opuestos, de igual período, y de radio igual a la mitad de la amplitud del movimiento armónico dado.

§ 69. Construcción de Fresnel. Volvamos al problema de la composición de dos movimientos armónicos sobre el mismo eje (§ 66, *a*]).

Sean los dos movimientos armónicos componentes:

$$x_1 = a_1\ \cos\ (\omega t + \varphi_{01}) \qquad [1]$$
$$x_2 = a_2\ \cos\ (\omega t + \omega_{02}). \qquad [2]$$

Se traza la circunferencia de centro O y radio $O A_1 = a_1$ (fig. 126), y se considera, a la vez que el movimiento armónico [1] del punto Q_1, el movimiento circular uniforme de A_1, que engendra a aquél mediante proyección sobre el eje x.

Análogamente, junto con el movimiento armónico [2] de Q_2, se considera el movimiento generador, circular uniforme, de A_2, con radio $OA_2 = a_2$. Si en la figura 126 se suponen dibujadas las posiciones A_1 y A_2 para el instante $t = 0$, entonces $\widehat{xOA}_1 = \varphi_{01}$ es la fase inicial del movimiento armónico [1], y $\widehat{xOA}_2 = \varphi_{02}$, es la fase inicial del movimiento armónico [2].

Componiendo los dos movimientos circulares, la diagonal OA da la amplitud del movimiento circular uniforme resultante; y $\widehat{xOA}$ es la fase inicial.

Ahora bien, $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{A_1A} = \overrightarrow{OA}_1 + \overrightarrow{OA}_2$ tienen los mismos extremos; de modo que, proyectando sobre el eje de las x, es

$$x = x_1 + x_2.$$

Pero x, abscisa de Q, da el movimiento de la proyección de A sobre el eje de las x; puesto que A se mueve con movimiento circular uniforme, el movimiento de Q es armónico.

Luego, la resultante $x = x_1 + x_2$ de las oscilaciones [1] y [2] es una oscilación armónica de período $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Se encuentra de nuevo el resultado del § 66, *a*]. Además, la figura 126 da una representación geométrica de la amplitud A y de la fase inicial Φ_0 del movimiento resultante: $A = OA$ es la diagonal del paralelogramo construído sobre los vectores $\overrightarrow{OA}_1$ y $\overrightarrow{OA}_2$, de módulos a_1 y a_2, que forman el ángulo $\Delta\varphi = \varphi_{02} - \varphi_{01}$; Φ_0 es el ángulo que la diagonal $\overrightarrow{OA}$ forma con el eje x en el instante inicial.

La construcción de Fresnel se extiende a la composición de n movimientos armónicos, realizados sobre el mismo eje, y del mismo período.

§ 70. Composición de movimientos armónicos, de períodos diferentes, sobre un mismo eje. Sean los dos movimientos componentes:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_1\ \cos\ (\omega_1 t + \varphi_{01}) \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_1} \\ x_2 &= a_2\ \cos\ (\omega_2 t + \varphi_{02}) \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_2} \end{aligned}\right\}. \qquad [1]$$

El movimiento resultante es:

$$x = x_1 + x_2 = a_1 \cos\,(\omega_1 t + \varphi_{01}) + a_2\ \cos\ (\omega_2 t + \varphi_{02}), \qquad [2]$$

y nada más se puede decir en general.

El movimiento [2] no es ahora armónico; y si ω_1 y ω_2 no son conmensurables, es decir, no tienen una relación racional, el movimiento resultante no es ni siquiera periódico.

En cambio, si se tiene $\dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \dfrac{k_1}{k_2}$, y, por tanto, $\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{k_2}{k_1}$, siendo k_1

y k_2 números enteros y primos entre sí, el movimiento [2] es periódico con período:

$$T = T_1 k_1 = T_2 k_2 = k_1 \frac{2\pi}{\omega_1} = k_2 \frac{2\pi}{\omega_2}. \qquad [3]$$

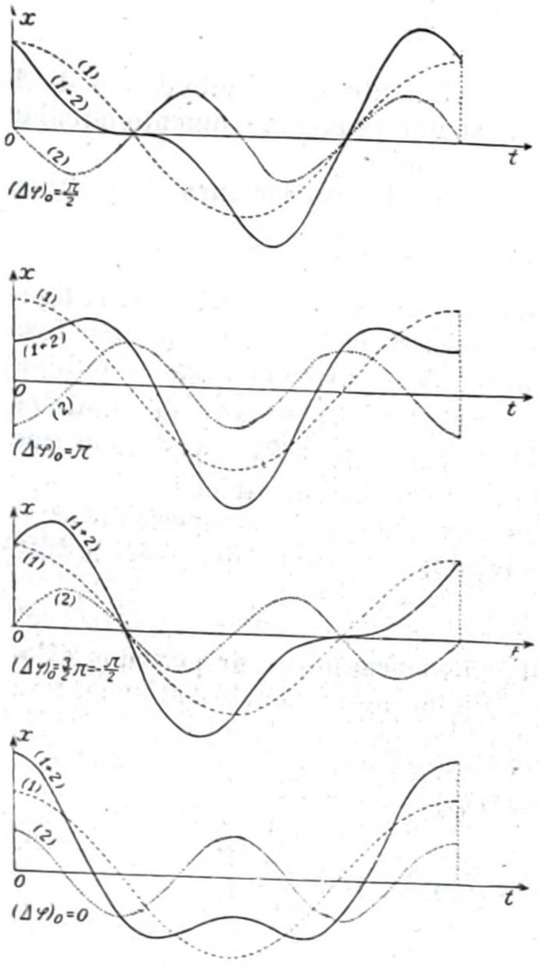


Fig. 128

En efecto, si en la [2] el tiempo t aumenta en $T = T_1 k_1 = T_2 k_2$, las dos fases $\omega_1 t + \varphi_{01}$ y $\omega_2 t + \varphi_{02}$ aumentan en un número entero de vueltas (respectivamente en k_1 y k_2); luego, x, y con x su derivada, toman de nuevo el valor primitivo.

Aun en los casos más sencillos, el gráfico $x = x(t)$ del movimiento [2] es notablemente complicado.

En la figura 128 se dan cuatro gráficos, para los cuales se tiene siempre:

$$a_2 = \frac{1}{2} a_1, \quad \omega_2 = 2\omega_1;$$

pero varía la diferencia de fase inicial $(\Delta\varphi)_0 = \varphi_{02} - \varphi_{01}$.

Se ha supuesto, además, para mayor sencillez, que $\varphi_{01} = 0$.

En la figura 129 se tiene otro ejemplo de movimiento periódico resultante de dos movimientos armónicos; siempre es $a_2 = \frac{1}{3} a_1$, $\omega_2 = 3\omega_1$, pero cambia la diferencia de fase inicial $(\Delta\varphi)_0 = \varphi_{02} - \varphi_{01}$; y $\varphi_{01} = 0$.

Nótese cómo varía notablemente la forma de la curva resultante al modificarse $(\Delta\varphi_0)$.

Todavía es más complejo, por regla general, el movimiento resultante cuando aumenta el número de movimientos armónicos componentes, dotados de períodos distintos entre sí.

Pero es mucho más importante el problema inverso, que en Física, en los casos más fáciles, se presenta, del modo siguiente.

§ **71. Análisis armónico.** Supongamos que se ha observado un

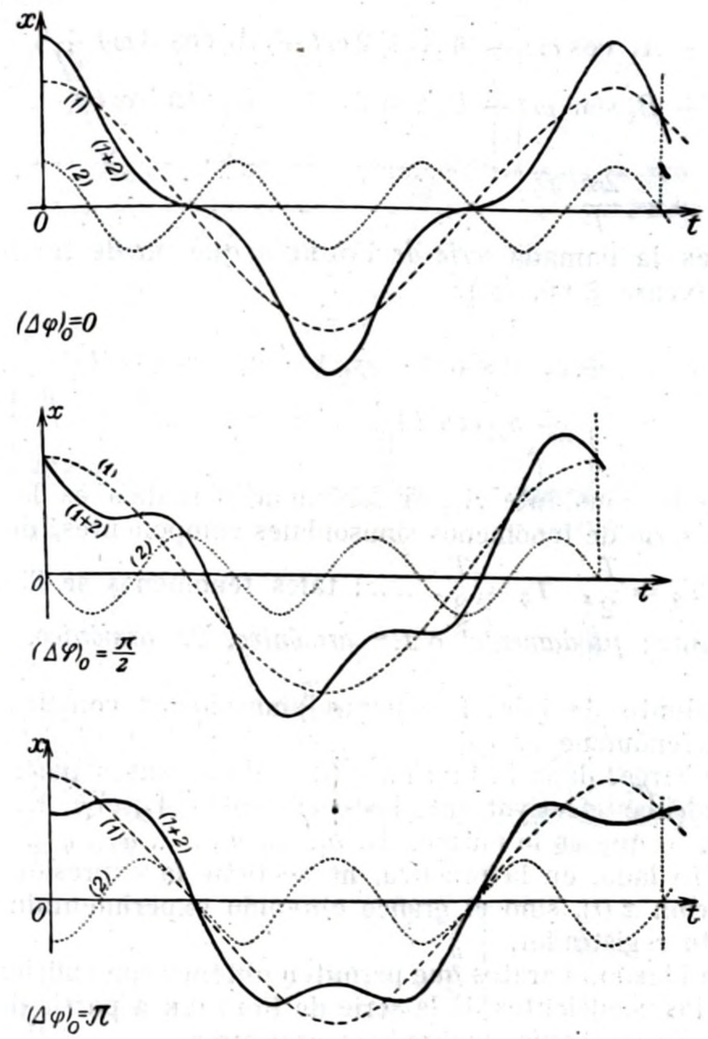


Fig. 129

fenómeno periódico, $x = x(t)$, no simple, es decir, cuya curva $x = x(t)$ aunque periódica, de período T, no es una sinusoide.

¿Puede imaginarse el fenómeno como la resultante

$$x = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_n + \ldots\ldots$$

de un número conveniente (que puede ser infinito) de fenómenos armónicos de período, fase inicial y amplitud adecuados?

El análisis infinitesimal responde afirmativamente a esta pregunta, con tal de imponer algunas condiciones, por lo demás poco restrictivas, a la regularidad de la función $x\,(t)$.

Se tiene:

$$x\,(t) = A_0 + A_1 \cos \omega t + A_2 \cos 2\omega t + A_3 \cos 3\omega t + \ldots\ldots + \\ + B_1 \operatorname{sen} \omega t + B_2 \operatorname{sen} 2\omega t + B_3 \operatorname{sen} 3\omega t + \ldots\ldots; \qquad [1]$$

en donde $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

Ésta es la llamada *serie de* FOURIER que puede también escribirse así (véase § 66, [8]):

$$x\,(t) = A_0 + a_1 \cos (\omega t + \varphi_{01}) + a_2 \cos (2\omega t + \varphi_{02}) + \\ + a_3 \cos (3\omega t + \varphi_{03}) + \ldots\ldots$$

Aparte la constante A_0, el fenómeno periódico es la resultante de una serie de fenómenos sinusoidales componentes, de períodos $T_1 = T$, $T_2 = \dfrac{T}{2}$, $T_3 = \dfrac{T}{3}$, ...; tales fenómenos se llaman, respectivamente: *fundamental* o *1.er armónico*, *2.º armónico*, *3.er armónico*, ...

El conjunto de tales fenómenos sinusoidales constituye el *espectro* del fenómeno en estudio.

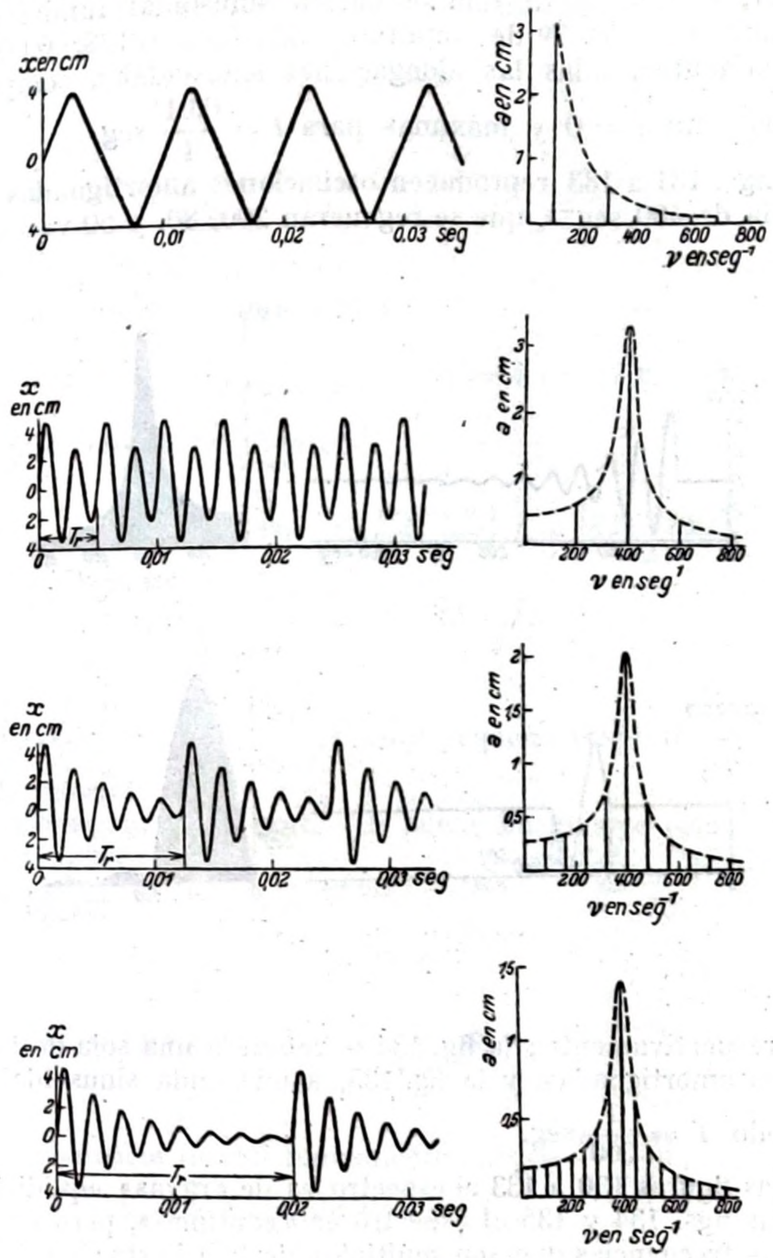
Sin embargo, dada la función $x\,(t)$, sólo en casos particulares se pueden calcular efectivamente los coeficientes A_0, A_1, A_2, ...; B_1, B_2, ... o, lo que es lo mismo, A_0, a_1, a_2, a_3, ..., φ_{01}, φ_{02}, φ_{03},.....

Por otro lado, en la práctica, no se tiene la expresión analítica de la función $x\,(t)$, sino el gráfico obtenido experimentalmente con un aparato registrador.

Se han ideado aparatos que permiten obtener con suficiente aproximación los coeficientes de la serie de FOURIER a partir del gráfico $x = x\,(t)$. Se les llama *analizadores armónicos*.

En algunos casos afortunados se obtiene el análisis armónico mediante aparatos de física sencillos y muy conocidos. Los *resonadores de Helmholtz* (§ 265), el oído humano y, todavía mejor, los *analizadores eléctricos* (§ 268) son los analizadores armónicos de los sonidos no simples, es decir, de aquellos que no corresponden a vibraciones sonoras sinusoidales; el *espectroscopio* es el analizador armónico de las vibraciones luminosas; el *cimómetro* (véase tomo II), de uso corriente en la técnica de las radiocomunicaciones, es el analizador armónico de las ondas hertzianas; etc.

Damos algunos ejemplos de los *espectros* de las componentes sinusoidales de algunas funciones $x = x\,(t)$, en particular de algunos movimientos, periódicos o no (POHL y otros).

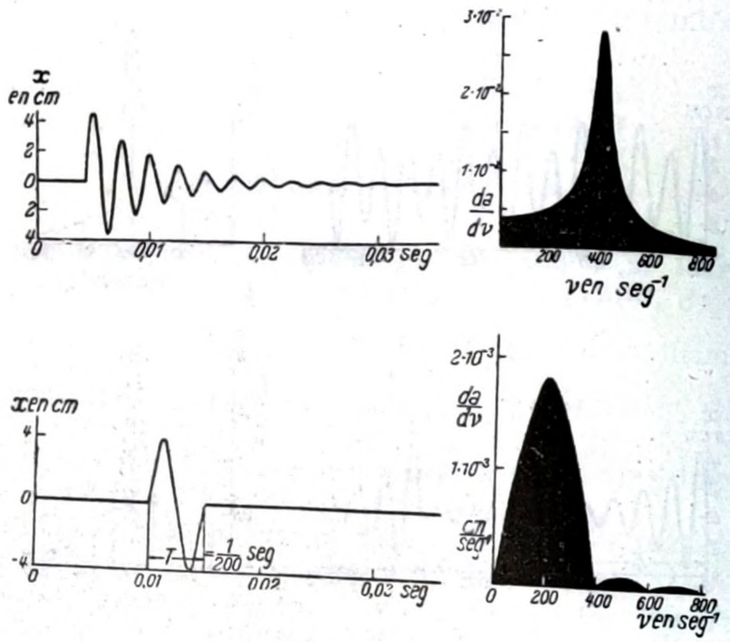


Figs. 130 a 133

En cada una de las figs. 130 a 133 aparece en la izquierda la curva $x = x\,(t)$, (x en cm t en seg); a la derecha se indica la amplitud a, en cm, de cada una de las componentes sinusoidades pre-

sentes, llevada como ordenada en correspondencia con su frecuencia ν (en seg^{-1} = hertz). La figura 130 considera una oscilación periódica, de período $T = 0{,}01$ seg ($\nu = 100$ seg^{-1}), de forma casi triangular, resultante de una oscilación sinusoidal fundamental y sus armónicos 3º, 5º, 7º de amplitudes 3,2, 0,64, 0,128, 0,0032 cm, respectivamente; todas las elongaciones sinusoidales componentes son nulas para $t = 0$ y máximas para $t = \frac{0{,}01}{4}$ seg.

Las figs. 131 a 133 reproducen oscilaciones amortiguadas de una frecuencia de 400 seg^{-1}, que se regeneran 200, 80, y 50 veces por segundo, respectivamente; la fig. 134 se refiere a una sola de tales oscilaciones amortiguadas, y la fig. 135, a una onda sinusoidal única de período $T = \frac{1}{200}$ seg.



Figs. 134 - 135

En las figuras 130 a 133 el espectro es de «rayas» equidistantes.

En las figs. 134 y 135 el espectro es «continuo», pero en la 135 faltan las frecuencias que son múltiplos de 200 hertz; en tales espectros la ordenada es $\frac{da}{d\nu}$; es decir, tal ordenada, multiplicada por cada pequeño intervalo espectral $d\nu$ da la amplitud media de la oscilación sinusoidal componente en dicho intervalo.

§ 72. **Pulsaciones y modulación.** Las *pulsaciones* son un caso particular de interferencia, debida a la composición de dos movimientos armónicos sobre el mismo eje, con amplitudes iguales y períodos T_1 y T_2 poco diferentes, es decir, tales que $|T_2 - T_1|$ es pequeño respecto a T_1 y a T_2.

Conviene introducir las frecuencias

$$\nu_1 = \frac{1}{T_1} \quad \text{y} \quad \nu_1 = \frac{1}{T_2},$$

también poco diferentes entre sí.

Los movimientos componentes.

$$x_1 = a \cos (2\pi \nu_1 t + \varphi_{01}); \qquad x_2 = a \cos (2\pi \nu_2 t + \varphi_{02}), \quad [1]$$

dan el movimiento resultante:

$$\left.\begin{aligned} x = x_1 + x_2 = 2a \cdot \cos \left(2\pi \frac{(\nu_2 - \nu_1)}{2} t + \frac{(\varphi_{02} - \varphi_{01})}{2}\right) \cdot \\ \cdot \cos \left(2\pi \frac{(\nu_1 + \nu_2)}{2} t + \frac{(\varphi_{02} + \varphi_{01})}{2}\right) \end{aligned}\right\} \quad [2]$$

Obsérvese que $\frac{\nu_2 - \nu_1}{2}$ es muy pequeño respecto a $\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}$ y también respecto a ν_1 y a ν_2.

El movimiento resultante [2] puede imaginarse como un movimiento armónico:

$$\left.\begin{aligned} x = \mathrm{A} \cdot \cos (\omega t + \Phi_0), \\ \text{tomando} \\ \omega = 2\pi \nu = 2\pi \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} \quad \text{y} \quad \Phi_0 = \frac{\varphi_{01} + \varphi_{02}}{2} \end{aligned}\right\}. \quad [3]$$

La frecuencia de este movimiento es $\nu_2 = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}$, no muy diferente de ν_1 y ν_2. La amplitud vale:

$$\mathrm{A} = 2a \cdot \cos \left(2\pi \frac{\nu_2 - \nu_1}{2} t + \frac{\varphi_{02} - \varphi_{01}}{2}\right), \quad [4]$$

que no es constante, sino que varía a su vez con el tiempo t según

una ley sinusoidal y con frecuencia $\nu_1 = \frac{\nu_2 - \nu_1}{2}$ pequeña respecto a ν_1 y ν_2.

El diagrama del movimiento resultante [2], [3] viene indicado en la figura 136.

Se ha supuesto que los movimientos componentes *a*), *b*) tenían frecuencias $\nu_1 = 60\ \text{seg}^{-1}$ (hertz), $\nu_2 = 70\ \text{seg}^{-1}$; amplitud $a = 0{,}5$ cm, fase inicial $\varphi_{01} = \varphi_{02} = -\frac{\pi}{2}$. El movimiento resultante *c*) puede imaginarse armónico, de frecuencia $\nu_2 = 65\ \text{seg}^{-1}$, pero su ampli-

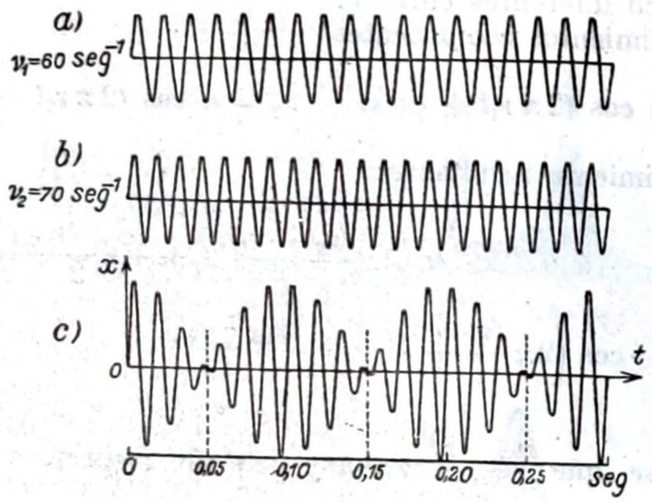


Fig. 136

tud varía sinusoidalmente de 1 cm a — 1 cm con frecuencia $\nu_1 = \frac{\nu_2 - \nu_1}{2} = 5\ \text{seg}^{-1}$; es decir, en 0,1 seg la amplitud pasa desde 0 a $2a$ y vuelve a 0.

Los dos movimientos [1] están prácticamente, en cierto instante, en oposición de fase, y se neutralizan mutuamente; en la figura, esto sucede para $t = 0{,}05$ seg.

Pero la diferencia de fase entre los dos movimientos

$$\Delta\varphi = (2\pi\nu_2 t + \varphi_{02}) - (2\pi\nu_1 t + \varphi_{01}) = 2\pi(\nu_2 - \nu_1)\,t + (\varphi_{02} - \varphi_{01}) \quad [5]$$

va aumentando gradualmente con t hasta que los dos movimientos están en corcordancia; y sucesivamente se vuelve al desacuerdo u oposición de fase, empleando en conjunto 0,1 seg.

En la representación geométrica de FRESNEL (§ 69, fig. 126) los dos radios vectores $\overrightarrow{OA}_1$, $\overrightarrow{OA}_2$ se han de suponer de la misma longitud y girando en el mismo sentido, pero con frecuencias ν_1, ν_2 un

poco diferentes; el ángulo $\widehat{A_1OA_2}$ varía lentamente con el tiempo al aumentar el $\widehat{xOA}$. Por ejemplo, en un segundo A_1 efectúa 60 vueltas y A_2 efectúa 70. A_2 alcanza a A_1 10 veces en 1 segundo *(concordancia de fase)* y otras tantas veces por segundo se encuentran A_1 y A_2 diametralmente opuestas *(oposición de fase)*. En cada intervalo de 0,1 seg el valor OA de la amplitud resultante varía entre 0 y $2a = 2 \cdot OA_1 = 2 \cdot OA_2$ y vuelve a 0.

En esto consiste el fenómeno de las *pulsaciones*.

En el ejemplo expuesto, los dos movimientos de frecuencias 60 y 70 seg^{-1} dan 10 pulsaciones por segundo; esto es, hay interfe-

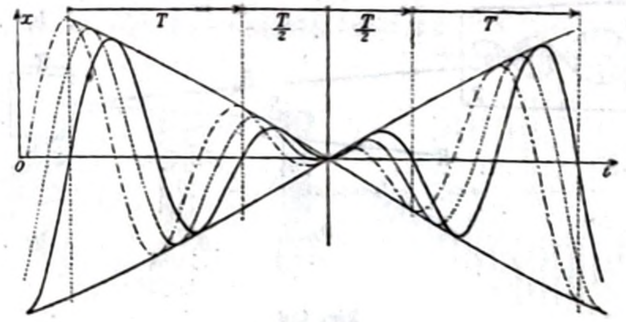


Fig. 137

rencia, anulándose mutuamente 10 veces por segundo; la frecuencia de las pulsaciones es $\nu_2 - \nu_1 = 2\nu_1$.

Para los valores de t que anulan $\cos\left(2\pi\frac{\nu_2 - \nu_1}{2}\,t + \frac{\varphi_{02} - \varphi_{01}}{2}\right)$ la amplitud resultante A dada por [4] pasa por 0 y cambia de signo; para tales valores del tiempo la fase del movimiento cambia bruscamente en π (§ 56, *c*]).

En la figura 137 se representan diversos gráficos $x = x(t)$ del movimiento [2] en la proximidad de un instante de amplitud nula correspondiente a diversos valores de la fase

$$2\pi\,\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}\,t + \frac{\varphi_{01} + \varphi_{02}}{2}$$

del movimiento armónico de alta frecuencia $\nu_2 = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}$.

Pero si ν_1 y ν_2 están muy próximos entre sí, la influencia del valor de esta fase es poco aparente.

El experimento de los diapasones cruzados (fig. 124) es apropiado para mostrar las pulsaciones. Pero ahora los dos diapasones D_1 y D_2 deben ser paralelos (fig. 138), y el período de uno de

ellos se aumenta ligeramente mediante las pequeñas masas m_1, m_1, sujetas en las ramas de uno de los diapasones.

Todavía el movimiento del hacecillo de luz $R\,R$, reflejado sucesivamente en los espejos S_1 y S_2 de los diapasones, se debe a la resultante de las dos vibraciones; pero si se recogiera, sin más, en la pantalla Π, aparecería en ésta un trazo luminoso vertical $A\,B$, de amplitud variable con el tiempo, y no se vería la característica del movimiento resultante.

Se hace reflejar el rayo RR sobre una de las cuatro caras del espejo giratorio F, que rueda alrededor del eje $N\,N$, de modo que

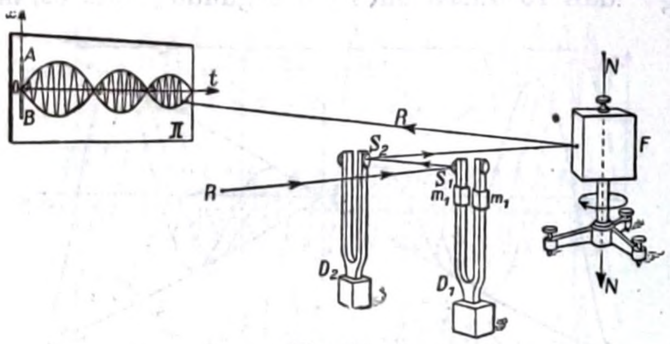


Fig. 138

la pantalla Π recoja el hacecillo reflejado por F. Entonces, la mancha luminosa formada por el rayo $R\,R$ sobre la pantalla, tiene dos movimientos: uno a lo largo de un eje horizontal, que funciona como eje de los tiempos en el gráfico del movimiento, y otro según el eje vertical debido a la composición de las vibraciones de los dos diapasones.

La curva que el punto luminoso describe sobre Π tiene la forma característica de la figura 136; las pulsaciones mecánicas, señaladas así ópticamente sobre Π, van acompañadas de otras tantas pulsaciones sonoras en el sonido que nuestro oído recibe de los dos diapasones juntos.

Inversamente: si te tuviera un movimiento

$$x = \mathrm{A}\,\cos\,(2\pi\,\nu_2 t + \varphi_{02}), \qquad [6]$$

en donde

$$\mathrm{A} = b\,\cos\,(2\,\pi\,\nu_1 t + \varphi_{01}), \qquad [7]$$

con $\nu_1 \ll \nu_2$, resultaría un gráfico del tipo de la figura 136, *c*), que es, por tanto, un movimiento seudoperiódico de frecuencia ν_2 y da origen a pulsaciones de frecuencia $2\,\nu_1$.

La [6] puede escribirse:

$$\left.\begin{aligned} x = \frac{b}{2}\cos\,[2\,\pi\,(\nu_2 + \nu_1)\,t + (\varphi_{01} + \varphi_{02})] + \\ + \frac{b}{2}\cos\,[2\,\pi\,(\nu_2 - \nu_1)\,t + (\varphi_{02} - \varphi_{01})] \end{aligned}\right\}; \qquad [8]$$

luego, es resultante de dos movimientos armónicos de igual amplitud $a = \frac{b}{2}$ y de frecuencias muy próximas entre sí, respectivamente iguales a $(\nu_2 + \nu_1) = \nu_2$ y $(\nu_2 - \nu_1) = \nu_1$.

Este resultado es de continuo uso en las radiocomunicaciones,

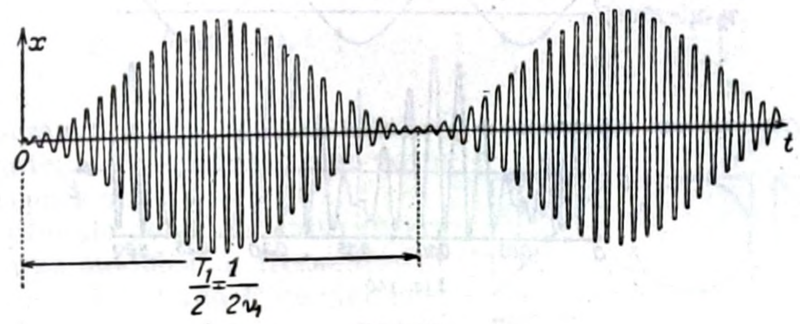


Fig. 139

porque las oscilaciones *moduladas* son, en el caso más sencillo, oscilaciones cuya amplitud va variando según la [7].

Las mismas oscilaciones moduladas de seudofrecuencia ν_2, son la suma de dos oscilaciones de frecuencias $\nu_2 + \nu_1$ y $\nu_2 - \nu_1$, respectivamente.

En general, se tiene un fenómeno (por ejemplo, un movimiento) periódico definido por la

$$x = x\,(t) = a \cdot \cos\,(\omega\,t + \varphi_0),$$

que es sinusoidal simple si a, ω, φ_0 son constantes con respecto al tiempo; se dice que se tiene una *modulación* de tal fenómeno si se supone que a, o bien ω, o bien φ_0, son funciones del tiempo, pero con una variación tan lenta que no desaparece el aspecto oscilatorio, casi periódico, del fenómeno mismo.

Si se supone $a = a\,(t)$, como ocurre para la A en las expresiones [6] y [7], se tiene modulación en la amplitud; si se supone $\omega = 2\pi\nu_1 = \omega\,(t)$, se tiene modulación de frecuencia; si es $\varphi_0 = \varphi_0\,(t)$, se tiene modulación de fase.

Verdaderamente, se consigue el tipo ideal de *modulación* imaginando que en la [6] la amplitud de vibración A varía con el tiempo no según la simple ley sinusoidal [7], sino según la fórmula:

$$A = c \cos^2 (2\pi\nu_1 t + \varphi_{01}). \qquad [9]$$

En la figura 139 se da el gráfico de un movimiento de esta clase.

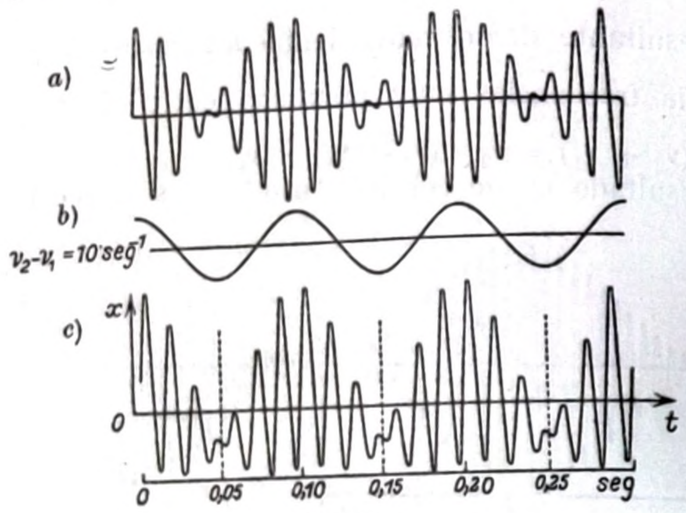


Fig. 140

La [9] se escribe también:

$$A = c\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left[2\pi\,(2\nu_1 t) + 2\varphi_{01}\right],\right.$$

y la oscilación así modulada, poniendo $a = \frac{c}{4}$, es:

$$\left.\begin{aligned} x = {} & 2a\cos(2\pi\nu_2 t + \varphi_{02}) + \\ & + 2a\cos\left[2\pi\,(2\nu_1)\,t + 2\varphi_{01}\right]\cdot\cos(2\pi\nu_2 t + \varphi_{02}) \end{aligned}\right\}; \qquad [10]$$

es decir, es la suma de una oscilación armónica de frecuencia ν_2 y amplitud $2a$, y de una oscilación con pulsaciones del tipo [6], [8], de amplitud máxima $2a$, seudofrecuencia todavía igual a ν_2 y frecuencia de las pulsaciones igual a $4\nu_1$.

En la fig. 140 está indicada en *c*) la oscilación resultante de tres oscilaciones armónicas, las dos oscilaciones armónicas *a*), *b*), de la figura 136, frecuencias ν_1, ν_2, amplitud a, que dan origen a las pulsaciones *c*) de la fig. 136, diseñadas en *a*), fig. 140, y una tercera oscilación armónica [fig. 140, *b*)], de amplitud a y de frecuencia

$\nu_2 - \nu_1 = 10\ \text{seg}^{-1}$, semejante a la de las pulsaciones de la curva *a*). Si los valores máximos de las elongaciones de esta oscilación coinciden con las máximas amplitudes de las oscilaciones de la curva *a*), la oscilación resultante es asimétrica con respecto al eje de las abcisas; si se supone dicho eje corrido hacia abajo en $\approx a$, se dispone de un grafico $x = x(t)$ muy semejante al de una oscilación modulada y «rectificada».

§ 73. Composición de dos movimientos armónicos, de períodos diferentes, sobre ejes ortogonales. Si los movimientos componentes son:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos(\omega_x t + \varphi_{0x}) \quad ; \quad \nu_x = \frac{\omega_x}{2\pi} = \frac{1}{T_x} \\ y &= b\cos(\omega_y t + \varphi_{0y}) \quad ; \quad \nu_y = \frac{\omega_y}{2\pi} = \frac{1}{T_y} \end{aligned}\right\}, \qquad [1]$$

éstas serán también las ecuaciones paramétricas de la trayectoria resultante. Nada interesante se ve en estas ecuaciones.

El péndulo doble de Righi (figura 123), si se modifica la frecuencia de vibración del embudo P moviendo el cursor C, permite dibujar experimentalmente la trayectoria [1]. Se obtienen las *Figuras de* Lissajous (figura 141), de forma característica, que depende de la razón entre las frecuencias de los movimientos componentes y del valor de la diferencia de fase inicial:

$$(\Delta\varphi)_0 = \varphi_{0y} - \varphi_{0x}.$$

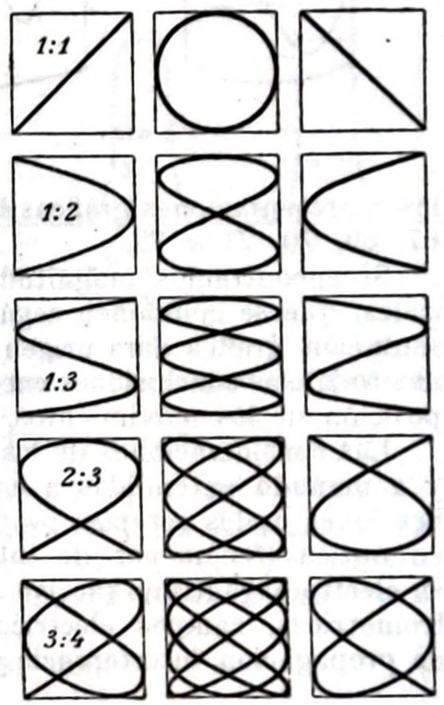


Fig. 141

También se pueden obtener estas figuras mediante los diapasones de la figura 124, proyectando el rayo sobre la pantalla Π; basta aplicar gruesas masas adicionales, sobre las ramas de uno de los diapasones, para modificar notablemente su frecuencia de vibración.

Las figuras de Lissajous se pueden observar fácilmente pegando sobre la pared lateral de un tubo ancho de vidrio C (fig. 142) una sinusoide S, recortada de un papel de dibujo, y tal que en el perímetro del cilindro C entren un número entero exacto de ondas de

la sinusoide; por ejemplo, dos ondas ($T_x = 2\,T_y$). Proyectando sobre una pantalla Π, o, sencillamente, observando por transparencia en la dirección R, aparece la sinusoide como una figura de LISSAJOUS.

Y se comprende, porque el ojo del observador, para seguir la sinusoide en su completo desarrollo, debe oscilar una vez en sentido horizontal y, simultáneamente, dos veces en sentido vertical: se trata, por tanto, de la composición de dos vibraciones de períodos diferentes.

§ 74. Generalización. El caso de composición de dos o más movimientos, y, en particular, de dos o más movimientos armónicos o circulares alrededor de un mismo centro, constituye en esencia un ejercicio de geometría analítica, pero su utilidad es fundamental para la Física.

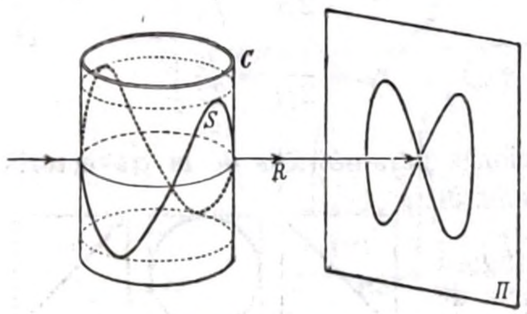


Fig. 142

Siempre que tropecemos con magnitudes escalares sinusoidales y tengamos que sumarlas, representándolas gráficamente sobre un eje cartesiano, valdrán para tales representaciones gráficas las propiedades indicadas en §§ 66, *a*], 67, 69, 70, 71 y 72.

Si encontramos magnitudes sinusoidales con caracteres vectoriales, que se componen según la regla del paralelogramo, su representación gráfica dará origen a vectores para los cuales serán válidas todas las conclusiones encontradas en los §§ 64 ÷ 73 para la composición de los movimientos.

Las consideraciones de los §§ 62 ÷ 73 se utilizan continuamente, y a menudo extendidas a casos más complicados, en acústica (vibraciones de los cuerpos, propagación de los sonidos, interferencia), en óptica (fenómenos de interferencia y polarización de la luz), en electromagnetismo (acción simultánea de corrientes, fuerzas electromotrices, campos eléctricos o magnéticos alternos, fenómenos de propagación, interferencia y polarización de las ondas hertzianas).

§ 75. Fenómenos periódicos y método estroboscópico de observación. Sea un fenómeno periódico en la cual la magnitud observada y es función periódica del tiempo t.

Así, una lámpara de arco alimentada con corriente alterna es un manantial de luz que varía periódicamente con el tiempo; en un motor de explosión cuyo cigüeñal efectúa 3000 vueltas por minuto, los diversos órganos repiten periódicamente la misma función: unos, 50 veces cada segundo; otros, 25 veces, etc.

En un diapasón electromagnético (fig. 65) que vibra con la frecuencia de 100 hertz, cada rama realiza un movimiento periódico, repitiéndolo 100 veces por segundo. Y los ejemplos podrían multiplicarse.

En todos estos casos no es posible observar directamente el fenómeno periódico, por ser su frecuencia demasiado elevada.

Un dispositivo *(método estroboscópico)* permite hacer más lento, aparentemente, el fenómeno periódico, de modo que pueda observarse con comodidad.

Este dispositivo consiste, en último término, en una composición de fenómenos periódicos de frecuencia muy poco diferente.

Por ejemplo: sea el movimiento del punto A (fig. 143), extremo de la varilla h, movida por la palanca E, destinado a abrir periódicamente la válvula de escape V, de un motor de explosión. El árbol η, con la palanca (perpendicular al plano del dibujo), gira con velocidad constante y efectúa, por ejemplo, 25 vueltas por segundo.

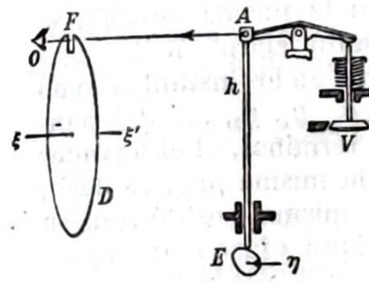


Fig. 143

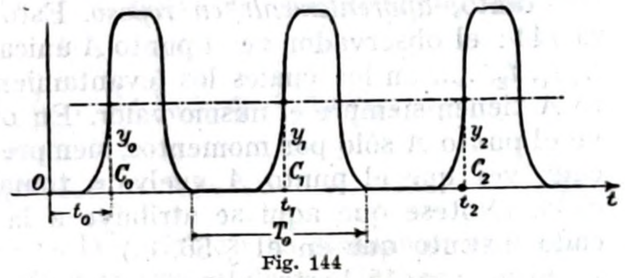


Fig. 144

El levantamiento $y = y\,(t)$ de A es función periódica del tiempo, siendo su período $T_0 = \frac{1}{25}$ seg, y su frecuencia, $\nu_0 = 25$ hertz.

En este párrafo usamos los conceptos de *frecuencia* y *período*, aplicados a *un fenómeno periódico no sinusoidal*. En Acústica y Optica, se tiende a *limitar el empleo de tales términos, y el del concepto de longitud de onda* (§ 249), *en ellos involucrado al caso exclusivo de los fenómenos sinusoidales simples*.

Para cualquier valor del tiempo t, se tiene:

$$\left.\begin{aligned} &y\,(t) = y\,(t + T_0), \\ &\text{y, por tanto, también:} \\ &y\,(t) = y\,(t + T_0) = y\,(t + 2\,T_0) = y\,(t + 3\,T_0) = \ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad [1]$$

La curva $y = y\,(t)$ tiene la forma indicada en la figura 144.

Pero no es posible la observación directa del movimiento, porque la *frecuencia* ν_0 *del fenómeno* es demasiado elevada.

Se observa el punto A fig. 144) a través del borde de un disco opaco D *(disco estroboscópico*, de metal, cartón, etc.), mantenido en rotación alrededor del eje $\xi\xi'$, por ejemplo, mediante un motorcito eléctrico. El borde de este disco tiene un agujero o rendija F.

Así, el observador ve intermitentemente el punto A, a través del disco estroboscópico, solamente en el instante en que el agujero F pasa por delante de su ojo O. Si el disco D gira con período T, y, por tanto, con frecuencia $\nu = \frac{1}{T}$, ν es la *frecuencia de observación*. Se varía gradualmente la velocidad del disco, y, por tanto, ν.

Si ν toma el valor ν_0 (por tanto, es también $T = T_0$), el observador, con el ojo en O, vé el punto A un número de veces por segundo igual a $\nu_0 = \frac{1}{T_0}$, que corresponden a los pasos sucesivos de la rendija F por delante del ojo, en los instantes t_0, $t_0 + T_0$, $t_0 + 2T_0$ .....

Pero, según [1], y toma siempre en tales instantes el mismo valor; el observador ve el punto A siempre en la misma posición y, por tanto, *aparentemente en reposo*. Esto resulta claro en la figura 144: el observador ve el punto A únicamente en los instantes como t_0, t_1, t_2, ... en los cuales los levantamientos y_0, y_1, y_2, ... del punto A tienen siempre el mismo valor. En otros términos, el observador ve el punto A sólo por momentos, siempre en la misma *fase*, es decir, cada vez que el punto A vuelve a tomar la misma posición en su ciclo. (Nótese que aquí se atribuye a la palabra «fase» un significado distinto que en el § 56, *c*]).

Si $\nu_0 > \approx 15$ hertz, el punto A parece, además, que se ve continuamente, gracias a la persistencia de las imágenes en la retina.

El disco estroboscópico está en *sincronismo* con el movimiento de A. Este sincronismo se obtiene regulando la velocidad del disco D hasta que se vea fijo, a través de él, el punto A. La maniobra de regulación se efectúa con mucho cuidado y ha de afinarse durante toda la observación. De esta maniobra depende también la *fase de observación* OC_0 y, por tanto, la altura y_0 en que aparece el punto A. Obsérvese que si la frecuencia de observación ν es un submúltiplo de ν_0,

$$\nu = \frac{\nu_0}{k}; \text{ por tanto, } T = k \cdot T_0 \qquad [2]$$

(donde k es un número entero pequeño), todavía aparece en reposo el punto A visto a través del disco estroboscópico. Pero conviene que sea $k = 1$. Basta para ello experimentar partiendo de una frecuencia de observación ν que sea seguramente mayor que ν_0 y disminuirla gradualmente hasta lograr la apariencia de reposo del punto A.

Obtenido el sincronismo, se disminuye ligeramente la marcha del disco estroboscópico. Sea ahora su período de rotación $T = T_0 (1 + \varepsilon)$ con ε muy pequeño con respecto a la unidad; la nueva frecuencia de observación del fenómeno será: $\nu = \frac{1}{T_0 (1 + \varepsilon)}$.

Los instantes de observación son ahora:

$$t_0;\ t_0 + T = t_0 + T_0 + \varepsilon T_0;\ t_0 + 2T = t_0 + 2T_0 + 2\varepsilon T_0;$$
$$t_0 + 3T = t_0 + 3T_0 + 3\varepsilon T_0; \text{ .....}$$

Por tanto, según la [1], se observarán los siguientes valores de y:

$$y(t_0);\ y(t_0 + T_0 + \varepsilon T_0) = y(t_0 + \varepsilon T_0);$$
$$y(t_0 + 2T_0 + 2\varepsilon T_0) = y(t_0 + 2\varepsilon T_0);$$
$$y(t_0 + 3T_0 + 3\varepsilon T_0) = y(t_0 + 3\varepsilon T_0); \text{ .....}$$

Todo aparece, pues, como si se observase el fenómeno que se estudia en los instantes:

$$\tau = t_0;\ t_0 + \varepsilon T_0;\ t_0 + 2\varepsilon T_0;\ t_0 + 3\varepsilon T_0; \text{ .....}$$

Si $m = \frac{1}{\varepsilon}$, o sea: $m \cdot \varepsilon = 1$, [3]

al llegar al instante $m \cdot T_0 (1 + \varepsilon)$, la variable τ ha alcanzado el valor $t_0 + T_0$; el fenómeno observado a través del disco estroboscópico ha

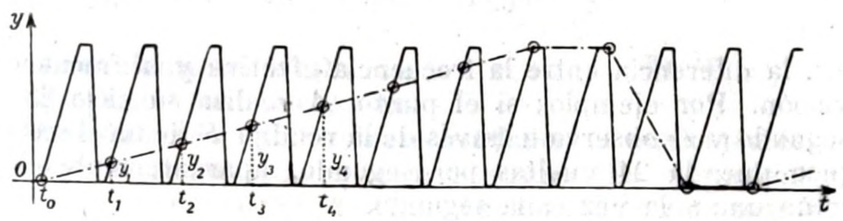


Fig. 145

completado su período, y, también esta vez, por la persistencia de las imágenes en la retina, el observador O creerá observar un fenómeno aparentemente continuo.

Todo esto se comprende mejor en la figura 145.

El observador ve el punto A solamente en instantes t_0, t_1, t_2, ... que distan entre sí $T = T_0 (1 + \varepsilon)$; «explora» el fenómeno $y = y(t)$, observando sucesivamente los únicos valores y (= 0 en la figura), y_1, y_2, y_3, ... de la altura hy; el ciclo del fenómeno que se

observa a través del disco D, se completa únicamente después de $m = \frac{1}{\varepsilon}$ vueltas del disco; esto es, según [3], en el tiempo $mT = m\,T_0\,(1+\varepsilon) = (m+1)\,T_0$.

En otros términos: el observador ve el punto A en una cierta posición; vuelve a verlo cuando ha seguido un ciclo entero de su movimiento, más la pequeña fracción ε del ciclo sucesivo; lo ve de nuevo después, cuando ha completado dos ciclos enteros, más la fracción 2ε del ciclo siguiente, y así siguiendo. Pero, por la persistencia de las imágenes en la retina, al observador le parece que la altura y varía continuamente con el tiempo, según la ley determinada por la línea de puntos y rayas. Esta línea tiene la misma forma que la de la curva $y = y\,(t)$, pero «dilatada» a lo largo del eje de los tiempos. El movimiento periódico del punto A aparece con su modalidad, pero *más lento*, como si su período fuese $(m+1)\,T_0$, en lugar de T_0.

La frecuencia efectiva del fenómeno es $\nu_0 = \frac{1}{T_0}$; la frecuencia de observación es $\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{T_0\,(1+\varepsilon)}$; la *frecuencia aparente* ν_{ap} del fenómeno periódico observado con movimiento lento es:

$$\left.\begin{aligned} \nu_{ap} &= \frac{1}{(m+1)\,T_0} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\varepsilon}+1\right)T_0} = \frac{\varepsilon}{T_0\,(1+\varepsilon)} = \\ &= \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_0\,(1+\varepsilon)} = \nu_0 - \nu \end{aligned}\right\}; \qquad [4]$$

es decir, la diferencia entre la frecuencia efectiva y la frecuencia de observación. Por ejemplo: si el punto A realiza su ciclo 25 veces cada segundo y se observa a través de la rendija F de un disco estroboscópico que da 24 vueltas por segundo, aparentemente el ciclo se efectúa una sola vez cada segundo.

La función del disco estroboscópico es hacer visible el fenómeno que se estudia en determinados instantes sucesivos y con intervalos de tiempo bien constantes. La observación a través del disco estroboscópico puede, por tanto, sustituirse por una iluminación intermitente cualquiera.

Ésta puede obtenerse:

a] con iluminación intermitente producida por un haz de luz que procede de un manantial constante y es concentrado sobre el borde del disco estroboscópico; así el haz de luz llega al objeto que se se observa únicamente cuando la rendija F del disco le permite el paso;

b] empleando un manantial de luz efectivamente intermitente, como, por ejemplo, una sucesión de chispas producidas por un contacto giratorio, o la descarga intermitente en un gas enrarecido (el neón, generalmente, por su mucho brillo), que es el método actualmente más empleado.

Los diversos estrobóscopos que se encuentran actualmente en el mercado, se distinguen por el modo de obtener la visión intermitente y por el modo de regular, a voluntad y con exactitud, entre muy anchos límites, la frecuencia de observación.

C. — NOCIONES DE CINEMÁTICA DE LOS CUERPOS RÍGIDOS

§ 76. Cuerpos rígidos y movimientos rígidos. Un cuerpo *rígido*, es decir, indeformable, está formado de puntos cuyas distancias relativas permanecen invariables.

Los cuerpos sólidos pueden considerarse como cuerpos rígidos en una primera y buena aproximación.

Se comprende que un *movimiento rígido*, es decir, un movimiento de un cuerpo rígido, aunque resulta más complejo que el de un simple punto material, no puede ser muy arbitrario, porque los diversos puntos se han de mover conservando sus distancias mutuas y satisfaciendo así la condición de indeformabilidad.

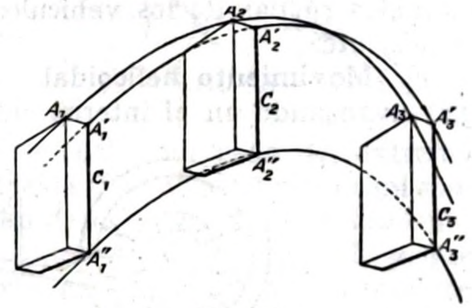


Fig. 146

En un cuerpo rígido son evidentemente posibles, por lo menos, los siguientes movimientos rígidos:

a] **Movimiento de traslación.** Todos los puntos del cuerpo experimentan durante el movimiento corrimientos equipolentes, es decir, iguales en magnitud, dirección y sentido. El *corrimiento* de un punto cualquiera del cuerpo determina el corrimiento de todo el cuerpo, desde la posición C_1 (fig. 146) a otra posición C_2; este corrimiento puede considerarse como un vector cuyo punto de aplicación queda indeterminado.

Cualquier recta ideal unida al cuerpo, se mueve permaneciendo paralela a sí misma. Se dice abreviadamente que el cuerpo se mueve manteniéndose paralelo a sí mismo. Todos los puntos del cuerpo recorren trayectorias iguales y con la misma ley del movimiento.

Se ha hecho ya referencia a este movimiento rígido en los §§ 59 y 60, a propósito del movimiento relativo y de la composición de movimientos.

b] **Movimiento de rotación.** Todos los puntos del cuerpo describen trayectorias circulares, teniendo un eje común: el *eje de rotación*. Los puntos del cuerpo rígido que pertenecen a este eje giran sobre sí mismos y tienen velocidad nula. La velocidad angular ω es, en general, función del tiempo, y es, en cada instante, la misma para todos los puntos del cuerpo sólido. Si ω es constante respecto al tiempo, el movimiento de rotación es uniforme.

Para todos los puntos A del cuerpo rígido son válidas las consideraciones del § 58, *a*]. Si $\vec{r}$ es la distancia de un punto A del cuerpo rígido al eje de rotación, la velocidad $\vec{u}$ del punto A es perpendicular a $\vec{r}$ y al eje de rotación; su magnitud es $u = r \cdot \omega$. Lo mismo que en el § 58, *a*], conviene considerar la velocidad angular como un vector $\vec{\omega}$ de módulo $|\omega|$, coincidente con el eje de rotación, sin punto de aplicación determinado, dirigido en el sentido que da la regla de AMPÈRE. Se tiene entonces, para cualquier punto y en cualquier instante:

$$\vec{\omega} \wedge \vec{r} = \vec{u}. \qquad [1]$$

El movimiento de rotación se encuentra realizado en las innumerables ruedas de los vehículos, de las máquinas, de las transmisiones, etc.

c] **Movimiento helicoidal.** Es el que efectúa el tornillo cuando gira avanzando en el interior de la tuerca; se comprende con facilidad que se puede imaginar este movimiento como resultante de la composición de un movimiento de rotación, y de otro de traslación a lo largo del eje de rotación.

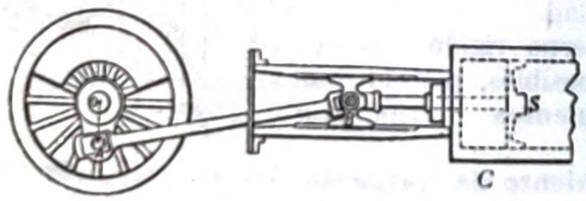


Fig. 147

El movimiento más general de un cuerpo rígido libre se estudia en mecánica racional.

Tiene un interés práctico grandísimo el estudio cinemático de los sistemas de cuerpos rígidos ligados entre sí, de tal modo que un movimiento determinado de uno de los elementos rígidos que constituyen el sistema fije el movimiento de todos los demás elementos. Así, en la figura 12, el movimiento de la cabeza T del tornillo V determina el movimiento del bastidor que lleva el retículo. En el clásico sistema biela-manivela (fig. 147), un movimiento de rotación de la rueda engendra un determinado movimiento de vaivén del émbolo S, y viceversa.

El estudio de los diversos sistemas cinemáticos relativos a los *mecanismos* más variados, es uno de los asuntos de la mecánica aplicada.

CAPÍTULO IV

Estática

§ 77. Fuerzas. Objeto de la estática. Sea un muelle ligero D (figura 148), de forma helicoidal, y verifíquese que, colocado en posición vertical, no se alarga sensiblemente por efecto de su propio peso.

Fig. 148

Fijado un extremo en O y tirando con la mano del extremo A, se alarga el resorte; la mano ejerce una *fuerza* en el punto A. Si el esfuerzo se ejecuta hacia abajo, tomará el resorte la orientación $O'A'$, y si el alargamiento es igual al precedente, diremos que la fuerza muscular empleada tiene la misma magnitud que la primera. Si se cuelga un peso del extremo móvil del resorte, toma éste la orientación $O''A''$ y se alarga asimismo.

Imaginando que efectos iguales han de obedecer a una causa análoga, decimos que el cuerpo P ejerce una *fuerza-peso* en A'', y que esta fuerza es igual a la precedente fuerza muscular cuando produce la misma deformación del muelle. La dirección y el sentido de $O''A''$, o, mejor todavía, del hilo *f* [fig. 149, *a*)], dan la dirección *(vertical)* y el sentido de la fuerza-peso: el dispositivo es una *plomada*.

El mismo cuerpo P ejerce su acción ya sea mediante el hilo *f*, ya mediante el hilo *f* y la polea bien engrasada C [fig. 149, *b*)], produciendo en los dos casos la misma deformación del resorte. La fuerza-peso del cuerpo P puede así actuar como si estuviese aplicada en los puntos A''', A^{IV}, A^{V}, ...; esto es, teniendo siempre la misma magnitud, haciéndolo siempre con la misma *intensidad*, pero en direcciones diferentes, indicadas por el eje del muelle o, todavía mejor, por el pedazo de hilo que parte de A''', A^{IV}, A^{V}, ...

La fuerza-peso de P actúa en estos casos de modo que puede representarse, a escala conveniente, por segmentos orientados de la misma longitud, pero de orientación diferente, y aplicados respectivamente en A''', A^{IV}, A^{V}, ...

Sabemos que el resorte funciona como *dinamómetro* cuando, elegida la unidad de medida de las fuerzas (por ejemplo, el *gramo-peso*), está graduado como se indicó en el § 42. Ahora, con la ayuda del hilo *f*, el muelle puede señalar todos los elementos que determinan el vector-fuerza aplicado en A''', A^{IV}, A^{V}, ... (módulo, dirección y sentido).

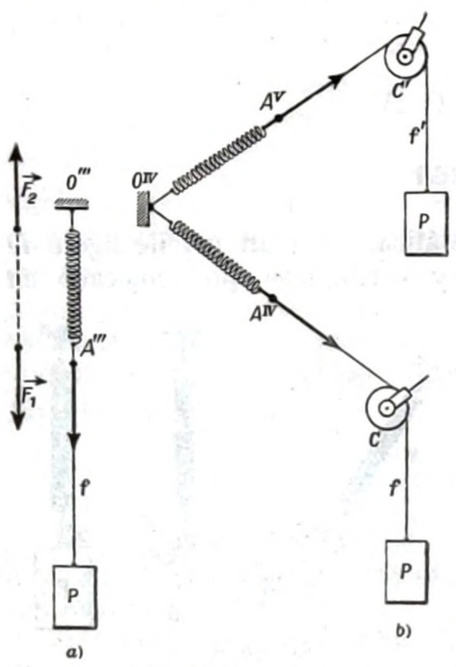


Fig 149.

Pueden producir también la deformación del muelle fuerzas de otra naturaleza. Si, por ejemplo, se cuelga del resorte un pedazo de hierro P, el muelle se deforma; pero si debajo del pedazo de hierro P se coloca un potente imán, aumenta notablemente la deformación, indicando que a la fuerza-peso se ha añadido una fuerza nueva, magnética.

He aquí dos experimentos muy sencillos:

a] Sea un cuerpo inicialmente en reposo y con libertad de movimiento; por ejemplo, un carrito ligerísimo sobre carriles rectos horizontales. Un hilo y un resorte (figura 150) demuestran que en A se ha aplicado una fuerza $\vec{F}$ paralela a la dirección posible del movimiento.

El carrito se mueve en el sentido de la fuerza.

b] A veces sucede que un cuerpo, al principio en reposo, empieza a moverse en una cierta dirección. Tal es el caso del carrito C, colocado sobre el plano inclinado Os de la figura 151. Se puede impedir el movimiento atando el carrito con un hilo *f*, a lo largo del cual se ha colocado un resorte D, fijo en O. Este resorte señala la presencia de una fuerza.

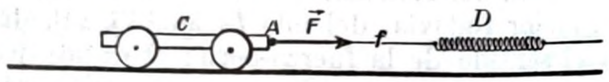


Fig. 150

Supondremos que el resorte D mide la fuerza motriz a la que se atribuye el movimiento observado: más precisamente, el muelle aplica en A una fuerza igual y contraria a la fuerza motriz.

Si P [fig. 149, *a*)] está libre para moverse, e inicialmente fijo, y se *deja* caer, se mueve (cae) según la vertical; P está sujeto a la fuerza-peso de parte de la Tierra.

En el experimento de la figura 149, P no hace más que transmitir a los puntos A a la fuerza-peso que él mismo experimenta por parte de la Tierra y que actúa en el sentido indicado por el hilo de suspensión *f*.

Es igualmente lícito decir que el muelle D señala con su alargamiento una fuerza $\vec{F}_1$ aplicada en A''' [fig. 149, *a*)], dirigida hacia abajo y debida al peso del cuerpo P, como decir que el muelle D señala una fuerza $\vec{F}_2$, igual y contraria a $\vec{F}_1$, aplicada en O''' al soporte del muelle *(reacción)*.

Así, en cada punto del hilo *f* puede imaginarse que están aplicadas dos fuerzas respectivamente iguales a $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$. Análogamente ocurre en el caso de la figura 151.

La *estática* estudia el equilibrio de las fuerzas. ¿En qué casos está fijo un cuerpo al que se le han aplicado fuerzas, y que tendería, por tanto, a moverse por la acción de cada una de éstas?

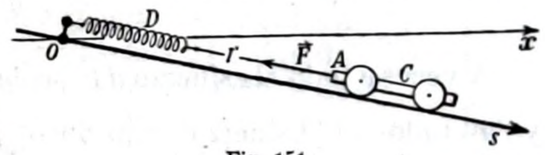


Fig. 151

La manera más cómoda para aplicar las fuerzas a un cuerpo en los experimentos de estática consiste en el uso de hilos, poleas y pesos graduados (por ejemplo, en gramos-peso), como en la figura 149; además, siempre está aplicada al cuerpo su propia *fuerza-peso* de parte de la Tierra *(fuerza de gravedad)*.

En los casos prácticos, las fuerzas en juego son de diversa naturaleza, tales como fuerzas de gravedad, fuerzas eléctricas, magnéticas, de cohesión, de rozamiento, presión del viento, etc.

Estas fuerzas pueden dividirse en varios tipos:

1.º **Fuerzas de campo.** Actúan éstas en cada uno de los puntos de cierto espacio (el *campo*) cuando dichos puntos se encuentran en condiciones físicas particulares. Ejemplo: el *campo de fuerzas de la gravedad*, debido a la acción de la Tierra sobre un punto que esté ocupado por una masa material.

2.º **Fuerzas de superficie.** Actúan éstas sobre todos los puntos de una superficie. Ejemplo: los *rozamientos*, las *fuerzas de contacto*, que, como demuestra la experiencia, se manifiestan siempre que están en contacto y en equilibrio dos cuerpos o dos porciones de materia A y B. Sea $d\vec{F}$ la fuerza que A ejerce sobre B a través de la superficie de contacto dS; por reacción, B ejerce sobre A una fuerza igual y opuesta.

La fuerza $d\vec{F}$ está, en general, inclinada con respecto a dS, y se descompone en una componente $d\vec{F}_n$ normal a dS *(presión total* o *esfuerzo normal total)* y en una componente $d\vec{F}_t$ situada sobre dS *(tensión tangencial total* o *esfuerzo de cortadura total)*.

Podemos referir estos esfuerzos a la unidad de superficie. Se tiene así un *esfuerzo normal unitario* o *presión (específica)* cuya medida es:

$$\sigma = \frac{dF_n}{dS}.$$

Si $d\vec{F}_n$ está dirigido desde A hacia B, la presión es positiva, y si tiene sentido contrario, se dice que la presión (total o específica) es negativa, y se la llama entonces comúnmente *tracción* o *tensión normal* (total o específica).

El esfuerzo de cortadura da origen a un *esfuerzo de cortadura unitario* o *tensión tangencial (específica)*, que viene medida por:

$$\tau = \frac{dF_t}{dS}$$

A veces a todo el esfuerzo $d\vec{F}$ se le llama presión o tensión (total) y a todo el esfuerzo específico $p = \frac{dF}{dS}$ se le denomina presión o tensión (específica).

Se tiene:

$$[\sigma] = [\tau] = [p] = \frac{[F]}{[S]} = [l^{-1} \cdot m \cdot t^{-2}]; \qquad [1]$$

esto es, las presiones y tensiones específicas tienen las dimensiones de una fuerza dividida por una superficie. En un sistema de mediciones coherentes, su unidad de medida es la determinada por la unidad de fuerza al actuar sobre la unidad de superficie. Se tienen, pues, las siguientes unidades coherentes de presión:

$\frac{\text{dina}}{\text{cm}^2}$ = baría en el sistema cm, g, seg;

$\frac{\text{newton}}{\text{m}^2}$ equivalente a 10 barías en el sistema m kg_m, seg, ...

Véase también § 210.

3.º La **tensión superficial** proporciona el ejemplo de una fuerza aplicada a todos los puntos de una línea, aquella por la cual se imagina cortar la lámina líquida ideal a la cual se atribuye la tensión superficial (§ 217).

Las fuerzas más importantes en Física son las *fuerzas de campo*.

Principiaremos la estática por una breve indicación de los *campos de fuerza*.

Pero antes hemos de dedicar algunas líneas a las fuerzas de rozamiento. Éstas, no sólo han enmascarado la simplicidad de las leyes fundamentales de la Mecánica, sino que dificultan la comprobación experimental minuciosa de estas leyes, tanto en Estática como en Dinámica.

§ 78. **Generalidades sobre los rozamientos.** Se distinguen cuatro clases de rozamiento, cuya existencia puede demostrarse con los experimentos siguientes:

1.º Una esfera A, suspendida de un hilo de acero OB (fig. 152), ejecuta oscilaciones de torsión alrededor del eje vertical OC. El espejo S, unido a la varilla AB, soldada rígidamente a la esfera A, permite el estudio de dichas oscilaciones por el método de POGGENDORFF.

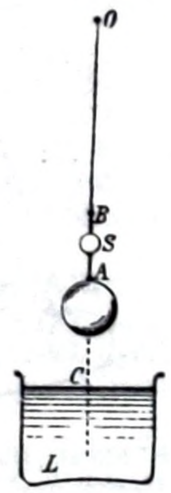


Fig. 152

Estas oscilaciones resultan débilmente amortiguadas.

Se repite el experimento sumergiendo la esfera en un líquido L, tal como aceite de vaselina. El líquido moja a la esfera, y ésta no desliza con respecto a la capa de líquido adherente, sino que la arrastra consigo. Las varias capas de líquido concéntricas con la esfera deslizan unas sobre otras.

El amortiguamiento de las oscilaciones es ahora muy notable, y demuestra el *rozamiento interno* o *viscosidad* del líquido.

Cuanto más amortiguadas son las oscilaciones, más *viscoso* es el líquido.

2.º Se deja oscilar en el aire el péndulo OD (figura 153), por ejemplo, entre las posiciones OE y OF. Las oscilaciones son débilmente amortiguadas. Se levanta la superficie sólida $P_1 P_2$ de modo que la esfera tenga que efectuar sus oscilaciones *deslizando* sobre esta superficie.

Las oscilaciones resultan fuertemente amortiguadas, indicando esto que el contacto deslizante entre la esfera D y la superficie $P_1 P_2$ da origen a una fuerza que se opone al movimiento; ésta es la fuerza de *rozamiento de deslizamiento* entre esfera y plano.

3.º Se repite el experimento anterior, de modo que la esfera ruede sobre $P_1 P_2$, lo cual se realiza fácilmente dejando la esfera libre en B (fig. 154) sobre la superficie $P_1 P_2$. El amortiguamiento de las oscilaciones es mayor que el del péndulo OD durante sus oscilaciones libres en el aire, pero no tan fuerte como en el caso anterior. Se tiene *rozamiento de rodadura*.

4.º Por fin, se hace oscilar el péndulo OD (fig. 153) mientras está sumergido en agua. Se observa un amortiguamiento fortísimo, que señala una forma muy compleja de rozamiento: el *rozamiento con el medio*.

Los tres últimos tipos de rozamiento se llaman también *rozamientos externos.*

En los movimientos efectivos (salvo el movimiento de los proyectiles en el vacío y el movimiento de los planetas) siempre existen rozamientos.

Éstos se presentan siempre como un sistema de fuerzas que están aplicadas a los diversos elementos de la superficie del cuerpo móvil y que obstaculizan su movimiento.

Sólo en algunos casos sencillos existe una resultante única de todas estas fuerzas de rozamiento elementales, y se puede hablar entonces de *una* fuerza de rozamiento.

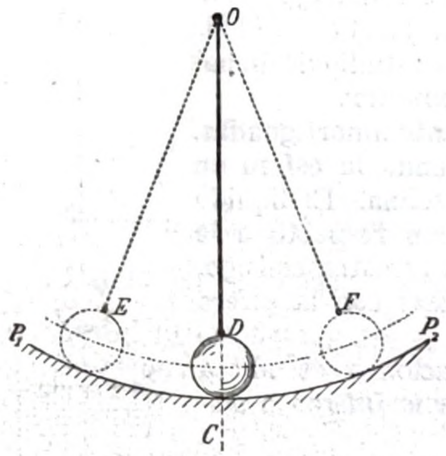


Fig. 153

El trabajo de las fuerzas de rozamiento (ya se reduzcan todas a una resultante, o, más generalmente, a una fuerza y a un par (§ 109), siempre es negativo; es decir, la fuerza de rozamiento absorbe continuamente energía y la transforma en una cantidad equivalente de

Fig. 154

calor; en el contacto de porciones de materia en movimiento relativo, se produce calor debido al rozamiento.

En el caso del rozamiento por deslizamiento (fig. 153), la posición de la esfera al terminar las oscilaciones amortiguadas *no* coincide, en general, con la posición normal de equilibrio que tendría el péndulo cuando OD estuviese vertical. Si la superficie P_1P_2 fuese muy rugosa y se sustituyese el hilo OD por una barra rígida que pudiera resistir una presión un poco grande, ejercida desde P_1P_2 hacia lo alto contra la esfera D, ésta podría permanecer fija en una posición, como OE; esto indicaría que una fuerza (de rozamiento de deslizamiento) anulaba la acción de la componente de la fuerza-peso de la esfera, que quería restituir el péndulo a su posición normal de equilibrio. De modo que, aun en ausencia de movimiento relativo de los dos cuerpos en contacto, puede existir rozamiento de deslizamiento. Lo mismo ocurre con el rozamiento de rodadura.

Por el contrario, en el caso del rozamiento con el medio y del rozamiento interno, el movimiento se amortigua, pero al final se encuentra el péndulo exactamente en su posición de equilibrio, como si no hubiera rozamiento. Estos dos tipos de rozamiento no modifican las condiciones de equilibrio de un cuerpo, porque dependen esencialmente de la velocidad, y se anulan al anularse el movimiento.

Las fuerzas de rozamiento tienen gran importancia, no sólo porque pueden justificar el aparente y continuo desacuerdo entre los resultados experimentales y las leyes de la mecánica, sino también por los numerosos campos de la técnica, en los cuales estas fuerzas tienen un papel preponderante. Recordemos, por ejemplo:

a] el estudio de las deformaciones plásticas que se originan en la laminación y en el trefilado *(rozamiento interno)*;

b] el estudio de los lubricantes *(rozamiento interno)*;

c] el estudio de las máquinas *(rozamientos externos)*;

d] el estudio de la forma de los proyectiles, buques, dirigibles, aeroplanos, automóviles y trenes *(rozamiento con el medio)*.

El rozamiento es perjudicial en muchos casos, pero muchas veces es indispensable: los nudos, tornillos y clavos actúan en virtud del rozamiento; la adherencia de las ruedas motrices de los trenes, la adherencia y dirigibilidad en la marcha a pie, en las bicicletas, en los automóviles y en las transmisiones por correa, son posibles gracias a los rozamientos.

Se crean resistencias intencionadamente en los variados tipos de *amortiguadores* empleados en muchos aparatos de medida (por ejemplo, en la balanza, § 44) para evitar que el equipo móvil oscile demasiado tiempo antes de alcanzar la posición definitiva que permite la lectura sobre la escala.

Las resistencias creadas así artificialmente no deben influir en absoluto en la posición final del equipo móvil. Se emplean amortiguadores de aire (fig. 81) o de líquido, que aprovechan el rozamiento con el medio y el rozamiento interno; también se emplean a menudo amortiguadores electromagnéticos (véase tomo II; véase también figura 75, *ELL*).

A. — CAMPOS VECTORIALES

§ 79. Campos de fuerzas. Toda porción de espacio en cada punto del cual se ejerce una fuerza de determinada naturaleza constituye un *campo de fuerzas.* Los ejemplos más importantes son: el *campo gravitatorio*, que actúa sobre masas materiales o, como ahora se dice, sobre masas inerciales (§ 115), y es debido a otras masas inerciales (por ejemplo, a la Tierra); el *campo electrostático*, que obra sobre masas eléctricas y es debido a otras masas eléctricas; el *campo magnético* que actúa sobre masas magnéticas y se debe a otras masas magnéticas o a corrientes eléctricas.

Para mayor sencillez consideraremos solamente *campos constantes respecto al tiempo*: la fuerza $\vec{F}$ en cada punto $A\ (x, y, z)$ del campo es un vector función de las coordenadas x, y, z, pero no del tiempo.

Pero basta pensar en el campo magnético creado por una corriente eléctrica variable con el tiempo para comprender cuánto interés tiene también el caso, más complejo, de *campo variable*, no sólo con el lugar A, sino también con el tiempo t.

La fuerza $\vec{F}$ se ejerce sobre el punto A, porque en A está situada una masa m inercial ($m > 0$), eléctrica ($m > 0$ ó $m < 0$) o magnética ($m > 0$ ó $m < 0$), según la naturaleza del campo considerado.

En todos estos casos demuestra la experiencia (CAVENDISH, COULOMB) que la fuerza del campo $\Delta \vec{F}$ que actúa sobre una masa Δm, concentrada en A y bastante pequeña, es directamente proporcional a Δm:

$$\Delta \vec{F} = \vec{H} \cdot \Delta m \,; \qquad [1]$$

en donde $\vec{H}$ es constante respecto a Δm, pero es función de x, y, z.

Para definir un campo de fuerzas hay que dar el vector $\vec{H}\,(x, y, z)$ en cualquier punto del mismo, y para individualizar este vector habrá que suponer conocidas sus componentes:

$$H_x = H_x\,(x, y, z), \quad H_y = H_y\,(x, y, z), \quad H_z = H_z\,(x, y, z). \qquad [2]$$

Admitiremos que tanto la porción de espacio en donde está definido el campo de fuerzas, como la función $\vec{H}\,(x, y, z)$, son tan regulares como sea necesario para que sean legítimas las consideraciones de los párrafos que siguen.

Si Δm no es muy pequeño, la [1] vale todavía para el campo gravitatorio, pero no para los campos eléctrico y magnético, a causa de las inducciones eléctrica y magnética, que suponen perturbaciones que la masa Δm produce en la distribución de las masas eléctricas o magnéticas que crean el campo. Por esta circunstancia, se debe suponer siempre, en los dos últimos campos de fuerzas, que la masa Δm, sobre la cual actúa el campo, es siempre infinitesimal. La [1] se escribe entonces:

$$d\vec{F} = \vec{H} \cdot dm, \qquad [3]$$

y se obtiene:

$$\vec{H} = \frac{d\vec{F}}{dm}. \qquad [4]$$

$\vec{H}$ se llama *intensidad del campo*, y también (de una manera más simple, aunque incorrecta) *campo* en el punto A, y es un vector paralelo a $d\vec{F}$, porque dm es un escalar; $d\vec{F}$ y $\vec{H}$ son paralelos y del mismo sentido cuando $dm > 0$, siendo paralelos y de sentido opuesto cuando $dm < 0$. Si se puede concentrar en A la masa $\Delta m = +1\,[m]$, sin que se perturbe sensiblemente el campo actuante, esto es, sin que deje de ser válida la [1], se tiene con suficiente aproximación:

$$\vec{H} = (\Delta \vec{F})_{\Delta m = 1\,[m]} \qquad [5]$$

de modo que la *intensidad del campo es la de la fuerza que actúa sobre la unidad positiva de masa.*

Para mayor sencillez, supondremos corrientemente que nos hallamos en este caso. Una suposición análoga sería imaginar que en cualquier caso (y no sólo en el movimiento uniforme) la velocidad fuese el espacio recorrido en la unidad de tiempo.

Si las fuerzas se miden en dinas, H queda medido en *dinas por unidad de masa.*

Por ejemplo, en todos los puntos próximos a la Tierra se tiene para cualquier cuerpo:

$$\vec{P} = m \cdot \vec{g};$$

en donde $\vec{P}$ es el peso del cuerpo; m, su masa inercial, y $\vec{g}$, la aceleración de la gravedad. En el sistema CGS, m viene medida en g_m; g, en $\frac{cm}{seg^2}$, y P, en dinas.

De modo que

$$\vec{g} = \vec{H}$$

es el *vector aceleración de la gravedad*; da en los diversos puntos la intensidad $\vec{H}$ del campo de la fuerza-peso o *campo de la gravedad terrestre* (§ 174).

Dadas la intensidad y la masa sujeta al campo, la [1] da la fuerza que actúa sobre esta última.

Lo que caracteriza y determina el campo de fuerzas es el vector H *(vector campo)* que no es una fuerza; en efecto, se tiene dimensionalmente:

$$[H] = \frac{[F]}{[m]} \qquad [6]$$

A menudo hay quien llama *fuerza del campo* al vector $\vec{H}$, lo que origina una confusión entre los conceptos de «fuerza» e «intensidad del campo». Es preciso comprender bien que el campo de $\vec{H}$ no es un «campo de fuerzas», según se dice por inveterada costumbre.

Habida cuenta, además, de que el vector $\vec{H}$ puede asumir también otros significados físicos (puede ser una velocidad, una densidad de corriente eléctrica, una inducción magnética, ...), se habla, en

general, de *campo vectorial* (§ 93). Las consideraciones de carácter puramente analítico que siguen, tienen validez independientemente del significado físico del vector $\vec{H}$, por más que la terminología imperante (flujo de fuerza, líneas de fuerza, ...) derive del significado físico que se atribuye al vector $\vec{H}$, al considerarlo como una fuerza.

Para fijar las ideas en un caso físico determinado, se continuará suponiendo que $\vec{H}$ es la intensidad de un campo de fuerzas.

Si dos campos $\vec{H}_1$ y $\vec{H}_2$ de igual naturaleza (de gravedad, eléctricos, o magnéticos) actúan sobre la misma masa dm colocada en A, el campo resultante es la suma vectorial de los campos componentes:

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2. \qquad [7]$$

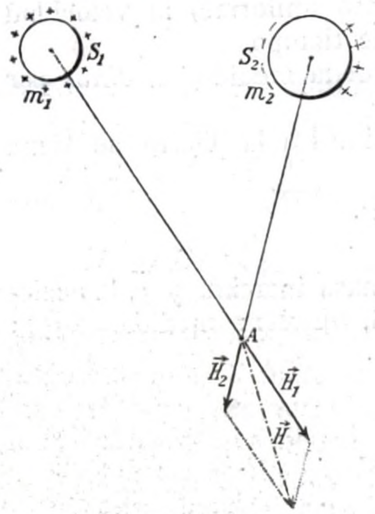


Fig. 155

Por ejemplo: sea el campo (geométrico, esto es, el espacio en donde obran las fuerzas) constituído por la región exterior a dos esferas metálicas S_1, S_2 (figura 155), por ejemplo, en el vacío.

Si damos una carga eléctrica m_1 únicamente a la esfera S_1, se origina en A un campo eléctrico $\vec{H}_1$, debido a la carga m_1 y a las cargas inducidas que se manifiestan en S_2 por efecto de m_1.

Si se da únicamente la carga m_2 a la esfera S_2, se tiene en A un campo $\vec{H}_2$, debido a la carga m_2 y a las cargas inducidas que se manifiestan en S_1.

Si se comunica simultáneamente la carga m_1 a la esfera S_1 y la carga m_2 a la esfera S_2, se tiene en A el campo:

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2.$$

§ 80. Línea y tubo de fuerza. Se llama *línea de flujo* a una línea que, en todos sus puntos, tiene por tangente el vector $\vec{H}$; *sentido* de la línea de flujo es el corresponde a $\vec{H}$. La línea de flujo es también tangente a $d\vec{F}$; pero sólo tiene el sentido de $d\vec{F}$ si es $dm > 0$; en tal caso, se denomina *línea de fuerza.*

Si se exceptúan los puntos singulares (§ 96, *a*]), en todos los puntos del campo existe una línea de flujo, y sólo una.

Por ejemplo, en el campo de la gravedad, la vertical en cualquier punto, dirigida hacia abajo, determina la tangente y el sentido de la línea de flujo, que aquí coincide con la línea de fuerza; tal vertical coincide con la línea de fuerza, ya que ésta, en primera aproximación, puede considerarse como una recta.

Si se considera en el campo una línea cerrada s_1 (fig. 156) y se trazan líneas de flujo por todos sus puntos, se obtiene un *tubo de flujo.*

Puede también ocurrir, como caso particularísimo, que el tubo de flujo así creado tenga una sección nula, como ocurre, por ejemplo, en el campo de la gravedad, si s_1 es una línea cerrada dibujada en un plano vertical.

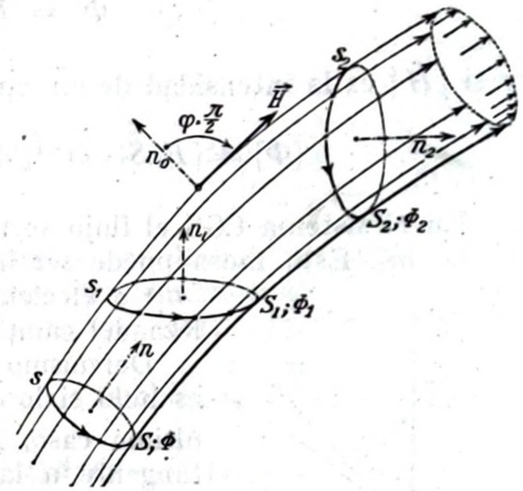


Fig. 156

§ 81. Flujo del vector $\vec{H}$. Considérese en el campo una superficie elemental dS (figura 157), y fijemos sobre la normal n a dS un sentido positivo; en este caso, también queda determinado el sentido positivo de rotación a lo largo del perímetro de dS, y viceversa. La relación entre estos dos sentidos positivos se entiende que es la fijada por «el hombre de» AMPÈRE: para un hombre apoyado sobre dS, de modo que el eje n le penetre por los pies y le salga por la cabeza, el sentido positivo del perímetro de dS es el sentido antirreloj.

Así se está en condiciones de definir también un vector $d\vec{S}$, cuya magnitud es dS y cuya dirección es la fijada sobre la normal n; cualquier punto de dS puede ser un punto de aplicación, que queda así indeterminado.

Un elemento de área dS, sobre cuyo contorno se ha fijado el sentido positivo, tiene todos los caracteres de un vector. Obsérvese que entonces puede atribuirse signo a las dos *caras* de la superficie $d\vec{S}$: cara positiva es aquella que debe mirar el observador para que vea como antirreloj el sentido fijado sobre el contorno; o, también, cara positiva es aquella de donde *sale* la normal n.

Si se supone que $\vec{H}$ es función regular de x, y, z, puede suponerse constante este vector en todos los puntos de la superficie infinitesimal dS.

Se llama *flujo del vector campo* $\vec{H}$ (y también se llama *flujo de fuerza*) $d\Phi$, a través de dS, al producto escalar

$$d\Phi = \vec{H} \cdot d\vec{S} = |H| \cdot \cos\varphi \cdot |dS| = H_n \cdot |dS|; \qquad [1]$$

en donde φ es el ángulo entre $\vec{H}$ y $d\vec{S}$, o, si de prefiere, entre $\vec{H}$ y el eje n; $|H|$ y $|dS|$ son magnitudes siempre positivas; cos φ y, por tanto, $d\Phi$ son positivos o negativos, según que $\vec{H}$ y n tengan el mismo sentido o sentidos contrarios. Si cambia el sentido fijado sobre n, cambia el signo de cos φ, y entonces cambia de signo $d\Phi$.

En dimensiones se tiene:

$$[\Phi] = [H]\,|\cdot[S];$$

y si $|\vec{H}|$ es la intensidad de un campo de fuerzas, es:

$$[\Phi] = [F\cdot S]\cdot[m^{-1}] = [l^3\cdot m\cdot t^{-2}]\cdot[m^{-1}].$$

En el sistema CGS el flujo se mide en $dinas\cdot cm^2$ por unidad de masa $[m]$. Esta masa puede ser inercial (esto es, coincidente con $[m]$) o eléctrica, o magnética, según la naturaleza del campo de fuerzas.

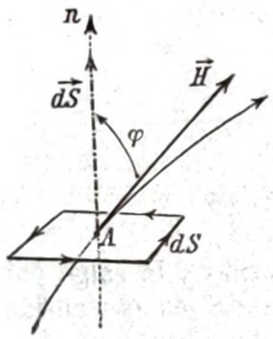


Fig. 157

Del mismo modo que el trabajo (§ 52, 2º), $d\Phi$ es nulo si lo son $|H|$ o $|dS|$, o cos φ. En este último caso, $\vec{H}$ es perpendicular a $d\vec{S}$, o sea tangente a la superficie dS (1); esto sucede, en particular, para las paredes de un tubo de flujo; luego, a través de éstas, el flujo es nulo.

El flujo Φ del vector $\vec{H}$ que atraviesa una superficie S, es, por definición:

$$\Phi = \int_S \vec{H}\cdot d\vec{S} = \int_S H_n\cdot|dS| = \int_S |H|\cdot\cos\varphi\cdot|dS|; \qquad [2]$$

en donde $|H|$ y φ son funciones de los puntos de la superficie S; la normal n se entenderá dirigida en sentido concordante para todos los elementos de la superficie S.

El flujo [2] puede expresarse también en forma cartesiana.

Sean x, y, z, las coordenadas del punto A situado sobre la superficie S, a través de la cual se quiere expresar el flujo; sean cos (xn), cos (yn) y cos (zn) los cosenos directores del eje n; cos (xH), cos (yH) y cos (zH) los cosenos directores de $\vec{H}$. Se tiene (§ 52, [6]):

$$d\Phi = H_x(x,y,z)\cdot dS_x + H_y(x,y,z)\cdot dS_y + H_z(x,y,z)\cdot dS_z, \qquad [3]$$

(1) Obsérvese la enorme influencia de la flechita: $\vec{H}$ es normal a $d\vec{S}$, pero es tangente a dS.

en donde $H_x(x,y,z)$, $H_y(x,yc\,z)$, $H_z(x,y,z)$ son las componentes de $\vec{H}$ y $dS_x = dS\cdot\cos(xn)$; $dS_y = dS\cdot\cos(yn)$; $dS_z = dS\cdot\cos(zn)$, las componentes de $d\vec{S}$, o sean las proyecciones de dS sobre los tres planos coordenados (yz), (zx), (xy), respectivamente.

Se tiene, pues:

$$\Phi = \int_{S_x} H_x\cdot dS_x + \int_{S_y} H_y\cdot dS_y + \int_{S_z} H_z\cdot dS_z;$$

o también, convencionalmente:

$$\Phi = \int_S (H_x\cdot dS_x + H_y\cdot dS_y + H_z\cdot dS_z),$$

recordando que en donde las integrales son límites de sumas extendidas a las proyecciones de todos los elementos dS que constituyen la superficie S sobre los planos (yz), (zx), (xy), respectivamente.

El cálculo integral enseña que puede también escribirse:

$$\Phi = \int_S \{H_x(x,y,z)\,dy\,dz + H_y(x,y,z)\,dz\,dx + H_z(x,y,z)\,dx\,dy\}; \qquad [4]$$

en donde las proyecciones del elemento superficial dS han tomado la forma $dy\cdot dz$, $dz\cdot dx$ y $dx\cdot dy$, respectivamente.

Para un elemento de superficie dS normal al eje de las x, se tiene:

$$dS_y = dS_z = 0, \qquad dS_x = dS = dy\ dz,$$

y la [3] se escribe:

$$d\Phi = H_x(x,y,z)\cdot dy\,dz. \qquad [5]$$

Finalmente, imagínese una sección S (fig. 156) normal en todos sus puntos a las líneas de flujo que constituyen un tubo. Entonces es $\varphi = 0$, y por lo tanto:

$$d\Phi = |H|\cdot|dS| \qquad [6]$$

$$\Phi = \int_S |H|\cdot|dS|. \qquad [7]$$

Se puede dar en un dibujo una idea cuantitativa del valor de Φ trazando a través de S un número de líneas de flujo igual al número

que mide Φ en el sistema de medidas elegido. En este sentido se hablará del *número de líneas de flujo* que atraviesan una superficie.

De la [6], suponiendo que sea válida para $|dS| = 1\,|S|$, es decir, que $\vec{H}$ sea prácticamente constante en toda una superficie $|dS|$ igual a la superficie unidad $[S]$, se tiene:

$$\Phi_1 = (d\Phi)_{dS\,=\,1\,[S]} = |H|\,; \qquad [8]$$

luego, según nuestros convenios, *el número de líneas de flujo que atraviesan la unidad de superficie de la sección normal de un tubo de flujo mide el módulo de la intensidad del campo.* La intensidad del campo *en las diversas partes de la sección S* se deduce de lo apretadas que se encuentren las líneas de flujo dibujadas en cada zona del tubo. Véase tambien § 87.

§ 82. Flujo saliente; divergencia. En particular, sea S una superficie cerrada. Se conviene en considerar que la normal n está dirigida hacia el exterior de S; entonces el flujo [2], § 81, se llama flujo *saliente* de S, y es la suma de los infinitos flujos elementales $d\Phi$ que parten de cada uno de los elementos dS de la superficie S. Cada flujo elemental saliente $|H|\cdot\cos\varphi\cdot|dS|$ es positivo (el flujo es efectivamente *saliente*) o negativo (el flujo es efectivamente *entrante*), según que cos φ sea positivo o negativo; esto es, según que el sentido de $\vec{H}$, en el elemento considerado, concuerde o no con $d\vec{S}$, es decir, con la normal n dirigida hacia el exterior de la superficie cerrada S.

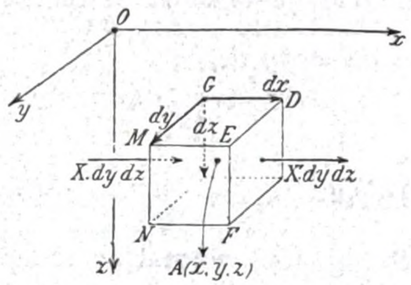


Fig. 158

Se considera como superficie cerrada dS la de un paralelepípedo trirrectángulo de centro $A\ (x, y, z)$ (figura 158), orientado según los ejes y de aristas dx, dy, dz; tal superficie está constituída por seis elementos (caras) que son iguales y paralelas dos a dos. Sean $GMN = DEF = dy\,dz$ dos caras iguales y paralelas. El flujo *saliente* de dS a través de GMN es $-H_x\cdot dy\,dz$, y, a través de DEF, es $+H'_x\cdot dy\,dz$; en donde H'_x es el valor de la componente paralela al eje x del campo que actúa en los puntos de DEF.

Se tiene, pues:

$$H'_x = H_x + \frac{\partial H_x}{\partial x}\cdot dx,$$

y la suma algebraica de los flujos salientes de las dos superficies GMN, DEF, es:

$$-H_x\cdot dy\,dz + \left(H_x + \frac{\partial H_x}{\partial x}\cdot dx\right)dy\,dz = \frac{\partial H_x}{\partial x}\cdot dx\,dy\,dz.$$

El flujo total saliente por las seis caras del paralelepípedo es:

$$d\Phi = \frac{\partial H_x}{\partial x}\cdot dx\,dy\,dz + \frac{\partial H_y}{\partial y}\cdot dx\,dy\,dz + \frac{\partial H_z}{\partial z}\cdot dx\,dy\,dz\,; \qquad [1]$$

en donde $dx\,dy\,dz$ es el volumen dv del paralelepípedo.

Se denomina *divergencia* de $\vec{H}$, que se escribe div $\vec{H}$, en el punto A, el

$$\lim_{\Delta v\,=\,0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta v} = \frac{d\Phi}{dv}\,;$$

es decir, el flujo saliente referido a la unidad de volumen; «grosso modo», div $\vec{H}$ es el flujo saliente de la unidad de volumen.

En dimensiones, tenemos:

$$[\text{div}\ \vec{H}] = [\Phi\cdot v^{-1}] = [H\cdot S\cdot v^{-1}] = [H\cdot l^{-1}]. \qquad [2]$$

Luego, se tiene:

$$\text{div}\ \vec{H} = \frac{d\Phi}{dv} = \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z};\ d\Phi = \text{div}\ \vec{H}\cdot dv. \qquad [3]$$

Se demuestra que se llegaría al mismo límite, aunque el volumen dv no tuviese la forma de un paralelepípedo trirrectángulo.

§ 83. Relación de Gauss. La porción de espacio que constituye el campo puede estar *privada* o bien *dotada de cavidades*. En este último caso, hay, en definitiva, algún hoyo que ha de considerarse como espacio no perteneciente al campo. En el primer caso, una superficie cerrada S cualquiera, trazada toda ella en el campo, abarca en su interior un volumen que pertenece por entero al campo. Por analogía con el caso del § 86, cuando esto ocurre, se dice que el campo es de *conexión superficial simple* (esto es, controlada mediante una simple superficie S).

En el segundo caso, cuando una superficie cerrada S contiene una cavidad, no todo el volumen interno de S pertenece al campo.

Consideremos una superficie cerrada S trazada en el campo del vector $\vec{H}$, en particular en un campo de fuerzas. Se supone que S no contiene cavidad alguna (fig. 159).

Se divide el volumen v, encerrado en S, en prismas de sección rectangular infinitesimal $dy \cdot dz$, mediante planos paralelos a los planos coordenados xz, xy. Supondremos, para mayor sencillez, que cada prisma infinitesimal ξ_1, ξ_2, corta a S solamente en dos sitios, dS_1 y dS_2; en la figura se indican también las normales n_1 y n_2 a estos elementos de superficie, dirigidas hacia el exterior de S.

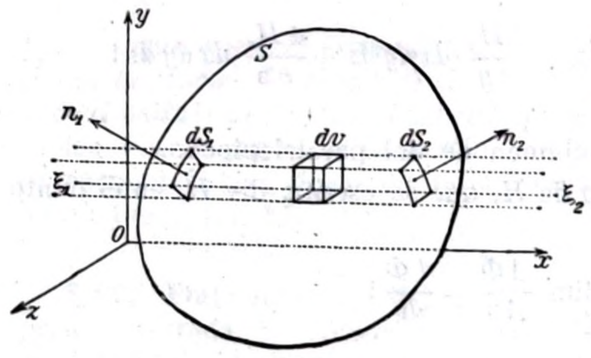


Fig. 159

Estos prismas infinitesimales se subdividen después por medio de planos paralelos al plano yz. Así, el volumen v, situado en el interior de S, queda subdividido en elementos $dv = dx \cdot dy \cdot dz$.

El flujo saliente de uno de estos elementos de volumen es (§ 82 [3]):

$$d\Phi = \operatorname{div} \vec{H} \cdot dv.$$

Imaginemos los flujos que salen de todos los elementos dv del prisma dS_1, dS_2; los flujos que atraviesan las paredes de contacto de los paralelepípedos dv, contiguos, se neutralizan dos a dos, porque un mismo flujo se cuenta una vez como saliente de un elemento dv y otra vez como saliente del elemento contiguo, rzsultando ambos flujos iguales y opuestos. Quedan los flujos salientes de dS_1, dS_2, y de las paredes laterales del prisma dS_1, dS_2.

Repitiendo el razonamiento para los prismas sucesivos, todos paralelos al eje x, que constituyen el volumen v, se efectuará la suma de los flujos salientes de todos estos prismas; también ahora los flujos salientes de las paredes de contacto de los prismas contiguos se neutralizan dos a dos; luego, la suma de los flujos salientes de todos los elementos de volumen situados en el interior de S se reduce a la suma de los flujos salientes de los elementos dS de la superficie S.

$$\int_v \operatorname{div} \vec{H} \cdot dv = \int_v d\Phi = \int_S \vec{H} \cdot d\vec{S}. \qquad [1]$$

Ésta es la *relación de Gauss*, que liga el flujo saliente de una superficie cerrada $\int \vec{H} \cdot d\vec{S}$ (integral de superficie) con la suma $\int_v \operatorname{div} \vec{H} \cdot dv$ de los flujos salientes de cada elemento dv del volumen v encerrado en S (integral de volumen).

Para que haya flujo de $\vec{H}$ saliente de una superficie cerrada, es necesario que en algún punto, por lo menos, de su interior, se tenga $\operatorname{div} H \neq O$. Los puntos en los cuales $\operatorname{div} \vec{H} > O$, pueden considerarse como *manantiales* en los cuales el flujo se crea y rebosa; los puntos en donde $\operatorname{div} \vec{H} < O$, se comportan como pozos o *sumideros* en los cuales el flujo es engullido y desaparece.

§ 84. Trabajo; integral de línea. Para mayor sencillez, supongamos que el campo vectorial (por ejemplo, el campo de fuerzas) sea *plano*, es decir, que esté definido solamente para los puntos de un plano (el de la figura 160), en el cual se encuentra situado también el vector $\vec{H}$. Si la masa dm concentrada en $A(x, y)$ se traslada una distancia $d\vec{l}$ hasta A' $(x + dx, y + dy)$, la fuerza del campo $d\vec{F} = \vec{H} \cdot dm$ efectúa un trabajo:

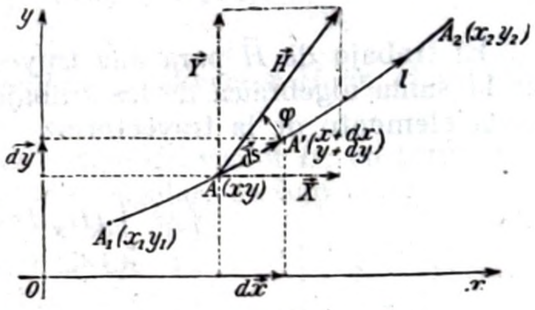


Fig. 160

$$d\mathcal{L} = d\vec{F} \cdot d\vec{l} = dm \cdot \vec{H} \cdot d\vec{l} = dm \cdot |H| \cdot |dl| \cdot \cos\varphi; \qquad [1]$$

donde φ es el ángulo entre $\vec{H}$ y $d\vec{l}$; $d\vec{l}$ debe ser infinitesimal para que $\vec{H}$ y $\cos\varphi$ puedan suponerse constantes en todos los puntos de $d\vec{l}$; $|\vec{H}|$ y $|dl|$ son los módulos de los vectores $\vec{H}$ y $d\vec{l}$.

Por tanto,

$$d\ell = \frac{d\mathcal{L}}{dm} = \vec{H} \cdot d\vec{l} = |H| \cdot |dl| \cdot \cos\varphi \qquad [2]$$

es el trabajo de la intensidad $\vec{H}$ del campo, o sea el trabajo referido a la unidad de masa. Aunque $d\ell$ no sea un trabajo, sino un trabajo $d\mathcal{L}$ dividido por una masa dm, se suele tratar todavía a $d\ell$ como si fuese un trabajo, de la misma manera que corrientemente se llama a $\vec{H}$ «fuerza» del campo (§ 79).

Siempre que pueda suponerse válida la fórmula [5] del § 79, puede decirse que la [2] expresa el trabajo elemental de la fuerza

del campo $(\Delta\vec{F})_{\Delta m = 1\,[m]} = \vec{H}$, durante el corrimiento $d\vec{l}$ de la unidad positiva de masa.

Sean H_x, H_y las componentes de $\vec{H}$ según los ejes (fig. 160); en general, H_x, H_y son funciones de x e y; las componentes de $d\vec{l}$ son dx, dy, y, además,

$$\cos\varphi = \cos(xl)\cos(xH) + \cos(xl)\cos(yH).$$

Luego (§ 52, [6]):

$$d\mathcal{t} = H_x \cdot dx + H_y \cdot dy. \qquad [3]$$

El trabajo de $\vec{H}$ para una trayectoria l, que va desde A_1 a A_2, es la suma algebraica de los trabajos elementales $d\mathcal{t}$ a lo largo de cada elemento de la trayectoria:

$$\mathcal{t} = \int_{A_1 l A_2} (H_x\,dx + H_y\,dy). \qquad [4]$$

Si el campo no es plano, en el espacio se tiene también como expresión del trabajo elemental:

$$d\mathcal{t} = \vec{H}\cdot d\vec{l} = |H|\cdot|dl|\cdot\cos\varphi;$$

en componentes cartesianas se tiene:

$$d\mathcal{t} = H_x\,dx + H_y\,dy + H_z\,dz, \qquad [5]$$

y para una trayectoria finita l, cuyos extremos son $A_1(x_1, y_1, z_1)$ y $A_2(x_2, y_2, z_2)$, resulta:

$$\mathcal{t} = \int_{A_1 l A_2} (H_x\,dx + H_y\,dy + H_z\,dz). \qquad [6]$$

Tal es la expresión del trabajo referido al transporte de la unidad de masa, desde A_1 a A_2 *a lo largo de la trayectoria* $A_1\,l\,A_2$.

Puesto que $d\vec{l}$ cambia de sentido y dx, dy, dz cambian de signo, el trabajo $\mathcal{t}_{A_2 l A_1}$, a lo largo de la trayectoria $A_2\,l\,A_1$, es:

$$\mathcal{t}_{A_2 l A_1} = \int_{A_2 l A_1} (H_x\cdot dx + H_y\cdot dy + H_z\cdot dz) = -\,\mathcal{t}_{A_1 l A_2}. \qquad [7]$$

Si el vector $\vec{H}$ no tiene el significado de fuerza (referida a la unidad de masa), [6] ya no tiene el significado de trabajo (referido a dicha unidad), y se llama, en general, *integral de línea* del vector $\vec{H}$ a lo largo de l.

§ 85. **Circulación; rotacional.** La trayectoria l (plana o no) puede ser cerrada, es decir, puede tratarse de un perímetro recorrido en un cierto sentido por la unidad positiva de masa; en este caso, A_1 y A_2 coinciden. El trabajo se escribe:

$$\mathcal{t} = \oint (H_x\,dx + H_y\,dy + H_z\,dz) \qquad [1]$$

y se llama, en valor y signo, *circulación* del vector $\vec{H}$ en el sentido fijado sobre el recorrido.

Sea A (fig. 161) un punto del campo del vector $\vec{H}$; en torno a A se considera un elemento plano, rectangular, de superficie dS_x, de lados paralelos, respectivamente, a los ejes y, z. El elemento dS_x es normal al eje x; la normal n a dS_x se supondrá dirigida en el mismo sentido que el positivo de x.

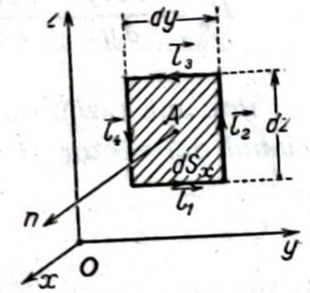


Fig. 161

Se toma como línea l, cerrada, el contorno rectangular de dS_x; $\vec{l}_1$, $\vec{l}_2$, $\vec{l}_3$, $\vec{l}_4$ son sus lados; $\vec{H}_1$, $\vec{H}_2$, $\vec{H}_3$, $\vec{H}_4$, las intensidades del campo $\vec{H}$ correspondientes.

Entonces la circulación de $\vec{H}$ a lo largo del contorno de dS_x es:

$$\oint_{dS_x} \vec{H}\cdot d\vec{l} = \vec{l}_1\cdot\vec{H}_1 + \vec{l}_2\cdot\vec{H}_2 + \vec{l}_3\,\vec{H}_3 + \vec{l}_4\cdot\vec{H}_4.$$

Pero aplicando [6], § 52, se tiene inmediatamente:

$$\vec{l}_1\cdot\vec{H}_1 = dy\cdot H_{1y}; \qquad \vec{l}_2\,\vec{H}_2 = dz\cdot H_{2z};$$
$$\vec{l}_3\cdot\vec{H}_3 = -\,dy\cdot H_{3y}; \qquad \vec{l}_4\cdot\vec{H}_4 = -\,dz\cdot H_{4z};$$

en donde H_{1y} es la componente sobre el eje y de $\vec{H}_1$; H_{3y}, H_{2z}, H_{4z} tienen un significado análogo.

Además, se tiene:

$$H_{3y} = H_{1y} + \frac{\partial H_y}{\partial z}\cdot dz; \qquad H_{2z} = H_{4z} + \frac{\partial H_z}{\partial z}\cdot dy.$$

De donde:

$$\oint_{dS_x} \vec{H}\cdot d\vec{l} = \frac{\partial H_z}{\partial y}\cdot dy\,.\,dz - \frac{\partial H_y}{\partial y}\cdot dy\cdot dz = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right) dS_x. \quad [2]$$

Análogamente, para superficies elementales dS_y, dS_z respectivamente normales a los ejes y, z, se encontraría:

$$\left.\begin{aligned} \int_{dS_y} \vec{H}\cdot dl &= \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\cdot dS_y \\ \int_{dS_z} H\, dl &= \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\cdot dS_z \end{aligned}\right\}. \quad [3]$$

Considérese el vector $\vec{R} = \vec{R}(x, y, z)$ definido por las tres componentes:

$$R_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}, \quad R_y = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial z}, \quad R_z = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}. \quad [4]$$

Por una razón que veremos en el § 93, este vector se llama *rotacional* del vector $\vec{H}$ y se escribe:

$$\vec{R} = \text{rot } \vec{H}, \quad [5]$$

o también (§ 52, [2]):

$$\vec{R} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\cdot \vec{i} + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\cdot \vec{j} + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\cdot \vec{k}. \quad [6]$$

De [4] y [3], § 82, resulta que la divergencia y el rotacional de un vector $\vec{H}$ son equidimensionales.

Recordando [1], § 81, la [2] puede escribirse:

$$\oint_{dS_x} \vec{H}\cdot d\vec{l} = R_x\cdot dS_x = \vec{R}\cdot d\vec{S_x} = d\,\Phi_{\vec{R}}. \quad [7]$$

La circulación de $\vec{H}$ a lo largo del contorno de dS_x es el flujo del vector rot $\vec{H} = \vec{R}$ a través de la superficie elemental dS_x.

De [3] se deduce que esto es también válido para superficies elementales normales a los ejes y o z, y, puesto que los ejes se han elegido arbitrariamente, es asimismo válido para cualquier eje ξ;

por consiguiente, es válido para superficies elementales dS_ξ, de contornos no rectangulares (con tal de que no sean excesivamente caprichosos):

$$\oint_{dS_\xi} \vec{H}\cdot d\vec{l} = d\,\Phi_{\vec{R}} = R_\xi\cdot dS_\xi. \quad [8]$$

Es decir: *la circulación de $\vec{H}$ a lo largo del perímetro de un área elemental dS_ξ es igual al flujo del vector $\vec{R} = rot\ \vec{H}$ a través de dicha área.*

De [8] se desprende:

$$R_\xi = \frac{d\,\Phi_{\vec{R}}}{dS_\xi} = \frac{\oint_{dS_\xi} \vec{H}\cdot d\vec{l}}{dS_\xi}; \quad [9]$$

o sea: *la componente R_ξ del vector $\vec{R} = rot\ \vec{H}$ mide la circulación de $\vec{H}$ a lo largo del perímetro del elemento de superficie dS_ξ normal al eje ξ*, circulación referida a la unidad de superficie.

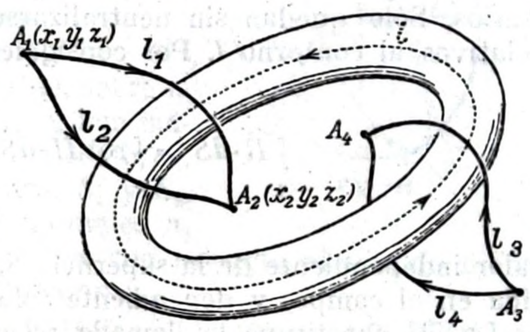


Fig. 162

§ **86. Relación de Stokes.** Es de notar que la porción de espacio que constituye el campo puede ser *simple* o *múltiplemente conexa.*

En el primer caso, una línea cerrada cualquiera $l_1\ l_2$, trazada toda ella en el campo, puede constituir el contorno completo de, por lo menos, una superficie S toda ella sumergida en el campo. Por ejemplo: se encuentra en este caso un campo constituído por el volumen interno de una esfera. Se dice que el campo es de *conexión lineal simple* (esto es, controlada mediante una simple línea $l_1\ l_2$).

En el segundo caso existe, por lo menos, alguna línea cerrada que no puede ser contorno de alguna superficie S sumergida toda ella en el campo.

Así, el campo constituído por el volumen interno de un anillo (fig. 162) no es simplemente conexo; la línea cerrada l no puede ser contorno de ninguna superficie S, que esté situada toda ella dentro del anillo. Un campo indefinido al que se suprime una porción de

espacio en forma de anillo, no es tampoco simplemente conexo; una línea tal como la $l_1\ l_2$ puede ser contorno de una superficie S completamente sumergida en el campo; pero no ocurre lo mismo con una línea como la $l_3\ l_4$ que esté «encadenada» con el anillo.

Considérese una línea cerrada l (fig. 163), sobre la cual se ha fijado un sentido positivo, que sea contorno de una superficie S sumergida toda en el campo.

El flujo de $\vec{R}$ a través de S es $\int_S \vec{R}\cdot d\vec{S}$, suma de los flujos elementales $\vec{R}\cdot d\vec{S}$, que atraviesan cada uno de los elementos dS en que se puede imaginar subdividida la superficie S; cada flujo elemental mide la circulación de $\vec{H}$ a lo largo del contorno del área elemental dS. El flujo total mide, pues, la suma de las circulaciones de $\vec{H}$ a lo largo de los infinitos contornos seudorrectangulares de los infinitos elementos dS en que se ha dividido S. Pero los elementos de circulación a lo largo de los lados comunes de rectángulos elementales contiguos dS, dS' son iguales y contrarios. Sólo quedan sin neutralizarse los elementos de circulación relativos al contorno l. Por consiguiente:

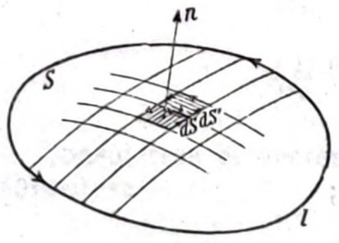


Fig. 163

$$\int_S \vec{R}\cdot d\vec{S} = \int_S \operatorname{rot}\vec{H}\cdot d\vec{S} = \oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l}, \qquad [1]$$

valor independiente de la superficie S, porque está toda ella sumergida en el campo, y dependiente sólo de su contorno l.

La [1] constituye la llamada *relación de* Stokes: *la circulación de un vector $\vec{H}$ a lo largo del contorno l es igual al flujo del vector rot $\vec{H}$ a través de cualquier superficie S cuyo contorno sea l.*

El que el flujo del vector $\vec{H}$ sólo dependa del contorno l de la superficie S, y no de la forma de esta superficie, se debe a que el rotacional, rot $\vec{H}$, es siempre solenoidal (§ 87).

Mientras la relación de Gauss (§ 83) transforma una integral de superficie en una de volumen, la relación de Stokes convierte una integral de línea en otra de superficie.

§ 87. Campos solenoidales, o conservativos para el flujo. Un vector $\vec{H}$ y su campo se llaman *solenoidales* cuando es nulo el flujo que sale de cualquier superficie cerrada S sumergida en el campo.

Si éste está desprovisto de cavidades (§ 83), la condición necesaria y suficiente para que $\vec{H}$ sea solenoidal es que, en todo punto de campo, se tenga:

$$\operatorname{div}\vec{H} = \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0. \qquad [1]$$

La condición es necesaria a causa de [3], § 82: si en un elemento de volumen dv fuese div $\vec{H} \neq 0$, el flujo saliente de dv no sería nulo.

La condición es suficiente gracias a la [1], § 83, que es aplicable a toda superficie S, porque el campo está privado de cavidades.

Si el campo tiene en todas partes divergencia nula, pero posee cavidades, la [1], § 83, sólo puede aplicarse a superficies cerradas que no las contengan: sólo para ellas es nulo el flujo saliente; para las superficies cerradas que contengan cavidades, el flujo saliente, por regla general, no es nulo. Mediante una demostración análoga a la que se efectuará en el § 91, se encuentra que es constante el flujo saliente de una superficie cerrada cualquiera, con tal que las cavidades contenidas en ella sean siempre las mismas.

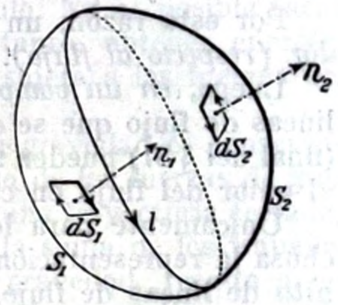


Fig. 164

Véase el teorema de Gauss, § 97.

Sea una línea cerrada l (fig. 164), sobre la que se ha fijado un sentido positivo. Son infinitas las superficies que tienen l por contorno. En la figura se han indicado dos, S_1 y S_2, sobre las cuales se fijarán las normales n_1 y n_2, dirigidas en el sentido positivo con respecto al sentido fijado sobre l, mediante la regla de Ampère.

Sea Φ_1 el flujo que atraviesa S_1 respecto del eje n_1, y Φ_2 el correspondiente a S_2. Las superficies S_1 y S_2 determinan una superficie cerrada, y de las dos normales n_1 y n_2, la primera es entrante y la segunda saliente; $(-\Phi_1 + \Phi_2)$ es el flujo *saliente* de esta superficie cerrada, en valor y signo.

Si el campo es solenoidal, se tiene:

$$-\Phi_1 + \Phi_2 = 0\,; \quad \text{es decir,} \quad \Phi_1 = \Phi_2.$$

En un campo solenoidal, el flujo a través de una superficie depende únicamente de su contorno l; el flujo a través de cualquier superficie que tenga por contorno l es siempre el mismo y se llama *flujo ligado a l.*

Si se consideran dos secciones S_1 y S_2 (fig. 156) de un tubo de fuerza, siendo n_1, n_2 las normales a las secciones dirigidas en sentido

concordante y Φ_1 y Φ_2 los flujos que atraviesan tales secciones, se tiene que:

S_1, S_2 y la superficie lateral del tubo determinan una superficie cerrada. Si el campo es solenoidal, el flujo saliente de toda esta superficie debe ser nulo. Pero la superficie lateral de un tubo de fuerza no está atravesada por flujo, por ser constantemente $\cos\varphi = 0$. Luego, el flujo *saliente* $-\Phi_1 + \Phi_2$ debe ser nulo.

Esto es,

$$\Phi_1 = \Phi_2, \qquad [2]$$

es decir: *en un campo solenoidal es constante el flujo que atraviesa una sección cualquiera de un tubo de flujo determinado.*

También es verdad la recíproca: el campo es solenoidal si para cualquier tubo de flujo de un campo del vector $\vec{H}$ *regular* es constante el flujo que atraviesa una sección cualquiera del tubo.

Por esta razón, un campo solenoidal también se llama *conservador (respecto al flujo).*

Luego, *en un campo solenoidal, y sólo en tal campo,* las mismas líneas de flujo que se dibujan en número finito para representar Φ_1 (final del § 81) pueden servir para representar el valor de Φ_2, es decir, el valor del flujo en cualquier sección del tubo.

Únicamente para los campos solenoidales es legítima y provechosa la representación corriente del campo mediante un número finito de líneas de flujo.

Cada una de éstas viene entonces a representar un *tubo unitario de flujo*, es decir, atravesado por un flujo Φ igual a la unidad; llámase por esto *línea unitaria de flujo* (o *de fuerza*). El número de líneas unitarias de flujo dibujadas a través de una superficie S recuerda el número de tubos unitarios de flujo que la atraviesan, y coincide con el número que mide el flujo que pasa a través de S.

En un campo solenoidal, y para un tubo de flujo suficientemente delgado, de modo que sea aplicable la [6], § 81, se tiene:

$$H \cdot dS = \text{const.} \qquad [3]$$

para cualquier sección recta del tubo. Éste se ensancha o se estrecha según que se encuentre en las zonas en donde el campo es débil o en aquellas en donde es intenso: *la intensidad del campo es inversamente proporcional a la sección del tubo.*

En los §§ 93, 94 y 96 se darán ejemplos de campos solenoidales.

En general, dado el vector $\vec{H}$, su rotacional $\vec{R} = \text{rot}\ \vec{H}$ (§ 85) está definido en el mismo campo en que lo está el vector $\vec{H}$, y, por lo tanto, da origen, a su vez, a un campo vectorial. Tal campo es siempre solenoidal. En efecto, las componentes R_x, R_y, R_z de $\vec{R}$ están dadas por las [4], § 85, y derivando resulta:

$$\frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} + \frac{\partial R_z}{\partial z} = 0\,; \text{ esto es, } \text{div rot}\ \vec{H} = 0. \qquad [4]$$

Todo vector rotacional es solenoidal.

§ 88. **Campos irrotacionales; campos conservadores con respecto al «trabajo».** Considérese el caso físico del campo de fuerzas; $\vec{H}$ es una fuerza referida a la unidad de masa.

El campo se llama *conservador* (respecto al «trabajo») si la circulación (§ 85) es siempre nula. En tal campo, el trabajo de la fuerza $\vec{H}$, durante una vuelta de la unidad positiva de masa, a lo largo de un circuito cerrado cualquiera, es siempre nulo. No es posible sacar continuamente trabajo del campo, ni, por tanto, obtener energía, mediante la rotación continua de una masa sujeta a las fuerzas del campo.

Por ejemplo, veremos que el campo de la gravedad es conservador; es decir, no se puede obtener un trabajo de las fuerzas de gravedad actuando sobre un cuerpo que describe una trayectoria cerrada. Cuando el peso vuelve al punto de partida, la suma de los trabajos elementales, efectuados por las fuerzas de gravedad, resulta nula.

Si el campo es simplemente conexo (§ 86), la condición necesaria y suficiente para que el campo de un vector $\vec{H}$ sea conservador respecto al «trabajo» o, más generalmente, respecto a la integral de línea, es que en todo punto del mismo sea:

$$\vec{R} = \text{rot}\ \vec{H} = 0\,; \text{ esto es, } \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\}. \qquad [1]$$

La condición es necesaria a causa de [8], § 85: Si en el entorno de un punto A se tuviera $\vec{R} \neq 0$, tómese un elemento de superficie dS que pase por A y sea normal a $\vec{R}$; la circulación de $\vec{H}$ a lo largo del contorno de dS no sería nula.

La condición es suficiente, gracias a [1], § 86, que es aplicable a toda línea cerrada, porque el campo es simplemente conexo.

Un campo en todo punto del cual se tiene rot $\vec{H} = 0$ se llama *irrotacional*, y asimismo se dice que es irrotacional el vector $\vec{H}$; sólo podremos asegurar que un campo irrotacional es conservador (respecto al «trabajo») si dicho campo es simplemente conexo.

Si A_1 y A_2 (fig. 162) son dos puntos de un campo de fuerza, serán infinitas las trayectorias que van desde A_1 a A_2. Si l_1 y l_2 son dos de estas trayectorias, entre las dos determinan un circuito.

Sean:

$$\mathcal{L}_1 = \int_{A_1 l_1 A_2} d\mathcal{L} = \int_{A_1 l_1 A_2} (H_x \cdot dx + H_y \cdot dy + H_z \cdot dz)$$

la integral de línea $\vec{H}$ a lo largo de la trayectoria l_1, esto es, el trabajo referido al transporte de la unidad de masa a lo largo de la trayectoria $A_1 l_1 A_2$.

Sea:

$\mathcal{L}_2 = \int_{A_1 l_2 A_2} d\mathcal{L}$ el trabajo análogo a lo largo de l_2.

Si el campo es conservador, será nula la circulación:

$$\int_{A_1 l_1 A_2} d\mathcal{L} + \int_{A_2 l_2 A_1} d\mathcal{L} = 0.$$

Esto es:

$$\int_{A_1 l_1 A_2} d\mathcal{L} = \int_{A_1 l_2 A_2} d\mathcal{L}; \quad \text{o sea,} \quad \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2. \qquad [2]$$

En un campo conservador, el trabajo es independiente de la trayectoria, y depende únicamente de los extremos A_1 y A_2 de dicha trayectoria.

§ 89. Potencial (escalar). Se demuestra en el cálculo diferencial que la condición necesaria y suficiente para que en un espacio simplemente conexo la integral de línea

$$\mathcal{L} = \int_l (H_x \cdot dx + H_y \cdot dy + H_z \cdot dz)$$

dependa sólo de los extremos de l, es que la expresión elemental [5], § 84, del trabajo

$$d\mathcal{L} = H_x(x, y, z)\, dx + H_y(x, y, z)\, dy + H_z(x, y, z)\, dz \qquad [1]$$

sea una diferencial exacta; y para que así suceda, es, precisamente, necesario y suficiente que se verifiquen las tres condiciones [1], § 88.

Cuando se cumplen estas condiciones, y sólo entonces, existe una función $\mathcal{U}(x, y, z)$ determinada, salvo una constante aditiva que permanece arbitraria, para la cual se tiene:

$$d\mathcal{U} = -d\mathcal{L} = -(H_x\, dx + H_y\, dy + H_z\, dz), \qquad [2]$$

y de la que $-d\mathcal{L}$ es la diferencial total.

En particular, para $dy = dz = 0$, es decir, para un elemento dl de trayectoria paralelo al eje x:

$$(-d\mathcal{U})_{\substack{y=\text{const.}\\ z=\text{const.}}} = H_x \cdot dx, \quad \text{o sea:} \quad -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} = H_x; \qquad [3]$$

y análogamente:

$$-\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y} = H_y, \qquad -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial z} = H_z. \qquad [4]$$

La expresión del trabajo a lo largo de una trayectoria l que tiene por extremos $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$ es:

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L} &= \int_l (H_x\, dx + H_y\, dy + H_z\, dz) = -\int d\mathcal{U} \\ &= \mathcal{U}(x_1, y_1, z_1) - \mathcal{U}(x_2, y_2, z_2) = \mathcal{U}_{A_1} - \mathcal{U}_{A_2} \end{aligned}\right\}. \qquad [5]$$

que *depende solamente de los extremos* $A_1(x_1, y_1, z_1)$ y $A_2(x_2, y_2, z_2)$ *de la trayectoria* l.

Se llama *potencial* del campo de fuerzas a la expresión $\mathcal{U}(x, y, z)$, que es un escalar; las [1], § 88, son las condiciones necesarias y suficientes que deben satisfacer las componentes H_x, H_y, H_z de la intensidad $\vec{H}$, para que exista el potencial en un campo simplemente conexo. En contraposición al potencial vector (§ 92) $\mathcal{U}$ se llama, con más precisión, *potencial escalar*.

Más que el potencial en un punto, que no puede precisarse por la arbitrariedad de la constante aditiva, interesa la *caída de potencial* $\mathcal{U}_{A_1} - \mathcal{U}_{A_2}$ *entre dos puntos* A_1 y A_2; con frecuencia ésta se llama *diferencia de potencial* entre A_1 y A_2, pero es necesario consi-

derar con atención el orden de los puntos. Esta diferencia representa según la [5] y en cuanto es válida la [5], § 79, el *trabajo efectuado por las fuerzas del campo durante el movimiento de la unidad de masa desde* A_1 *a* A_2, cualquiera que sea el camino seguido.

Como lo que interesa siempre es la diferencia de potencial entre dos puntos, la constante aditiva de $\mathcal{V}$, que permanece arbitraria, no introduce ninguna perturbación.

El campo queda determinado cuando se ha dado el vector $\vec{H}$ en todos los puntos del núcleo o cuando se conocen las tres componentes de $\vec{H}$; o sea, cuando se conocen las tres funcciones:

$$H_x(x, y, z); \qquad H_y(x, y, z); \qquad H_z(x, y, z).$$

Pero si existe el potencial $\mathcal{V}$, esto constituye una ventaja muy notable, porque el campo queda determinado con sólo dar la función $\mathcal{V}(x, y, z)$ en todos los puntos del mismo.

En efecto, en este caso es posible calcular las componentes de $\vec{H}$ en cualquier punto:

$$H_x = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}; \quad H_y = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}; \quad H_z = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}. \qquad [6]$$

Y como los ejes x, y, z pueden estar orientados de cualquier manera, se tiene, de un modo más general, que la componente H_ξ del campo $\vec{H}$ según un eje cualquiera ξ, es, en valor y signo:

$$H_\xi = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \xi}. \qquad [7]$$

Dado el potencial $\mathcal{V}$, las [6] dan el vector campo $\vec{H}$, es decir, dan sus componentes. Recíprocamente, dado el vector $\vec{H}$, dotado de potencial, ¿cómo habrá que expresar este último?

La respuesta a esta pregunta se sale de los límites impuestos a estas páginas.

Otra ventaja ofrecida por el empleo del concepto de potencial es la siguiente:

Si se han de superponer dos campos $\vec{H}_1$ y $\vec{H}_2$ que admiten potenciales (respectivamente, $\mathcal{V}_1$ y $\mathcal{V}_2$), se tiene:

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2; \qquad \text{(suma vectorial)}$$

o sea, en componentes:

$$H_x = H_{1x} + H_{2x} = -\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial x} = -\frac{\partial (\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2)}{\partial x}$$

$$H_y = H_{1y} + H_{2y} = -\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial y} = -\frac{\partial (\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2)}{\partial y}$$

$$H_z = H_{1z} + H_{2z} = -\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial z} = -\frac{\partial (\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2)}{\partial z}$$

Es decir, el potencial del campo resultante es:

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2. \qquad \text{(suma algebraica)} \quad [8]$$

Con la consideración de los potenciales, las operaciones *vectoriales* de los campos se reducen a operaciones *escalares* (más sencillas) efectuadas sobre los potenciales.

Todos los puntos del campo que tienen el mismo potencial quedan definidos por la ecuación

$$\mathcal{V}(x, y, z) = \text{const.},$$

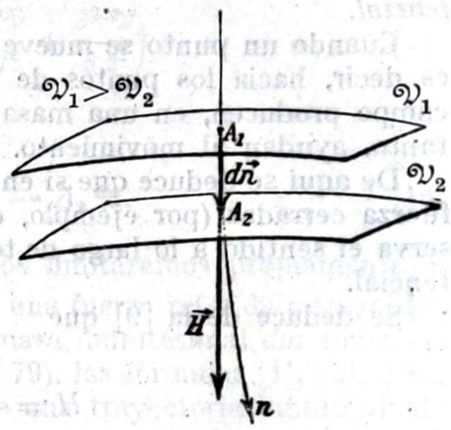


Fig. 165

que representa una superficie *(superficie equipotencial)*. Por cada punto del campo pasa una superficie equipotencial, y solamente una.

Si la masa sujeta al campo, y que suponemos, como de costumbre, unitaria, se mueve sobre una superficie equipotencial, se tendrá

$$d\mathcal{V} = 0;$$

por tanto:

$$d\ell = |H| \cdot |dl| \cdot \cos\varphi = 0;$$

y como no son nulos ni $|H|$ ni $|dl|$, resulta $\cos\varphi = 0$.

El campo $\vec{H}$ *es normal en todos los puntos a la superficie equipotencial.*

Sea n la línea de fuerza en A_1 (fig. 165), y, por tanto, normal a la superficie equipotencial $\mathcal{V}_1$; se toma como sentido positivo de n

el que corresponde a $\vec{H}$. Haciendo que la unidad de masa describa, desde A_1 y en el sentido positivo de n, un camino elemental $d\vec{n}$, se tiene $\varphi = 0$, y como valor del trabajo:

$$-d\mathfrak{V} = \vec{H}\cdot d\vec{n} = H\cdot cn > 0 \qquad [9]$$

(eso es $= 0$ sólo en el caso particular $H = 0$); en efecto, las magnitudes H, dn de los vectores $\vec{H}$, $d\vec{n}$, medidas con relación al eje $\vec{n}$, son ciertamente positivas.

Pero si $\mathfrak{V}_2$ es el potencial de A_2, se tiene:

$$\mathfrak{V}_1 - \mathfrak{V}_2 = H\cdot dn > 0; \quad \text{es decir, } \mathfrak{V}_1 > \mathfrak{V}_2.$$

La intensidad del campo $\vec{H}$, en cualquier punto, es normal a la superficie equipotencial, y *está dirigida hacia los puntos de menor potencial.*

Cuando un punto se mueve en el sentido de una línea de fuerza, es decir, hacia los puntos de potencial decreciente, las fuerzas del campo producen, en una masa positiva, un trabajo positivo, y, por tanto, ayudan al movimiento.

De aquí se deduce que si en un campo de fuerza existen líneas de fuerza cerradas (por ejemplo, circunferencias) en las cuales se conserva el sentido a lo largo de todo el recorrido, no puede existir potencial.

Se deduce de la [9] que

$$H = -\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial n} > 0. \qquad [10]$$

expresión que puede considerarse como caso particular de la [7], suponiendo que el eje ξ coincide con la normal n a la superficie equipotencial, dirigida hacia los puntos de potencial menor, y teniendo en cuenta que, en tal caso, $\vec{H}$ coincide con n en dirección y sentido. El mayor valor absoluto entre todas las derivadas [6] y [7] es el que se ha tomado a lo largo de un eje coincidente con la normal a la superficie equipotencial, y esta derivada da la magnitud (positiva), esto es, el módulo de $\vec{H}$.

La [10] expresa que la magnitud del campo, H, viene a ser la *velocidad de variación* del potencial a lo largo de las líneas de fuerza.

El vector $\vec{H}$, cuya componente a lo largo de un eje cualquiera ξ se obtiene en cualquier punto del campo a partir de una función

§ 90

$\mathfrak{V}(x, y, z)$ mediante la derivación [7], se llama *gradiente* del escalar $\mathfrak{V}$, y se escribe (1):

$$\text{grad } \mathfrak{V} = \vec{H}. \qquad [11]$$

Dada la función $\mathfrak{V}$, puede considerarse el gradiente $\vec{H}$ como un campo de fuerza del cual $\mathfrak{V}$ es el potencial.

Tal campo es siempre irrotacional. En efecto, de [4], § 85, teniendo en cuenta [6], resulta siempre:

$$\text{rot grat } \mathfrak{V} = 0. \qquad [12]$$

Pero, por lo general, tal campo no es solenoidal. De [3], § 82, y de [6], se deduce:

$$\text{div } \vec{H} = \text{div grad } \mathfrak{V} = -\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial z^2}\right), \qquad [13]$$

o, con un símbolo muy condensado:

$$\text{div grad } \mathfrak{V} = -\Delta_2 \mathfrak{V}. \qquad [14]$$

§ **90. Energía potencial.** Aquí nos limitaremos propiamente al caso en que $\vec{H}$ tenga el significado de una fuerza referida a la unidad de masa. Si en vez de considerar la masa infinitesimal dm tomamos la masa m (es válida todavía la [1], § 79), las fórmulas [1], [2], § 84, dan para el trabajo $d\mathfrak{L}$ a lo largo de una trayectoria infinitesimal:

$$d\mathfrak{L} = m\cdot d\ell;$$

y a lo largo de una trayectoria finita de A_1 a A_2:

$$\mathfrak{L} = m\cdot\ell.$$

Si existe potencial, por la fórmula [2], § 89, este trabajo es:

$$d\mathfrak{L} = m\cdot d\ell = -m\cdot d\mathfrak{V};$$

(1) Según otros autores, especialmente en los tratados de análisis vectorial, el *gradiente* iría en el sentido de los potenciales crecientes, $\vec{G} = \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial n}$, y, por tanto, sería de sentido opuesto a la intensidad del campo; véase, por ejemplo, «Introducción al Análisis Vectorial», de R. Gans, Ed. Labor. — *N. del T.*

y para una trayectoria finita:

$$\mathfrak{L} = m \cdot \mathfrak{l} = m \cdot \mathfrak{V}(x_1, y_1, z_1) - m \cdot \mathfrak{V}(x_2, y_2, z_2) = m\,\mathfrak{V}_1 - m\,\mathfrak{V}_2. \quad [1]$$

La expresión $m \cdot \mathfrak{V}(x, y, z) = \mathfrak{W}$ se llama *energía potencial* o *de posición de la masa m en el punto* (x, y, z) del campo, y está definida, como $\mathfrak{V}$, salvo una constante aditiva que permanece arbitraria. La [1] se escribe también:

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{W}_1 - \mathfrak{W}_2 = m\,(\mathfrak{V}_1 - \mathfrak{V}_2). \quad [2]$$

La variación $\mathfrak{W}_1 - \mathfrak{W}_2$ de la energía potencial cuando la masa m se mueve entre A_1 y A_2, representa el trabajo efectuado por la fuerza $\vec{F}$ (que no coincide con la intensidad del campo) sobre la masa m, cuando ésta se mueve según una trayectoria cualquiera que va desde el punto A_1, de potencial $\mathfrak{V}_1$, al punto A_2, de potencial $\mathfrak{V}_2$.

Análogamente a las [11] y [6], § 89, la energía potencial $\mathfrak{W}$ y la fuerza $\vec{F}$ del campo vienen relacionadas por las expresiones:

$$\operatorname{grad} \mathfrak{V} = \vec{F}, \quad [3]$$

$$-\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x} = F_x; \quad -\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial y} = F_y; \quad -\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial z} = F_z; \quad [4]$$

en donde F_x, F_y, F_z son las componentes de $\vec{F}$.

Las superficies equipotenciales $\mathfrak{V} = \text{const.}$ coinciden con las superficies $\mathfrak{W} = \text{const.}$ de igual energía potencial.

§ **91. Potencial polidromo.** Sea un campo irrotacional, en el cual es, pues, rot $\vec{H} = 0$ en todos los puntos del campo; pero supongamos que dicho campo es múltiplemente conexo. Por ejemplo, consideremos que el campo comprende el espacio externo al anillo MN (figura 166); puede tratarse del campo magnético existente en el espacio que rodea un circuito MN recorrido por una corriente.

El campo pasa a ser simplemente conexo si una superficie ideal, Π, no perforable, se apoya en el contorno MN del anillo de manera que queden excluídas las líneas cerradas del tipo $l_3\, l_4$ (fig. 162), encadenadas con el anillo (§ 86).

Así, siendo el campo simplemente conexo, como es irrotacional, admite un potencial $\mathfrak{V}$. Para una línea A_1, l_A, A_2, que da una vuelta encadenándose con el anillo, pero que no se cierra, a causa de la pared Π, se tiene:

$$\int_{A_1 l_A A_2} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \mathfrak{V}_{A_1} - \mathfrak{V}_{A_2} = k; \quad [1]$$

COLEGIO MAYOR DE JESUS MARIA

generalmente no es $k = 0$; eligiendo convenientemente el extremo de l_A que ha de actuar como origen, A_1, siempre puede lograrse que k sea positivo.

Pero a lo largo de la línea cerrada A_1, l_A, A_2, B_2, l_B, B_1, A_1, trazada toda ella en el campo, que hemos convertido en simplemente conexo, es:

$$\int_{A_1 l_A A_2} \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_{A_2}^{B_2} \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_{B_2 l_B B_1} \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_{B_1}^{A_1} \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0.$$

Puesto que suponemos que $\vec{H}$ es regular en todas partes, y se cumple la expresión [7], § 84, las integrales primera y tercera, relativas a líneas que corren superpuestas en las dos caras de Π, son iguales y opuestas; queda:

$$\int_{B_1 l_B B_2} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{A_1 l_A A_2} \vec{H} \cdot d\vec{l} = k, \quad [2]$$

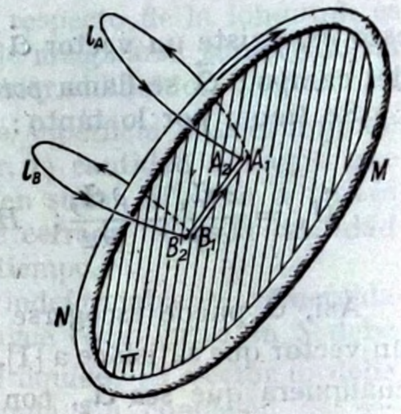


Fig. 166

valor constante para cualquier punto $B_1\, B_2$, porque, manteniendo fijo el punto $A_1\, A_2$, la superficie Π puede ser deformada a voluntad y, por lo tanto, puede pasar por cualquier punto del espacio. Por consiguiente, la [2] es constante para cualquier línea B_1, l_B, B_2 que esté encadenada una sola vez con el anillo MN.

Pero la pared Π es ficticia y, por tanto, la integral de línea [2] coincide con la circulación; ésta tiene un valor constante k para toda vuelta en torno al anillo, y cuando el sentido del recorrido es a propósito, se tiene $k > 0$, (§ 229, *b*]); en cada vuelta suplementaria, siempre en sentido concordante, la circulación aumenta en k.

Si en un punto A del campo el potencial antes citado tiene el valor $\mathfrak{V}_{A,0}$, cuando se vuelve a dicho punto después de haber dado n vueltas en cadena en torno al anillo, se encuentra el potencial:

$$\mathfrak{V}_{A,n} = \mathfrak{V}_{A,0} - nk; \quad [3]$$

la expresión [3] es válida en todos los casos con $k > 0$, si se supone, según convenga, que n es positivo o negativo, de acuerdo con el sentido del recorrido.

En este caso, el potencial, en vez de estar unívocamente determinado (salvo una constante arbitraria aditiva), sólo está determinado, salvo el valor $n\,k$; es, pues, función polidroma del punto elegido en el campo. Diremos que un campo no simplemente conexo,

irrotacional, admite también *potencial*, pero que éste es *polídromo*. Véase también § 229, *b*].

§ **92. Potencial vector.** Si el campo $\vec{H}$ es irrotacional, el vector $\vec{H}$ puede obtenerse derivando el potencial (§ 89, [6]).

Si el campo $\vec{H}$ carece de divergencia (div $\vec{H} = 0$), el vector $\vec{H}$ puede obtenerse análogamente mediante derivación, pero de una manera menos sencilla. En efecto, en este caso puede ponerse:

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{\mathfrak{A}}; \qquad [1]$$

esto es, existe un vector $\vec{\mathfrak{A}}$ cuyo rotacional es $\vec{H}$ en todos los puntos del campo; $\vec{\mathfrak{A}}$ se llama *potencial vector* del vector solenoidal $\vec{H}$.

Se tiene, por lo tanto:

$$H_x = \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial z}; \quad H_y = \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial x}; \quad H_z = \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial y}. \qquad [2]$$

Así, $\vec{\mathfrak{A}}$ puede escogerse de infinitas maneras; en efecto, si $\vec{\mathfrak{A}}$ es un vector que satisface a [1], también satisface a [1] la suma $\vec{\mathfrak{A}}_1 + \vec{\mathfrak{A}}_2$, cualquiera que sea $\vec{\mathfrak{A}}_2$, con tal de que sea irrotacional.

Según los casos (hidrodinámica, vector inducción magnética $\vec{\mathfrak{B}}$ constante en el tiempo, vector $\vec{\mathfrak{B}}$ de un campo magnético que varía rápidamente con el tiempo, ...), se hace que sea determinado el potencial vector imponiéndole alguna ulterior condición física o matemáticamente apropiada; en muchos casos, tal condición es que, a su vez, $\vec{\mathfrak{A}}$ sea solenoidal, es decir, que también sea:

$$\text{div } \vec{\mathfrak{A}} = 0. \qquad [3]$$

Los vectores $\vec{\mathfrak{A}}$ y $\vec{H}$, además de estar ligados por la condición [1], lo están por la relación de STOKES (§ 86, [1]).

Dado el potencial vector $\vec{\mathfrak{A}}$, la [1] o la [2] dan el vector campo $\vec{H}$. Inversamente: dado el vector solenoidal $\vec{H}$, ¿cómo se hace para expresar el potencial vector?

La respuesta a tal cuestión tiene mayor alcance que el permitido por los límites de estas páginas.

§ **93. Campos vectoriales.** El campo de fuerzas es un caso particular del *campo vectorial*. En Física es frecuente considerar campos en los cuales queda definido en cada punto (x, y, z) un vector $\vec{H}$ (x, y, z)

que no tiene el significado de fuerza ni de intensidad del campo de fuerzas. Las definiciones y las propiedades anteriores (§§ 79, 92) se pueden extender a estos campos vectoriales.

Así, cuando un canal conduce un líquido, por ejemplo agua, en cualquier punto del canal fluye el líquido con una velocidad $\vec{u}$, que, en general, es función del punto y del tiempo. En condiciones de régimen estacionario, $\vec{u}$ es solamente función del punto (x, y, z). Se tiene un campo del vector *velocidad*, independiente del tiempo.

Los conceptos de *línea de flujo* y de *tubo de flujo* han surgido de este caso. Y la razón es evidente: una línea de flujo indica la trayectoria de las partículas de agua, y el tubo de flujo, llamado también *filete flúido*, si la sección es pequeña respecto de la longitud, es propiamente un conducto ideal que puede imaginarse sumergido en el agua del canal y que conduce por su interior el líquido.

El flujo del vector $\vec{u}$ que atraviesa una superficie S es el flujo de agua a través de esta superficie; es decir, la cantidad de agua que pasa por S en la unidad de tiempo; es, en suma, el *gasto* a través de S. El flujo que sale de una superficie cerrada S es la cantidad de líquido que sale de S en la unidad de tiempo.

Pero si S es una superficie cerrada, indeformable y sumergida completamente dentro del líquido, tanta agua como entre en S debe salir, a causa de la incomprensibilidad del líquido. El vector $\vec{u}$ debe ser solenoidal, y su *divergencia* debe ser nula. La condición de solenoidalidad deja de aparecer como una suposición matemática artificiosa para tomar el aspecto de una simple condición física: el líquido, incompresible, no puede en su movimiento ni concentrarse en S ni enrarecerse; no se tienen en el líquido ni «manantiales» ni «sumideros» (§ 83).

Si en una porción del líquido $\vec{u}$ es rotacional, esto es, rot $\vec{u} \neq 0$, se dice que en tal porción el movimiento del líquido, es *turbillonario* o *turbulento*. Físicamente, esto quiere decir que, por lo menos, algunas de las partículas de agua describen trayectorias l cerradas. Supongamos que se recorre una de esas trayectorias l en el sentido del movimiento de las partículas flúidas; $\vec{u}$ y $\vec{dl}$ estarán dirigidos constantemente en el mismo sentido, y $\int_S \vec{u} \cdot \vec{dl}$ no puede ser nula. Cuando la circulación del vector $\vec{u}$ no es nula, existen movimientos turbulentos en el seno del líquido.

La *circulación* del vector que, en el caso de un campo de fuerzas determina si dicho campo es conservador, es decir, si tiene potencial, en el caso de un campo de velocidad del flúido determina si existen o no movimientos turbulentos, es decir, si el movimiento es *rotacional* (con torbellinos) o *irrotacional* (sin torbellinos); y, como en

el caso del trabajo, hay que distinguir también en el campo de la velocidad $\vec{u}$ en un flúido si es simple o múltiplemente conexo (véase § 229).

También adquiere un significado cinemático sencillo el vector *rotacional* $\vec{R}$, que hemos definido mediante las expresiones [3] y [4] del § 85.

Probaremos esto con un ejemplo muy sencillo. Sea una rueda que gira alrededor del eje O, perpendicular al plano de la figura 167, con velocidad angular constante ω. En cualquier punto P, a distancia r del eje de rotación, vienen sucesivamente a colocarse todos los puntos de la rueda que pertenecen a una circunferencia de radio $r = OP$; puesto que es constante la velocidad angular, todos los puntos de la rueda pasan por P con una velocidad $\vec{u}$, orientada como en la figura, de magnitud $u = \omega \cdot r$.

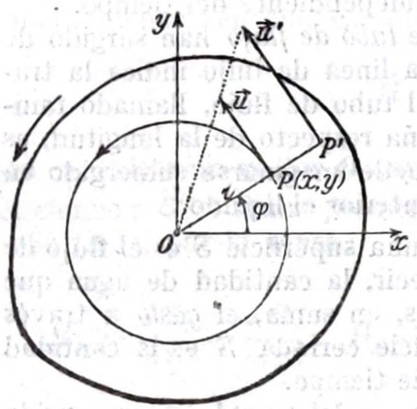


Fig. 167

Tomemos tres ejes cartesianos, uno de los cuales, z, coincida con el eje de rotación; las componentes del vector $\vec{u}$ son:

$$u_x = -\omega \cdot r \cdot \operatorname{sen} \varphi, \qquad u_y = \omega \cdot r \cdot \cos \varphi, \qquad u_z = 0;$$

o sea:

$$u_x = -\omega \cdot y, \qquad u_y = \omega \cdot x, \qquad u_z = 0.$$

El vector $\vec{u}$ $(u_x, u_y, 0)$ es función del punto P (no del tiempo). Los puntos del espacio ocupados por la rueda constituyen un campo del vector $\vec{u}$. Su rotacional es:

$$\vec{R} = \operatorname{rot} \vec{u} = \vec{i}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) =$$

$$= 2\vec{k}\,\omega = 2\vec{\omega};$$

en donde el vector $\vec{\omega}$ es el vector velocidad angular, orientado según el eje de rotación z, como se ha dicho en el § 58, *a*]. El *rotacional* $\vec{R}$ de la velocidad $\vec{u}$ es el duplo de la velocidad angular de rotación de la rueda.

Nos ofrece otro ejemplo de campo vectorial el corrimiento de los puntos de un cuerpo elástico deformado respecto a la posición normal de reposo; otro, es el de las aceleraciones centrífugas en los puntos de un cuerpo en rotación; otro, todavía, es el campo del *vector de* POYNTING, del que se obtiene la energía radiante por ondas electromagnéticas; etc.

Hemos dado, pues, las razones físicas que justifican la introducción de las numerosas definiciones contenidas en los §§ 79 ÷ 92.

Entre todos los campos vectoriales son importantísimos los campos de fuerzas; por esto hemos empezado por ellos.

En todos los campos de fuerzas que la naturaleza nos presenta (campo de la gravedad, campos eléctricos, magnéticos, ...), son lícitas y esenciales las siguientes preguntas:

¿El campo es solenoidal?

¿El campo está dotado de potencial?

Vamos a ver cómo se responde a estas preguntas en los campos que acabamos de mencionar.

§ 94. Campo de fuerzas uniforme. Se dice que en un campo es *uniforme* cuando $\vec{H}$ es constante (en magnitud, dirección y sentido) en todos sus puntos.

En muchísimas aplicaciones prácticas puede considerarse que el campo de la gravedad es uniforme en un espacio cúbico de algunos km³: se pueden considerar las verticales como rectas paralelas entre sí, que son las líneas de fuerza; la aceleración $\vec{g}$ es constante.

Si suponemos tres ejes cartesianos de referencia, siendo el eje z vertical y dirigido hacia abajo, se tiene (fig. 168):

$$H_x = 0, \qquad H_y = 0, \qquad H_z = H = g, \qquad (g > 0). \qquad [1]$$

Las líneas de fuerza son rectas paralelas al eje z, dirigidas hacia abajo.

El campo es solenoidal, porque todas las derivadas que entran en la ecuación [1] del § 87 son nulas. Se puede demostrar también directamente la solenoidalidad. Una superficie cerrada S queda cortada dos veces por cada tubo de fuerza, en dS_1 y dS_2. En una superficie cerrada de forma compleja podrá ser mayor el número de secciones; pero esto no altera substancialmente la demostración).

Los dos flujos elementales $d\Phi_1$ y $d\Phi_2$ *salientes* de dS_1 y dS_2, respectivamente, son:

$$d\Phi_1 = |H_1| \cdot |dS_1| \cdot \cos \varphi_1; \qquad d\Phi_2 = |H| \cdot |dS_2| \cdot \cos \varphi_2.$$

Pero $|dS_2| \cdot \cos \varphi_2$ es la proyección $|dS_0|$ de dS_2 sobre el plano xy; $|dS_1| \cdot \cos \varphi_1$ es $-|dS_0|$; $|H_1|$ es igual a $|H_2|$, porque el campo es uniforme; luego:

$$d\Phi_1 = -d\Phi_2; \qquad d\Phi_1 + d\Phi_2 = 0.$$

La suma algebraica de los flujos salientes de dS_1 y dS_2 es nula.

Repitiendo el razonamiento para todos los tubos elementales de flujo, se deduce que el flujo saliente de S es nulo; el flujo saliente del casquete interior de S, apoyado en el contorno l, es igual al entrante por casquete superior.

Luego, *el campo uniforme es solenoidal.*

Existe potencial, porque son nulas todas las derivadas que entran en las expresiones [1] del § 88. Por lo tanto, las superficies equipotenciales son los planos horizontales $z = \text{const.}$; las normales n a

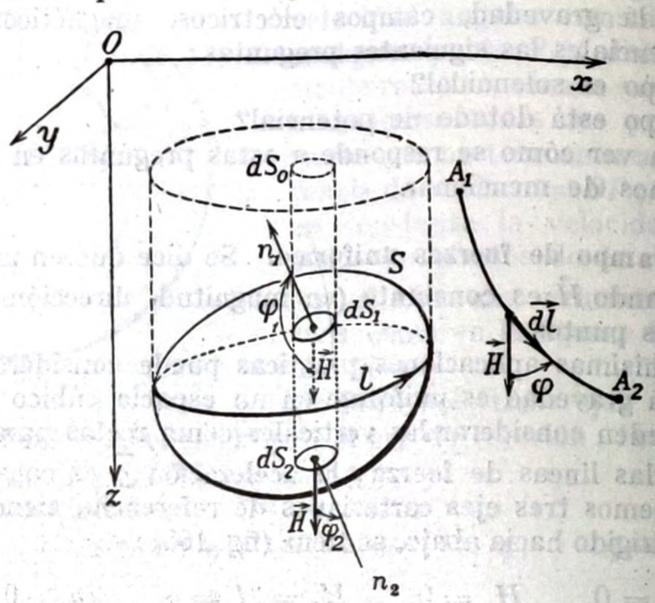


Fig. 168

las superficies equipotenciales, dirigidas en el sentido de las líneas de fuerza, son todas paralelas al eje z y tienen el mismo sentido.

La [10], § 89, se escribe:

$$-\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial n} = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} = g.$$

Por tanto, integrando:

$$\mathcal{V} = -gz + C \qquad (C \text{ constante arbitraria}). \qquad [2]$$

La [5], § 84, da directamente (fig. 168), en virtud de las [1]:

$$d\ell = |H| \cdot |dl| \cdot \cos\varphi = H_x\,dx + H_y\,dy + H_z\,dz = g \cdot dz,$$

que es solamente función de z.

Luego,

$$\ell = \int_{A_1}^{A_2} g \cdot dz = gz_2 - gz_1 = (-gz_1) - (-gz_2)$$

sólo es función de los puntos extremos; es decir, sólo depende de los niveles z_1, z_2 de los extremos A_1, A_2 de la trayectoria. El trabajo efectuado en el campo de la gravedad sólo depende del desnivel entre los extremos de la trayectoria.

La función $\mathcal{V}$, cuya diferencial es $-d\ell$, será ahora:

$$\mathcal{V} = -\int g \cdot dz = -g \cdot z + C;$$

$$\mathcal{W} = -m \cdot g \cdot z + C' \qquad [3]$$

es la *energía potencial de la masa m.*

Las superficies equipotenciales tienen por ecuación:

$$\mathcal{V} = \text{const.}; \quad \text{es decir,} \quad z = \text{const.},$$

confirmándose que son planos horizontales.

Estas superficies equipotenciales del campo de la gravedad, únicamente planas en una primera aproximación, se realizan físicamente mediante la superficie libre de un líquido en reposo, y por esto se las llama también *superficies de nivel* (§ 202).

Esta denominación se aplica también a las superficies equipotenciales de cualquier campo que admita potencial.

En general, se puede suponer en un campo uniforme:

$$H_x = 0, \qquad H_y = 0, \qquad H_z = H = \text{const.}$$

Se tiene:

$$\mathcal{V} = -H \cdot z + C; \qquad [4]$$

por tanto:

$$\ell = \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 = -H(z_1 - z_2) = H(z_2 - z_1); \qquad [5]$$

en donde $z_2 - z_1$ es la distancia entre los dos planos normales a z que pasan por A_1 y A_2.

Si se atribuye arbitrariamente el potencial cero al plano coordenado xy, para el cual es $z = 0$, la constante aditiva de la fórmula [4] toma el valor $C = 0$, y el potencial se reduce a:

$$\mathcal{V} = -H \cdot z. \qquad [6]$$

§ 95. Campo de fuerzas centrales. Supongamos que el campo $\vec{H}$ en un punto cualquiera A del espacio está dirigido constantemente según la recta que va desde el punto A al punto fijo O (fig. 169), llamado *centro* de las fuerzas. El campo es *atractivo si* $\vec{H}$ tiene el sentido $\overrightarrow{AO}$, y *repulsivo si* tiene el sentido $\overrightarrow{OA}$.

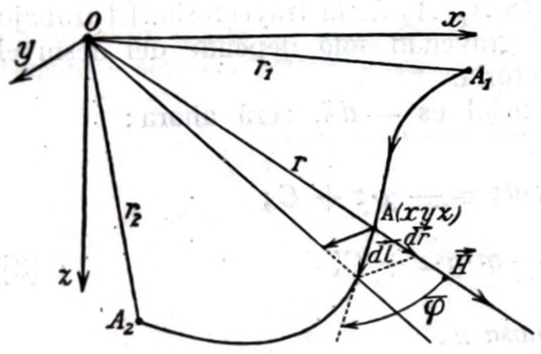


Fig. 169

Convendremos en medir la magnitud H de $\vec{H}$ según el eje $\overrightarrow{OA}$.

Resulta que H es positivo o negativo, según que el campo sea repulsivo o atractivo.

Suponemos, finalmente, que la magnitud H del vector $\vec{H}$ es solamente función de la distancia $OA = r\ (>0)$:

$$H = f(r). \qquad [1]$$

Un campo de fuerzas de esta clase se llama *central*. El centro O es un punto singular del campo, porque pasan por él infinitas líneas de fuerza.

En general, un campo central *no* es solenoidal (véase § 97), pero tiene potencial.

En efecto, tomemos tres ejes cartesianos con centro en O. En un punto cualquiera $A\ (x, y, z)$, situado a la distancia $OA = r$ del centro, los cosenos directores de $\overrightarrow{OA}$ son $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}$; y por tanto, en valor y signo se tiene:

$$H_x = f(r)\cdot\frac{x}{r};\ H_y = f(r)\cdot\frac{y}{r};\ H_z = f(r)\cdot\frac{z}{r};\ r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \qquad [2]$$

Efectuando las derivaciones, resulta, sin más, que son satisfechas las igualdades [1] del § 88. Luego, con tal que el campo sea simplemente conexo, existe el potencial $\mathfrak{V}$.

Directamente, se tiene en valor y signo (fig. 169):

$$d\mathfrak{l} = |H|\cdot|dl|\cdot\cos\varphi = f(r)\cdot dr,$$

que sólo depende de r y de la variación dr de la distancia, contada

desde el centro del campo, durante el corrimiento infinitesimal $\vec{dl}$.

Por tanto,

$$\mathfrak{l} = \int_{r_1}^{r_2} f(r)\cdot dr$$

es únicamente función de r_1 y r_2.

Es un caso análogo al del § 94; el potencial existe y viene dado por:

$$\mathfrak{V} = -\int f(r)\cdot dr, \qquad [3]$$

que sólo es función de r.

El trabajo a lo largo de una trayectoria $A_1\ A_2$ es:

$$\mathfrak{l} = \int_{r_1}^{r_2} f(r)\cdot dr = \mathfrak{V}_1 - \mathfrak{V}_2,$$

que sólo depende de los extremos de la trayectoria, es decir, de r_1 y r_2, esto es, de las distancias que separan A_1 y A_2 del centro del campo.

Las superficies equipotenciales tienen por ecuación $\mathfrak{V} = \text{const.}$, es decir, $r = \text{const.}$, y son esferas con centro en O.

Esto puede también deducirse de la ortogonalidad entre las superficies equipotenciales y el campo $\vec{H}$.

§ 96. Fuerzas culombianas y newtonianas. El ejemplo anterior tiene una importancia especial para los siguientes casos particulares:

a] **Campo culombiano.** Dos masas (eléctricas, magnéticas) m_0 y m, prácticamente puntiformes, se encuentran, por ejemplo, en el vacío a la distancia r. Se ejerce entre ellas una acción mutua constituída por una fuerza $\vec{F}$, que m_0 ejerce sobre m, y de una reacción $-\vec{F}$, que m ejerce sobre m_0. Estas fuerzas (acción y reacción) están dirigidas según la recta que une m_0 con m. Consideremos la fuerza $\vec{F}$. Ésta es una fuerza aplicada en m, central, repulsiva o atractiva, según que m_0 y m tengan signos iguales u opuestos, y su importe es:

$$F = k\frac{m_0 m}{r^2} \quad (\textit{ley de} \text{ Coulomb}). \qquad [1]$$

Podemos suponer que m_0 crea el campo, y que m es la masa sobre la cual actúa el campo; $r\ (>0)$ es su distancia, k una constante

positiva que depende de las unidades de medida, y es independiente del medio (véase tomo II); en el sistema cm g_m seg (CGS) electrostático se tiene: $k = 1$.

Se deduce de la [1]

$$H = \frac{dF}{dm} = k\frac{m_0}{r^2} = f(r), \qquad [2]$$

valor positivo (campo repulsivo) o negativo (campo atractivo) según sea el signo de m_0.

Por tanto:

$$\mathfrak{V} = -\int k\frac{m_0}{r^2}\,dr = k\frac{m_0}{r} + C.$$

Se fija el valor de la constante C con la hipótesis, completamente arbitraria, de que sea $\mathfrak{V}_{r=\infty} = 0$, deduciéndose $C = 0$, y se tiene:

$$\mathfrak{V} = k\frac{m_0}{r}. \qquad [3]$$

El *potencial de un punto A* resulta ser el trabajo efectuado por las fuerzas del campo durante el transporte de la unidad positiva de masa desde el punto A hasta el ∞, cualquiera que sea el camino recorrido. Todos los puntos situados en el ∞ constituyen una superficie equipotencial, de potencial nulo.

En los campos repulsivos es $m_0 > 0$; luego, en todas partes es $\mathfrak{V} > 0$; es decir, las fuerzas del campo efectúan un trabajo positivo durante el transporte al ∞. Esto es natural: el campo repele la carga + 1 hacia el infinito.

En los campos atractivos se tiene $m_0 < 0$; luego, en todas partes es $\mathfrak{V} < 0$.

En fin, se tiene en valor y signo:

$$-\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial n} = -\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial r} = k\frac{m_0}{r^2} = H.$$

El centro del campo, ocupado por la masa m_0, es un punto singular, siendo en él $\mathfrak{V} = \infty$, $H = \infty$. Pero, físicamente, no existen cargas eléctricas ni magnéticas que sean exactamente puntiformes.

b] **Campo newtoniano.** Se tienen ahora dos masas inertes m_0 y m prácticamente puntiformes. La acción mutua entre m_0 y m ahora es siempre una atracción, según la *ley de* NEWTON. La fuerza $\vec{F}$

§ 96

que m_0 ejerce sobre m, es central, siempre atractiva, y su magnitud, en valor y signo, sobre el eje $m_0 \longrightarrow m$, es:

$$F = -k\frac{m_0 \cdot m}{r^2}. \qquad [4]$$

Esta vez m_0, m y k son siempre positivos; k es la *constante de la gravitación universal*, que depende de las unidades de medida, y es independiente del medio; en el sistema cm g_m seg (C G S) se tiene:

$$k = 6{,}66_4 \cdot 10^{-8}\ \frac{\text{dinas}\cdot\text{cm}^2}{g_m^2} = 6{,}66_4 \cdot 10^{-8}\ \text{cm}^3 \cdot g_m^{-1} \cdot \text{seg}^{-2}.$$

También se puede imaginar ahora que la masa m_0 crea el campo *(campo de gravitación)* al cual se encuentra sometida la masa m.

Se tiene:

$$H = \frac{dF}{dm} = -k\frac{m_0}{r^2} < 0, \qquad [5]$$

de acuerdo con el hecho de que el campo es *atractivo*. Por tanto:

$$\mathfrak{V} = -k\frac{m_0}{r}. \qquad [6]$$

La constante arbitraria se anula también esta vez, suponiendo que sea $V_{r=\infty} = 0$.

Se tiene ahora:

$$\mathfrak{V} < 0;$$

es decir, el trabajo efectuado por las fuerzas del campo durante el transporte de la unidad positiva de masa hasta el ∞ es negativo; el campo se opone a este transporte. Esto es natural: el campo es atractivo.

El potencial disminuye en valor absoluto al aumentar la distancia; pero teniendo en cuenta el signo, el potencial aumenta con la distancia desde el centro de atracción O, donde está concentrada la masa m_0.

Luego se tiene:

$$-\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial n} = +\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial r} = k\frac{m_0}{r^2} = |H|.$$

También esta vez es $|H| = \infty$ y $|\mathfrak{V}| = \infty$ para $r = 0$; luego, el centro O es un punto singular del campo. Para asegurarse de la

regularidad del campo, conviene excluir de él a O; más exactamente, convendrá considerar un pequeño volumen (por ejemplo, una esferita) de centro O, que se excluirá del campo.

§ 97. Teorema de Gauss. Todos los campos centrales admiten potencial.

¿Son también solenoidales?

Observemos que los tubos de fuerza son conos con su vértice en el centro O del campo (fig. 170).

Sean: $d\Omega$ la abertura de un tubo de fuerza elemental; dS_2 una de sus secciones; n_2 la normal a dS_2 dirigida en el sentido que se aleja de O. El flujo de fuerza que atraviesa la sección dS_2 es, en valor y signo:

$$d\Phi_2 = dS_2 \cdot H \cdot \cos\varphi_2 = dS_2 \cdot \cos\varphi_2 \cdot f(r_2);$$

en donde φ_2 es el ángulo que forman la normal n_2 y el radio r_2; o sea (§ 33, [5]):

$$d\Phi_2 = dS_2' \cdot f(r_2) = d\Omega \cdot r_2^2 \cdot f(r_2);$$

en donde dS_2' es la sección recta del tubo de fuerza.

Es condición necesaria para que el campo sea solenoidal (§ 87) que este flujo $d\Phi_2$ sea independiente del valor r de la distancia r_2 desde dS_2 a O; $r^2 \cdot f(r)$ debe ser constante con respecto a r; luego:

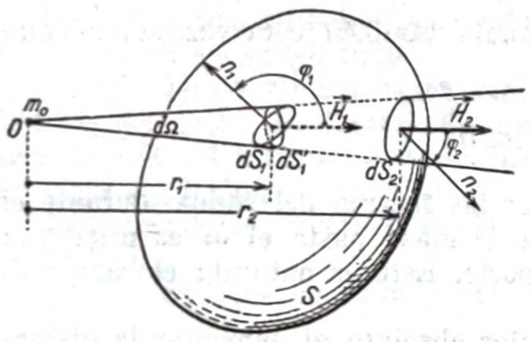


Fig. 170

$$f(r) = \frac{K}{r^2}.$$

Entre todos los campos centrales, únicamente los culombianos y newtonianos, es decir, los inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia r, satisfacen esta condición necesaria para la solenoidalidad; por ejemplo, se tiene en los campos culombianos: $K = k \cdot m_0$.

Consideremos ahora el flujo saliente por una superficie cerrada S sumergida en un campo culombiano o newtoniano; por ejemplo, en un campo culombiano.

Pueden darse tres casos:

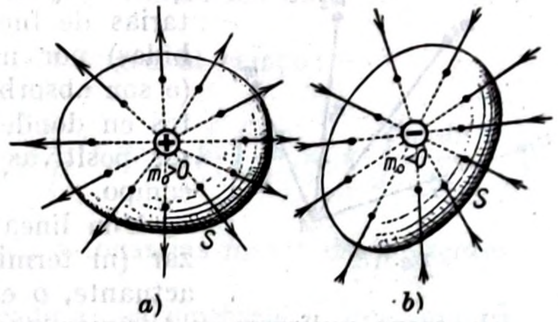
1.º *La superficie cerrada S no comprende a m_0.*

Cualquier cono elemental $d\Omega$, que sale de O, o bien no corta a S, o corta a esta superficie en dos elementos de superficie dS_1 y dS_2 (fig. 170) (1).

El flujo $d\Phi_1$ que atraviesa dS_1 es igual al $d\Phi_2$, que, en sentido directo, atraviesa dS_2. Pero si se calcula el flujo *saliente* por S, los flujos *salientes* por dS_1 y dS_2 resultan iguales y de signo contrarios; como los elementos de superficie dS_1 y dS_2 contribuyen igualmente y con signos contrarios, su efecto total es nulo.

Como esto sucede para todos los conos elementales que salen de O, resulta que el flujo Φ que sale por S es nulo:

$$\Phi = 0. \qquad [1]$$



a) b)
Fig. 171

2.º *La superficie cerrada S comprende a m_0.*

Ahora, cualquier cono elemental $d\Omega$ corta a S según un elemento de superficie dS a través del cual pasa el flujo *saliente* (1):

$$d\Phi = km_0 d\Omega.$$

Luego, el flujo a través de S vale:

$$\Phi = k \cdot m_0 \cdot \int d\Omega = 4\pi \cdot k \cdot m_0, \qquad [2]$$

que será positivo (es decir, un verdadero flujo saliente) si $m_0 > 0$, esto es, si el campo es repulsivo [fig. 171, *a*)]; será negativo (es decir, un flujo entrante) si $m_0 < 0$, es decir, si el campo es atractivo [figura 171, b]. En m_0 se tiene un «manantial» de flujo en el primer caso y un «sumidero» en el segundo caso (§ 83).

3.º *La superficie cerrada S para por m_0.*

Se tiene entonces, razonando como en el caso anterior y en el supuesto de que esté definido el plano tangente en el punto de S ocupado por m_0:

$$\Phi = 2\pi \cdot k \cdot m_0. \qquad [3]$$

Las expresiones [1], [2] *y* [3] *constituyen el teorema de* Gauss, relativo al flujo de fuerza que sale de una superficie cerrada en un campo culombiano.

(1) La demostración se extiende fácilmente al caso en que S presente entrantes y sea cortada en más sitios por el tubo de fuerza elemental.

En el caso del campo newtoniano las fórmulas [2] y [3] valen también en signo con tal de que las masas materiales se supongan positivas, y la constante de la gravitación k se considere negativa.

Concluyendo: tales campos son solenoidales cuando se excluyen del campo (*y, por tanto, del volumen interior a S*) los puntos en los cuales están concentradas las masas actuantes; por consiguiente, nos ofrecen ejemplos de campos de divergencia nula, pero provistos de cavidades (§§ 83, 87).

Según los convenios del final de los §§ 81, 87, se puede decir que la [2] da el número de las líneas unitarias de fuerza que salen (o son absorbidas) por una masa m_0, y éstas nacen (o son absorbidas) únicamente en los puntos en donde están concentradas las masas positivas (o negativas) que crean el campo.

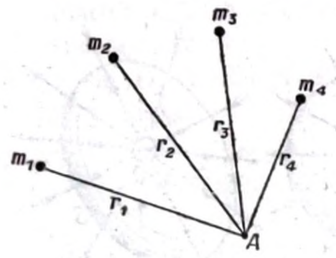


Fig. 172

Una línea de fuerza no puede comenzar (ni terminar) más que en una masa actuante, o en el infinito.

El campo uniforme es el único que es solenoidal y admite potencial, sin limitaciones.

§ 98. **Generalización.** Si el campo está creado por varias masas $m_1, m_2, \ldots m_n$ (fig. 172), su intensidad en el punto A es:

$$\vec{H} = \overrightarrow{\left(k \cdot \frac{m_1}{r_1^2}\right)} + \overrightarrow{\left(k \cdot \frac{m_2}{r_2^2}\right)} + \ldots + \overrightarrow{\left(k \cdot \frac{m_n}{r_n^2}\right)} = k \cdot \sum_n \overrightarrow{\left(\frac{m_n}{r_n^2}\right)} \quad \text{(suma vectorial)}; \quad [1]$$

el potencial en el punto A vale:

$$\mathfrak{V} = k \cdot \sum_n \frac{m_n}{r_n} \quad \text{(suma escalar)}; \quad [2]$$

el teorema de Gauss da:

$$\Phi = 4\pi k \cdot \sum m_i + 2\pi k \cdot \sum m_s; \quad [3]$$

en donde m_i son las masas situadas dentro de la superficie cerrada S; m_s son las masas colocadas sobre la superficie S, y Φ es el flujo saliente de dicha superficie. La [3] da el número de las líneas unitarias de fuerza (§ 87) que salen de S.

Se ha supuesto que sirve el mismo valor de k para todas las masas actuantes, porque k depende únicamente del sistema de unidades de medida.

Todavía, para mayor generalidad, sea una distribución continua en el espacio de infinitas masas dm que actúan en razón inversa del cuadrado de la distancia; se tiene entonces una masa específica $\mu = \frac{dm}{dv}$, que, en general, será variable de un punto a otro y que supondremos siempre finita; además, con objeto de evitar que la integral se haga infinita, supondremos que todas las masas presentes en el campo están contenidas en el interior de una superficie cerrada, que, aunque grande, sea finita; por lo demás, sólo en este caso puede conservarse la suposición de que el potencial sea nulo en todo punto del infinito.

Tal distribución de masas da origen al campo:

$$\vec{H} = k \cdot \int \overrightarrow{\left(\frac{dm}{r^2}\right)} = k \cdot \int \overrightarrow{\left(\frac{\mu \cdot dv}{r^2}\right)}; \quad \mathfrak{V} = k \cdot \int \frac{dm}{r} = k \cdot \int \frac{\mu \cdot dv}{r}; \quad [4]$$

en donde la integral se extiende a todas las masas dm presentes en el campo.

El teorema de Gauss, aplicado a una superficie S, que comprende el volumen v, se escribe:

$$\Phi = 4\pi k \cdot \int_v dm_i. \quad [5]$$

Se aplica la [5] a un elemento de volumen dv que incluye la masa dm.

Sea $d\Phi$ el flujo saliente del volumen dv. Recordando la [3], § 82, se obtiene fácilmente la *relación de* Poisson:

$$\operatorname{div} \vec{H} = 4\pi k \cdot \mu. \quad [6]$$

Como el campo admite el potencial $\mathfrak{V}$, la [6] se escribe (§ 89, [13], [14]):

$$\Delta_2 \mathfrak{V} = \frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial z^2} = -4\pi k \cdot \mu. \quad [7]$$

En donde sea $\mu = 0$, esto es, en los sitios en que no hay masas, será:

$$\Delta_2 \mathfrak{V} = 0; \quad [8]$$

el potencial satisface esta *ecuación* diferencial *de* Laplace.

Todo lo que precede constituye la base necesaria para el estudio del campo de la gravedad en un espacio suficientemente extenso

(§§ 168 y siguientes), en el cual no sea aplicable la primera aproximación efectuada en el § 94, y para el estudio de los campos eléctricos y magnéticos.

El papel privilegiado correspondiente a los campos centrales inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia, resalta todavía más al considerar que cualquier campo conservador puede imaginarse debido a la acción de masas convenientemente distribuídas en el campo y que actúan según la ley de COULOMB.

§ 99. Energía potencial, mutua, en los campos culombianos. La masa m en el campo culombiano creado por la masa m_0 tiene la energía de posición:

$$\mathcal{W} = m\,\mathcal{V} = k\frac{mm_0}{r}. \qquad [1]$$

Pero también la masa m, de igual naturaleza que m_0, crea un campo de fuerza que actúa sobre m_0 con una fuerza igual y opuesta, de acuerdo con el principio de acción y reacción.

La [1] es también la energía de posición de m_0 en el campo creado por m; esto es, $\mathcal{W}$ es una *energía* potencial *mutua* de las dos masas, que corresponde a ambas con el mismo derecho.

Al variar la distancia r entre las dos masas, es decir, al producirse un movimiento relativo, cambia la energía mutua en:

$$\mathcal{W}_2 - \mathcal{W}_1 = k \cdot m\,m_0\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right). \qquad [2]$$

Para los efectos de la energía potencial mutua es indiferente que sea m quien se aproxime a m_0, o viceversa.

Con mayor generalidad, si se encuentran en presencia varias masas $m_1, m_2, m_3, \ldots m_n$, y $r_{1,2}$ es la distancia entre m_1 y m_2; $r_{1,3}$, la distancia entre m_1 y m_3, etc., dichas masas crean un campo de fuerza total, provisto de la *energía mutua* de posición, total:

$$\mathcal{W} = k\left\{\begin{array}{l}\dfrac{m_1m_2}{r_{1,2}} + \dfrac{m_1m_3}{r_{1,3}} + \dfrac{m_1m_4}{r_{1,4}} + \ldots\ldots + \dfrac{m_1m_n}{r_{1,n}} + \\ + \dfrac{m_2m_3}{r_{2,3}} + \dfrac{m_2m_4}{r_{2,4}} + \ldots\ldots + \dfrac{m_2m_n}{r_{2,n}} + \\ + \ldots\ldots + \dfrac{m_{n-1}m_n}{r_{(n-1),n}}\end{array}\right\}. \qquad [3]$$

Abreviadamente, escribiremos:

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2}\,k\sum\sum\frac{m_sm_t}{r_{s,t}} \qquad \begin{matrix}s=1,2,\ldots n\\ t=1,2,\ldots n\end{matrix}\quad t\neq s. \qquad [4]$$

La $\Sigma\,\Sigma$ se extiende a todos los pares posibles de valores de los índices, y, por tanto, cada término de la [3] entra dos veces: $\frac{m_sm_t}{r_{s,t}}$ y $\frac{m_tm_s}{r_{t,s}}$; he aquí el porqué del coeficiente $\frac{1}{2}$.

Pero:

$$k\cdot\sum_s\frac{m_s}{r_{s,t}} = \mathcal{V}_t,\ (t+s)$$

es el potencial $\mathcal{V}_t$ en el punto ocupado por la masa m_t en virtud de las otras masas del campo. Por tanto, la [4] se escribe también:

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2}\sum_t m_t\mathcal{V}_t. \qquad (t=1,2,3,\ldots n) \qquad [5]$$

Las [4] y [5] dan la *energía mutua* (potencial) entre las masas $m_1, m_2, \ldots m_n$ presentes en el campo, y expresan el trabajo que puede obtenerse del campo cuando las n masas se alejan indefinidamente unas de otras.

Pero si imaginamos que tales masas se desmenuzan en partes dm_1, dm_2 ..... infinitesimales, y que se apartan luego indefinidamente unas de otras: se destruye el campo en todas partes; los campos pequeñísimos que cabe todavía imaginar en torno a cada una de las masas elementales dm, poseen aún energía, pero su total es despreciable. La [4] se convierte en:

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2}\,k\cdot\iint_{v_1\,v_2}\frac{dm_1\,dm_2}{r_{1,2}} = \frac{1}{2}\int_v\mathcal{V}\cdot dm = \frac{1}{2}\int_v\mathcal{V}\cdot\mu\cdot dv; \qquad [6]$$

en donde $\mu = \frac{dm}{dv}$ es la masa específica; $v = v_1 = v_2$ es el volumen ocupado por las masas del campo o (lo que es lo mismo y más cómodo) el volumen de todo el campo; $r_{1,2}$ es la distancia entre las masas elementales dm_1 y dm_2 engendradoras del campo.

La [6] expresa el trabajo total que puede obtenerse al destruir el campo y se llama *energía (potencial) del campo.*

Se tienen, pues, tres conceptos afines, pero distintos:

1.º La *energía potencial* (§ 90) de una masa m introducida en un punto del campo en donde el potencial preexistente es $\mathcal{V}$. Debe

suponerse que dicha introducción no perturba dicho potencial, es decir, no modifica el campo preexistente, aunque, como ya se ha dicho (§ 79), por regla general, no nos encontramos en este caso (por ejemplo, tratándose de campos eléctricos y magnéticos). Esta energía potencial de m se llama *externa*, porque se debe a un campo sobre el cual m no influye y con el cual m no colabora.

2.º La *energía mutua* entre n masas, dada por las expresiones [4] y [5], sometida cada una de ellas al campo preexistente de las n — 1 masas restantes, en el supuesto de que tal campo no es perturbado por la introducción de la masa n — ésima.

3.º La *energía del campo* [6]. La consideración de esta energía es, desde el punto de vista físico, mucho más satisfactoria, y no sólo porque no experimenta las perturbaciones que se mencionan en los dos casos anteriores. En oposición a la energía definida en el párrafo 1.º, las energías de los párrafos 2.º y 3.º se llaman *energías potenciales internas*.

La importancia substancial de la energía del campo consiste en que, al modificarse la configuración del mismo, esto es, al variar la posición mutua de las partículas que engendran al campo (cuerpos que pueden ser deformables, flúidos, masas que cambian de posición respecto a la Tierra, variaciones en la posición respectiva de dos conductores electrizados o de dos imanes, etc.), varía la energía del campo; por ejemplo, pasando de $\mathcal{W}_1$ a $\mathcal{W}_2$. La disminución $\mathcal{W}_1 - \mathcal{W}_2$ de esta energía, que es energía de posición, equivale al trabajo que puede obtenerse del campo modificando su configuración. Por consiguiente, han de existir fuerzas mutuas entre los varios cuerpos que se hallan presentes en el campo, que son los que dan origen a dicho trabajo.

Estas fuerzas, en último análisis, son las fuerzas newtonianas o culombianas, aunque se presentan ahora como sistemas de fuerzas que actúan sobre cada cuerpo situado en el campo, a consecuencia de las masas materiales, eléctricas o magnéticas que tales cuerpos poseen. Estos sistemas de fuerzas constituyen las llamadas *fuerzas ponderomotrices* a las cuales está sometido todo cuerpo. Son fuerzas ponderomotrices el peso de un cuerpo, las acciones atractivas o repulsivas entre cuerpos electrizados o entre imanes. Véanse también los §§ 170, 173, y el tomo II.

B. — ESTÁTICA DEL PUNTO

§ 100. Punto libre. ¿En qué condiciones un punto, con libertad de moverse en todas las direcciones, se halla en equilibrio bajo la acción simultánea de n fuerzas $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \ldots, \vec{F}_n$?

Se experimenta con cuerpos pequeñísimos (puntos materiales) cuyas dimensiones geométricas y cuyo peso pueden suponerse despreciables. Un punto material, con libertad de movimiento e inicialmente en reposo, no puede estar en equilibrio por la acción de una sola fuerza (§ 77 *a*], *b*]).

a] **Dos fuerzas aplicadas.** Se aplican al pequeño cuerpo A (figura 173) las dos fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ mediante hilos, poleas y pesos. Únicamente se encuentra A en equilibrio cuando los dos pedazos de hilo AC_1 y AC_2 están en línea recta y se tiene $P_1 = P_2$. En la figura 173 *a*), el punto A no está en equilibrio; sí lo está en la figura 173 *b*).

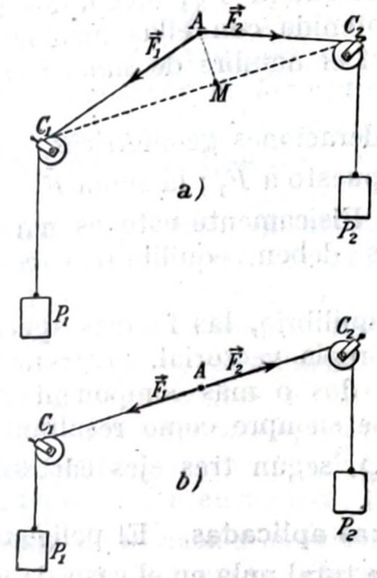


Fig. 173

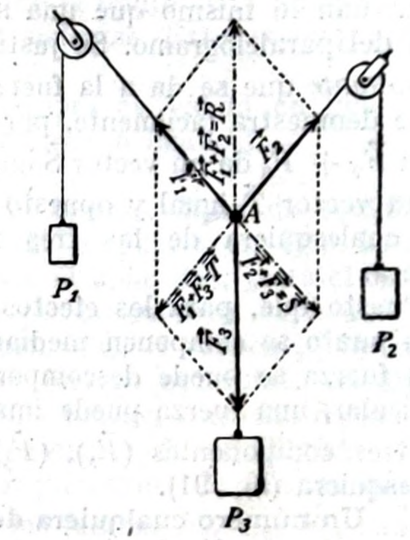


Fig. 174

Dos fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ se equilibran cuando son iguales y opuestas. En tal caso, A estará efectivamente en reposo únicamente si lo estaba en un principio.

Cualquier posición de A sobre la recta $C_1\ C_2$ es posición de equilibrio, y si A recibe un empujón en la dirección $C_1\ C_2$, sigue después por inercia con movimiento rectilíneo uniforme. Pero debido a las resistencias inevitables de la polea y del medio, el movimiento de A no resulta uniforme, sino retardado.

b] **Tres fuerzas aplicadas.** En el punto A (fig. 174) están aplicadas tres fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$; las dos primeras están materializadas mediante hilos, poleas y pesos, P_1 y P_2; y la tercera, mediante el peso P_3 aplicado directamente al hilo AP_3. Sencillamente, A es un nudo hecho con los tres hilos que sirven para la aplicación de las fuerzas. El sistema, abandonado a sí mismo, oscila, tomando una con-

figuración de equilibrio estable, contenida en el plano vertical que pasa por las dos poleas. Los hilos dan las direcciones de las tres fuerzas aplicadas en A; los pesos P_1, P_2 y P_3 dan los módulos de estas fuerzas. Se comprueba gráficamente que, en la configuración de equilibrio, la diagonal $\vec{R}$ del paralelogramo construído sobre $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ es igual y opuesta a $\vec{F}_3$. Éste es el experimento clásico del *paralelogramo de las fuerzas*.

Una fuerza representada gráficamente por $\vec{R}$, igual y opuesta a $\vec{F}_3$, se equilibra con esta última en el caso anterior; también F_1 y $\vec{F}_2$, actuando simultáneamente, equilibran a $\vec{F}_3$; luego, dos fuerzas actúan lo mismo que una sola obtenida con ellas mediante la regla del paralelogramo. Se justifica así el nombre de *suma vectorial* o *resultante* que se da a la fuerza $\vec{R}$.

Se demuestra fácilmente, por consideraciones geométricas, que la suma $\vec{F}_2 + \vec{F}_3$ da un vector $\vec{S}$ igual y opuesto a $\vec{F}_1$; la suma $\vec{F}_3 + \vec{F}_1$ da un vector $\vec{T}$ igual y opuesto a $\vec{F}_2$. Físicamente esto es natural: dos cualesquiera de las tres fuerzas deben equilibrarse con la tercera.

Puesto que, para los efectos del equilibrio, las fuerzas aplicadas a un punto se componen mediante la regla vectorial, inversamente, cada fuerza se puede descomponer en dos o más componentes. En particular, una fuerza puede imaginarse siempre como resultante de sus tres componentes $(\vec{F}_x)$, $(\vec{F}_y)$ y $(\vec{F}_z)$, según tres ejes cartesianos cualesquiera (fig. 91).

c] **Un número cualquiera de fuerzas aplicadas.** El polígono de las tres fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ da resultante total nula en el caso de equilibrio. También es nula en el caso *a*] la resultante de las dos fuerzas aplicadas.

Esto es siempre válido: aplicando sucesivamente la regla del paralelogramo, se deduce que n fuerzas aplicadas en un punto producen el mismo efecto que su resultante, obtenida según la regla del polígono de las fuerzas.

Para que exista equilibrio, esta resultante debe ser nula; es decir, la línea poligonal que forman las fuerzas ha de resultar *cerrada*:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots\ldots + \vec{F}_n = 0. \qquad [1]$$

Obsérvese que, cuando hay más de tres fuerzas, no es necesario que estén todas en un plano para que haya equilibrio; la línea poligonal de las fuerzas puede no ser plana, aunque sea cerrada.

La condición [1] necesaria y suficiente para que haya equilibrio

de *n fuerzas aplicadas en un punto*, puede escribirse en componentes, según (§ 50, [3]); así:

$$\left.\begin{aligned} F_{1x} + F_{2x} + \ldots\ldots + F_{nx} = 0 \\ F_{1y} + F_{2y} + \ldots\ldots + F_{ny} = 0 \\ F_{1z} + F_{2z} + \ldots\ldots + F_{nz} = 0 \end{aligned}\right\}. \qquad [2]$$

Si en un punto están aplicados dos sistemas de fuerzas, cada uno de los cuales está en equilibrio, es decir, si son nulas las resultantes $\vec{R}_1$ y $\vec{R}_2$ de cada uno de estos sistemas, será también nula la resultante total $\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2$, es decir, que el punto está en equilibrio bajo la acción simultánea de los dos sistemas. Éste es el principio de la *superposición de los equilibrios*.

Veremos en seguida que este principio es válido en cualquier clase de equilibrio (puntos o cuerpos, libres o ligados).

§ 101. **Equilibrio en un campo de fuerzas. Tipos de equilibrio.** Raramente se presenta el problema del equilibrio en esta forma: Dado el punto A y dadas las fuerzas a él aplicadas, ¿está el cuerpo en equilibrio? Se presenta más bien de la manera siguiente: El punto A puede ocupar infinitas posiciones en el espacio; para cada una de ellas se conoce el sistema de fuerzas aplicadas, es decir, cada una de las fuerzas aplicadas es una función conocida de las posiciones ocupadas por A. ¿Existen posiciones de equilibrio?

El punto A se encuentra, pues, en un campo de fuerzas que es resultante de la acción simultánea de las fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, ... $\vec{F}_n$ de n campos de fuerzas determinados.

Conocidos los campos de fuerzas aplicados, es conocida su resultante en todos los puntos del campo. Las posiciones de equilibrio del punto A son aquellas en las cuales la fuerza del campo resultante $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots\ldots + \vec{F}_n$ es nula.

Se puede, además, establecer si el equilibrio es *estable*, *inestable* o *indiferente*.

El equilibrio es *estable* cuando al separar el punto A de la posición de equilibrio tiende a volver a ella por efecto de las fuerzas del campo. Luego, las líneas de fuerza *del vector* $\vec{F}$, no de la intensidad del campo $\vec{H}$, la cual, para masas negativas, puede tener un sentido opuesto al de $\vec{F}$ (véase § 80), deben concurrir en el punto que es posición de equilibrio. Si las líneas de fuerza divergen desde este punto, el equilibrio es *inestable*, y al separar el punto A de su posición de equilibrio, no vuelve a ella por la acción de las fuerzas del campo.

Se ha visto que los campos de fuerzas de que dispone la Física admiten generalmente potencial, el cual disminuye a lo largo de las

líneas de fuerza en el sentido de éstas. Se sigue de aquí que la energía potencial $\mathcal{W}$ (§ 99, 1º), tanto para masas m positivas como para masas m negativas, disminuye a lo largo de las líneas de fuerza *del vector* $\vec{F}$. Luego, las posiciones de equilibrio estable coinciden con los puntos en que es mínimo $\mathcal{W}$, y las posiciones de equilibrio inestable coinciden con los puntos en que $\mathcal{W}$ es máximo.

El campo de fuerzas puede presentar una línea o una superficie S, lugar de los puntos en donde es nula la fuerza del campo.

Si existe potencial, dicha superficie (o dicha línea) es equipotencial, pues, de otro modo, una por lo menos de las [6], § 89, no sería nula, y tampoco lo serían $\vec{H}$ ni $\vec{F}$. La energía potencial $\mathcal{W}$ es constante en todos los puntos de S.

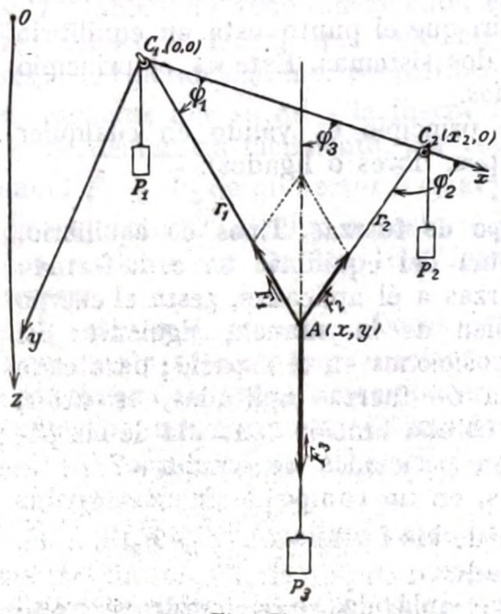


Fig. 175

Todos los puntos de S son posiciones de equilibrio. El punto A, trasladado a lo largo de esta superficie (o línea), se encuentra en equilibrio *indiferente*. Pero para corrimientos transversales respecto a dicha superficie, el equilibrio no es, en general, indiferente. Puede darse el caso, por ejemplo, de que el punto A sea devuelto a S por las fuerzas del campo; el equilibrio de A respecto a los corrimientos transversales será *estable;* las líneas de fuerza son normales a S y dirigidas hacia S, tanto en un lado de esta superficie como en el otro.

Se tiene un ejemplo de equilibrio estable en un punto en el dispositivo de la figura 174. Se separa A de la posición de equilibrio, y después se deja en libertad. El punto A, después de algunas oscilaciones amortiguadas por las resistencias, toma de nuevo la posición de equilibrio. El equilibrio es estable. Para mayor sencillez, limitémonos a consideraciones en el plano vertical (x, y, z) (fig. 175), que pasa por C_1 y C_2. Existen tres campos:

1.º Campo de la fuerza $\vec{F}_1$, central, atractivo, con centro en C_1, de módulo constante $|F_1| = P_1$ y energía potencial $\mathcal{W}_1 = P_1 \cdot r_1$.

2.º Campo de la fuerza $\vec{F}_2$, central, atractivo, con centro en C_2, de módulo constante $|F_2| = P_2$ y energía potencial $\mathcal{W}_2 = P_2 \cdot r_2$.

3.º Campo de la fuerza $\vec{F}_3$, uniforme, de energía potencial $\mathcal{W}_3 = -P_3 \cdot z$.

La energía potencial para el campo resultante es:

$$\mathcal{W} = P_1 \cdot r_1 + P_2 \cdot r_2 - P_3 \cdot z. \qquad [1]$$

La condición necesaria (y, en este caso, también suficiente) para que $\mathcal{W}$ tenga un mínimo, es que para cualquier corrimiento $(dr_1, dr_2; dz)$ se tenga:

$$P_1 \cdot dr_1 + P_2 \cdot dr_2 - P_3 \cdot dz = 0, \qquad [2]$$

donde únicamente son independientes entre sí dos de las tres diferenciales.

Conviene introducir los ejes xy indicados en la figura. Sean F_{1x}, F_{1y}; F_{2x}, F_{2y}; F_{3x}, F_{3y} las componentes de las tres fuerzas; se tiene, en valor y signo:

$$\left.\begin{aligned} F_{1x} &= -P_1 \cdot \cos\varphi_1, & F_{1y} &= -P_1 \cdot \operatorname{sen}\varphi_1 \\ F_{2x} &= -P_2 \cdot \cos\varphi_2, & F_{2y} &= -P_2 \cdot \operatorname{sen}\varphi_2 \\ F_{3x} &= P_3 \cdot \cos\varphi_3, & F_{3y} &= P_3 \cdot \operatorname{sen}\varphi_3 \end{aligned}\right\}; \qquad [3]$$

donde P_1, P_2, P_3 son valores absolutos, y φ_3 es constante, porque $\vec{F}_3$ tiene dirección constante.

Si x, y son las coordenadas del punto A al que están aplicadas las tres fuerzas, se tiene:

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2}; \qquad r_2 = \sqrt{(x - x_2)^2 + y^2};$$

y, por tanto, diferenciando:

$$dr_1 = \frac{x}{r_1}dx + \frac{y}{r_1}dy = \cos\varphi_1 \cdot dx + \operatorname{sen}\varphi_1 \cdot dy;$$

$$dr_2 = \frac{x - x_2}{r_2}dx + \frac{y}{r_2}dy = \cos\varphi_2 \cdot dx + \operatorname{sen}\varphi_2 \cdot dy,$$

Además, es:

$$dz = \cos\varphi_3 \cdot dx + \operatorname{sen}\varphi_3 \cdot dy.$$

La [2] se convierte, pues, en:

$$(P_1 \cdot \cos\varphi_1 + P_2 \cdot \cos\varphi_2 - P_3 \cdot \cos\varphi_3)\,dx + (P_1 \cdot \operatorname{sen}\varphi_1 + P_2 \cdot \operatorname{sen}\varphi_2 - P_3 \cdot \operatorname{sen}\varphi_3)\,dy = 0,$$

y debe ser satisfecha para cualquier par de corrimientos infinitesi-

males dx, dy de A, completamente arbitrarios. Esto sucede cuando

$$\left.\begin{aligned} P_1\cdot\cos\varphi_1+P_2\cdot\cos\varphi_2-P_3\cdot\cos\varphi_3=0, \text{ o sea }, \; F_{1x}+F_{2x}+F_{3x}=0 \\ P_1\cdot\operatorname{sen}\varphi_1+P_2\cdot\operatorname{sen}\varphi_2-P_3\cdot\operatorname{sen}\varphi_3=0, \text{ o sea, } \; F_{1y}+F_{2y}+F_{3y}=0 \end{aligned}\right\}. \quad [4]$$

La condición [2] de mínimo de la energía potencial queda satisfecha en cualquier punto A (x, y) donde la resultante [4] de las tres fuerzas es nula; esto es, allí donde existe equilibrio por la regla del paralelogramo de las fuerzas.

El dispositivo de la figura 173 nos ofrece un ejemplo de equilibrio estable con una línea de equilibrio indiferente.

Se tienen los dos campos de fuerzas centrales $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ con centros en C_1 y C_2, respectivamente, y energías potenciales $P_1\, r_1$ y $P_2\, r_2$.

La energía potencial resultante es:

$$\mathcal{U} = P_1\, r_1 + P_2\, r_2; \qquad P_1 > 0\,;\; P_2 > 0. \quad [5]$$

En los puntos de mínimo tiene que ser:

$$P_1\, dr_1 + P_2\, dr_2 = 0. \quad [6]$$

Si existe un mínimo, no puede estar más que sobre el segmento $C_1\ C_2$. En efecto, si A [fig. 173, a)] queda fuera de este segmento, llevando A hacia su proyección M, disminuyen r_1 y r_2; la [6] no puede quedar satisfecha, porque en dicho punto tienen el mismo signo dr_1 y dr_2.

Por otra parte, se comprende ya por la [5] que $\mathcal{U}$ disminuye al trasladarse el punto desde A hacia M.

Si A se encuentra en la recta $C_1\ C_2$, fuera del segmento $C_1\ C_2$, al aproximar A a C_1 (y, por tanto, a C_2) se produce una disminución de r_1 y r_2; la [6] no puede quedar satisfecha, y se ve por la [5] que $\mathcal{U}$ disminuye al aproximarse A al segmento $C_1\ C_2$.

Por lo tanto, el valor mínimo de $\mathcal{U}$ se encuentra sobre el segmento $C_1\ C_2$. Pero para su corrimiento de A a lo largo del segmento $C_1\ C_2$ se tiene $dr_1 = -\,dr_2$.

Para que sea satisfecha la [6] ha de ser $P_1 = P_2$, y en tal caso será satisfecha la [6] (para corrimientos a lo largo de $C_1\ C_2$) en cualquier punto de $C_1\ C_2$.

El equilibrio de A a lo largo de C_1C_2 es *indiferente*. De acuerdo con esto, en los puntos del segmento C_1C_2, es $\mathcal{U} = P_1\cdot(r_1 + r_2) = \text{const}$.

En la figura 176 se da un ejemplo de equilibrio estable con una superficie de equilibrio indiferente. L es un recipiente lleno de agua y A es el centro de una esferita de madera de álamo que pesa 1000 di-

nas = 0,01 newton (≈ 1 g$_p$). Siendo el peso específico del álamo $0{,}005\ \frac{\text{newton}}{\text{cm}^3}$, esta bolita tendrá un volumen de 2 cm^3. La esferita se encuentra en un campo de fuerzas. Cuando la esferita se halla en el aire, la fuerza que actúa sobre ella es su peso (0,01 newton), el campo es uniforme, las líneas de fuerza son verticales, dirigidas hacia abajo, y la fuerza del campo = 0,01 newton. Si la esferita se halla sumergida en el líquido, la fuerza que sobre ella actúa es el peso (0,01 newton) menos el empuje de ARQUÍMEDES (0,02 newton); es decir, el campo es uniforme, las líneas de fuerza son verticales dirigidas hacia arriba y la fuerza del campo = — 0,01 newton. La fuerza del campo va pasando desde + 0,01 a — 0,01 newton en los puntos A_2, A_3, A_4, que corresponden a una inmersión parcial de la esferita. Si A se encuentra en la superficie del líquido, el campo es nulo y la energía potencial es mínima. La esferita se sumerge sólo por mitad, y se encuentra en equilibrio indiferente con respecto a los corrimientos horizontales de A, y en equilibrio estable para los corrimientos no horizontales.

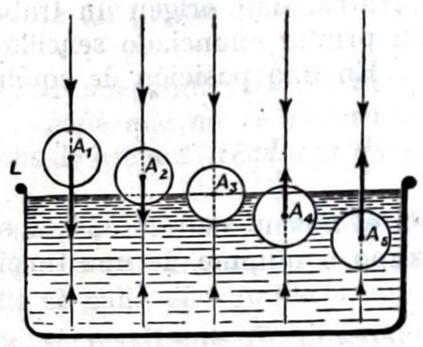


Fig. 176

Si las fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ..., $\vec{F}_n$ aplicadas al punto A constituyen otros campos de fuerzas uniformes y se verifica en un punto A la condición de equilibrio $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots\ldots \vec{F}_n = 0$, se verificará en todas partes: si se tiene equilibrio, sólo puede ser indiferente.

También se puede expresar de otro modo la condición de equilibrio en un campo de fuerzas: Cuando en A actúa una resultante $\vec{R}$, no nula, de las fuerzas aplicadas, un corrimiento $d\vec{l}$ del punto A supone un trabajo:

$$d\mathcal{L} = |R|\cdot|dl|\cdot\cos\varphi.$$

El punto está libre, pudiéndose mover en todas direcciones; $d\mathcal{L}$ es un infinitésimo del mismo orden que dl, porque $\cos\varphi$, en general, no es nulo; sería nulo o infinitesimal sólo cuando $d\vec{l}$ fuese perpendicular a $\vec{R}$.

Si el punto se encuentra en una posición de equilibrio A, es nula $\vec{R}$, y durante el corrimiento $d\vec{l}$ la fuerza $\vec{R}$ es infinitésima como $d\vec{l}$, por cuanto se supone función regular del punto del campo.

Luego, $d\mathcal{L}$, producto de dos infinitésimos, es infinitésimo de orden superior al primero, y despreciable respecto a dl (y a R).

Para cualquier corrimiento infinitesimal de la posición de equilibrio, es nulo el trabajo de las fuerzas aplicadas, salvo un infinitésimo de orden superior.

Si el equilibrio es estable, el trabajo, infinitésimo de orden superior, es negativo; es decir, las fuerzas del campo obstaculizan el movimiento (débilmente, porque tienden a cero con $d\vec{l}$). Si el equilibrio es inestable, este trabajo es positivo; si, para movimientos especiales, el equilibrio es indiferente, los corrimientos $d\vec{l}$, según estos movimientos, dan origen un trabajo exactamente nulo. Constituye esto un primer enunciado sencillo del *principio de los trabajos virtuales.*

En una posición de equilibrio se tiene, pues:

$$d\mathcal{L} = 0, \qquad [7]$$

en el mismo sentido en que se dice que en un punto $x = x_0$ de máximo o mínimo de una función $y = y(x)$ es:

$$(dy)_{x_0} = 0.$$

Si el campo resultante $\vec{R}$ admite potencial, y es regular, las condiciones de equilibrio estable, inestable o indiferente son las de mínimo, máximo o constancia de la energía potencial $\mathcal{W}$. Esto es, la condición de equilibrio puede escribirse:

$$d\mathcal{W} = -d\mathcal{L} = 0. \qquad [8]$$

La energía potencial $\mathcal{W}$ considerada en los ejemplos anteriores es la externa (§ 99, 1º); pero recordando el significado de las variaciones de la energía potencial interna, en particular de la energía del campo (§ 99, 3º), se entiende que la condición precedente relativa a $\mathcal{W}$ es también válida si por $\mathcal{W}$ se entiende la energía potencial interna.

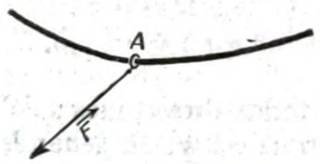


Fig. 177

§ 102. Punto ligado. Ligadura. Un pequeño anillo A (figura 177), pasado por una varilla l, sólo puede moverse corriendo a lo largo de la varilla (no interesa la rotación del anillo sobre sí mismo).

Se tiene el ejemplo de *punto ligado* a *una línea.* Esta línea es trayectoria de todos los movimientos posibles del punto.

Una esferita colocada entre dos planos paralelos Π_1, Π_2 (fig. 178), cuya distancia es igual al diámetro de la esfera, ofrece un ejemplo de *punto ligado a una superficie.*

Una esferita M apoyada sobre una mesa proporciona el ejemplo de un punto ligado a permanecer a un mismo lado (semiespacio) del plano representado por la mesa. La esferita P de un péndulo simple suspendido en el punto C proporciona un ejemplo de punto ligado a permanecer en una esfera de centro C y radio CP igual a la longitud del péndulo.

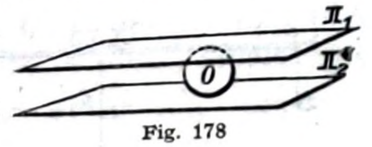


Fig. 178

En general, cualquier artificio capaz de imponer una limitación al movimiento de un cuerpo se llama *ligadura.*

Se piden las condiciones de equilibrio de un punto ligado al que se han aplicado n fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ..., $\vec{F}_n$.

Se admitirá siempre que las ligaduras son independientes del tiempo: la varilla l y los planos Π_1, Π_2 se supone que no se deforman ni se mueven con el tiempo. Además, consideraremos *ligaduras lisas,* esto es, sin rozamientos.

a] **Punto ligado a una línea.** Enseña la experiencia que el anillo A se encuentra en equilibrio bajo la acción de una fuerza $\vec{F}$ cuando ésta es normal en A a la línea l; el anillo se halla en equilibrio bajo la acción de dos fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ cuando su resultante $\vec{F}$, obtenida mediante la regla del paralelogramo, es normal en A a la línea l.

Esto prueba que la regla del paralelogramo también es válida para los cuerpos ligados.

Entonces se deduce que n fuerzas aplicadas al anillo se equilibran si su resultante (obtenida con la regla del polígono) es normal a l en el punto A.

La comprobación experimental es tanto más precisa cuanto mejor deslice el anillo sobre l; dicho de otro modo: es necesario tener en cuenta, además de las fuerzas aplicadas, la acción del rozamiento.

La resultante $\vec{F}$ puede tener cualquier valor, entre ciertos límites; en particular, puede ser nula (en este caso, el equilibrio subsistiría aunque no existiese la ligadura); pero si $\vec{F}$ es demasiado grande, o bien se rompe el anillo, o se deforma o rompe la varilla l. En realidad, *toda ligadura es válida hasta cierto límite.*

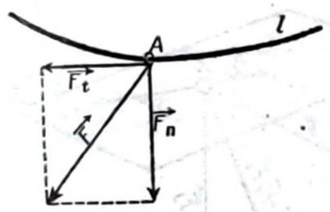


Fig. 179

Si $\vec{F}$ no es normal a l (fig. 179), tiene una componente $\vec{F}_t$ tangente en A a la trayectoria; el anillo se mueve entonces a lo largo de l en el sentido dado por $\vec{F}_t$. La única parte de $\vec{F}$ capaz de producir el movimiento es la fuerza componente $\vec{F}_t$.

b] **Plano inclinado.** El *plano inclinado* destinado a este experimento (fig. 180) está constituído por dos robustos carriles que pueden girar alrededor de un eje horizontal colocado en O normal al plano

de la figura que se supone vertical; de este modo la inclinación α del plano inclinado es variable y conocida. Sobre los carriles puede moverse sin rozamiento apreciable un carrito A, al cual queda aplicado su propio peso $\vec{P}$, que puede variarse mediante la adición de pesas Z, en forma de discos. Además, puede aplicarse también otra fuerza $\vec{F}$, como en la figura 180, *b*) y *c*). En todos los casos *se alcanza el equilibrio cuando la resultante* $\vec{R}$ *de las fuerzas aplicadas es normal al plano inclinado.*

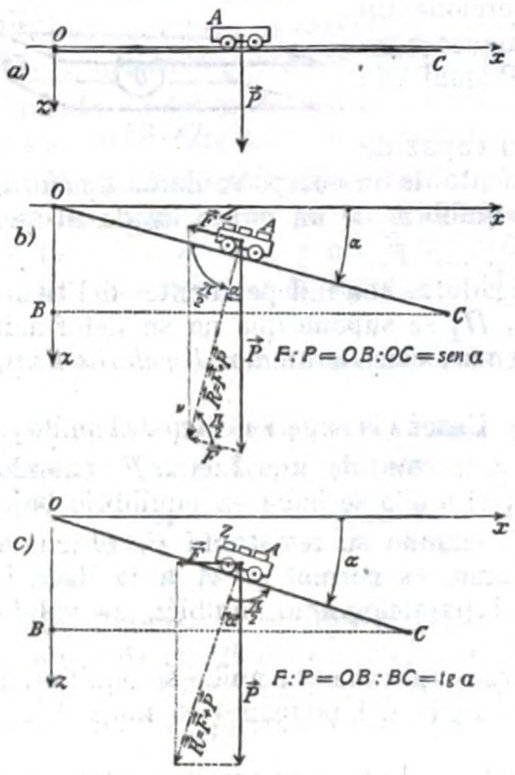


Fig. 180

Esta resultante debe estar dirigida desde el punto A hacia el plano, pues de otro modo el punto A se separaría de dicho plano; la ligadura de adherencia a los carriles OC obtenida mediante el plano indicado es unilateral, esto es, ejerce su acción en un solo sentido.

c] **Punto ligado a una superficie.** El anterior plano inclinado debería llamarse más apropiadamente «recta inclinada» y debería considerarse como un ejemplo particular del caso *a*].

En la figura 181 se tiene un plano inclinado efectivo, sobre el cual se imagina una esfera A sometida a varias fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ..., entre las cuales se incluye su peso.

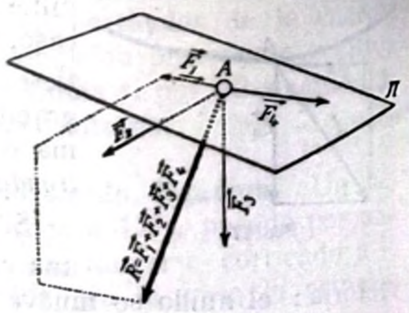


Fig. 181

Cuando se reducen suficientemente las resistencias, demuestra la experiencia que el equilibrio se obtiene cuando la resultante $\vec{R}$ de las fuerzas aplicadas es normal al plano.

En general, *hay equilibrio cuando la resultante de las fuerzas aplicadas es normal a la superficie de la ligadura en el sitio ocupado por el punto que se estudia.*

Si no es normal a la superficie, la resultante $\vec{R}$ tiene una componente $\vec{R}_t$ paralela al plano tangente en A a la superficie; la experiencia demuestra que entonces A se mueve sobre la superficie en el sentido dado por $\vec{R}_t$. La única parte de $\vec{R}$ capaz de producir el movimiento es $\vec{R}_t$.

El experimento de la figura 181 no es fácil; mucho más fácil es el siguiente *(péndulo simple)*. La bolita A del péndulo está sujeta a su peso $\vec{P}$ [fig. 182, *a*)].

Demuestra la experiencia que el péndulo A se halla en equilibrio cuando la recta de aplicación de $\vec{P}$ (*vertical* trazada por A) pasa por O, y la orientación de $\vec{P}$ va desde O hacia A.

Si hay varias fuerzas aplicadas [figura 182, *b*], la resultante $\vec{R}$ debe ser paralela a OA; es decir, OA tiene que ser la recta de aplicación de $\vec{R}$ y ésta debe estar dirigida de O hacia A.

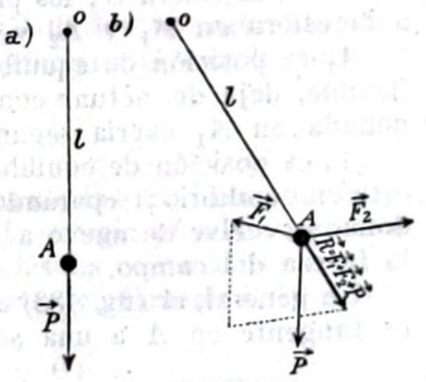


Fig. 182

Si $\vec{R}$ se dirigiese desde A hacia O, la bolita A subiría acercándose al centro O.

La ligadura es unilateral, puesto que el hilo l impide que A se aleje de O, pero no impide que se aproxime.

§ 103. Punto ligado en un campo de fuerzas. Fijémonos en el caso más frecuente: el de un punto A ligado a una superficie S (figura 183).

Si el campo de la fuerza aplicada $\vec{F}$, o resultante de las varias fuerzas aplicadas, admite potencial, el punto A tendrá una energía de posición $\mathcal{U}$ (§ 99, 1°), función de la posición ocupada.

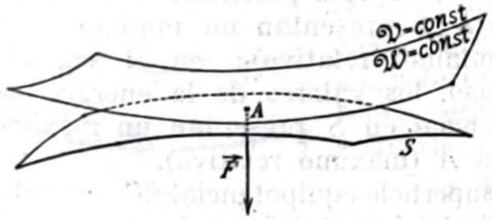


Fig. 183

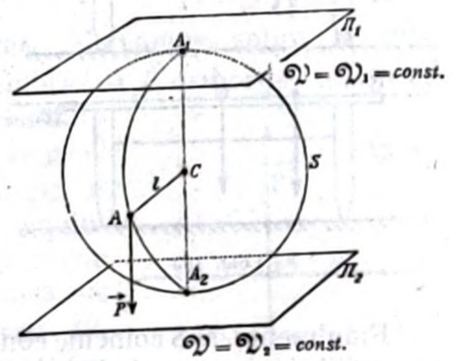


Fig. 184

Si el punto A representa una posición de equilibrio, la fuerza $\vec{F}$ es normal a S en A. Pero $\vec{F}$ también es normal a la superficie equipotencial (§ 89); luego, las posiciones de equilibrio de A sobre S son

aquellas en que S es tangente a una superficie equipotencial.

Así, por ejemplo, para un péndulo A (fig. 184), bajo la acción de la fuerza peso, la superficie S es la esfera de centro C y radio CA, y las superficies equipotenciales del campo son planos horizontales. A_1 y A_2 son las posiciones de equilibrio, intersecciones de la vertical en C con la esfera S; los planos horizontales Π_1, Π_2 son tangentes a la esfera en A_1 y A_2 y son superficies equipotenciales.

A_1 es posición de equilibrio *inestable*, y si el hilo del péndulo es flexible, deja de actuar como ligadura, la bolita del péndulo abandonada en A_1 caería según la vertical.

A_2 es posición de equilibrio *estable*, y la bolita A colocada en A_2 está en equilibrio; separándola de A_2 corre sobre la esfera S, y abandonada, vuelve de nuevo a A_2 bajo la acción de una componente de la fuerza del campo.

En general, A (fig. 183) es posición de equilibrio *estable* cuando S es tangente en A a una superficie equipotencial ($\mathcal{V} = \text{const.}$; por tanto, $\mathcal{W} = \text{const.}$), y S se halla toda ella en el lado de la superficie $\mathcal{W} = \text{const.}$ ocupado por las superficies equipotenciales correspondientes a una energía potencial *mayor* que $\mathcal{W}$. El equilibrio es inestable si S se extiende por completo en el lado de la superficie $\mathcal{W} = \text{const.}$ ocupada por superficies equipotenciales correspondientes a una energía potencial menor que $\mathcal{W}$; éste es el caso de la figura.

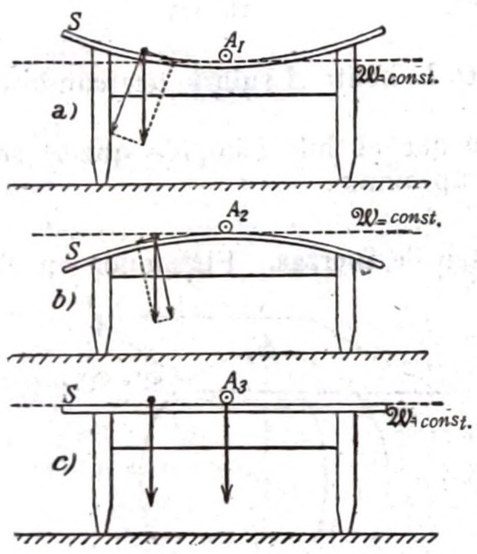


Fig. 185

En el primer caso, los valores de la energía potencial *en la superficie* S presentan un mínimo en A (mínimo relativo); en el segundo caso, los valores de la energía potencial en S presentan un máximo en A (máximo relativo).

Finalmente, si S coincide con la superficie equipotencial $\mathcal{W} = \text{const.}$, el equilibrio de A es *indiferente*, y todas las posiciones de A en S son posiciones de equilibrio.

Así, si una esferita A (fig. 185) está sólo sujeta a la fuerza peso y se apoya sobre una tabla S, se tiene una posición de equilibrio estable A_1, si S es cóncava; una posición A_2 de equilibrio inestable, si S es convexa; el equilibrio es indiferente cuando S es plana y horizontal.

Lo mismo que para el punto libre, puede expresarse la condición de equilibrio del punto ligado mediante el *principio de los trabajos*

virtuales. En una posición de equilibrio, la fuerza componente $\vec{F}_t$ (figura 179), tangente al vínculo, es nula. Pero para un *corrimiento infinitesimal compatible con la ligadura (corrimiento virtual)*, $\vec{F}_t$ es la única componente de las fuerzas aplicadas $\vec{F}$ que da un trabajo no nulo.

Luego, en el equilibrio, el trabajo $d\mathcal{L}$ de las fuerzas aplicadas, para cualquier corrimiento infinitesimal compatible con las ligaduras, debe ser nulo:

$$d\mathcal{L} = 0. \qquad [1]$$

Si las fuerzas aplicadas admiten potencial, las posiciones de equilibrio coinciden con los puntos en donde la energía presenta un valor máximo o mínimo relativo, respecto a todos los corrimientos compatibles con las ligaduras. Luego, para estos corrimientos debe ser:

$$d\mathcal{V} = 0; \qquad d\mathcal{W} = 0;$$

por tanto, se tiene:

$$d\mathcal{L} = -d\mathcal{W} = 0. \qquad [2]$$

Se vuelve a encontrar la [8] del § 101; y, como en aquel caso, la condición de equilibrio relativa a $\mathcal{W}$ vale incluso cuando por $\mathcal{W}$ se entiende la energía potencial interna (§ 99, 2.º, 3.º). Las consideraciones que acabamos de hacer son también válidas para los puntos ligados, *pero se aplican únicamente a los corrimientos virtuales.*

§ **104. Reacciones de las ligaduras.** Volvamos sobre el dispositivo de la figura 177. Se logra equilibrio si $\vec{F}$ es normal a l en el punto A. Si el anillo A fuese libre, bajo el efecto de la fuerza $\vec{F}$ no estaría en equilibrio; sería necesario aplicarle, además de $\vec{F}$, otra fuerza $\vec{F}'$, igual y opuesta. Atribuyamos el mismo efecto a la misma causa, y establezcamos que la ligadura (varilla l) es capaz de aplicar la fuerza $\vec{F}'$ necesaria para establecer el equilibrio: $\vec{F}'$ es la *reacción de la ligadura.*

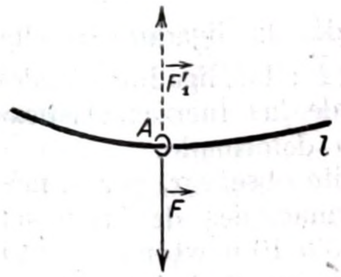


Fig. 186

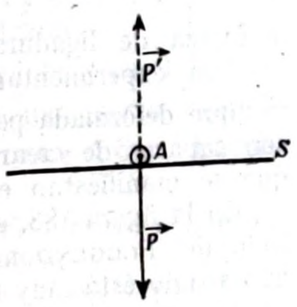


Fig. 187

Una ligadura no es capaz de crear fuerzas de reacción cualesquiera; por ejemplo, en un punto móvil *sin rozamiento* a lo largo de la línea l (fig. 186), la ligadura sólo es capaz de producir reacciones *perpen-*

diculares a la línea l; para corrimientos a lo largo de la ligadura *(corrimientos virtuales)*, estas reacciones producen un trabajo nulo.

Análogamente, una esferita (fig. 187), a la que está aplicada la fuerza $\vec{P}$, está en equilibrio sobre una superficie S (por ejemplo, plana) si $\vec{P}$ es normal a S en el punto A. Se obtendría el equilibrio del punto libre si, además de $\vec{P}$, estuviese también aplicada en A la fuerza $\vec{P}'$, igual y opuesta; el plano S crea la fuerza de *reacción* $\vec{P}'$ capaz de realizar el equilibrio. Un plano S, sobre el cual A puede deslizar sin rozamiento, sólo es capaz de crear reacciones normales al plano. Para corrimientos sobre el plano *(corrimientos virtuales)* estas reacciones efectúan un trabajo nulo.

Así también en el caso de la figura 182, en que la ligadura está constituída por el punto fijo O, mediante el hilo OA, esta ligadura sólo puede crear fuerzas de reacción orientadas según $A \longrightarrow O$. Estas fuerzas de reacción pueden imaginarse aplicadas en O, en A, o en un punto cualquiera del hilo.

Todo tipo de ligadura lisa solamente es capaz de producir fuerzas de reacción cuyo trabajo es nulo para cualquier corrimiento virtual.

Si entre las posibles fuerzas de reacción existe una igual y opuesta a la resultante de las fuerzas aplicadas a un punto, éste se halla en equilibrio. Tal es el *principio de acción y reacción* en la estática: durante el equilibrio, a toda acción (fuerza exterior aplicada por nosotros) se opone una reacción (fuerza exterior aplicada por nosotros, o fuerza de ligadura, igual y opuesta).

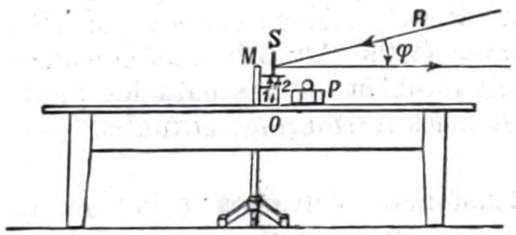


Fig. 188

Aun experimentando con mucho cuidado, la ligadura resulta siempre deformada por las fuerzas aplicadas $\vec{F}$; las ligaduras reales son capaces de crear reacciones en virtud de las fuerzas elásticas que se manifiestan en todo cuerpo elástico deformado.

En la figura 188, el dispositivo MO permite observar, por el método de POGGENDORFF, pequeñísimas deformaciones de la mesa; aun siendo ésta muy robusta, una carga de sólo 10 newton ($\approx 1\ kg_p$) produce ya una deformación observable; la punta 2, baja; el espejito S, apoyado en la punta 1, fija en M, y en la punta 2, gira un ángulo observable.

Repitamos que las reacciones de ligadura deben estar comprendidas dentro de ciertos límites impuestos por la resistencia de los materiales con que se ha construído la ligadura. Si $\vec{F}$ es demasiado fuerte, l (fig. 186) se dobla o se rompe; la ligadura l no es capaz de producir una reacción tan grande como $\vec{F}$. Análogamente ocurre cuando la ligadura es una superficie S.

C. — ESTÁTICA DEL CUERPO RÍGIDO

§ 105. Cuerpo rígido libre. Un cuerpo rígido tiene, por lo general, un peso no despreciable. Pero un pedazo de madera, mediante un número suficiente de tornillos de lastre regulables, puede quedar en equilibrio indiferente cuando se le sumerge en agua (fig. 189). Dejando aparte el rozamiento con el medio, que no influye en la posición de equilibrio (§ 78), el pedazo de madera está allí con libertad de moverse de todas las maneras (traslación, rotación) y no tiende a tomar ninguna posición ni orientación especial de equilibrio. El peso está equilibrado por el empuje de ARQUÍMEDES.

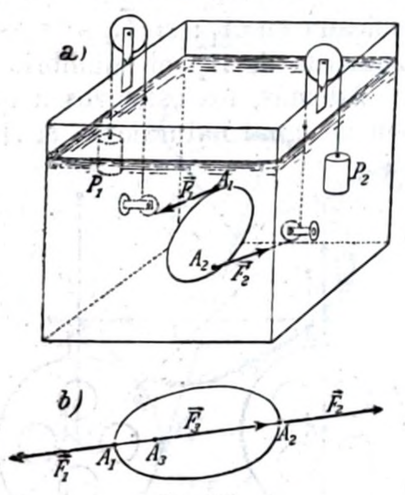


Fig. 189

a] **Una fuerza.** Bajo la acción de una fuerza $\vec{F}_1$, aplicada por ejemplo en A_1, demuestra la experiencia que el cuerpo, inicialmente en reposo, se pone en movimiento, y de un modo no muy sencillo. No hay equilibrio.

b] **Equilibrio de dos fuerzas.** Sean dos fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ aplicadas en A_1 y A_2 (fig. 189).

El cuerpo queda en equilibrio cuando $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ se hallan sobre la misma recta de aplicación y son iguales y contrarias.

En la figura 189, *b*), la fuerza $\vec{F}_2$ se deja equilibrar por la fuerza $\vec{F}_1$ igual y opuesta (y viceversa). Pero también una fuerza $\vec{F}_3$ aplicada en A_3, igual y opuesta a $\vec{F}_1$, se equilibra con esta última. Luego, $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$ producen el mismo efecto.

Una fuerza aplicada a un cuerpo rígido puede correrse a lo largo de su recta de aplicación sin que se altere el equilibrio.

Tal fuerza tiene el carácter de un vector deslizante (§ 49).

Se puede, pues, trasladar $\vec{F}_2$ hasta aplicarla en A_1, componer $\vec{F}_1$ con $\vec{F}_2$ y deducir así que, para el equilibrio, las dos fuerzas aplicadas deben tener la misma recta de aplicación y resultante nula.

Obsérvese, sin embargo, que este *transporte* de la fuerza se considera no como una posibilidad efectiva, sino como un artificio geométrico, cómodo para obtener fácilmente las condiciones de equilibrio;

el punto O (fig. 191), donde conviene *transportar* el punto de aplicación, puede no ser siquiera un punto del cuerpo rígido.

Además, si se traslada una fuerza a lo largo de su recta de aplicación, puede ocurrir que cambie la estabilidad del equilibrio.

En rigor, es necesario conocer el campo de las fuerzas aplicadas al cuerpo para hablar de la estabilidad del equilibrio; nuestros hilos con poleas y pesos aplican fuerzas que constituyen otros tantos campos de fuerzas centrales, atractivas, constantes. En la figura 189, el equilibrio es estable en tanto que $\vec{F}_2$ está aplicada en un punto de la recta $A_1 A_2$, a la derecha de A_1; sería indiferente si $\vec{F}_2$ estuviese aplicada en A_1; si $\vec{F}_2$ se trasladase hasta encontrarse aplicada a la izquierda de A_1, el equilibrio sería inestable.

Además, los esfuerzos a que se encuentra sometido el sólido no son de igual naturaleza: si A_2 está a la derecha de A_1, el sólido es

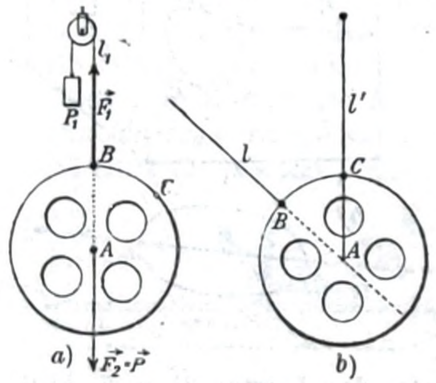


Fig. 190

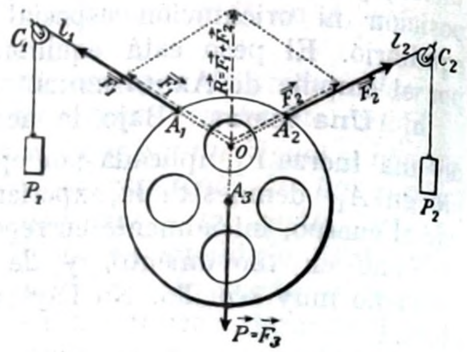


Fig. 191

estirado y tiende a romperse entre A_1 y A_2; si A_2 está a la izquierda de A_1, el sólido es comprimido y tiende a aplastarse entre A_1 y A_2.

Tómese un disco metálico agujereado y suspéndase por B [figura 190 *a*)]. El disco se halla en equilibrio si el peso P_1, y, por tanto, la fuerza F_1, es igual al peso del disco, y, además, el equilibrio se obtiene únicamente para una orientación particular del disco: aquella en que $\vec{F}_1$ es vertical y el centro del disco se encuentra en la prolongación de l_1. La fuerza peso $\vec{F}_2$ del disco es, pues, una fuerza dirigida según la recta l_1 (vertical) y aplicada en un punto todavía desconocido de dicha recta. Cuélguese el disco por otro punto (por ejemplo, por *C*) [fig. 190, *b*)]. Demuestra la experiencia que la fuerza equilibrante es todavía $\vec{F}_1$ y la fuerza peso del disco está aplicada en un punto de la recta l'. Las rectas l y l', determinadas experimentalmente, se encuentran en un punto *(centro de gravedad)* en el cual se imagina, por tanto, aplicada la fuerza peso del disco. Conocemos

así el importe, dirección, sentido y punto de aplicación de esta fuerza peso.

c] **Equilibrio de tres fuerzas no paralelas.** El mismo disco agujereado, en la disposición de la figura 191, sirve para encontrar la configuración de equilibrio, bajo la acción de las fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, y de la fuerza peso $\vec{F}_2$, que es el mismo peso del disco.

En el equilibrio, las fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ se encuentran en un mismo plano, y sus rectas de aplicación pasan por un mismo punto O; además, trasladando cada una de las tres fuerzas de modo que se imaginen aplicadas en O, la resultante de dos de las tres fuerzas, obtenida con la regla del paralelogramo, resulta igual y contraria a la tercera fuerza: *la resultante de las tres fuerzas aplicadas es nula.*

Brevemente: vale todavía formalmente la regla del paralelogramo de las fuerzas, como para el punto libre; pero, en substancia, la regla es muy diferente. Se habla ahora de resultante de dos o más fuerzas *no* aplicadas a un mismo punto, a obtener con la regla del paralelogramo, previo el oportuno *transporte* de cada fuerza a lo largo de la propia recta de acción.

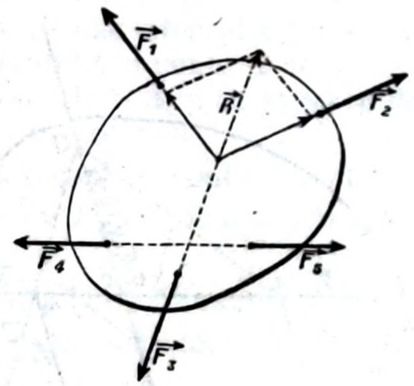


Fig. 192

d] **Superposición de los equilibrios.** Sea $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ (fig. 192) un sistema de fuerzas en equilibrio, aplicadas a puntos de un cuerpo rígido, como, por ejemplo, los puntos del disco agujereado que constituye el cuerpo rígido que ha servido para los experimentos anteriores.

Se añade un nuevo sistema de fuerzas en equilibrio; por ejemplo $\vec{F}_4$, $\vec{F}_5$, iguales y contrarias, y teniendo la misma recta de aplicación. Demuestra la experiencia que todavía subsiste el equilibrio. Por consiguiente, sin alterar el equilibrio, se puede añadir al sistema de fuerzas aplicadas un nuevo sistema de fuerzas equilibradas entre sí *(principio de la superposición de los equilibrios)*.

Es posible demostrar este principio sin necesidad de recurrir a la experimentación, con tal que se admita que no se altera el equilibrio de un cuerpo rígido cuando se hace deslizar cada fuerza sobre su recta de aplicación y cuando se componen o descomponen las fuerzas mediante la regla del paralelogramo.

También se entiende mejor este hecho considerándolo sólo como un artificio geométrico útil; pero, físicamente, la adición de nuevas fuerzas, aunque no altere el equilibrio, puede variar su carácter (estable, inestable o indiferente), y puede modificar las condiciones del

cuerpo sólido. En la figura 190, *a*), se puede añadir en A una fuerza peso cualquiera, con lo cual el equilibrio no se perturba si se aumenta en la misma cantidad el contrapeso P_1; pero al llegar a un cierto punto, el hilo se rompe, o el disco se abre, y falla la legitimidad de la superposición de varios sistemas de fuerzas en equilibrio.

§ 106. Fuerzas paralelas. Sean dos fuerzas paralelas y del mismo sentido $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ (fig. 193), aplicadas a los puntos A_1 y A_2 de un cuerpo rígido. Se añaden dos fuerzas $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$ iguales, opuestas y teniendo la misma recta de acción $A_1 A_2$; las resultantes $\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{S}_1$ y $\vec{R}_2 = \vec{F}_2 + \vec{S}_2$ son equivalentes a las cuatro fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$ y, por tanto, a las dos fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$. Pero $\vec{R}_1$ y $\vec{R}_2$ concurren en O y pueden componerse mediante la regla del paralelogramo.

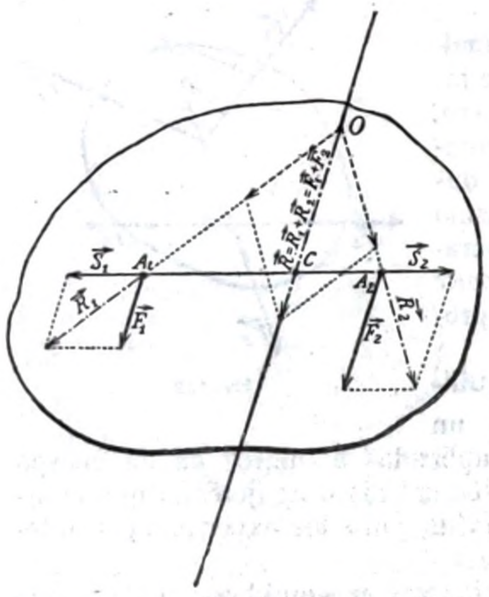


Fig. 193

$\vec{R}$ es la resultante $\vec{R}_1 + \vec{R}_2$ y, para los efectos del equilibrio, es equivalente a $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

Se deduce de sencillas consideraciones geométricas que $\vec{R}$ es paralela y del mismo sentido que las fuerzas componentes, y que si se miden los importes R, F_1, F_2 de los vectores $\vec{R}$, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, según un eje paralelo a las fuerzas (por ejemplo, OC) se tiene en valor y signo:

$$R = F_1 + F_2. \qquad [1]$$

R, F_1 y F_2 son todos positivos o todos negativos, según que sobre el eje de referencia el sentido positivo sea $O \longrightarrow C$, concordante con el de las fuerzas, o sea $C \longrightarrow O$. Así se miden también A_1C, CA_2 y los importes S_1, S_2 de $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$, en valor y signo, sobre el eje $A_1 \longrightarrow A_2$; entonces $S_1 < O$, $S_2 = -S_1 > O$.

$\vec{R}$ tiene una recta de aplicación que corta a $A_1 A_2$ en un punto C, que está dentro del segmento $A_1 A_2$, tal que:

$$A_1C : CA_2 = F_2 : F_1. \qquad [2]$$

Efectivamente, en los triángulos semejantes $\vec{R}_1$ A_1 $\vec{F}_1$ y A_1CO se tiene:

$$F_1 : -S_1 = OC : A_1C.$$

Análogamente, se tiene también:

$$F_2 : S_2 = OC : CA_2.$$

Dividiendo miembro a miembro, y teniendo en cuenta que $-S_1 = S_2$, se obtiene la [2].

C es ahora el punto de aplicación de la resultante *(centro de las fuerzas paralelas)* en el sentido que si las fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ giran alrededor de sus puntos de aplicación conservando su intensidad y permaneciendo paralelas entre sí y del mismo sentido, el punto C no varía; C depende únicamente de las posiciones de A_1 y A_2 y de la razón de las medidas de las fuerzas, pero no de su dirección.

Una fuerza $\vec{F}_3$, igual y opuesta a $\vec{R}$, teniendo la misma recta de acción que $\vec{R}$, equilibra a las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$; $\vec{F}_3$ se llama la *equilibrante* de las fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$.

Análogamente, se tiene la resultante $\vec{R}$ y la equilibrante $\vec{F}_1$ (figura 194) de dos fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, paralelas y de sentidos opuestos. La resultante $\vec{R}$ está dirigida en el sentido de la fuerza mayor $\vec{F}_2$, y se tiene $|R| = |F_2| - |F_1|$.

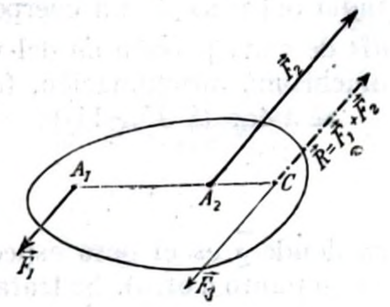


Fig. 194

Si se consideran las magnitudes R, F_1, F_2 de $\vec{R}$, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ medidas en valor y signo, según un eje dirigido según $\vec{F}_1$, se tiene, en valor y signo, $R = F_1 + F_2$, como en el caso de las fuerzas paralelas y del mismo sentido.

C está ahora en la recta $A_1 A_2$, fuera del segmento $A_1 A_2$, en el lado de la fuerza componente mayor, y es válida todavía la [2], en valor y signo, a lo largo del eje $A_1 \longrightarrow A_2$; A_1C y CA_2, y asimismo F_1 y F_2, tienen ahora signos opuestos.

La construcción de la figura 194, y, por tanto, la regla anterior, caen en defecto cuando las dos fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ forman *par*, esto es, cuando son iguales y opuestas y tienen dos rectas distintas de aplicación. ¡La resultante debería ser nula ($|R| = |F_2| = |F_1|$) y aplicada al punto del infinito de la recta $A_1 A_2$!

Físicamente, esto carece de significado; la resultante *no* existe; *no es posible equilibrar un par con una sola fuerza* (§ 108).

Si hay n fuerzas paralelas, pueden componerse sucesivamente, como se ha efectuado para n fuerzas aplicadas en un punto. Se obtiene así una resultante, o, excepcionalmente, un par.

§ 107. Centro de gravedad. Baricentro. En el caso de fuerzas paralelas y del mismo sentido, existe siempre la resultante, cualquiera que sea el número de fuerzas componentes.

Se tiene:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots\ldots + \vec{F}_n,$$

y también, puesto que los vectores son paralelos y del mismo sentido,

$$|R| = |F_1| + |F_2| + |F_3| + \ldots\ldots + |F_n|.$$

Si las fuerzas componentes están aplicadas en los puntos A_1, A_2, A_3, ... A_n, la resultante $\vec{R}$ tiene un punto de aplicación C determinado *(centro de fuerzas paralelas)*: si todas las fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ... giran alrededor de su punto de aplicación, conservando su módulo y permaneciendo paralelas entre sí, C resulta invariable; C depende solamente de los puntos A_1, A_2, ... y de los módulos de las fuerzas aplicadas, pero no de la dirección común de éstas.

Este caso particular es importante porque se encuentra en el estudio del peso de un cuerpo. Este peso es la resultante de los pesos $d\vec{P}$ de cada porción dv del volumen v del cuerpo, los cuales son, con muchísima aproximación, fuerzas paralelas.

Se tiene (§ 45, [11]):

$$d\vec{P} = \vec{\varrho} \cdot dv,$$

en donde $\vec{\varrho}$ es el peso específico del cuerpo (eventualmente variable de un punto a otro). Se trata de un vector paralelo y del mismo sentido que $d\vec{P}$, cuyo módulo es el peso específico ϱ [1] del cuerpo; dv es un escalar. El peso total es un vector $\vec{P}$ que tiene, como $d\vec{P}$, la orientación de la vertical dirigida hacia abajo, y el módulo

$$P = \int_v \varrho \cdot dv. \qquad [1]$$

El centro de fuerzas paralelas se llama ahora *centro de gravedad G. Baricentro* de las masas m_1, m_2 (fig. 195, *a*)] de dos cuerpos prácticamente puntiformes es, por definición, el punto $B_{1,2}$ interior al segmento $A_1\,A_2$, determinado por la igualdad:

$$A_1\,B_{1,2} : B_{1,2}\,A_2 = m_2 : m_1. \qquad [2]$$

Si x_1, x_2, $x_{1,2}$ son las abscisas de A_1, A_2, $B_{1,2}$, respectivamente, contadas sobre el eje x que pasa por A_1 y A_2, la [2] se escribe en valor y signo:

$$\frac{x_{1,2} - x_1}{x_2 - x_{1,2}} = \frac{m_2}{m_1};$$

de donde se deduce:

$$x_{1,2} = \frac{m_1\,x_1 + m_2\,x_2}{m_1 + m_2}; \qquad [3]$$

fórmula que da la abscisa del baricentro, conocidas las masas y las abscisas de los puntos donde están concentradas.

El centro de gravedad G_{12} de los mismos dos cuerpos de pesos $\vec{P}_1 = m_1\,\vec{g}$ y $\vec{P}_2 = m_2\,\vec{g}$ es un punto $G_{12} = C_{1,2}$ del segmento $A_1\,A_2$, determinado por la igualdad (§ 106, [2]):

$$A_1\,C_{1,2} : C_{1,2}\,A_2 = P_2 : P_1 = m_2 : m_1;$$

luego $B_{1,2} = C_{1,2} = G_{12}$; es decir, el baricentro y el centro de gravedad coinciden *en cuanto $\vec{g}$ es idéntico para los dos cuerpos.*

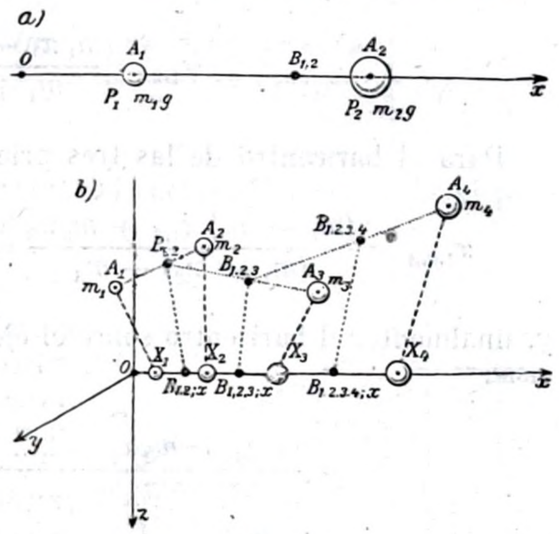


Fig. 195

Proyectemos A_1, A_2, $B_{1,2}$ sobre un eje x cualquiera [fig. 195, *b*)], y sean X_1, X_2, $X_{1,2,x}$ las proyecciones.

Por el teorema de TALES (en el espacio) se tiene:

$$A_1\,B_{1,2} : B_{1,2}\,A_2 = X_1\,B_{1,2,x} : B_{1,2,x}\,X_2 = m_2 : m_1;$$

es decir, $B_{1,2,x}$ es el baricentro de las masas m_1 y m_2 supuestas, respectivamente, en X_1 y X_2: la proyección del baricentro es el baricentro de las proyecciones.

El baricentro de tres masas m_1, m_2, m_3 se define como el punto que se obtiene construyendo el baricentro $B_{1,2}$ de m_1 y m_2 y hallando

[1] Siempre se tiene $\varrho > 0$, $P > 0$; luego es inútil indicar los módulos por medio del símbolo del valor absoluto.

después el baricentro $B_{1,2,3}$ de la masa $m_{1,2} = m_1 + m_2$, supuesta concentrada en $B_{1,2}$, y de la masa m_3 en A_3.

Análogamente haremos para n masas.

En todos los casos, *coinciden el baricentro y el centro de gravedad en cuanto el vector* $\vec{g}$ *es el mismo para todas las masas; además, la proyección del baricentro sobre un eje cualquiera es el baricentro de las proyecciones;* es decir, si m_1, m_2, ... m_n son las masas concentradas en los puntos A_1, A_2, ... A_n y B es su baricentro, las mismas masas m_1, m_2, ... m_n, concentradas en las proyecciones X_1, X_2, ... X_n, de los puntos dados sobre un eje cualquiera, tienen por baricentro la proyección del punto B sobre el mismo eje.

También sucede esto, en particular, cuando se imagina un cuerpo dividido en infinitos volúmenes elementales, como se ha supuesto para la [1].

Ahora bien, en el caso de n masas alineadas sobre un eje x, el baricentro de las dos primeras tiene por abscisas:

$$x_{1,2} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

Para el baricentro de las tres primeras se tiene:

$$x_{1,2,3} = \frac{(m_1 + m_2)\, x_{1,2} + m_3 x_3}{(m_1 + m_2) + m_3} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

y, finalmente, el baricentro sobre el eje x de las n masas tiene la abscisa:

$$x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + ... + m_n x_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n} = \frac{\sum_{r=1}^{r=n} m_r x_r}{\sum_{r=1}^{r=n} m_r}$$

Luego, si A_1, A_2, ... A_n están determinados mediante las coordinadas $(x_1\, y_1\, z_1)$, $(x_2\, y_2\, z_2)$, ..., $(x_n\, y_n\, z_n)$ con respecto a tres ejes cartesianos de referencia, el baricentro queda determinado por las coordenadas:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + ... + m_n x_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n} = \frac{\Sigma\, m_r x_r}{\Sigma\, m_r} \\ y &= \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + ... + m_n y_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n} = \frac{\Sigma\, m_r y_r}{\Sigma\, m_r} \\ z &= \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + ... + m_n z_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n} = \frac{\Sigma\, m_r z_r}{\Sigma\, m_r} \end{aligned}\right\} \quad [4]$$

Y éstas son también las coordenadas del centro de gravedad de los pesos $m_1 \cdot \vec{g}$, $m_2 \cdot \vec{g}$, ... $m_n \cdot \vec{g}$, concentrados, respectivamente, en los puntos A_1, A_2, ... A_n.

Finalmente, imaginando un cuerpo de masa m como un conjunto de infinitas partículas infinitesimales, de masa $dm = \mu \cdot dv$ (dv es el elemento de volumen y μ es la masa específica en dv), las coordenadas del baricentro, y, por tanto, las del centro de gravedad, son:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\int x \cdot dm}{\int dm} = \frac{\int x \cdot dm}{m} = \frac{\int x\mu \cdot dv}{m} = \frac{\int x\varrho \cdot dv}{P} \\ y &= \frac{\int y \cdot dm}{\int dm} = \frac{\int y \cdot dm}{m} = \frac{\int y\mu \cdot dv}{m} = \frac{\int y\varrho \cdot dv}{P} \\ z &= \frac{\int z \cdot dm}{\int dm} = \frac{\int z \cdot dm}{m} = \frac{\int z\mu \cdot dv}{m} = \frac{\int z\varrho \cdot dv}{P} \end{aligned}\right\} \quad [5]$$

en donde $P = m \cdot g$ es el peso total del cuerpo, y $\varrho = \mu \cdot g$ es el peso específico, que puede ser variable de unos puntos a otros.

La investigación del centro de gravedad de un cuerpo cuya forma y densidad son conocidas, constituye un ejercicio del cálculo integral, únicamente resoluble en casos muy sencillos.

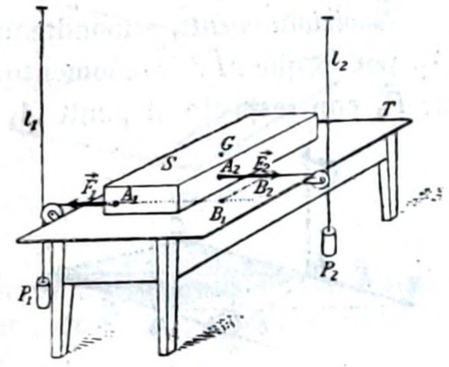


Fig. 196

Pero el centro de gravedad, y, por tanto, el baricentro, pueden encontrarse experimentalmente, en general con suficiente exactitud, por el cómodo procedimiento que se indica en la figura 190, *a*), *b*).

Recuérdese que el baricentro puede hallarse en un punto *no* ocupado del cuerpo; por ejemplo, el baricentro de una esfera hueca constituída por materia homogénea se halla en la cavidad.

§ **108. Pares de fuerzas.** Un par tiende a hacer girar el cuerpo al cual se aplica alrededor de su centro de gravedad G y en un sentido que es fácil determinar. Así, en la figura 196, el par $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$, aplicado al cuerpo S mediante el conocido dispositivo de las poleas y de los pesos (iguales) P_1, P_2, tiende a producir una rotación en el

sentido de las agujas de un reloj con respecto a un observador que estuviese de pie sobre la mesa T. La tablilla S es el cuerpo rígido, colocado sobre la mesa T, pero separado de la misma por algunas bolitas de acero de las de cojinetes. Los hilos metálicos delgados l_1 y l_2 impiden la acción de los pesos P_1 y P_2. Con un dispositivo eléctrico fácil de imaginar, se «queman» simultáneamente los dos hilos l_1 y l_2; P_1 baja y P_2 sube. Si las distancias desde G a las rectas de acción de las dos fuerzas aplicadas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ son entre sí como 2 es a 1, P_2 deberá levantarse la mitad de lo que baja P_1.

El experimento no da un resultado demasiado bueno, sea a causa de los rozamientos o porque se efectúa en un tiempo demasiado corto.

Se llama *momento* o *vector momento* $\vec{M}$ de un par $(\vec{F}_1\,\vec{F}_2)$ (fig. 197) a un vector normal al plano $\vec{F}_1\vec{F}_2$, cuyo módulo viene dado por el área del paralelogramo $A_1\,A_2\,B_2\,C_1$ o por la del paralelogramo equivalente $B_1\,A_1\,B_2\,A_2$.

El sentido lo da la regla de Ampère: Para un observador, atravesado por $\vec{M}$ de los pies a la cabeza, la rotación producida por el par se efectúa en sentido directo (antirreloj).

Luego se tiene:

$$\vec{M} = \overrightarrow{A_1A_2} \wedge \vec{F}_2 = \overrightarrow{A_2A_1} \wedge \vec{F}_1. \qquad [1]$$

Provisionalmente, supondremos que este vector está aplicado en A_1, por lo que $\vec{M}$ es el momento de $\vec{F}_2$ con respecto al punto A_1

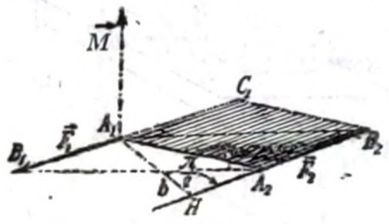


Fig. 197

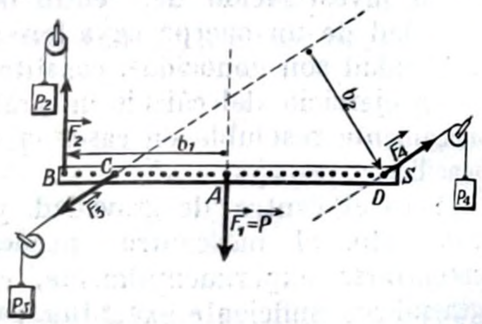


Fig. 198

(§ 109) o, lo que es lo mismo, es el momento de $\vec{F}_1$ con respecto al punto A_2.

La distancia b entre las rectas de acción de las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, se llama *brazo* del par, y se tiene:

$$|M| = b \cdot |F_1| = b \cdot |F_2|. \qquad [2]$$

Mediante el transporte de una de las dos fuerzas (por ejemplo, de $\vec{M}_2$) hasta aplicarla en H, pie de la perpendicular bajada desde A_1

a la recta de acción de $\vec{F}_2$, se puede suponer siempre que las fuerzas del par son perpendiculares al segmento determinado por los puntos de aplicación; sólo en este caso coincide con el *brazo* el segmento A_1A_2 de los puntos de aplicación.

Un par de momento $\vec{M}_1$ no puede ser equilibrado por una fuerza (§ 106); pero puede serlo por otro par cuyo momento $\vec{M}_2$ sea igual y contrario a $\vec{M}_1$.

Se efectúa el experimento con el dispositivo de la figura 198. La varilla S está sometida al par constituído por su propio peso $P = \vec{F}_1$ y por $\vec{F}_2$, y no se halla en equilibrio: el extremo S tiende a caer.

Se obtiene el equilibrio de la varilla aplicando otro par $(\vec{F}_3\ \vec{F}_4)$ situado en el mismo plano que el primero, que tiende a producir una rotación inversa, y tal que sea $|F_1|\,b_1 = |F_3|\,b_2$.

Se llega al mismo resultado por conducto puramente geométrico, demostrando que en este caso se pueden siempre componer las fuerzas $\vec{F}_1\ \vec{F}_2$, $\vec{F}_3\ \vec{F}_4$ mediante los convenientes *transportes* de las mismas a lo largo de la respectiva recta de acción, y que la resultante total es nula.

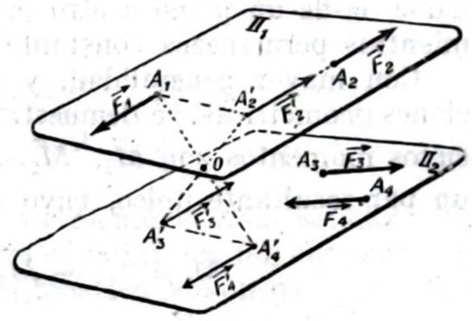


Fig. 199

Luego para el equilibrio se ha de tener:

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = 0;$$

es decir, ha de ser nula la resultante de los dos momentos. Otro par cualquiera de momento $\vec{M}_2$, y situado en el plano de los anteriores, equilibra al par de momento $\vec{M}_1$ independientemente de las posiciones de los puntos C y D, y, por tanto, de todo punto convencional de aplicación imaginado para $\vec{M}_2$.

Pero también se equilibran dos pares no situados en el mismo plano siempre que sus vectores momento sean iguales y opuestos.

En efecto, sean $(\vec{F}_1\vec{F}_2)$, $(\vec{F}_3\vec{F}_4)$ (fig. 199) los dos pares de momentos $\vec{M}_1$, $\vec{M}_2$ iguales y opuestos, situados en planos paralelos Π_1, Π_2, y, por tanto, respectivamente perpendiculares a los vectores paralelos $\vec{M}_1$ y $\vec{M}_2$.

Sabemos que, sin modificar el equilibrio, pueden efectuarse las siguientes operaciones:

a] transportar $\vec{F}_2$ a A_2', de modo que $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2'$ $(= \vec{F}_2)$ resulten perpendiculares a A_1A_2';

b] girar el par $(\vec{F}_3\vec{F}_4)$, trasladarlo al plano Π_2 y deformarlo (esto es, aumentar el brazo y disminuir la fuerza, dejando invariable el momento del par) hasta reducirlo al par $(\vec{F}'_3\vec{F}'_4)$, en el cual $A'_3A'_4$ es un segmento equipolente a $A_1A'_2$; por tanto, entonces se tiene $\vec{F}'_3 = \vec{F}'_2$; $\vec{F}'_4 = \vec{F}_1$.

Luego, A_1, A'_2, A'_3, A'_4 son vértices de un paralelogramo. Componiendo las fuerzas iguales $\vec{F}'_2$, $\vec{F}'_3$, y las fuerzas iguales $\vec{F}_1$, $\vec{F}'_4$, se obtienen dos resultantes parciales, iguales y opuestas, que tienen por centro común de aplicación el centro O del paralelogramo $A_1A'_2A'_3A'_4$.

Pero estas fuerzas se equilibran.

Lo mismo sucede, por tanto, con los pares dados; es decir, un par de momento $\vec{M}_1$ puede equilibrarse con otro par cualquiera, aunque no estén en el mismo plano, siempre que el momento $\vec{M}_2$ de este último sea igual y opuesto al del primero.

La acción equilibradora de un par está determinada por su momento $\vec{M}$, que es un *vector sin punto de aplicación*.

Un par $(\vec{F}_1\vec{F}_2)$ puede girar sobre su plano, deformarse y trasladarse desde un plano a otro paralelo, no variando la acción del par mientras permanezca constante el producto $b.|F_1|$.

Con mayor generalidad, y basándose únicamente en consideraciones geométricas, se demuestra que la acción simultánea de n pares, cuyos momentos son $\vec{M}_1$, $\vec{M}_2$, ... $\vec{M}_n$, es equivalente a la acción de un par resultante único, cuyo momento $\vec{M}$ es la suma vectorial:

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + ... + \vec{M}_n, \qquad [3]$$

que puede efectuarse siempre mediante la regla del polígono (§ 50), porque estos momentos pueden suponerse siempre aplicados a un mismo punto del espacio.

§ 109. Extensión al problema general. Momento de una fuerza. Si están aplicadas a un cuerpo rígido n fuerzas coplanares, es decir, cuyas rectas de acción se encuentran en un mismo plano, pueden componerse sucesivamente dos a dos, como se ha indicado en los §§ 105 y 106, y se llega ciertamente a reducirlas a *una resultante* o a *un par único*. Este último caso es excepcional y en él no existe resultante de las fuerzas dadas, según la hemos definido.

Quitando la limitación de que las fuerzas sean coplanares, la falta de resultante es el caso general: si se *cruzan* (1) las rectas de aplicación de dos fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ que actúan sobre un cuerpo rígido, no existe la resultante en el sentido en que la hemos definido.

(1) Sin tocarse.

De ahora en adelante hablaremos a menudo de la *existencia* o no existencia de la resultante de n fuerzas, según que sea o no posible su construcción mediante las reglas dadas en los §§ 105 y 106.

Conviene tratar todavía el problema general del equilibrio de un cuerpo rígido al que se han aplicado n fuerzas de un modo menos elemental que el empleado en los párrafos anteriores.

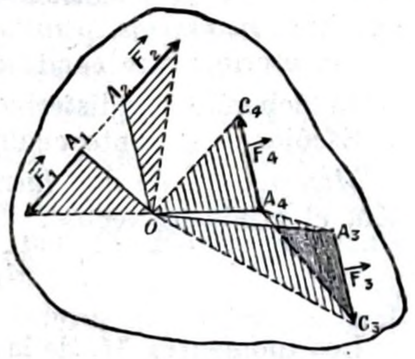


Fig. 200

Limitémonos al caso de dos fuerzas (fig. 200). Si están aplicadas al cuerpo rígido dos fuerzas $\vec{F}_1$ $\vec{F}_2$, iguales, opuestas y con la misma recta de aplicación, hay equilibrio; por el contrario, el par $(\vec{F}_3\,\vec{F}_4)$ *no* da equilibrio. No obstante, escribiendo en componentes la condición de que $\vec{F}_1$ (F_{1x}, F_{1y}, F_{1z}) sea igual y opuesta a $\vec{F}_2$ (F_{2x}, F_{2y}, F_{2z}), y la condición de que $\vec{F}_3$ (F_{3x}, F_{3y}, F_{3z}) sea igual y opuesta a $\vec{F}_4$ (F_{4x}, F_{4y}, F_{4z}), se tiene en los dos casos:

$$F_{1x} + F_{2x} = 0 \qquad F_{1y} + F_{2y} = 0 \qquad F_{1z} + F_{2z} = 0 \qquad [1]$$
$$F_{3x} + F_{4x} = 0 \qquad F_{3y} + F_{4y} = 0 \qquad F_{3z} + F_{4z} = 0. \qquad [2]$$

Físicamente, se elimina este inconveniente cuando se dice: La condición necesaria y suficiente para el equilibrio de un cuerpo rígido es que *exista la resultante*, tal como la hemos definido en los § § 105, 106, y que *ésta sea nula*.

Analíticamente, es preferible otro camino.

Dadas n fuerzas aplicadas:

$$\vec{F}_1\,(F_{1x}, F_{1y}, F_{1z}); \quad \vec{F}_2\,(F_{2x}, F_{2y}, F_{2z}); \quad ..... \quad \vec{F}_n\,(F_{nx}, F_{ny}, F_{nz}),$$

se define como resultante, *existente en todos los casos*, el vector *no aplicado* de componentes:

$$\left.\begin{aligned} F_x &= F_{1x} + F_{2x} + ... + F_{nx} \\ F_y &= F_{1y} + F_{2y} + ... + F_{ny} \\ F_z &= F_{1z} + F_{2z} + ... + F_{nz} \end{aligned}\right\}, \qquad [3]$$

que se puede imaginar obtenido mediante el polígono de los vectores $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ... $\vec{F}_n$, como si éstos pudieran considerarse aplicados todos a un mismo punto; es decir, como si pudiera cambiarse arbitraria-

mente su punto de aplicación, y fuesen, por tanto, vectores *no aplicados*.

Por lo tanto, si se quieren emplear las componentes de las fuerzas aplicadas para escribir la condición de equilibrio, las condiciones [2], § 100, necesarias y suficientes en el caso del equilibrio de un punto, son ahora *necesarias, pero no suficientes*. Conviene ahora, además de las [3], escribir otra condición; en el caso de dos fuerzas, esta condición deberá ser satisfecha por $\vec{F}_1\,\vec{F}_2$, y no por $\vec{F}_3\,\vec{F}_4$ (fig. 200).

Escójase un punto cualquiera O.

Momento $\vec{M}_1$ *de una fuerza* $\vec{F}_1$ *respecto al punto* O es, por definición, el producto vector:

$$\vec{M}_1 = \overrightarrow{OA}_1 \wedge \vec{F}_1. \qquad [4]$$

Los momentos $\vec{M}_1$ de la fuerza $\vec{F}_1$ y $\vec{M}_2$ de la fuerza $\vec{F}_2$ respecto al punto O, son iguales y opuestos; su suma vectorial es nula:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = 0. \\ \text{En componentes:} \\ M_{1x} + M_{2x} = 0\,; \quad M_{1y} + M_{2y} = 0\,; \quad M_{1z} + M_{2z} = 0. \end{array}\right\} \qquad [5]$$

Tomando una terna de ejes cartesianos con origen en 0, sean x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 las coordenadas de los puntos de aplicación y F_{1x}, F_{1y}, F_{1z}; F_{2x}, F_{2y}, F_{2z} las componentes de las fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, respectivamente. Las [5] también se escriben (§ 52, [17]):

$$\left.\begin{array}{l} (y_1F_{1z} - z_1F_{1y}) + (y_2F_{2z} - z_2F_{2y}) = 0 \\ (z_2F_{1x} - x_1F_{1z}) + (z_2F_{2x} - z_2F_{2z}) = 0 \\ (x_1F_{1y} - y_1F_{1x}) + (x_2F_{2y} - y_2F_{2x}) = 0 \end{array}\right\} \qquad [6]$$

Al contrario, para un par $(\vec{F}_3\vec{F}_4)$ los dos momentos $\vec{M}_3$, $\vec{M}_4$ de las dos fuerzas $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$, respecto a O, son diferentes; si, por ejemplo, O se halla en el plano $\vec{F}_3\vec{F}_4$, vienen medidos estos momentos por el duplo de las áreas OA_3C_3 y OA_4C_4, que son diferentes por serlo las alturas de estos triángulos. Las dos áreas tienen signos opuestos y $M_3 + M_4$ es, en valor y signo, el duplo del área del triángulo $A_4A_3C_3$, es decir, mide el momento $\vec{M}$ del par $(\vec{F}_3\vec{F}_4)$. Vectorialmente, se tiene, en general:

$$\vec{M}_3 + \vec{M}_4 = \vec{M} \neq 0\,;$$

el momento de un par (§ 108) es la suma vectorial de los momentos de sus dos fuerzas respecto a un punto cualquiera O.

§ 109

Para el equilibrio, es necesario que se cumplan la [1] y la [5]. En general, *han de ser nulas la resultante de las fuerzas definida por la* [3] *y la resultante de los momentos respecto a un punto cualquiera* O.

Conviene también presentar el mismo resultado de otra manera.

Si está aplicada una fuerza $\vec{F}_1$ en un punto A_1 (fig. 201), se puede imaginar, por el principio de la superposición de los equilibrios, que en un punto cualquiera O están aplicadas las dos fuerzas $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, una igual, y otra igual y opuesta a $\vec{F}_1$. Así, la única fuerza $\vec{F}_1$ aplicada en A_1 es equivalente a la fuerza $\vec{F}_2$, igual a $\vec{F}_1$, pero aplicada en otro punto cualquiera O, y a un par $(\vec{F}_1\,\vec{F}_3)$ de momento $\vec{M}_1 = \overrightarrow{OA}_1 \wedge \vec{F}_1$.

Una fuerza se puede transportar paralelamente a sí misma a cualquier punto, con tal de aplicar simultáneamente al cuerpo rígido un par de momento conveniente $\vec{M}_1$, *normal a la fuerza dada.*

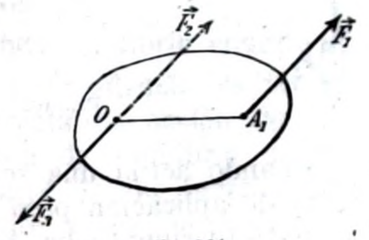


Fig. 201

Si están aplicadas al cuerpo n fuerzas y se transportan todas *a un mismo punto* O, nacerán otros tantos pares.

El sistema de las n fuerzas es equivalente a la resultante $\vec{R}$ de estas n fuerzas, como si estuvieran aplicadas todas en O, y al par resultante de los n pares así creados; si $\vec{R}$ no es nula, el momento del par resultante depende del punto elegido O.

Para el equilibrio, deben ser nulas tanto la resultante de las fuerzas (que ahora existe seguramente) *como la resultante de los momentos de los pares, es decir, la resultante de los momentos de las fuerzas dadas respecto a* O.

Vectorialmente:

$$\sum_r \vec{F}_r = 0\,; \qquad \sum_r \vec{M}_r = 0.$$

En componentes:

$$\left\{\begin{array}{l} \sum_r F_{rx} = 0 \\ \sum_r F_{ry} = 0 \\ \sum_r F_{rz} = 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \sum_r (y_r F_{rz} - z_r F_{ry}) = 0 \\ \sum_r (z_r F_{rx} - x_r F_{rz}) = 0 \\ \sum_r (x_r F_{ry} - y_r F_{rx}) = 0 \end{array}\right\}. \qquad [8]$$

Tal sistema de fuerzas se denomina *equilibrado*.

§ 110. Equilibrio de un cuerpo rígido ligado.

a] **Cuerpo que gira alrededor de un punto.** Un pedazo de madera (figura 202) tiene una concavidad que se corresponde con el baricentro B y está apoyado sobre una punta O; un número conveniente de tornillos equilibradores permite hacer coincidir el baricentro B, que es el centro de gravedad del cuerpo, con la punta de apoyo. En este caso, el equilibrio del cuerpo sobre la punta resulta indiferente; se tiene un cuerpo que puede girar alrededor de un punto y que, en cierto modo, está libre de la fuerza peso.

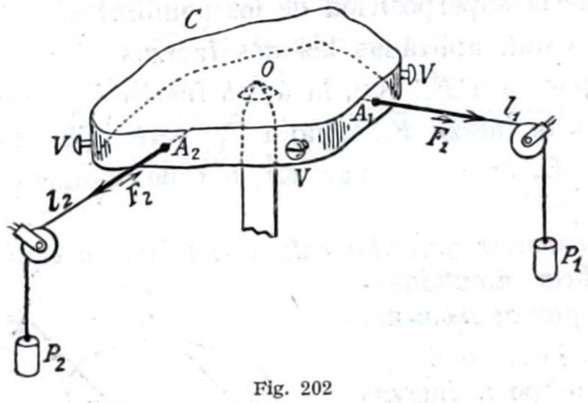


Fig. 202

El cuerpo está también provisto de numerosos tornillos con ojete para aplicar los hilos que transmitan las fuerzas con que se experimenta.

Cuando actúa una sola fuerza $\vec{F}_1$, se obtiene el equilibrio si su recta de aplicación pasa por el punto fijo O.

Esto se comprueba, por ejemplo, proyectando sobre una pantalla la sombra del aparato: la sombra del hilo l_1 pasará por la sombra de la punta O.

Por lo tanto, es nulo el momento $\overrightarrow{OA_1} \wedge \vec{F}_1 = \vec{M}_1$ de la fuerza aplicada respecto al punto fijo.

Si $\vec{F}_1$ es la fuerza peso del cuerpo, y, por tanto, A_1 es el centro de gravedad, para que haya equilibrio, OA_1 debe ser vertical (recta de aplicación de la fuerza peso). Es el caso de la figura 190, *a*): el disco es el cuerpo rígido que puede girar alrededor del punto de suspensión B.

Introduciendo la reacción de la ligadura O, podemos decir que en O está aplicada al cuerpo, por efecto de la ligadura, una fuerza igual y opuesta a $\vec{F}_1$, y es la reacción de la ligadura la que debe equilibrar la fuerza $\vec{F}_1$ (compárese con § 104).

Limitándonos al caso en que la fuerza $\vec{F}_1$ corresponda a un campo uniforme, el equilibrio es estable, inestable o indiferente, según que $\overrightarrow{OA_1}$ sea del mismo sentido que $\vec{F}_1$, de sentido contrario, o que sea nulo.

Cuando el equilibrio es indiferente, la fuerza aplicada, a pesar de actuar en el punto O, no influye en el movimiento o en el equilibrio del cuerpo.

Una fuerza $\vec{F}_2$ (fig. 203), cuya recta de aplicación no pasa por O, tiende a hacer girar el cuerpo en el sentido determinado por el hecho

de que el punto de aplicación A_2 tiende a moverse en el sentido de la fuerza mientras O está quieto (pero la distancia OA_2 debe permanecer invariable). Sea n la normal en O al plano determinado por O y la fuerza $\vec{F}_2$; dicho plano es el del dibujo. El cuerpo tiende a girar alrededor del eje n en el sentido antes indicado; es decir, en el sentido positivo respecto al vector $\vec{M}_2 = \overrightarrow{OA_2} \wedge \vec{F}_2$, momento de $\vec{F}_2$ respecto a O. La velocidad angular $\vec{\omega}$ [§ 76, *b*)] adquirida por el cuerpo a causa de la fuerza $\vec{F}_2$ y el momento $\vec{M}_2$, son paralelos y del mismo sentido; el momento $\vec{M}_2$ respecto a O indica aquí *en dirección y sentido* el giro que la fuerza $\vec{F}_2$ tiende a producir alrededor de O.

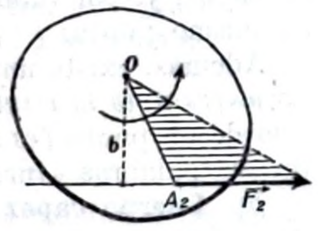


Fig. 203

Aplíquense simultáneamente al cuerpo de la figura 202 dos fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$. Se alcanza equilibrio cuando $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ son coplanares entre sí y con el punto O; además, es preciso que *exista* (§ 109) su resultante y que la recta de acción de ésta pase por O. Se llega de nuevo a la condición de equilibrio de una fuerza única, porque la regla del paralelogramo da una fuerza única equivalente a las fuerzas dadas incluso en el caso de fuerzas aplicadas al cuerpo rígido ligado.

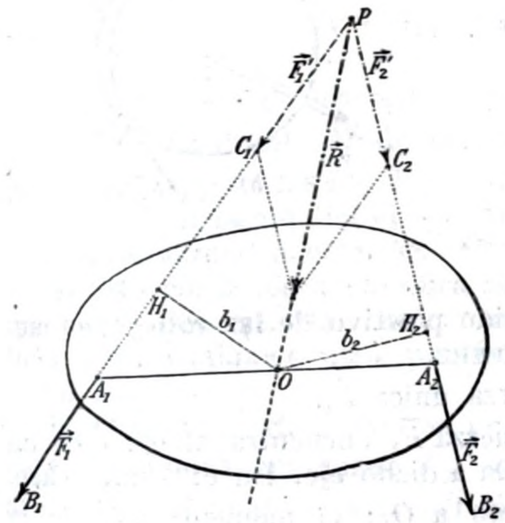


Fig. 204

Por lo tanto, cuando hay equilibrio, son iguales entre sí las áreas OPC_1 y OPC_2 (fig. 204) y, por consiguiente, también son iguales (y de signos opuestos) las áreas coplanares OA_1B_1 y OA_2B_2. La misma conclusión sirve, en virtud de la [2], § 106, si $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ son paralelas.

Pero los duplos de estas áreas miden los momentos $\vec{M}_1$, $\vec{M}_2$ respecto a O de las fuerzas aplicadas; luego, para el equilibrio, han de ser iguales y opuestos los momentos $\vec{M}_1$ y $\vec{M}_2$, es decir:

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = 0. \qquad [1]$$

En general, si hay n fuerzas aplicadas, y $\vec{M}_1$, $\vec{M}_2$, ... $\vec{M}_n$ son sus momentos respecto al punto fijo O, se obtiene el equilibrio cuando

Sabemos que el resorte funciona como *dinamómetro* cuando, elegida la unidad de medida de las fuerzas (por ejemplo, el *gramo-peso*), está graduado como se indicó en el § 42. Ahora, con la ayuda del hilo *f*, el muelle puede señalar todos los elementos que determinan el vector-fuerza aplicado en A''', A^{IV}, A^{V}, ... (módulo, dirección y sentido).

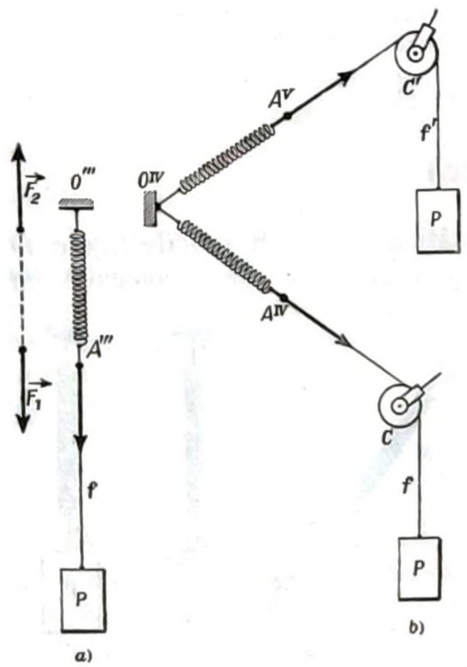


Fig 149.

Pueden producir también la deformación del muelle fuerzas de otra naturaleza. Si, por ejemplo, se cuelga del resorte un pedazo de hierro *P*, el muelle se deforma; pero si debajo del pedazo de hierro *P* se coloca un potente imán, aumenta notablemente la deformación, indicando que a la fuerza-peso se ha añadido una fuerza nueva, magnética.

He aquí dos experimentos muy sencillos:

a] Sea un cuerpo inicialmente en reposo y con libertad de movimiento; por ejemplo, un carrito ligerísimo sobre carriles rectos horizontales. Un hilo y un resorte (figura 150) demuestran que en *A* se ha aplicado una fuerza $\vec{F}$ paralela a la dirección posible del movimiento.

El carrito se mueve en el sentido de la fuerza.

b] A veces sucede que un cuerpo, al principio en reposo, empieza a moverse en una cierta dirección. Tal es el caso del carrito *C*, colocado sobre el plano inclinado *Os* de la figura 151. Se puede impedir el movimiento atando el carrito con un hilo *f*, a lo largo del cual se ha colocado un resorte *D*, fijo en *O*. Este resorte señala la presencia de una fuerza.

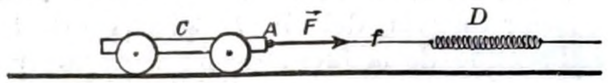


Fig. 150

Supondremos que el resorte *D* mide la fuerza motriz a la que se atribuye el movimiento observado: más precisamente, el muelle aplica en *A* una fuerza igual y contraria a la fuerza motriz.

Si *P* [fig. 149, *a*)] está libre para moverse, e inicialmente fijo, y se *deja* caer, se mueve (cae) según la vertical; *P* está sujeto a la fuerza-peso de parte de la Tierra.

En el experimento de la figura 149, *P* no hace más que transmitir a los puntos *A* a la fuerza-peso que él mismo experimenta por parte de la Tierra y que actúa en el sentido indicado por el hilo de suspensión *f*.

Es igualmente lícito decir que el muelle *D* señala con su alargamiento una fuerza $\vec{F}_1$ aplicada en A''' [fig. 149, *a*)], dirigida hacia abajo y debida al peso del cuerpo *P*, como decir que el muelle *D* señala una fuerza $\vec{F}_2$, igual y contraria a $\vec{F}_1$, aplicada en O''' al soporte del muelle *(reacción)*.

Así, en cada punto del hilo *f* puede imaginarse que están aplicadas dos fuerzas respectivamente iguales a $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$. Análogamente ocurre en el caso de la figura 151.

La *estática* estudia el equilibrio de las fuerzas. ¿En qué casos está fijo un cuerpo al que se le han aplicado fuerzas, y que tendería, por tanto, a moverse por la acción de cada una de éstas?

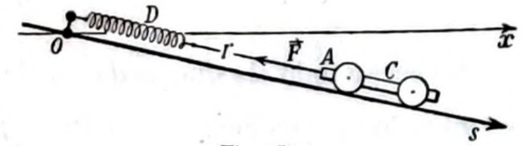


Fig. 151

La manera más cómoda para aplicar las fuerzas a un cuerpo en los experimentos de estática consiste en el uso de hilos, poleas y pesos graduados (por ejemplo, en gramos-peso), como en la figura 149; además, siempre está aplicada al cuerpo su propia *fuerza-peso* de parte de la Tierra *(fuerza de gravedad)*.

En los casos prácticos, las fuerzas en juego son de diversa naturaleza, tales como fuerzas de gravedad, fuerzas eléctricas, magnéticas, de cohesión, de rozamiento, presión del viento, etc.

Estas fuerzas pueden dividirse en varios tipos:

1.º **Fuerzas de campo.** Actúan éstas en cada uno de los puntos de cierto espacio (el *campo*) cuando dichos puntos se encuentran en condiciones físicas particulares. Ejemplo: el *campo de fuerzas de la gravedad*, debido a la acción de la Tierra sobre un punto que esté ocupado por una masa material.

2.º **Fuerzas de superficie.** Actúan éstas sobre todos los puntos de una superficie. Ejemplo: los *rozamientos*, las *fuerzas de contacto*, que, como demuestra la experiencia, se manifiestan siempre que están en contacto y en equilibrio dos cuerpos o dos porciones de materia *A* y *B*. Sea $d\vec{F}$ la fuerza que *A* ejerce sobre *B* a través de la superficie de contacto dS; por reacción, *B* ejerce sobre *A* una fuerza igual y opuesta.

La fuerza $d\vec{F}$ está, en general, inclinada con respecto a dS, y se descompone en una componente $d\vec{F}_n$ normal a dS *(presión total* o *esfuerzo normal total)* y en una componente $d\vec{F}_t$ situada sobre dS *(tensión tangencial total* o *esfuerzo de cortadura total)*.

Podemos referir estos esfuerzos a la unidad de superficie. Se tiene así un *esfuerzo normal unitario* o *presión (específica)* cuya medida es:

$$\sigma = \frac{dF_n}{dS}.$$

Si $d\vec{F}_n$ está dirigido desde A hacia B, la presión es positiva, y si tiene sentido contrario, se dice que la presión (total o específica) es negativa, y se la llama entonces comúnmente *tracción* o *tensión normal* (total o específica).

El esfuerzo de cortadura da origen a un *esfuerzo de cortadura unitario* o *tensión tangencial (específica)*, que viene medida por:

$$\tau = \frac{dF_t}{dS}$$

A veces a todo el esfuerzo $d\vec{F}$ se le llama presión o tensión (total) y a todo el esfuerzo específico $p = \frac{dF}{dS}$ se le denomina presión o tensión (específica).

Se tiene:

$$[\sigma] = [\tau] = [p] = \frac{[F]}{[S]} = [l^{-1} \cdot m \cdot t^{-2}]; \qquad [1]$$

esto es, las presiones y tensiones específicas tienen las dimensiones de una fuerza dividida por una superficie. En un sistema de mediciones coherentes, su unidad de medida es la determinada por la unidad de fuerza al actuar sobre la unidad de superficie. Se tienen, pues, las siguientes unidades coherentes de presión:

$\frac{\text{dina}}{\text{cm}^2}$ = baría en el sistema cm, g, seg;

$\frac{\text{newton}}{\text{m}^2}$ equivalente a 10 barías en el sistema m kg_m, seg, ...

Véase también § 210.

3.º **La tensión superficial** proporciona el ejemplo de una fuerza aplicada a todos los puntos de una línea, aquella por la cual se imagina cortar la lámina líquida ideal a la cual se atribuye la tensión superficial (§ 217).

Las fuerzas más importantes en Física son las *fuerzas de campo*.

Principiaremos la estática por una breve indicación de los *campos de fuerza*.

Pero antes hemos de dedicar algunas líneas a las fuerzas de rozamiento. Éstas, no sólo han enmascarado la simplicidad de las leyes fundamentales de la Mecánica, sino que dificultan la comprobación experimental minuciosa de estas leyes, tanto en Estática como en Dinámica.

§ 78. **Generalidades sobre los rozamientos.** Se distinguen cuatro clases de rozamiento, cuya existencia puede demostrarse con los experimentos siguientes:

1.º Una esfera A, suspendida de un hilo de acero OB (fig. 152), ejecuta oscilaciones de torsión alrededor del eje vertical OC. El espejo S, unido a la varilla AB, soldada rígidamente a la esfera A, permite el estudio de dichas oscilaciones por el método de POGGENDORFF.

Fig. 152

Estas oscilaciones resultan débilmente amortiguadas.

Se repite el experimento sumergiendo la esfera en un líquido L, tal como aceite de vaselina. El líquido moja a la esfera, y ésta no desliza con respecto a la capa de líquido adherente, sino que la arrastra consigo. Las varias capas de líquido concéntricas con la esfera deslizan unas sobre otras.

El amortiguamiento de las oscilaciones es ahora muy notable, y demuestra el *rozamiento interno* o *viscosidad* del líquido.

Cuanto más amortiguadas son las oscilaciones, más *viscoso* es el líquido.

2.º Se deja oscilar en el aire el péndulo OD (figura 153), por ejemplo, entre las posiciones OE y OF. Las oscilaciones son débilmente amortiguadas. Se levanta la superficie sólida $P_1 P_2$ de modo que la esfera tenga que efectuar sus oscilaciones *deslizando* sobre esta superficie.

Las oscilaciones resultan fuertemente amortiguadas, indicando esto que el contacto deslizante entre la esfera D y la superficie $P_1 P_2$ da origen a una fuerza que se opone al movimiento; ésta es la fuerza de *rozamiento de deslizamiento* entre esfera y plano.

3.º Se repite el experimento anterior, de modo que la esfera ruede sobre $P_1 P_2$, lo cual se realiza fácilmente dejando la esfera libre en B (fig. 154) sobre la superficie $P_1 P_2$. El amortiguamiento de las oscilaciones es mayor que el del péndulo OD durante sus oscilaciones libres en el aire, pero no tan fuerte como en el caso anterior. Se tiene *rozamiento de rodadura*.

4.º Por fin, se hace oscilar el péndulo OD (fig. 153) mientras está sumergido en agua. Se observa un amortiguamiento fortísimo, que señala una forma muy compleja de rozamiento: el *rozamiento con el medio*.

Los tres últimos tipos de rozamiento se llaman también *rozamientos externos*.

En los movimientos efectivos (salvo el movimiento de los proyectiles en el vacío y el movimiento de los planetas) siempre existen rozamientos.

Éstos se presentan siempre como un sistema de fuerzas que están aplicadas a los diversos elementos de la superficie del cuerpo móvil y que obstaculizan su movimiento.

Sólo en algunos casos sencillos existe una resultante única de todas estas fuerzas de rozamiento elementales, y se puede hablar entonces de *una* fuerza de rozamiento.

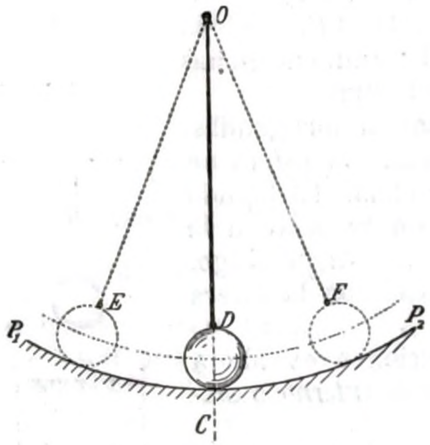


Fig. 153

El trabajo de las fuerzas de rozamiento (ya se reduzcan todas a una resultante, o, más generalmente, a una fuerza y a un par (§ 109), siempre es negativo; es decir, la fuerza de rozamiento absorbe continuamente energía y la transforma en una cantidad equivalente de

Fig. 154

calor; en el contacto de porciones de materia en movimiento relativo, se produce calor debido al rozamiento.

En el caso del rozamiento por deslizamiento (fig. 153), la posición de la esfera al terminar las oscilaciones amortiguadas *no* coincide, en general, con la posición normal de equilibrio que tendría el péndulo cuando OD estuviese vertical. Si la superficie P_1P_2 fuese muy rugosa y se sustituyese el hilo OD por una barra rígida que pudiera resistir una presión un poco grande, ejercida desde P_1P_2 hacia lo alto contra la esfera D, ésta podría permanecer fija en una posición, como OE; esto indicaría que una fuerza (de rozamiento de deslizamiento) anulaba la acción de la componente de la fuerza-peso de la esfera, que quería restituir el péndulo a su posición normal de equilibrio. De modo que, aun en ausencia de movimiento relativo de los dos cuerpos en contacto, puede existir rozamiento de deslizamiento. Lo mismo ocurre con el rozamiento de rodadura.

Por el contrario, en el caso del rozamiento con el medio y del rozamiento interno, el movimiento se amortigua, pero al final se encuentra el péndulo exactamente en su posición de equilibrio, como si no hubiera rozamiento. Estos dos tipos de rozamiento no modifican las condiciones de equilibrio de un cuerpo, porque dependen esencialmente de la velocidad, y se anulan al anularse el movimiento.

Las fuerzas de rozamiento tienen gran importancia, no sólo porque pueden justificar el aparente y continuo desacuerdo entre los resultados experimentales y las leyes de la mecánica, sino también por los numerosos campos de la técnica, en los cuales estas fuerzas tienen un papel preponderante. Recordemos, por ejemplo:

a] el estudio de las deformaciones plásticas que se originan en la laminación y en el trefilado *(rozamiento interno)*;

b] el estudio de los lubricantes *(rozamiento interno)*;

c] el estudio de las máquinas *(rozamientos externos)*;

d] el estudio de la forma de los proyectiles, buques, dirigibles, aeroplanos, automóviles y trenes *(rozamiento con el medio)*.

El rozamiento es perjudicial en muchos casos, pero muchas veces es indispensable: los nudos, tornillos y clavos actúan en virtud del rozamiento; la adherencia de las ruedas motrices de los trenes, la adherencia y dirigibilidad en la marcha a pie, en las bicicletas, en los automóviles y en las transmisiones por correa, son posibles gracias a los rozamientos.

Se crean resistencias intencionadamente en los variados tipos de *amortiguadores* empleados en muchos aparatos de medida (por ejemplo, en la balanza, § 44) para evitar que el equipo móvil oscile demasiado tiempo antes de alcanzar la posición definitiva que permite la lectura sobre la escala.

Las resistencias creadas así artificialmente no deben influir en absoluto en la posición final del equipo móvil. Se emplean amortiguadores de aire (fig. 81) o de líquido, que aprovechan el rozamiento con el medio y el rozamiento interno; también se emplean a menudo amortiguadores electromagnéticos (véase tomo II; véase también figura 75, *ELL*).

A. — CAMPOS VECTORIALES

§ **79. Campos de fuerzas.** Toda porción de espacio en cada punto del cual se ejerce una fuerza de determinada naturaleza constituye un *campo de fuerzas*. Los ejemplos más importantes son: el *campo gravitatorio*, que actúa sobre masas materiales o, como ahora se dice, sobre masas inerciales (§ 115), y es debido a otras masas inerciales (por ejemplo, a la Tierra); el *campo electrostático*, que obra sobre masas eléctricas y es debido a otras masas eléctricas; el *campo magnético* que actúa sobre masas magnéticas y se debe a otras masas magnéticas o a corrientes eléctricas.

Para mayor sencillez consideraremos solamente *campos constantes respecto al tiempo*: la fuerza $\vec{F}$ en cada punto $A\ (x, y, z)$ del campo es un vector función de las coordenadas x, y, z, pero no del tiempo.

Pero basta pensar en el campo magnético creado por una corriente eléctrica variable con el tiempo para comprender cuánto interés tiene también el caso, más complejo, de *campo variable*, no sólo con el lugar A, sino también con el tiempo t.

La fuerza $\vec{F}$ se ejerce sobre el punto A, porque en A está situada una masa m inercial ($m > 0$), eléctrica ($m > 0$ ó $m < 0$) o magnética ($m > 0$ ó $m < 0$), según la naturaleza del campo considerado.

En todos estos casos demuestra la experiencia (CAVENDISH, COULOMB) que la fuerza del campo $\Delta \vec{F}$ que actúa sobre una masa Δm, concentrada en A y bastante pequeña, es directamente proporcional a Δm:

$$\Delta \vec{F} = \vec{H} \cdot \Delta m \, ; \qquad [1]$$

en donde $\vec{H}$ es constante respecto a Δm, pero es función de x, y, z.

Para definir un campo de fuerzas hay que dar el vector $\vec{H}\,(x, y, z)$ en cualquier punto del mismo, y para individualizar este vector habrá que suponer conocidas sus componentes:

$$H_x = H_x\,(x, y, z), \quad H_y = H_y\,(x, y, z), \quad H_z = H_z\,(x, y, z). \qquad [2]$$

Admitiremos que tanto la porción de espacio en donde está definido el campo de fuerzas, como la función $\vec{H}\,(x, y, z)$, son tan regulares como sea necesario para que sean legítimas las consideraciones de los párrafos que siguen.

Si Δm no es muy pequeño, la [1] vale todavía para el campo gravitatorio, pero no para los campos eléctrico y magnético, a causa de las inducciones eléctrica y magnética, que suponen perturbaciones que la masa Δm produce en la distribución de las masas eléctricas o magnéticas que crean el campo. Por esta circunstancia, se debe suponer siempre, en los dos últimos campos de fuerzas, que la masa Δm, sobre la cual actúa el campo, es siempre infinitesimal. La [1] se escribe entonces:

$$d\vec{F} = \vec{H} \cdot dm, \qquad [3]$$

y se obtiene:

$$\vec{H} = \frac{d\vec{F}}{dm}. \qquad [4]$$

$\vec{H}$ se llama *intensidad del campo*, y también (de una manera más simple, aunque incorrecta) *campo* en el punto A, y es un vector paralelo a $d\vec{F}$, porque dm es un escalar; $d\vec{F}$ y $\vec{H}$ son paralelos y del mismo sentido cuando $dm > 0$, siendo paralelos y de sentido opuesto cuando $dm < 0$. Si se puede concentrar en A la masa $\Delta m = +1\,[m]$, sin que se perturbe sensiblemente el campo actuante, esto es, sin que deje de ser válida la [1], se tiene con suficiente aproximación:

$$\vec{H} = (\Delta \vec{F})_{\Delta m = 1\,[m]} \qquad [5]$$

de modo que la *intensidad del campo es la de la fuerza que actúa sobre la unidad positiva de masa.*

Para mayor sencillez, supondremos corrientemente que nos hallamos en este caso. Una suposición análoga sería imaginar que en cualquier caso (y no sólo en el movimiento uniforme) la velocidad fuese el espacio recorrido en la unidad de tiempo.

Si las fuerzas se miden en dinas, H queda medido en *dinas por unidad de masa.*

Por ejemplo, en todos los puntos próximos a la Tierra se tiene para cualquier cuerpo:

$$\vec{P} = m \cdot \vec{g} \, ;$$

en donde $\vec{P}$ es el peso del cuerpo; m, su masa inercial, y $\vec{g}$, la aceleración de la gravedad. En el sistema CGS, m viene medida en g_m; g, en $\frac{cm}{seg^2}$, y P, en dinas.

De modo que

$$\vec{g} = \vec{H}$$

es el *vector aceleración de la gravedad*; da en los diversos puntos la intensidad $\vec{H}$ del campo de la fuerza-peso o *campo de la gravedad terrestre* (§ 174).

Dadas la intensidad y la masa sujeta al campo, la [1] da la fuerza que actúa sobre esta última.

Lo que caracteriza y determina el campo de fuerzas es el vector H *(vector campo)* que no es una fuerza; en efecto, se tiene dimensionalmente:

$$[H] = \frac{[F]}{[m]} \qquad [6]$$

A menudo hay quien llama *fuerza del campo* al vector $\vec{H}$, lo que origina una confusión entre los conceptos de «fuerza» e «intensidad del campo». Es preciso comprender bien que el campo de $\vec{H}$ no es un «campo de fuerzas», según se dice por inveterada costumbre.

Habida cuenta, además, de que el vector $\vec{H}$ puede asumir también otros significados físicos (puede ser una velocidad, una densidad de corriente eléctrica, una inducción magnética, ...), se habla, en

general, de *campo vectorial* (§ 93). Las consideraciones de carácter puramente analítico que siguen, tienen validez independientemente del significado físico del vector $\vec{H}$, por más que la terminología imperante (flujo de fuerza, líneas de fuerza, ...) derive del significado físico que se atribuye al vector $\vec{H}$, al considerarlo como una fuerza.

Para fijar las ideas en un caso físico determinado, se continuará suponiendo que $\vec{H}$ es la intensidad de un campo de fuerzas.

Si dos campos $\vec{H}_1$ y $\vec{H}_2$ de igual naturaleza (de gravedad, eléctricos, o magnéticos) actúan sobre la misma masa dm colocada en A, el campo resultante es la suma vectorial de los campos componentes:

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2. \qquad [7]$$

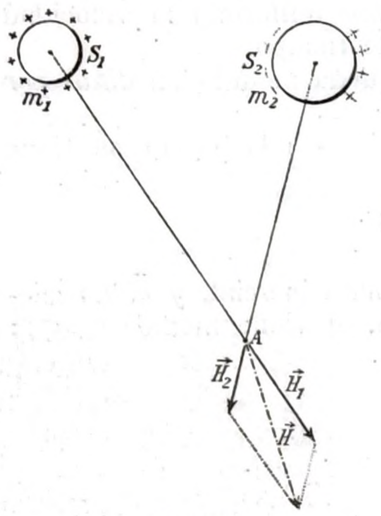


Fig. 155

Por ejemplo: sea el campo (geométrico, esto es, el espacio en donde obran las fuerzas) constituído por la región exterior a dos esferas metálicas S_1, S_2 (figura 155), por ejemplo, en el vacío.

Si damos una carga eléctrica m_1 únicamente a la esfera S_1, se origina en A un campo eléctrico $\vec{H}_1$, debido a la carga m_1 y a las cargas inducidas que se manifiestan en S_2 por efecto de m_1.

Si se da únicamente la carga m_2 a la esfera S_2, se tiene en A un campo $\vec{H}_2$, debido a la carga m_2 y a las cargas inducidas que se manifiestan en S_1.

Si se comunica simultáneamente la carga m_1 a la esfera S_1 y la carga m_2 a la esfera S_2, se tiene en A el campo:

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2.$$

§ 80. Línea y tubo de fuerza. Se llama *línea de flujo* a una línea que, en todos sus puntos, tiene por tangente el vector $\vec{H}$; *sentido* de la línea de flujo es el corresponde a $\vec{H}$. La línea de flujo es también tangente a $d\vec{F}$; pero sólo tiene el sentido de $d\vec{F}$ si es $dm > 0$; en tal caso, se denomina *línea de fuerza*.

Si se exceptúan los puntos singulares (§ 96, *a*]), en todos los puntos del campo existe una línea de flujo, y sólo una.

Por ejemplo, en el campo de la gravedad, la vertical en cualquier punto, dirigida hacia abajo, determina la tangente y el sentido de la línea de flujo, que aquí coincide con la línea de fuerza; tal vertical coincide con la línea de fuerza, ya que ésta, en primera aproximación, puede considerarse como una recta.

Si se considera en el campo una línea cerrada s_1 (fig. 156) y se trazan líneas de flujo por todos sus puntos, se obtiene un *tubo de flujo*.

Puede también ocurrir, como caso particularísimo, que el tubo de flujo así creado tenga una sección nula, como ocurre, por ejemplo, en el campo de la gravedad, si s_1 es una línea cerrada dibujada en un plano vertical.

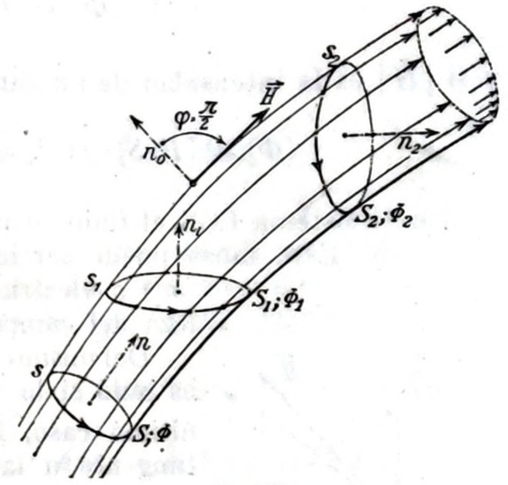


Fig. 156

§ 81. Flujo del vector $\vec{H}$. Considérese en el campo una superficie elemental dS (figura 157), y fijemos sobre la normal n a dS un sentido positivo; en este caso, también queda determinado el sentido positivo de rotación a lo largo del perímetro de dS, y viceversa. La relación entre estos dos sentidos positivos se entiende que es la fijada por «el hombre de» AMPÈRE: para un hombre apoyado sobre dS, de modo que el eje n le penetre por los pies y le salga por la cabeza, el sentido positivo del perímetro de dS es el sentido antirreloj.

Así se está en condiciones de definir también un vector $d\vec{S}$, cuya magnitud es dS y cuya dirección es la fijada sobre la normal n; cualquier punto de dS puede ser un punto de aplicación, que queda así indeterminado.

Un elemento de área dS, sobre cuyo contorno se ha fijado el sentido positivo, tiene todos los caracteres de un vector. Obsérvese que entonces puede atribuirse signo a las dos *caras* de la superficie $d\vec{S}$: cara positiva es aquella que debe mirar el observador para que vea como antirreloj el sentido fijado sobre el contorno; o, también, cara positiva es aquella de donde *sale* la normal n.

Si se supone que $\vec{H}$ es función regular de x, y, z, puede suponerse constante este vector en todos los puntos de la superficie infinitesimal dS.

Se llama *flujo del vector campo* $\vec{H}$ (y también se llama *flujo de fuerza*) $d\Phi$, a través de dS, al producto escalar

$$d\Phi = \vec{H} \cdot d\vec{S} = |H| \cdot \cos\varphi \cdot |dS| = H_n \cdot |dS|; \qquad [1]$$

en donde φ es el ángulo entre $\vec{H}$ y $d\vec{S}$, o, si de prefiere, entre $\vec{H}$ y el eje n; $|H|$ y $|dS|$ son magnitudes siempre positivas; cos φ y, por tanto, $d\Phi$ son positivos o negativos, según que $\vec{H}$ y n tengan el mismo sentido o sentidos contrarios. Si cambia el sentido fijado sobre n, cambia el signo de cos φ, y entonces cambia de signo $d\Phi$.

En dimensiones se tiene:

$$[\Phi] = [H]\,|\cdot[S];$$

y si $|\vec{H}|$ es la intensidad de un campo de fuerzas, es:

$$[\Phi] = [F\cdot S]\cdot[m^{-1}] = [l^3\cdot m\cdot t^{-2}]\cdot[m^{-1}].$$

En el sistema CGS el flujo se mide en $dinas\cdot cm^2$ por unidad de masa $[m]$. Esta masa puede ser inercial (esto es, coincidente con $[m]$) o eléctrica, o magnética, según la naturaleza del campo de fuerzas.

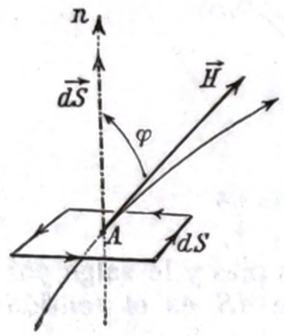


Fig. 157

Del mismo modo que el trabajo (§ 52, 2º), $d\Phi$ es nulo si lo son $|H|$ o $|dS|$, o cos φ. En este último caso, $\vec{H}$ es perpendicular a $d\vec{S}$, o sea tangente a la superficie dS (1); esto sucede, en particular, para las paredes de un tubo de flujo; luego, a través de éstas, el flujo es nulo.

El flujo Φ del vector $\vec{H}$ que atraviesa una superficie S, es, por definición:

$$\Phi = \int_S \vec{H}\cdot d\vec{S} = \int_S H_n\cdot|dS| = \int_S |H|\cdot\cos\varphi\cdot|dS|\,; \qquad [2]$$

en donde $|H|$ y φ son funciones de los puntos de la superficie S; la normal n se entenderá dirigida en sentido concordante para todos los elementos de la superficie S.

El flujo [2] puede expresarse también en forma cartesiana.

Sean x, y, z, las coordenadas del punto A situado sobre la superficie S, a través de la cual se quiere expresar el flujo; sean cos (xn), cos (yn) y cos (zn) los cosenos directores del eje n; cos (xH), cos (yH) y cos (zH) los cosenos directores de $\vec{H}$. Se tiene (§ 52, [6]):

$$d\Phi = H_x(x,y,z)\cdot dS_x + H_y(x,y,z)\cdot dS_y + H_z(x,y,z)\cdot dS_z, \qquad [3]$$

(1) Obsérvese la enorme influencia de la flechita: $\vec{H}$ es normal a $d\vec{S}$, pero es tangente a dS.

en donde $H_x(x,y,z)$, $H_y(x,yc\,z)$, $H_z(x,y,z)$ son las componentes de $\vec{H}$ y $dS_x = dS\cdot\cos(xn)$; $dS_y = dS\cdot\cos(yn)$; $dS_z = dS\cdot\cos(zn)$, las componentes de $d\vec{S}$, o sean las proyecciones de dS sobre los tres planos coordenados (yz), (zx), (xy), respectivamente.

Se tiene, pues:

$$\Phi = \int_{S_x} H_x\cdot dS_x + \int_{S_y} H_y\cdot dS_y + \int_{S_z} H_z\cdot dS_z;$$

o también, convencionalmente:

$$\Phi = \int_S (H_x\cdot dS_x + H_y\cdot dS_y + H_z\cdot dS_z),$$

recordando que en donde las integrales son límites de sumas extendidas a las proyecciones de todos los elementos dS que constituyen la superficie S sobre los planos (yz), (zx), (xy), respectivamente.

El cálculo integral enseña que puede también escribirse:

$$\Phi = \int_S \{H_x(x,y,z)\,dy\,dz + H_y(x,y,z)\,dz\,dx + H_z(x,y,z)\,dx\,dy\}\,; \qquad [4]$$

en donde las proyecciones del elemento superficial dS han tomado la forma $dy\cdot dz$, $dz\cdot dx$ y $dx\cdot dy$, respectivamente.

Para un elemento de superficie dS normal al eje de las x, se tiene:

$$dS_y = dS_z = 0, \qquad dS_x = dS = dy\,dz,$$

y la [3] se escribe:

$$d\Phi = H_x(x,y,z)\cdot dy\,dz. \qquad [5]$$

Finalmente, imagínese una sección S (fig. 156) normal en todos sus puntos a las líneas de flujo que constituyen un tubo. Entonces es $\varphi = 0$, y por lo tanto:

$$d\Phi = |H|\cdot|dS| \qquad [6]$$

$$\Phi = \int_S |H|\cdot|dS|. \qquad [7]$$

Se puede dar en un dibujo una idea cuantitativa del valor de Φ trazando a través de S un número de líneas de flujo igual al número

que mide Φ en el sistema de medidas elegido. En este sentido se hablará del *número de líneas de flujo* que atraviesan una superficie.

De la [6], suponiendo que sea válida para $|dS| = 1\,|S|$, es decir, que $\vec{H}$ sea prácticamente constante en toda una superficie $|dS|$ igual a la superficie unidad $[S]$, se tiene:

$$\Phi_1 = (d\Phi)_{dS=1\,[S]} = |H|\,; \qquad [8]$$

luego, según nuestros convenios, *el número de líneas de flujo que atraviesan la unidad de superficie de la sección normal de un tubo de flujo mide el módulo de la intensidad del campo*. La intensidad del campo *en las diversas partes de la sección S* se deduce de lo apretadas que se encuentren las líneas de flujo dibujadas en cada zona del tubo. Véase tambien § 87.

§ 82. Flujo saliente; divergencia. En particular, sea S una superficie cerrada. Se conviene en considerar que la normal n está dirigida hacia el exterior de S; entonces el flujo [2], § 81, se llama flujo *saliente* de S, y es la suma de los infinitos flujos elementales $d\Phi$ que parten de cada uno de los elementos dS de la superficie S. Cada flujo elemental saliente $|H|\cdot\cos\varphi\cdot|dS|$ es positivo (el flujo es efectivamente *saliente*) o negativo (el flujo es efectivamente *entrante*), según que cos φ sea positivo o negativo; esto es, según que el sentido de $\vec{H}$, en el elemento considerado, concuerde o no con $d\vec{S}$, es decir, con la normal n dirigida hacia el exterior de la superficie cerrada S.

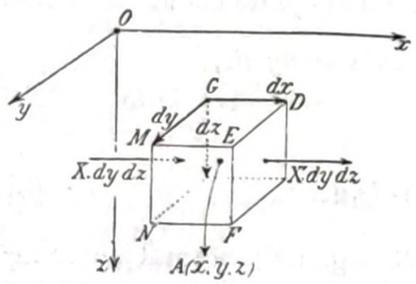


Fig. 158

Se considera como superficie cerrada dS la de un paralelepípedo trirrectángulo de centro $A\ (x, y, z)$ (figura 158), orientado según los ejes y de aristas dx, dy, dz; tal superficie está constituída por seis elementos (caras) que son iguales y paralelas dos a dos. Sean $GMN = DEF = dy\,dz$ dos caras iguales y paralelas. El flujo *saliente* de dS a través de GMN es $-H_x\cdot dy\,dz$, y, a través de DEF, es $+H'_x\cdot dy\,dz$; en donde H'_x es el valor de la componente paralela al eje x del campo que actúa en los puntos de DEF.

Se tiene, pues:

$$H'_x = H_x + \frac{\partial H_x}{\partial x}\cdot dx,$$

y la suma algebraica de los flujos salientes de las dos superficies GMN, DEF, es:

$$-H_x\cdot dy\,dz + \left(H_x + \frac{\partial H_x}{\partial x}\cdot dx\right)dy\,dz = \frac{\partial H_x}{\partial x}\cdot dx\,dy\,dz.$$

El flujo total saliente por las seis caras del paralelepípedo es:

$$d\Phi = \frac{\partial H_x}{\partial x}\cdot dx\,dy\,dz + \frac{\partial H_y}{\partial y}\cdot dx\,dy\,dz + \frac{\partial H_z}{\partial z}\cdot dx\,dy\,dz\,; \qquad [1]$$

en donde $dx\,dy\,dz$ es el volumen dv del paralelepípedo.

Se denomina *divergencia* de $\vec{H}$, que se escribe div $\vec{H}$, en el punto A, el

$$\lim_{\Delta v=0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta v} = \frac{d\Phi}{dv}\,;$$

es decir, el flujo saliente referido a la unidad de volumen; «grosso modo», div $\vec{H}$ es el flujo saliente de la unidad de volumen.

En dimensiones, tenemos:

$$[\text{div}\ \vec{H}] = [\Phi\cdot v^{-1}] = [H\cdot S\cdot v^{-1}] = [H\cdot l^{-1}]. \qquad [2]$$

Luego, se tiene:

$$\text{div}\ \vec{H} = \frac{d\Phi}{dv} = \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z};\ d\Phi = \text{div}\ \vec{H}\cdot dv. \qquad [3]$$

Se demuestra que se llegaría al mismo límite, aunque el volumen dv no tuviese la forma de un paralelepípedo trirrectángulo.

§ 83. Relación de Gauss. La porción de espacio que constituye el campo puede estar *privada* o bien *dotada de cavidades*. En este último caso, hay, en definitiva, algún hoyo que ha de considerarse como espacio no perteneciente al campo. En el primer caso, una superficie cerrada S cualquiera, trazada toda ella en el campo, abarca en su interior un volumen que pertenece por entero al campo. Por analogía con el caso del § 86, cuando esto ocurre, se dice que el campo es de *conexión superficial simple* (esto es, controlada mediante una simple superficie S).

En el segundo caso, cuando una superficie cerrada S contiene una cavidad, no todo el volumen interno de S pertenece al campo.

Consideremos una superficie cerrada S trazada en el campo del vector $\vec{H}$, en particular en un campo de fuerzas. Se supone que S no contiene cavidad alguna (fig. 159).

Se divide el volumen v, encerrado en S, en prismas de sección rectangular infinitesimal $dy \cdot dz$, mediante planos paralelos a los planos coordenados xz, xy. Supondremos, para mayor sencillez, que cada prisma infinitesimal ξ_1, ξ_2, corta a S solamente en dos sitios, dS_1 y dS_2; en la figura se indican también las normales n_1 y n_2 a estos elementos de superficie, dirigidas hacia el exterior de S.

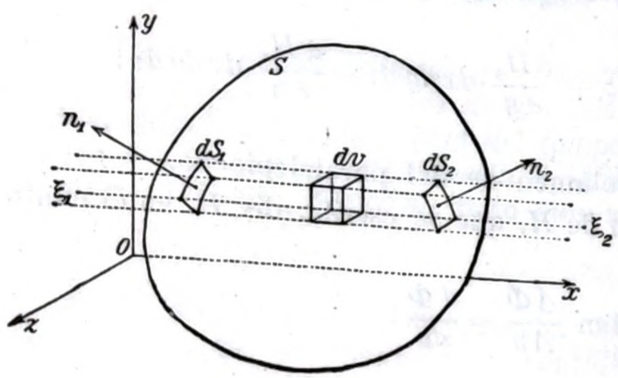


Fig. 159

Estos prismas infinitesimales se subdividen después por medio de planos paralelos al plano yz. Así, el volumen v, situado en el interior de S, queda subdividido en elementos $dv = dx \cdot dy \cdot dz$.

El flujo saliente de uno de estos elementos de volumen es (§ 82 [3]):

$$d\Phi = \operatorname{div} \vec{H} \cdot dv.$$

Imaginemos los flujos que salen de todos los elementos dv del prisma dS_1, dS_2; los flujos que atraviesan las paredes de contacto de los paralelepípedos dv, contiguos, se neutralizan dos a dos, porque un mismo flujo se cuenta una vez como saliente de un elemento dv y otra vez como saliente del elemento contiguo, rzsultando ambos flujos iguales y opuestos. Quedan los flujos salientes de dS_1, dS_2, y de las paredes laterales del prisma dS_1, dS_2.

Repitiendo el razonamiento para los prismas sucesivos, todos paralelos al eje x, que constituyen el volumen v, se efectuará la suma de los flujos salientes de todos estos prismas; también ahora los flujos salientes de las paredes de contacto de los prismas contiguos se neutralizan dos a dos; luego, la suma de los flujos salientes de todos los elementos de volumen situados en el interior de S se reduce a la suma de los flujos salientes de los elementos dS de la superficie S.

$$\int_v \operatorname{div} \vec{H} \cdot dv = \int_v d\Phi = \int_S \vec{H} \cdot d\vec{S}. \qquad [1]$$

Ésta es la *relación de Gauss*, que liga el flujo saliente de una superficie cerrada $\int \vec{H} \cdot d\vec{S}$ (integral de superficie) con la suma $\int_v \operatorname{div} \vec{H} \cdot dv$ de los flujos salientes de cada elemento dv del volumen v encerrado en S (integral de volumen).

Para que haya flujo de $\vec{H}$ saliente de una superficie cerrada, es necesario que en algún punto, por lo menos, de su interior, se tenga $\operatorname{div} H \neq O$. Los puntos en los cuales $\operatorname{div} \vec{H} > O$, pueden considerarse como *manantiales* en los cuales el flujo se crea y rebosa; los puntos en donde $\operatorname{div} \vec{H} < O$, se comportan como pozos o *sumideros* en los cuales el flujo es engullido y desaparece.

§ 84. Trabajo; integral de línea. Para mayor sencillez, supongamos que el campo vectorial (por ejemplo, el campo de fuerzas) sea *plano*, es decir, que esté definido solamente para los puntos de un plano (el de la figura 160), en el cual se encuentra situado también el vector $\vec{H}$. Si la masa dm concentrada en $A(x, y)$ se traslada una distancia $d\vec{l}$ hasta $A'(x + dx, y + dy)$, la fuerza del campo $d\vec{F} = \vec{H} \cdot dm$ efectúa un trabajo:

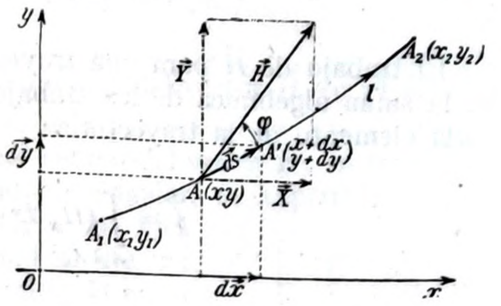


Fig. 160

$$d\mathcal{L} = d\vec{F} \cdot d\vec{l} = dm \cdot \vec{H} \cdot d\vec{l} = dm \cdot |H| \cdot |dl| \cdot \cos\varphi; \qquad [1]$$

donde φ es el ángulo entre $\vec{H}$ y $d\vec{l}$; $d\vec{l}$ debe ser infinitesimal para que $\vec{H}$ y $\cos\varphi$ puedan suponerse constantes en todos los puntos de $d\vec{l}$; $|\vec{H}|$ y $|dl|$ son los módulos de los vectores $\vec{H}$ y $d\vec{l}$.

Por tanto,

$$d\ell = \frac{d\mathcal{L}}{dm} = \vec{H} \cdot d\vec{l} = |H| \cdot |dl| \cdot \cos\varphi \qquad [2]$$

es el trabajo de la intensidad $\vec{H}$ del campo, o sea el trabajo referido a la unidad de masa. Aunque $d\ell$ no sea un trabajo, sino un trabajo $d\mathcal{L}$ dividido por una masa dm, se suele tratar todavía a $d\ell$ como si fuese un trabajo, de la misma manera que corrientemente se llama a $\vec{H}$ «fuerza» del campo (§ 79).

Siempre que pueda suponerse válida la fórmula [5] del § 79, puede decirse que la [2] expresa el trabajo elemental de la fuerza

del campo $(\Delta\vec{F})_{\Delta m = 1\,[m]} = \vec{H}$, durante el corrimiento $d\vec{l}$ de la unidad positiva de masa.

Sean H_x, H_y las componentes de $\vec{H}$ según los ejes (fig. 160); en general, H_x, H_y son funciones de x e y; las componentes de $d\vec{l}$ son dx, dy, y, además,

$$\cos\varphi = \cos(xl)\cos(xH) + \cos(xl)\cos(yH).$$

Luego (§ 52, [6]):

$$d\ell = H_x \cdot dx + H_y \cdot dy. \qquad [3]$$

El trabajo de $\vec{H}$ para una trayectoria l, que va desde A_1 a A_2, es la suma algebraica de los trabajos elementales $d\ell$ a lo largo de cada elemento de la trayectoria:

$$\ell = \int_{A_1 l A_2} (H_x\,dx + H_y\,dy). \qquad [4]$$

Si el campo no es plano, en el espacio se tiene también como expresión del trabajo elemental:

$$d\ell = \vec{H}\cdot d\vec{l} = |H|\cdot|dl|\cdot\cos\varphi;$$

en componentes cartesianas se tiene:

$$d\ell = H_x\,dx + H_y\,dy + H_z\,dz, \qquad [5]$$

y para una trayectoria finita l, cuyos extremos son $A_1(x_1, y_1, z_1)$ y $A_2(x_2, y_2, z_2)$, resulta:

$$\ell = \int_{A_1 l A_2} (H_x\,dx + H_y\,dy + H_z\,dz). \qquad [6]$$

Tal es la expresión del trabajo referido al transporte de la unidad de masa, desde A_1 a A_2 *a lo largo de la trayectoria* $A_1\,l\,A_2$.

Puesto que $d\vec{l}$ cambia de sentido y dx, dy, dz cambian de signo, el trabajo $\ell_{A_2 l A_1}$, a lo largo de la trayectoria $A_2\,l\,A_1$, es:

$$\ell_{A_2 l A_1} = \int_{A_2 l A_1} (H_x\cdot dx + H_y\cdot dy + H_z\cdot dz) = -\ell_{A_1 l A_2}. \qquad [7]$$

§ 85

Si el vector $\vec{H}$ no tiene el significado de fuerza (referida a la unidad de masa), [6] ya no tiene el significado de trabajo (referido a dicha unidad), y se llama, en general, *integral de línea* del vector $\vec{H}$ a lo largo de l.

§ 85. **Circulación; rotacional.** La trayectoria l (plana o no) puede ser cerrada, es decir, puede tratarse de un perímetro recorrido en un cierto sentido por la unidad positiva de masa; en este caso, A_1 y A_2 coinciden. El trabajo se escribe:

$$\ell = \oint_l (H_x\,dx + H_y\,dy + H_z\,dz) \qquad [1]$$

y se llama, en valor y signo, *circulación* del vector $\vec{H}$ en el sentido fijado sobre el recorrido.

Sea A (fig. 161) un punto del campo del vector $\vec{H}$; en torno a A se considera un elemento plano, rectangular, de superficie dS_x, de lados paralelos, respectivamente, a los ejes y, z. El elemento dS_x es normal al eje x; la normal n a dS_x se supondrá dirigida en el mismo sentido que el positivo de x.

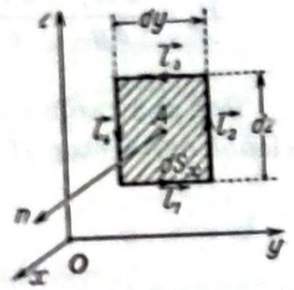


Fig. 161

Se toma como línea l, cerrada, el contorno rectangular de dS_x; $\vec{l}_1$, $\vec{l}_2$, $\vec{l}_3$, $\vec{l}_4$ son sus lados; $\vec{H}_1$, $\vec{H}_2$, $\vec{H}_3$, $\vec{H}_4$, las intensidades del campo $\vec{H}$ correspondientes.

Entonces la circulación de $\vec{H}$ a lo largo del contorno de dS_x es:

$$\oint_{dS_x} \vec{H}\cdot d\vec{l} = \vec{l}_1\cdot\vec{H}_1 + \vec{l}_2\cdot\vec{H}_2 + \vec{l}_3\,\vec{H}_3 + \vec{l}_4\cdot\vec{H}_4.$$

Pero aplicando [6], § 52, se tiene inmediatamente:

$$\vec{l}_1\cdot\vec{H}_1 = dy\cdot H_{1y}; \qquad \vec{l}_2\vec{H}_2 = dz\cdot H_{2z};$$
$$\vec{l}_3\cdot\vec{H}_3 = -\,dy\cdot H_{3y}; \qquad \vec{l}_4\cdot\vec{H}_4 = -\,dz\cdot H_{4z};$$

en donde H_{1y} es la componente sobre el eje y de $\vec{H}_1$; H_{3y}, H_{2z}, H_{4z} tienen un significado análogo.

Además, se tiene:

$$H_{3y} = H_{1y} + \frac{\partial H_y}{\partial z}\cdot dz; \qquad H_{2z} = H_{4z} + \frac{\partial H_z}{\partial z}\cdot dy.$$

De donde:

$$\oint_{dS_x} \vec{H}\cdot d\vec{l} = \frac{\partial H_z}{\partial y}\cdot dy\,.\,dz - \frac{\partial H_y}{\partial y}\cdot dy\cdot dz = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right) dS_x. \quad [2]$$

Análogamente, para superficies elementales dS_y, dS_z respectivamente normales a los ejes y, z, se encontraría:

$$\left.\begin{aligned} \int_{dS_y} \vec{H}\cdot dl &= \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\cdot dS_y \\ \int_{dS_z} H\, dl &= \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\cdot dS_z \end{aligned}\right\}. \quad [3]$$

Considérese el vector $\vec{R} = \vec{R}(x, y, z)$ definido por las tres componentes:

$$R_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}, \quad R_y = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial z}, \quad R_z = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}. \quad [4]$$

Por una razón que veremos en el § 93, este vector se llama *rotacional* del vector $\vec{H}$ y se escribe:

$$\vec{R} = \text{rot}\ \vec{H}, \quad [5]$$

o también (§ 52, [2]):

$$\vec{R} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\cdot \vec{i} + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\cdot \vec{j} + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\cdot \vec{k}. \quad [6]$$

De [4] y [3], § 82, resulta que la divergencia y el rotacional de un vector $\vec{H}$ son equidimensionales.

Recordando [1], § 81, la [2] puede escribirse:

$$\oint_{dS_x} \vec{H}\cdot d\vec{l} = R_x\cdot dS_x = \vec{R}\cdot d\vec{S_x} = d\,\Phi_{\vec{R}}. \quad [7]$$

La circulación de $\vec{H}$ a lo largo del contorno de dS_x es el flujo del vector rot $\vec{H} = \vec{R}$ a través de la superficie elemental dS_x.

De [3] se deduce que esto es también válido para superficies elementales normales a los ejes y o z, y, puesto que los ejes se han elegido arbitrariamente, es asimismo válido para cualquier eje ξ;

§ 86

por consiguiente, es válido para superficies elementales dS_ξ, de contornos no rectangulares (con tal de que no sean excesivamente caprichosos):

$$\oint_{dS_\xi} \vec{H}\cdot d\vec{l} = d\,\Phi_{\vec{R}} = R_\xi\cdot dS_\xi. \quad [8]$$

Es decir: *la circulación de $\vec{H}$ a lo largo del perímetro de un área elemental dS_ξ es igual al flujo del vector $\vec{R} = rot\ \vec{H}$ a través de dicha área.*

De [8] se desprende:

$$R_\xi = \frac{d\,\Phi_{\vec{R}}}{dS_\xi} = \frac{\oint_{dS_\xi} \vec{H}\cdot d\vec{l}}{dS_\xi}; \quad [9]$$

o sea: *la componente R_ξ del vector $\vec{R} = rot\ \vec{H}$ mide la circulación de $\vec{H}$ a lo largo del perímetro del elemento de superficie dS_ξ normal al eje ξ*, circulación referida a la unidad de superficie.

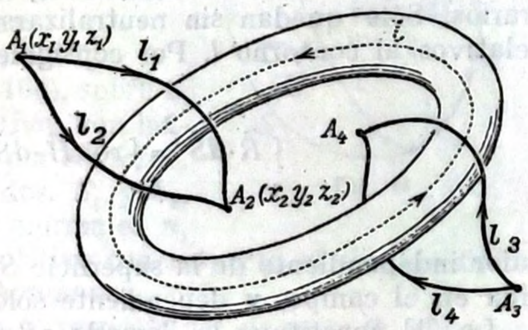


Fig. 162

§ 86. **Relación de Stokes.** Es de notar que la porción de espacio que constituye el campo puede ser *simple* o *múltiplemente conexa*.

En el primer caso, una línea cerrada cualquiera $l_1\ l_2$, trazada toda ella en el campo, puede constituir el contorno completo de, por lo menos, una superficie S toda ella sumergida en el campo. Por ejemplo: se encuentra en este caso un campo constituído por el volumen interno de una esfera. Se dice que el campo es de *conexión lineal simple* (esto es, controlada mediante una simple línea $l_1\ l_2$).

En el segundo caso existe, por lo menos, alguna línea cerrada que no puede ser contorno de alguna superficie S sumergida toda ella en el campo.

Así, el campo constituído por el volumen interno de un anillo (fig. 162) no es simplemente conexo; la línea cerrada l no puede ser contorno de ninguna superficie S, que esté situada toda ella dentro del anillo. Un campo indefinido al que se suprime una porción de

espacio en forma de anillo, no es tampoco simplemente conexo; una línea tal como la $l_1\ l_2$ puede ser contorno de una superficie S completamente sumergida en el campo; pero no ocurre lo mismo con una línea como la $l_3\ l_4$ que esté «encadenada» con el anillo.

Considérese una línea cerrada l (fig. 163), sobre la cual se ha fijado un sentido positivo, que sea contorno de una superficie S sumergida toda en el campo.

El flujo de $\vec{R}$ a través de S es $\int_S \vec{R}\cdot d\vec{S}$, suma de los flujos elementales $\vec{R}\cdot d\vec{S}$, que atraviesan cada uno de los elementos dS en que se puede imaginar subdividida la superficie S; cada flujo elemental mide la circulación de $\vec{H}$ a lo largo del contorno del área elemental dS. El flujo total mide, pues, la suma de las circulaciones de $\vec{H}$ a lo largo de los infinitos contornos seudorrectangulares de los infinitos elementos dS en que se ha dividido S. Pero los elementos de circulación a lo largo de los lados comunes de rectángulos elementales contiguos dS, dS' son iguales y contrarios. Sólo quedan sin neutralizarse los elementos de circulación relativos al contorno l. Por consiguiente:

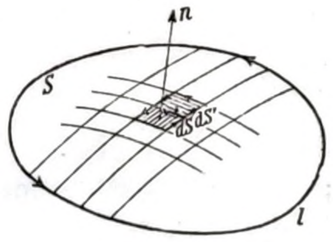


Fig. 163

$$\int_S \vec{R}\cdot d\vec{S} = \int_S \operatorname{rot}\vec{H}\cdot d\vec{S} = \oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l}, \qquad [1]$$

valor independiente de la superficie S, porque está toda ella sumergida en el campo, y dependiente sólo de su contorno l.

La [1] constituye la llamada *relación de* Stokes: *la circulación de un vector $\vec{H}$ a lo largo del contorno l es igual al flujo del vector rot $\vec{H}$ a través de cualquier superficie S cuyo contorno sea l.*

El que el flujo del vector $\vec{H}$ sólo dependa del contorno l de la superficie S, y no de la forma de esta superficie, se debe a que el rotacional, rot $\vec{H}$, es siempre solenoidal (§ 87).

Mientras la relación de Gauss (§ 83) transforma una integral de superficie en una de volumen, la relación de Stokes convierte una integral de línea en otra de superficie.

§ 87. **Campos solenoidales, o conservativos para el flujo.** Un vector $\vec{H}$ y su campo se llaman *solenoidales* cuando es nulo el flujo que sale de cualquier superficie cerrada S sumergida en el campo.

Si éste está desprovisto de cavidades (§ 83), la condición necesaria y suficiente para que $\vec{H}$ sea solenoidal es que, en todo punto de campo, se tenga:

$$\operatorname{div}\vec{H} = \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0. \qquad [1]$$

La condición es necesaria a causa de [3], § 82: si en un elemento de volumen dv fuese div $\vec{H} \neq 0$, el flujo saliente de dv no sería nulo.

La condición es suficiente gracias a la [1], § 83, que es aplicable a toda superficie S, porque el campo está privado de cavidades.

Si el campo tiene en todas partes divergencia nula, pero posee cavidades, la [1], § 83, sólo puede aplicarse a superficies cerradas que no las contengan: sólo para ellas es nulo el flujo saliente; para las superficies cerradas que contengan cavidades, el flujo saliente, por regla general, no es nulo. Mediante una demostración análoga a la que se efectuará en el § 91, se encuentra que es constante el flujo saliente de una superficie cerrada cualquiera, con tal que las cavidades contenidas en ella sean siempre las mismas.

Véase el teorema de Gauss, § 97.

Sea una línea cerrada l (fig. 164), sobre la que se ha fijado un sentido positivo. Son infinitas las superficies que tienen l por contorno. En la figura se han indicado dos, S_1 y S_2, sobre las cuales se fijarán las normales n_1 y n_2, dirigidas en el sentido positivo con respecto al sentido fijado sobre l, mediante la regla de Ampère.

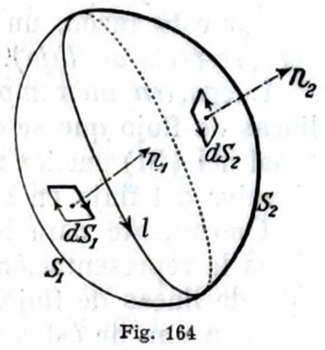


Fig. 164

Sea Φ_1 el flujo que atraviesa S_1 respecto del eje n_1, y Φ_2 el correspondiente a S_2. Las superficies S_1 y S_2 determinan una superficie cerrada, y de las dos normales n_1 y n_2, la primera es entrante y la segunda saliente; $(-\Phi_1 + \Phi_2)$ es el flujo *saliente* de esta superficie cerrada, en valor y signo.

Si el campo es solenoidal, se tiene:

$$-\Phi_1 + \Phi_2 = 0\,; \quad \text{es decir,} \quad \Phi_1 = \Phi_2.$$

En un campo solenoidal, el flujo a través de una superficie depende únicamente de su contorno l; el flujo a través de cualquier superficie que tenga por contorno l es siempre el mismo y se llama *flujo ligado a l*.

Si se consideran dos secciones S_1 y S_2 (fig. 156) de un tubo de fuerza, siendo n_1, n_2 las normales a las secciones dirigidas en sentido

concordante y Φ_1 y Φ_2 los flujos que atraviesan tales secciones, se tiene que:

S_1, S_2 y la superficie lateral del tubo determinan una superficie cerrada. Si el campo es solenoidal, el flujo saliente de toda esta superficie debe ser nulo. Pero la superficie lateral de un tubo de fuerza no está atravesada por flujo, por ser constantemente $\cos\varphi = 0$. Luego, el flujo *saliente* $-\Phi_1 + \Phi_2$ debe ser nulo.

Esto es,

$$\Phi_1 = \Phi_2, \qquad [2]$$

es decir: *en un campo solenoidal es constante el flujo que atraviesa una sección cualquiera de un tubo de flujo determinado.*

También es verdad la recíproca: el campo es solenoidal si para cualquier tubo de flujo de un campo del vector $\vec{H}$ *regular* es constante el flujo que atraviesa una sección cualquiera del tubo.

Por esta razón, un campo solenoidal también se llama *conservador (respecto al flujo).*

Luego, *en un campo solenoidal, y sólo en tal campo,* las mismas líneas de flujo que se dibujan en número finito para representar Φ_1 (final del § 81) pueden servir para representar el valor de Φ_2, es decir, el valor del flujo en cualquier sección del tubo.

Únicamente para los campos solenoidales es legítima y provechosa la representación corriente del campo mediante un número finito de líneas de flujo.

Cada una de éstas viene entonces a representar un *tubo unitario de flujo*, es decir, atravesado por un flujo Φ igual a la unidad; llámase por esto *línea unitaria de flujo* (o *de fuerza*). El número de líneas unitarias de flujo dibujadas a través de una superficie S recuerda el número de tubos unitarios de flujo que la atraviesan, y coincide con el número que mide el flujo que pasa a través de S.

En un campo solenoidal, y para un tubo de flujo suficientemente delgado, de modo que sea aplicable la [6], § 81, se tiene:

$$H \cdot dS = \text{const.} \qquad [3]$$

para cualquier sección recta del tubo. Éste se ensancha o se estrecha según que se encuentre en las zonas en donde el campo es débil o en aquellas en donde es intenso: *la intensidad del campo es inversamente proporcional a la sección del tubo.*

En los §§ 93, 94 y 96 se darán ejemplos de campos solenoidales.

En general, dado el vector $\vec{H}$, su rotacional $\vec{R} = \text{rot}\ \vec{H}$ (§ 85) está definido en el mismo campo en que lo está el vector $\vec{H}$, y, por lo tanto, da origen, a su vez, a un campo vectorial. Tal campo es

siempre solenoidal. En efecto, las componentes R_x, R_y, R_z de $\vec{R}$ están dadas por las [4], § 85, y derivando resulta:

$$\frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} + \frac{\partial R_z}{\partial z} = 0\,; \text{ esto es, div rot } \vec{H} = 0. \qquad [4]$$

Todo vector rotacional es solenoidal.

§ 88. **Campos irrotacionales; campos conservadores con respecto al «trabajo».** Considérese el caso físico del campo de fuerzas; $\vec{H}$ es una fuerza referida a la unidad de masa.

El campo se llama *conservador* (respecto al «trabajo») si la circulación (§ 85) es siempre nula. En tal campo, el trabajo de la fuerza $\vec{H}$, durante una vuelta de la unidad positiva de masa, a lo largo de un circuito cerrado cualquiera, es siempre nulo. No es posible sacar continuamente trabajo del campo, ni, por tanto, obtener energía, mediante la rotación continua de una masa sujeta a las fuerzas del campo.

Por ejemplo, veremos que el campo de la gravedad es conservador; es decir, no se puede obtener un trabajo de las fuerzas de gravedad actuando sobre un cuerpo que describe una trayectoria cerrada. Cuando el peso vuelve al punto de partida, la suma de los trabajos elementales, efectuados por las fuerzas de gravedad, resulta nula.

Si el campo es simplemente conexo (§ 86), la condición necesaria y suficiente para que el campo de un vector $\vec{H}$ sea conservador respecto al «trabajo» o, más generalmente, respecto a la integral de línea, es que en todo punto del mismo sea:

$$\vec{R} = \text{rot}\ \vec{H} = 0\,; \text{ esto es, } \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial H_z}{\partial y} - \dfrac{\partial H_y}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial H_x}{\partial z} - \dfrac{\partial H_z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial H_y}{\partial x} - \dfrac{\partial H_x}{\partial y} = 0 \end{array} \right\}. \qquad [1]$$

La condición es necesaria a causa de [8], § 85: Si en el entorno de un punto A se tuviera $\vec{R} \neq 0$, tómese un elemento de superficie dS que pase por A y sea normal a $\vec{R}$; la circulación de $\vec{H}$ a lo largo del contorno de dS no sería nula.

La condición es suficiente, gracias a [1], § 86, que es aplicable a toda línea cerrada, porque el campo es simplemente conexo.

Un campo en todo punto del cual se tiene rot $\vec{H} = 0$ se llama *irrotacional*, y asimismo se dice que es irrotacional el vector $\vec{H}$; sólo podremos asegurar que un campo irrotacional es conservador (respecto al «trabajo») si dicho campo es simplemente conexo.

Si A_1 y A_2 (fig. 162) son dos puntos de un campo de fuerza, serán infinitas las trayectorias que van desde A_1 a A_2. Si l_1 y l_2 son dos de estas trayectorias, entre las dos determinan un circuito.

Sean:

$$\mathcal{L}_1 = \int_{A_1 l_1 A_2} d\mathcal{L} = \int_{A_1 l_1 A_2} (H_x \cdot dx + H_y \cdot dy + H_z \cdot dz)$$

la integral de línea $\vec{H}$ a lo largo de la trayectoria l_1, esto es, el trabajo referido al transporte de la unidad de masa a lo largo de la trayectoria $A_1 l_1 A_2$.

Sea:

$\mathcal{L}_2 = \int_{A_1 l_2 A_2} d\mathcal{L}$ el trabajo análogo a lo largo de l_2.

Si el campo es conservador, será nula la circulación:

$$\int_{A_1 l_1 A_2} d\mathcal{L} + \int_{A_2 l_2 A_1} d\mathcal{L} = 0.$$

Esto es:

$$\int_{A_1 l_1 A_2} d\mathcal{L} = \int_{A_1 l_2 A_2} d\mathcal{L}; \quad \text{o sea,} \quad \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2. \qquad [2]$$

En un campo conservador, el trabajo es independiente de la trayectoria, y depende únicamente de los extremos A_1 y A_2 de dicha trayectoria.

§ 89. **Potencial (escalar).** Se demuestra en el cálculo diferencial que la condición necesaria y suficiente para que en un espacio simplemente conexo la integral de línea

$$\mathcal{L} = \int_l (H_x \cdot dx + H_y \cdot dy + H_z \cdot dz)$$

dependa sólo de los extremos de l, es que la expresión elemental [5], § 84, del trabajo

$$d\mathcal{L} = H_x(x, y, z)\, dx + H_y(x, y, z)\, dy + H_z(x, y, z)\, dz \qquad [1]$$

sea una diferencial exacta; y para que así suceda, es, precisamente, necesario y suficiente que se verifiquen las tres condiciones [1], § 88.

Cuando se cumplen estas condiciones, y sólo entonces, existe una función $\mathcal{V}(x, y, z)$ determinada, salvo una constante aditiva que permanece arbitraria, para la cual se tiene:

$$d\mathcal{V} = -d\mathcal{L} = -(H_x\, dx + H_y\, dy + H_z\, dz), \qquad [2]$$

y de la que $-d\mathcal{L}$ es la diferencial total.

En particular, para $dy = dz = 0$, es decir, para un elemento dl de trayectoria paralelo al eje x:

$$(-d\mathcal{V})_{\substack{y=\text{const.}\\ z=\text{const.}}} = H_x \cdot dx, \quad \text{o sea:} \quad -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} = H_x; \qquad [3]$$

y análogamente:

$$-\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} = H_y, \qquad -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} = H_z. \qquad [4]$$

La expresión del trabajo a lo largo de una trayectoria l que tiene por extremos $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$ es:

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L} &= \int_l (H_x\, dx + H_y\, dy + H_z\, dz) = -\int d\mathcal{V} \\ &= \mathcal{V}(x_1, y_1, z_1) - \mathcal{V}(x_2, y_2, z_2) = \mathcal{V}_{A_1} - \mathcal{V}_{A_2} \end{aligned}\right\}. \qquad [5]$$

que *depende solamente de los extremos* $A_1(x_1, y_1, z_1)$ y $A_2(x_2, y_2, z_2)$ *de la trayectoria* l.

Se llama *potencial* del campo de fuerzas a la expresión $\mathcal{V}(x, y, z)$, que es un escalar; las [1], § 88, son las condiciones necesarias y suficientes que deben satisfacer las componentes H_x, H_y, H_z de la intensidad $\vec{H}$, para que exista el potencial en un campo simplemente conexo. En contraposición al potencial vector (§ 92) $\mathcal{V}$ se llama, con más precisión, *potencial escalar*.

Más que el potencial en un punto, que no puede precisarse por la arbitrariedad de la constante aditiva, interesa la *caída de potencial* $\mathcal{V}_{A_1} - \mathcal{V}_{A_2}$ *entre dos puntos* A_1 y A_2; con frecuencia ésta se llama *diferencia de potencial* entre A_1 y A_2, pero es necesario consi-

derar con atención el orden de los puntos. Esta diferencia representa según la [5] y en cuanto es válida la [5], § 79, el *trabajo efectuado por las fuerzas del campo durante el movimiento de la unidad de masa desde* A_1 *a* A_2, cualquiera que sea el camino seguido.

Como lo que interesa siempre es la diferencia de potencial entre dos puntos, la constante aditiva de $\mathfrak{V}$, que permanece arbitraria, no introduce ninguna perturbación.

El campo queda determinado cuando se ha dado el vector $\vec{H}$ en todos los puntos del núcleo o cuando se conocen las tres componentes de $\vec{H}$; o sea, cuando se conocen las tres funcciones:

$$H_x(x, y, z); \qquad H_y(x, y, z); \qquad H_z(x, y, z).$$

Pero si existe el potencial $\mathfrak{V}$, esto constituye una ventaja muy notable, porque el campo queda determinado con sólo dar la función $\mathfrak{V}(x, y, z)$ en todos los puntos del mismo.

En efecto, en este caso es posible calcular las componentes de $\vec{H}$ en cualquier punto:

$$H_x = -\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x}; \quad H_y = -\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y}; \quad H_z = -\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z}. \qquad [6]$$

Y como los ejes x, y, z pueden estar orientados de cualquier manera, se tiene, de un modo más general, que la componente H_ξ del campo $\vec{H}$ según un eje cualquiera ξ, es, en valor y signo:

$$H_\xi = -\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial \xi}. \qquad [7]$$

Dado el potencial $\mathfrak{V}$, las [6] dan el vector campo $\vec{H}$, es decir, dan sus componentes. Recíprocamente, dado el vector $\vec{H}$, dotado de potencial, ¿cómo habrá que expresar este último?

La respuesta a esta pregunta se sale de los límites impuestos a estas páginas.

Otra ventaja ofrecida por el empleo del concepto de potencial es la siguiente:

Si se han de superponer dos campos $\vec{H}_1$ y $\vec{H}_2$ que admiten potenciales (respectivamente, $\mathfrak{V}_1$ y $\mathfrak{V}_2$), se tiene:

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2; \qquad \text{(suma vectorial)}$$

o sea, en componentes:

$$H_x = H_{1x} + H_{2x} = -\frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial x} = -\frac{\partial (\mathfrak{V}_1 + \mathfrak{V}_2)}{\partial x}$$

$$H_y = H_{1y} + H_{2y} = -\frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial y} = -\frac{\partial (\mathfrak{V}_1 + \mathfrak{V}_2)}{\partial y}$$

$$H_z = H_{1z} + H_{2z} = -\frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial z} = -\frac{\partial (\mathfrak{V}_1 + \mathfrak{V}_2)}{\partial z}$$

Es decir, el potencial del campo resultante es:

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_1 + \mathfrak{V}_2. \qquad \text{(suma algebraica)} \quad [8]$$

Con la consideración de los potenciales, las operaciones *vectoriales* de los campos se reducen a operaciones *escalares* (más sencillas) efectuadas sobre los potenciales.

Todos los puntos del campo que tienen el mismo potencial quedan definidos por la ecuación

$$\mathfrak{V}(x, y, z) = \text{const.},$$

que representa una superficie *(superficie equipotencial)*. Por cada punto del campo pasa una superficie equipotencial, y solamente una.

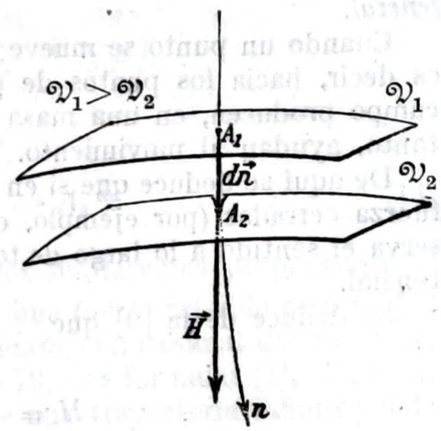


Fig. 165

Si la masa sujeta al campo, y que suponemos, como de costumbre, unitaria, se mueve sobre una superficie equipotencial, se tendrá

$$d\mathfrak{V} = 0;$$

por tanto:

$$dt = |H| \cdot |dl| \cdot \cos\varphi = 0;$$

y como no son nulos ni $|H|$ ni $|dl|$, resulta $\cos\varphi = 0$.

El campo $\vec{H}$ *es normal en todos los puntos a la superficie equipotencial.*

Sea n la línea de fuerza en A_1 (fig. 165), y, por tanto, normal a la superficie equipotencial $\mathfrak{V}_1$; se toma como sentido positivo de n

el que corresponde a $\vec{H}$. Haciendo que la unidad de masa describa, desde A_1 y en el sentido positivo de n, un camino elemental $d\vec{n}$, se tiene $\varphi = 0$, y como valor del trabajo:

$$-d\mathfrak{V} = \vec{H} \cdot d\vec{n} = H \cdot cn > 0 \qquad [9]$$

(eso es $= 0$ sólo en el caso particular $H = 0$); en efecto, las magnitudes H, dn de los vectores $\vec{H}$, $d\vec{n}$, medidas con relación al eje $\vec{n}$, son ciertamente positivas.

Pero si $\mathfrak{V}_2$ es el potencial de A_2, se tiene:

$$\mathfrak{V}_1 - \mathfrak{V}_2 = H \cdot dn > 0; \quad \text{es decir, } \mathfrak{V}_1 > \mathfrak{V}_2.$$

La intensidad del campo $\vec{H}$, en cualquier punto, es normal a la superficie equipotencial, y *está dirigida hacia los puntos de menor potencial.*

Cuando un punto se mueve en el sentido de una línea de fuerza, es decir, hacia los puntos de potencial decreciente, las fuerzas del campo producen, en una masa positiva, un trabajo positivo, y, por tanto, ayudan al movimiento.

De aquí se deduce que si en un campo de fuerza existen líneas de fuerza cerradas (por ejemplo, circunferencias) en las cuales se conserva el sentido a lo largo de todo el recorrido, no puede existir potencial.

Se deduce de la [9] que

$$H = -\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial n} > 0. \qquad [10]$$

expresión que puede considerarse como caso particular de la [7], suponiendo que el eje ξ coincide con la normal n a la superficie equipotencial, dirigida hacia los puntos de potencial menor, y teniendo en cuenta que, en tal caso, $\vec{H}$ coincide con n en dirección y sentido. El mayor valor absoluto entre todas las derivadas [6] y [7] es el que se ha tomado a lo largo de un eje coincidente con la normal a la superficie equipotencial, y esta derivada da la magnitud (positiva), esto es, el módulo de $\vec{H}$.

La [10] expresa que la magnitud del campo, H, viene a ser la *velocidad de variación* del potencial a lo largo de las líneas de fuerza.

El vector $\vec{H}$, cuya componente a lo largo de un eje cualquiera ξ se obtiene en cualquier punto del campo a partir de una función

$\mathfrak{V}(x, y, z)$ mediante la derivación [7], se llama *gradiente* del escalar $\mathfrak{V}$, y se escribe (1):

$$\text{grad } \mathfrak{V} = \vec{H}. \qquad [11]$$

Dada la función $\mathfrak{V}$, puede considerarse el gradiente $\vec{H}$ como un campo de fuerza del cual $\mathfrak{V}$ es el potencial.

Tal campo es siempre irrotacional. En efecto, de [4], § 85, teniendo en cuenta [6], resulta siempre:

$$\text{rot grat } \mathfrak{V} = 0. \qquad [12]$$

Pero, por lo general, tal campo no es solenoidal. De [3], § 82, y de [6], se deduce:

$$\text{div } \vec{H} = \text{div grad } \mathfrak{V} = -\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial z^2}\right), \qquad [13]$$

o, con un símbolo muy condensado:

$$\text{div grad } \mathfrak{V} = -\Delta_2 \mathfrak{V}. \qquad [14]$$

§ 90. **Energía potencial.** Aquí nos limitaremos propiamente al caso en que $\vec{H}$ tenga el significado de una fuerza referida a la unidad de masa. Si en vez de considerar la masa infinitesimal dm tomamos la masa m (es válida todavía la [1], § 79), las fórmulas [1], [2], § 84, dan para el trabajo $d\mathfrak{L}$ a lo largo de una trayectoria infinitesimal:

$$d\mathfrak{L} = m \cdot d\ell;$$

y a lo largo de una trayectoria finita de A_1 a A_2:

$$\mathfrak{L} = m \cdot \ell.$$

Si existe potencial, por la fórmula [2], § 89, este trabajo es:

$$d\mathfrak{L} = m \cdot d\ell = -m \cdot d\mathfrak{V};$$

(1) Según otros autores, especialmente en los tratados de análisis vectorial, el *gradiente* iría en el sentido de los potenciales crecientes, $\vec{G} = \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial n}$, y, por tanto, sería de sentido opuesto a la intensidad del campo; véase, por ejemplo, «Introducción al Análisis Vectorial», de R. Gans, Ed. Labor. — *N. del T.*

y para una trayectoria finita:

$$\mathfrak{L} = m \cdot \mathfrak{l} = m \cdot \mathfrak{V}(x_1, y_1, z_1) - m \cdot \mathfrak{V}(x_2, y_2, z_2) = m\,\mathfrak{V}_1 - m\,\mathfrak{V}_2. \quad [1]$$

La expresión $m \cdot \mathfrak{V}(x, y, z) = \mathfrak{W}$ se llama *energía potencial* o *de posición de la masa m en el punto* (x, y, z) del campo, y está definida, como $\mathfrak{V}$, salvo una constante aditiva que permanece arbitraria. La [1] se escribe también:

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{W}_1 - \mathfrak{W}_2 = m\,(\mathfrak{V}_1 - \mathfrak{V}_2). \quad [2]$$

La variación $\mathfrak{W}_1 - \mathfrak{W}_2$ de la energía potencial cuando la masa m se mueve entre A_1 y A_2, representa el trabajo efectuado por la fuerza $\vec{F}$ (que no coincide con la intensidad del campo) sobre la masa m, cuando ésta se mueve según una trayectoria cualquiera que va desde el punto A_1, de potencial $\mathfrak{V}_1$, al punto A_2, de potencial $\mathfrak{V}_2$.

Análogamente a las [11] y [6], § 89, la energía potencial $\mathfrak{W}$ y la fuerza $\vec{F}$ del campo vienen relacionadas por las expresiones:

$$\operatorname{grad} \mathfrak{V} = \vec{F}, \quad [3]$$

$$-\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x} = F_x; \quad -\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial y} = F_y; \quad -\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial z} = F_z; \quad [4]$$

en donde F_x, F_y, F_z son las componentes de $\vec{F}$.

Las superficies equipotenciales $\mathfrak{V} = \text{const.}$ coinciden con las superficies $\mathfrak{W} = \text{const.}$ de igual energía potencial.

§ **91. Potencial polidromo.** Sea un campo irrotacional, en el cual es, pues, rot $\vec{H} = 0$ en todos los puntos del campo; pero supongamos que dicho campo es múltiplemente conexo. Por ejemplo, consideremos que el campo comprende el espacio externo al anillo MN (figura 166); puede tratarse del campo magnético existente en el espacio que rodea un circuito MN recorrido por una corriente.

El campo pasa a ser simplemente conexo si una superficie ideal, Π, no perforable, se apoya en el contorno MN del anillo de manera que queden excluídas las líneas cerradas del tipo $l_3\, l_4$ (fig. 162), encadenadas con el anillo (§ 86).

Así, siendo el campo simplemente conexo, como es irrotacional, admite un potencial $\mathfrak{V}$. Para una línea A_1, l_A, A_2, que da una vuelta encadenándose con el anillo, pero que no se cierra, a causa de la pared Π, se tiene:

$$\int_{A_1 l_A A_2} \vec{H} \cdot \vec{dl} = \mathfrak{V}_{A_1} - \mathfrak{V}_{A_2} = k; \quad [1]$$

COLEGIO DE JESUS MARIA

generalmente no es $k = 0$; eligiendo convenientemente el extremo de l_A que ha de actuar como origen, A_1, siempre puede lograrse que k sea positivo.

Pero a lo largo de la línea cerrada $A_1, l_A, A_2, B_2, l_B, B_1, A_1$, trazada toda ella en el campo, que hemos convertido en simplemente conexo, es:

$$\int_{A_1 l_A A_2} \vec{H} \cdot \vec{dl} + \int_{A_2}^{B_2} \vec{H} \cdot \vec{dl} + \int_{B_2 l_B B_1} \vec{H} \cdot \vec{dl} + \int_{B_1}^{A_1} \vec{H} \cdot \vec{dl} = 0.$$

Puesto que suponemos que $\vec{H}$ es regular en todas partes, y se cumple la expresión [7], § 84, las integrales primera y tercera, relativas a líneas que corren superpuestas en las dos caras de Π, son iguales y opuestas; queda:

$$\int_{B_1 l_B B_2} \vec{H} \cdot \vec{dl} = \int_{A_1 l_A A_2} \vec{H} \cdot \vec{dl} = k, \quad [2]$$

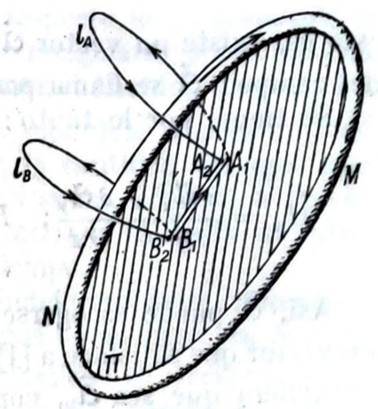


Fig. 166

valor constante para cualquier punto $B_1\, B_2$, porque, manteniendo fijo el punto $A_1\, A_2$, la superficie Π puede ser deformada a voluntad y, por lo tanto, puede pasar por cualquier punto del espacio. Por consiguiente, la [2] es constante para cualquier línea B_1, l_B, B_2 que esté encadenada una sola vez con el anillo MN.

Pero la pared Π es ficticia y, por tanto, la integral de línea [2] coincide con la circulación; ésta tiene un valor constante k para toda vuelta en torno al anillo, y cuando el sentido del recorrido es a propósito, se tiene $k > 0$, (§ 229, *b*]); en cada vuelta suplementaria, siempre en sentido concordante, la circulación aumenta en k.

Si en un punto A del campo el potencial antes citado tiene el valor $\mathfrak{V}_{A,0}$, cuando se vuelve a dicho punto después de haber dado n vueltas en cadena en torno al anillo, se encuentra el potencial:

$$\mathfrak{V}_{A,n} = \mathfrak{V}_{A,0} - nk; \quad [3]$$

la expresión [3] es válida en todos los casos con $k > 0$, si se supone, según convenga, que n es positivo o negativo, de acuerdo con el sentido del recorrido.

En este caso, el potencial, en vez de estar unívocamente determinado (salvo una constante arbitraria aditiva), sólo está determinado, salvo el valor $n\,k$; es, pues, función polidroma del punto elegido en el campo. Diremos que un campo no simplemente conexo,

irrotacional, admite también *potencial*, pero que éste es *polídromo*. Véase también § 229, *b*].

§ 92. Potencial vector. Si el campo $\vec{H}$ es irrotacional, el vector $\vec{H}$ puede obtenerse derivando el potencial (§ 89, [6]).

Si el campo $\vec{H}$ carece de divergencia (div $\vec{H} = 0$), el vector $\vec{H}$ puede obtenerse análogamente mediante derivación, pero de una manera menos sencilla. En efecto, en este caso puede ponerse:

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{\mathfrak{a}}; \qquad [1]$$

esto es, existe un vector $\vec{\mathfrak{a}}$ cuyo rotacional es $\vec{H}$ en todos los puntos del campo; $\vec{\mathfrak{a}}$ se llama *potencial vector* del vector solenoidal $\vec{H}$.

Se tiene, por lo tanto:

$$H_x = \frac{\partial \mathfrak{a}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{a}_y}{\partial z}; \quad H_y = \frac{\partial \mathfrak{a}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{a}_z}{\partial x}; \quad H_z = \frac{\partial \mathfrak{a}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{a}_x}{\partial y}. \qquad [2]$$

Así, $\vec{\mathfrak{a}}$ puede escogerse de infinitas maneras; en efecto, si $\vec{\mathfrak{a}}$ es un vector que satisface a [1], también satisface a [1] la suma $\vec{\mathfrak{a}}_1 + \vec{\mathfrak{a}}_2$, cualquiera que sea $\vec{\mathfrak{a}}_2$, con tal de que sea irrotacional.

Según los casos (hidrodinámica, vector inducción magnética $\vec{\mathfrak{B}}$ constante en el tiempo, vector $\vec{\mathfrak{B}}$ de un campo magnético que varía rápidamente con el tiempo, ...), se hace que sea determinado el potencial vector imponiéndole alguna ulterior condición física o matemáticamente apropiada; en muchos casos, tal condición es que, a su vez, $\vec{\mathfrak{a}}$ sea solenoidal, es decir, que también sea:

$$\text{div } \vec{\mathfrak{a}} = 0. \qquad [3]$$

Los vectores $\vec{\mathfrak{a}}$ y $\vec{H}$, además de estar ligados por la condición [1], lo están por la relación de STOKES (§ 86, [1]).

Dado el potencial vector $\vec{\mathfrak{a}}$, la [1] o la [2] dan el vector campo $\vec{H}$. Inversamente: dado el vector solenoidal $\vec{H}$, ¿cómo se hace para expresar el potencial vector?

La respuesta a tal cuestión tiene mayor alcance que el permitido por los límites de estas páginas.

§ 93. Campos vectoriales. El campo de fuerzas es un caso particular del *campo vectorial*. En Física es frecuente considerar campos en los cuales queda definido en cada punto (x, y, z) un vector $\vec{H}(x, y, z)$

que no tiene el significado de fuerza ni de intensidad del campo de fuerzas. Las definiciones y las propiedades anteriores (§§ 79, 92) se pueden extender a estos campos vectoriales.

Así, cuando un canal conduce un líquido, por ejemplo agua, en cualquier punto del canal fluye el líquido con una velocidad $\vec{u}$, que, en general, es función del punto y del tiempo. En condiciones de régimen estacionario, $\vec{u}$ es solamente función del punto (x, y, z). Se tiene un campo del vector *velocidad*, independiente del tiempo.

Los conceptos de *línea de flujo* y de *tubo de flujo* han surgido de este caso. Y la razón es evidente: una línea de flujo indica la trayectoria de las partículas de agua, y el tubo de flujo, llamado también *filete flúido*, si la sección es pequeña respecto de la longitud, es propiamente un conducto ideal que puede imaginarse sumergido en el agua del canal y que conduce por su interior el líquido.

El flujo del vector $\vec{u}$ que atraviesa una superficie S es el flujo de agua a través de esta superficie; es decir, la cantidad de agua que pasa por S en la unidad de tiempo; es, en suma, el *gasto* a través de S. El flujo que sale de una superficie cerrada S es la cantidad de líquido que sale de S en la unidad de tiempo.

Pero si S es una superficie cerrada, indeformable y sumergida completamente dentro del líquido, tanta agua como entre en S debe salir, a causa de la incomprensibilidad del líquido. El vector $\vec{u}$ debe ser solenoidal, y su *divergencia* debe ser nula. La condición de solenoidalidad deja de aparecer como una suposición matemática artificiosa para tomar el aspecto de una simple condición física: el líquido, incompresible, no puede en su movimiento ni concentrarse en S ni enrarecerse; no se tienen en el líquido ni «manantiales» ni «sumideros» (§ 83).

Si en una porción del líquido $\vec{u}$ es rotacional, esto es, rot $\vec{u} \neq 0$, se dice que en tal porción el movimiento del líquido, es *turbillonario* o *turbulento*. Físicamente, esto quiere decir que, por lo menos, algunas de las partículas de agua describen trayectorias l cerradas. Supongamos que se recorre una de esas trayectorias l en el sentido del movimiento de las partículas flúidas; $\vec{u}$ y $\vec{dl}$ estarán dirigidos constantemente en el mismo sentido, y $\int_S \vec{u} \cdot \vec{dl}$ no puede ser nula. Cuando la circulación del vector $\vec{u}$ no es nula, existen movimientos turbulentos en el seno del líquido.

La *circulación* del vector que, en el caso de un campo de fuerzas determina si dicho campo es conservador, es decir, si tiene potencial, en el caso de un campo de velocidad del flúido determina si existen o no movimientos turbulentos, es decir, si el movimiento es *rotacional* (con torbellinos) o *irrotacional* (sin torbellinos); y, como en

el caso del trabajo, hay que distinguir también en el campo de la velocidad $\vec{u}$ en un flúido si es simple o múltiplemente conexo (véase § 229).

También adquiere un significado cinemático sencillo el vector *rotacional* $\vec{R}$, que hemos definido mediante las expresiones [3] y [4] del § 85.

Probaremos esto con un ejemplo muy sencillo. Sea una rueda que gira alrededor del eje O, perpendicular al plano de la figura 167, con velocidad angular constante ω. En cualquier punto P, a distancia r del eje de rotación, vienen sucesivamente a colocarse todos los puntos de la rueda que pertenecen a una circunferencia de radio $r = OP$; puesto que es constante la velocidad angular, todos los puntos de la rueda pasan por P con una velocidad $\vec{u}$, orientada como en la figura, de magnitud $u = \omega \cdot r$.

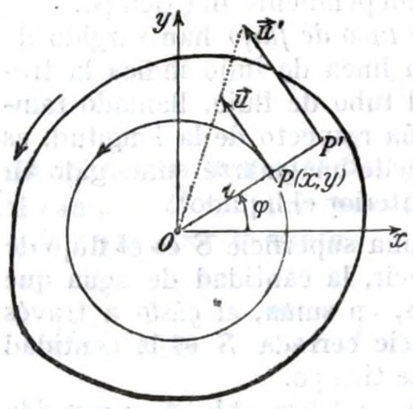


Fig. 167

Tomemos tres ejes cartesianos, uno de los cuales, z, coincida con el eje de rotación; las componentes del vector $\vec{u}$ son:

$$u_x = -\omega \cdot r \cdot \operatorname{sen} \varphi, \qquad u_y = \omega \cdot r \cdot \cos \varphi, \qquad u_z = 0;$$

o sea:

$$u_x = -\omega \cdot y, \qquad u_y = \omega \cdot x, \qquad u_z = 0.$$

El vector $\vec{u}$ $(u_x, u_y, 0)$ es función del punto P (no del tiempo). Los puntos del espacio ocupados por la rueda constituyen un campo del vector $\vec{u}$. Su rotacional es:

$$\vec{R} = \operatorname{rot} \vec{u} = \vec{i}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) =$$

$$= 2\vec{k}\,\omega = 2\vec{\omega};$$

en donde el vector $\vec{\omega}$ es el vector velocidad angular, orientado según el eje de rotación z, como se ha dicho en el § 58, a]. El *rotacional* $\vec{R}$ de la velocidad $\vec{u}$ es el duplo de la velocidad angular de rotación de la rueda.

Nos ofrece otro ejemplo de campo vectorial el corrimiento de los puntos de un cuerpo elástico deformado respecto a la posición normal de reposo; otro, es el de las aceleraciones centrífugas en los puntos de un cuerpo en rotación; otro, todavía, es el campo del *vector de* POYNTING, del que se obtiene la energía radiante por ondas electromagnéticas; etc.

Hemos dado, pues, las razones físicas que justifican la introducción de las numerosas definiciones contenidas en los §§ 79 ÷ 92.

Entre todos los campos vectoriales son importantísimos los campos de fuerzas; por esto hemos empezado por ellos.

En todos los campos de fuerzas que la naturaleza nos presenta (campo de la gravedad, campos eléctricos, magnéticos, ...), son lícitas y esenciales las siguientes preguntas:

¿El campo es solenoidal?

¿El campo está dotado de potencial?

Vamos a ver cómo se responde a estas preguntas en los campos que acabamos de mencionar.

§ 94. Campo de fuerzas uniforme. Se dice que en un campo es *uniforme* cuando $\vec{H}$ es constante (en magnitud, dirección y sentido) en todos sus puntos.

En muchísimas aplicaciones prácticas puede considerarse que el campo de la gravedad es uniforme en un espacio cúbico de algunos km³: se pueden considerar las verticales como rectas paralelas entre sí, que son las líneas de fuerza; la aceleración $\vec{g}$ es constante.

Si suponemos tres ejes cartesianos de referencia, siendo el eje z vertical y dirigido hacia abajo, se tiene (fig. 168):

$$H_x = 0, \qquad H_y = 0, \qquad H_z = H = g, \qquad (g > 0). \qquad [1]$$

Las líneas de fuerza son rectas paralelas al eje z, dirigidas hacia abajo.

El campo es solenoidal, porque todas las derivadas que entran en la ecuación [1] del § 87 son nulas. Se puede demostrar también directamente la solenoidalidad. Una superficie cerrada S queda cortada dos veces por cada tubo de fuerza, en dS_1 y dS_2. En una superficie cerrada de forma compleja podrá ser mayor el número de secciones; pero esto no altera substancialmente la demostración).

Los dos flujos elementales $d\Phi_1$ y $d\Phi_2$ *salientes* de dS_1 y dS_2, respectivamente, son:

$$d\Phi_1 = |H_1| \cdot |dS_1| \cdot \cos \varphi_1; \qquad d\Phi_2 = |H| \cdot |dS_2| \cdot \cos \varphi_2.$$

Pero $|dS_2| \cdot \cos \varphi_2$ es la proyección $|dS_0|$ de dS_2 sobre el plano xy; $|dS_1| \cdot \cos \varphi_1$ es $-|dS_0|$; $|H_1|$ es igual a $|H_2|$, porque el campo es uniforme; luego:

$$d\Phi_1 = -d\Phi_2; \qquad d\Phi_1 + d\Phi_2 = 0.$$

La suma algebraica de los flujos salientes de dS_1 y dS_2 es nula.

Repitiendo el razonamiento para todos los tubos elementales de flujo, se deduce que el flujo saliente de S es nulo; el flujo saliente del casquete interior de S, apoyado en el contorno l, es igual al entrante por casquete superior.

Luego, *el campo uniforme es solenoidal.*

Existe potencial, porque son nulas todas las derivadas que entran en las expresiones [1] del § 88. Por lo tanto, las superficies equipotenciales son los planos horizontales $z = \text{const.}$; las normales n a

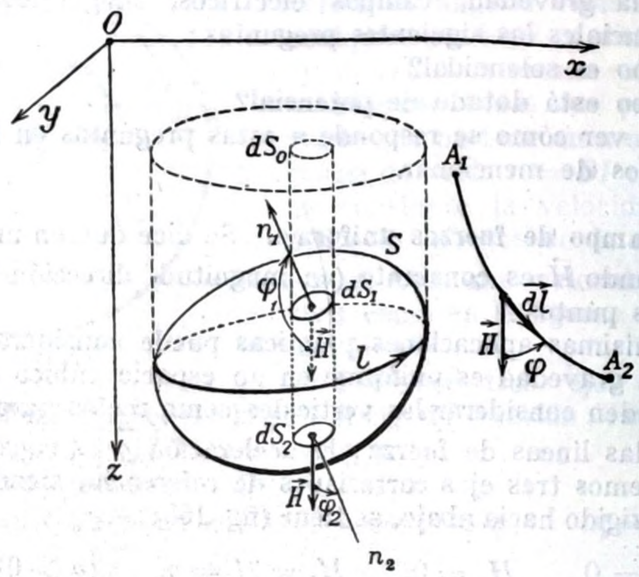


Fig. 168

las superficies equipotenciales, dirigidas en el sentido de las líneas de fuerza, son todas paralelas al eje z y tienen el mismo sentido.

La [10], § 89, se escribe:

$$-\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial n} = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} = g.$$

Por tanto, integrando:

$$\mathcal{V} = -gz + C \qquad (C \text{ constante arbitraria}). \qquad [2]$$

La [5], § 84, da directamente (fig. 168), en virtud de las [1]:

$$d\mathcal{l} = |H| \cdot |dl| \cdot \cos\varphi = H_x\,dx + H_y\,dy + H_z\,dz = g \cdot dz,$$

que es solamente función de z.

Luego,

$$\mathcal{l} = \int_{A_1}^{A_2} g \cdot dz = gz_2 - gz_1 = (-gz_1) - (-gz_2)$$

sólo es función de los puntos extremos; es decir, sólo depende de los niveles z_1, z_2 de los extremos A_1, A_2 de la trayectoria. El trabajo efectuado en el campo de la gravedad sólo depende del desnivel entre los extremos de la trayectoria.

La función $\mathcal{V}$, cuya diferencial es $-d\mathcal{l}$, será ahora:

$$\mathcal{V} = -\int g \cdot dz = -g \cdot z + C;$$

$$\mathcal{W} = -m \cdot g \cdot z + C' \qquad [3]$$

es la *energía potencial de la masa m.*

Las superficies equipotenciales tienen por ecuación:

$$\mathcal{V} = \text{const.}; \quad \text{es decir,} \quad z = \text{const.},$$

confirmándose que son planos horizontales.

Estas superficies equipotenciales del campo de la gravedad, únicamente planas en una primera aproximación, se realizan físicamente mediante la superficie libre de un líquido en reposo, y por esto se las llama también *superficies de nivel* (§ 202).

Esta denominación se aplica también a las superficies equipotenciales de cualquier campo que admita potencial.

En general, se puede suponer en un campo uniforme:

$$H_x = 0, \qquad H_y = 0, \qquad H_z = H = \text{const.}$$

Se tiene:

$$\mathcal{V} = -H \cdot z + C; \qquad [4]$$

por tanto:

$$\mathcal{l} = \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 = -H(z_1 - z_2) = H(z_2 - z_1); \qquad [5]$$

en donde $z_2 - z_1$ es la distancia entre los dos planos normales a z que pasan por A_1 y A_2.

Si se atribuye arbitrariamente el potencial cero al plano coordenado xy, para el cual es $z = 0$, la constante aditiva de la fórmula [4] toma el valor $C = 0$, y el potencial se reduce a:

$$\mathcal{V} = -H \cdot z. \qquad [6]$$

§ 95. Campo de fuerzas centrales. Supongamos que el campo $\vec{H}$ en un punto cualquiera A del espacio está dirigido constantemente según la recta que va desde el punto A al punto fijo O (fig. 169), llamado *centro* de las fuerzas. El campo es *atractivo si* $\vec{H}$ tiene el sentido $\overrightarrow{AO}$, y *repulsivo si* tiene el sentido $\overrightarrow{OA}$.

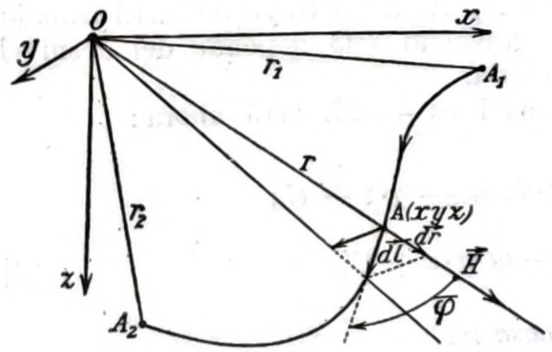


Fig. 169

Convendremos en medir la magnitud H de $\vec{H}$ según el eje $\overrightarrow{OA}$.

Resulta que H es positivo o negativo, según que el campo sea repulsivo o atractivo.

Suponemos, finalmente, que la magnitud H del vector $\vec{H}$ es solamente función de la distancia $OA = r\ (>0)$:

$$H = f(r). \qquad [1]$$

Un campo de fuerzas de esta clase se llama *central*. El centro O es un punto singular del campo, porque pasan por él infinitas líneas de fuerza.

En general, un campo central *no* es solenoidal (véase § 97), pero tiene potencial.

En efecto, tomemos tres ejes cartesianos con centro en O. En un punto cualquiera A (x, y, z), situado a la distancia $OA = r$ del centro, los cosenos directores de $\overrightarrow{OA}$ son $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}$; y por tanto, en valor y signo se tiene:

$$H_x = f(r)\cdot\frac{x}{r};\ H_y = f(r)\cdot\frac{y}{r};\ H_z = f(r)\cdot\frac{z}{r};\ r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \qquad [2]$$

Efectuando las derivaciones, resulta, sin más, que son satisfechas las igualdades [1] del § 88. Luego, con tal que el campo sea simplemente conexo, existe el potencial $\mathfrak{V}$.

Directamente, se tiene en valor y signo (fig. 169):

$$d\mathfrak{l} = |H|\cdot|dl|\cdot\cos\varphi = f(r)\cdot dr,$$

que sólo depende de r y de la variación dr de la distancia, contada

desde el centro del campo, durante el corrimiento infinitesimal $\vec{dl}$.

Por tanto,

$$\mathfrak{l} = \int_{r_1}^{r_2} f(r)\cdot dr$$

es únicamente función de r_1 y r_2.

Es un caso análogo al del § 94; el potencial existe y viene dado por:

$$\mathfrak{V} = -\int f(r)\cdot dr, \qquad [3]$$

que sólo es función de r.

El trabajo a lo largo de una trayectoria $A_1\ A_2$ es:

$$\mathfrak{l} = \int_{r_1}^{r_2} f(r)\cdot dr = \mathfrak{V}_1 - \mathfrak{V}_2,$$

que sólo depende de los extremos de la trayectoria, es decir, de r_1 y r_2, esto es, de las distancias que separan A_1 y A_2 del centro del campo.

Las superficies equipotenciales tienen por ecuación $\mathfrak{V} = \text{const.}$, es decir, $r = \text{const.}$, y son esferas con centro en O.

Esto puede también deducirse de la ortogonalidad entre las superficies equipotenciales y el campo $\vec{H}$.

§ 96. Fuerzas culombianas y newtonianas. El ejemplo anterior tiene una importancia especial para los siguientes casos particulares:

a] **Campo culombiano.** Dos masas (eléctricas, magnéticas) m_0 y m, prácticamente puntiformes, se encuentran, por ejemplo, en el vacío a la distancia r. Se ejerce entre ellas una acción mutua constituída por una fuerza $\vec{F}$, que m_0 ejerce sobre m, y de una reacción $-\vec{F}$, que m ejerce sobre m_0. Estas fuerzas (acción y reacción) están dirigidas según la recta que une m_0 con m. Consideremos la fuerza $\vec{F}$. Ésta es una fuerza aplicada en m, central, repulsiva o atractiva, según que m_0 y m tengan signos iguales u opuestos, y su importe es:

$$F = k\frac{m_0 m}{r^2} \quad (\textit{ley de Coulomb}). \qquad [1]$$

Podemos suponer que m_0 crea el campo, y que m es la masa sobre la cual actúa el campo; $r\ (>0)$ es su distancia, k una constante

positiva que depende de las unidades de medida, y es independiente del medio (véase tomo II); en el sistema cm g_m seg (CGS) electrostático se tiene: $k = 1$.

Se deduce de la [1]

$$H = \frac{dF}{dm} = k\frac{m_0}{r^2} = f(r), \qquad [2]$$

valor positivo (campo repulsivo) o negativo (campo atractivo) según sea el signo de m_0.

Por tanto:

$$\mathfrak{V} = -\int k\frac{m_0}{r^2}\,dr = k\frac{m_0}{r} + C.$$

Se fija el valor de la constante C con la hipótesis, completamente arbitraria, de que sea $\mathfrak{V}_{r=\infty} = 0$, deduciéndose $C = 0$, y se tiene:

$$\mathfrak{V} = k\frac{m_0}{r}. \qquad [3]$$

El *potencial de un punto A* resulta ser el trabajo efectuado por las fuerzas del campo durante el transporte de la unidad positiva de masa desde el punto A hasta el ∞, cualquiera que sea el camino recorrido. Todos los puntos situados en el ∞ constituyen una superficie equipotencial, de potencial nulo.

En los campos repulsivos es $m_0 > 0$; luego, en todas partes es $\mathfrak{V} > 0$; es decir, las fuerzas del campo efectúan un trabajo positivo durante el transporte al ∞. Esto es natural: el campo repele la carga + 1 hacia el infinito.

En los campos atractivos se tiene $m_0 < 0$; luego, en todas partes es $\mathfrak{V} < 0$.

En fin, se tiene en valor y signo:

$$-\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial n} = -\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial r} = k\frac{m_0}{r^2} = H.$$

El centro del campo, ocupado por la masa m_0, es un punto singular, siendo en él $\mathfrak{V} = \infty$, $H = \infty$. Pero, físicamente, no existen cargas eléctricas ni magnéticas que sean exactamente puntiformes.

b] **Campo newtoniano.** Se tienen ahora dos masas inertes m_0 y m prácticamente puntiformes. La acción mutua entre m_0 y m ahora es siempre una atracción, según la *ley de* Newton. La fuerza $\vec{F}$

que m_0 ejerce sobre m, es central, siempre atractiva, y su magnitud, en valor y signo, sobre el eje $m_0 \longrightarrow m$, es:

$$F = -k\frac{m_0 \cdot m}{r^2}. \qquad [4]$$

Esta vez m_0, m y k son siempre positivos; k es la *constante de la gravitación universal*, que depende de las unidades de medida, y es independiente del medio; en el sistema cm g_m seg (C G S) se tiene:

$$k = 6{,}66_4 \cdot 10^{-8}\,\frac{\text{dinas}\cdot\text{cm}^2}{g_m^2} = 6{,}66_4 \cdot 10^{-8}\ \text{cm}^3 \cdot g_m^{-1} \cdot \text{seg}^{-2}.$$

También se puede imaginar ahora que la masa m_0 crea el campo *(campo de gravitación)* al cual se encuentra sometida la masa m.

Se tiene:

$$H = \frac{dF}{dm} = -k\frac{m_0}{r^2} < 0, \qquad [5]$$

de acuerdo con el hecho de que el campo es *atractivo*. Por tanto:

$$\mathfrak{V} = -k\frac{m_0}{r}. \qquad [6]$$

La constante arbitraria se anula también esta vez, suponiendo que sea $V_{r=\infty} = 0$.

Se tiene ahora:

$$\mathfrak{V} < 0;$$

es decir, el trabajo efectuado por las fuerzas del campo durante el transporte de la unidad positiva de masa hasta el ∞ es negativo; el campo se opone a este transporte. Esto es natural: el campo es atractivo.

El potencial disminuye en valor absoluto al aumentar la distancia; pero teniendo en cuenta el signo, el potencial aumenta con la distancia desde el centro de atracción O, donde está concentrada la masa m_0.

Luego se tiene:

$$-\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial n} = +\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial r} = k\frac{m_0}{r^2} = |H|.$$

También esta vez es $|H| = \infty$ y $|\mathfrak{V}| = \infty$ para $r = 0$; luego, el centro O es un punto singular del campo. Para asegurarse de la

regularidad del campo, conviene excluir de él a O; más exactamente, convendrá considerar un pequeño volumen (por ejemplo, una esferita) de centro O, que se excluirá del campo.

§ 97. Teorema de Gauss. Todos los campos centrales admiten potencial.

¿Son también solenoidales?

Observemos que los tubos de fuerza son conos con su vértice en el centro O del campo (fig. 170).

Sean: $d\Omega$ la abertura de un tubo de fuerza elemental; dS_2 una de sus secciones; n_2 la normal a dS_2 dirigida en el sentido que se aleja de O. El flujo de fuerza que atraviesa la sección dS_2 es, en valor y signo:

$$d\Phi_2 = dS_2 \cdot H \cdot \cos\varphi_2 = dS_2 \cdot \cos\varphi_2 \cdot f(r_2);$$

en donde φ_2 es el ángulo que forman la normal n_2 y el radio r_2; o sea (§ 33, [5]):

$$d\Phi_2 = dS_2' \cdot f(r_2) = d\Omega \cdot r_2^2 \cdot f(r_2);$$

en donde dS_2' es la sección recta del tubo de fuerza.

Es condición necesaria para que el campo sea solenoidal (§ 87) que este flujo $d\Phi_2$ sea independiente del valor r de la distancia r_2 desde dS_2 a O; $r^2 \cdot f(r)$ debe ser constante con respecto a r; luego:

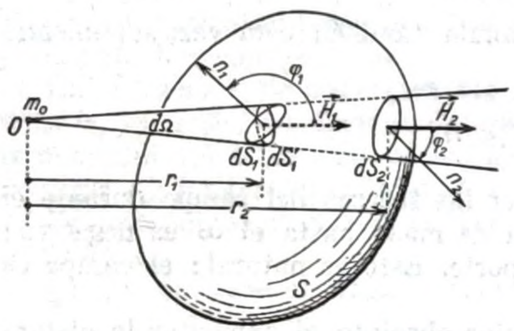


Fig. 170

$$f(r) = \frac{K}{r^2}.$$

Entre todos los campos centrales, únicamente los culombianos y newtonianos, es decir, los inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia r, satisfacen esta condición necesaria para la solenoidalidad; por ejemplo, se tiene en los campos culombianos: $K = k \cdot m_0$.

Consideremos ahora el flujo saliente por una superficie cerrada S sumergida en un campo culombiano o newtoniano; por ejemplo, en un campo culombiano.

Pueden darse tres casos:

1.º *La superficie cerrada S no comprende a m_0.*

Cualquier cono elemental $d\Omega$, que sale de O, o bien no corta a S, o corta a esta superficie en dos elementos de superficie dS_1 y dS_2 (fig. 170) (1).

El flujo $d\Phi_1$ que atraviesa dS_1 es igual al $d\Phi_2$, que, en sentido directo, atraviesa dS_2. Pero si se calcula el flujo *saliente* por S, los flujos *salientes* por dS_1 y dS_2 resultan iguales y de signo contrarios; como los elementos de superficie dS_1 y dS_2 contribuyen igualmente y con signos contrarios, su efecto total es nulo.

Como esto sucede para todos los conos elementales que salen de O, resulta que el flujo Φ que sale por S es nulo:

$$\Phi = 0. \qquad [1]$$

2.º *La superficie cerrada S comprende a m_0.*

Ahora, cualquier cono elemental $d\Omega$ corta a S según un elemento de superficie dS a través del cual pasa el flujo *saliente* (1):

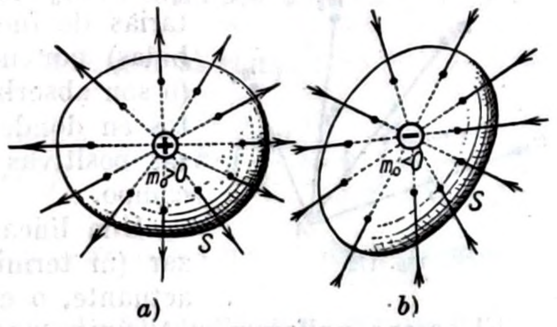


Fig. 171

$$d\Phi = k m_0 d\Omega.$$

Luego, el flujo a través de S vale:

$$\Phi = k \cdot m_0 \cdot \int d\Omega = 4\pi \cdot k \cdot m_0, \qquad [2]$$

que será positivo (es decir, un verdadero flujo saliente) si $m_0 > 0$, esto es, si el campo es repulsivo [fig. 171, *a*)]; será negativo (es decir, un flujo entrante) si $m_0 < 0$, es decir, si el campo es atractivo [figura 171, b]. En m_0 se tiene un «manantial» de flujo en el primer caso y un «sumidero» en el segundo caso (§ 83).

3.º *La superficie cerrada S para por m_0.*

Se tiene entonces, razonando como en el caso anterior y en el supuesto de que esté definido el plano tangente en el punto de S ocupado por m_0:

$$\Phi = 2\pi \cdot k \cdot m_0. \qquad [3]$$

Las expresiones [1], [2] *y* [3] *constituyen el teorema de* GAUSS, relativo al flujo de fuerza que sale de una superficie cerrada en un campo culombiano.

(1) La demostración se extiende fácilmente al caso en que S presente entrantes y sea cortada en más sitios por el tubo de fuerza elemental.

En el caso del campo newtoniano las fórmulas [2] y [3] valen también en signo con tal de que las masas materiales se supongan positivas, y la constante de la gravitación k se considere negativa.

Concluyendo: tales campos son solenoidales cuando se excluyen del campo (*y, por tanto, del volumen interior a S*) los puntos en los cuales están concentradas las masas actuantes; por consiguiente, nos ofrecen ejemplos de campos de divergencia nula, pero provistos de cavidades (§§ 83, 87).

Según los convenios del final de los §§ 81, 87, se puede decir que la [2] da el número de las líneas unitarias de fuerza que salen (o son absorbidas) por una masa m_0, y éstas nacen (o son absorbidas) únicamente en los puntos en donde están concentradas las masas positivas (o negativas) que crean el campo.

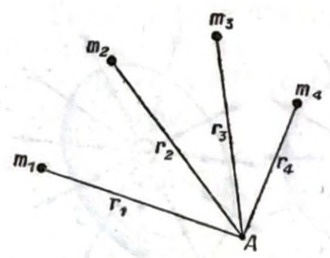


Fig. 172

Una línea de fuerza no puede comenzar (ni terminar) más que en una masa actuante, o en el infinito.

El campo uniforme es el único que es solenoidal y admite potencial, sin limitaciones.

§ 98. **Generalización.** Si el campo está creado por varias masas $m_1, m_2, \ldots m_n$ (fig. 172), su intensidad en el punto A es:

$$\vec{H} = \overrightarrow{\left(k\cdot\frac{m_1}{r_1^2}\right)} + \overrightarrow{\left(k\cdot\frac{m_2}{r_2^2}\right)} + \ldots + \overrightarrow{\left(k\cdot\frac{m_n}{r_n^2}\right)} = k\cdot\sum_n \overrightarrow{\left(\frac{m_n}{r_n^2}\right)} \quad \text{(suma vectorial)}; \quad [1]$$

el potencial en el punto A vale:

$$\mathfrak{V} = k\cdot\sum_n \frac{m_n}{r_n} \quad \text{(suma escalar)}; \quad [2]$$

el teorema de Gauss da:

$$\Phi = 4\pi k\cdot\sum m_i + 2\pi k\cdot\sum m_s; \quad [3]$$

en donde m_i son las masas situadas dentro de la superficie cerrada S; m_s son las masas colocadas sobre la superficie S, y Φ es el flujo saliente de dicha superficie. La [3] da el número de las líneas unitarias de fuerza (§ 87) que salen de S.

Se ha supuesto que sirve el mismo valor de k para todas las masas actuantes, porque k depende únicamente del sistema de unidades de medida.

Todavía, para mayor generalidad, sea una distribución continua en el espacio de infinitas masas dm que actúan en razón inversa del cuadrado de la distancia; se tiene entonces una masa específica $\mu = \frac{dm}{dv}$, que, en general, será variable de un punto a otro y que supondremos siempre finita; además, con objeto de evitar que la integral se haga infinita, supondremos que todas las masas presentes en el campo están contenidas en el interior de una superficie cerrada, que, aunque grande, sea finita; por lo demás, sólo en este caso puede conservarse la suposición de que el potencial sea nulo en todo punto del infinito.

Tal distribución de masas da origen al campo:

$$\vec{H} = k\cdot\int\overrightarrow{\left(\frac{dm}{r^2}\right)} = k\cdot\int\overrightarrow{\left(\frac{\mu\cdot dv}{r^2}\right)}; \qquad \mathfrak{V} = k\cdot\int\frac{dm}{r} = k\cdot\int\frac{\mu\cdot dv}{r}; \quad [4]$$

en donde la integral se extiende a todas las masas dm presentes en el campo.

El teorema de Gauss, aplicado a una superficie S, que comprende el volumen v, se escribe:

$$\Phi = 4\pi k\cdot\int_v dm_i. \quad [5]$$

Se aplica la [5] a un elemento de volumen dv que incluye la masa dm.

Sea $d\Phi$ el flujo saliente del volumen dv. Recordando la [3], § 82, se obtiene fácilmente la *relación de* Poisson:

$$\operatorname{div}\vec{H} = 4\pi k\cdot\mu. \quad [6]$$

Como el campo admite el potencial $\mathfrak{V}$, la [6] se escribe (§ 89, [13], [14]):

$$\Delta_2\mathfrak{V} = \frac{\partial^2\mathfrak{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathfrak{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\mathfrak{V}}{\partial z^2} = -4\pi k\cdot\mu. \quad [7]$$

En donde sea $\mu = 0$, esto es, en los sitios en que no hay masas, será:

$$\Delta_2\mathfrak{V} = 0; \quad [8]$$

el potencial satisface esta *ecuación* diferencial *de* Laplace.

Todo lo que precede constituye la base necesaria para el estudio del campo de la gravedad en un espacio suficientemente extenso

(§§ 168 y siguientes), en el cual no sea aplicable la primera aproximación efectuada en el § 94, y para el estudio de los campos eléctricos y magnéticos.

El papel privilegiado correspondiente a los campos centrales inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia, resalta todavía más al considerar que cualquier campo conservador puede imaginarse debido a la acción de masas convenientemente distribuídas en el campo y que actúan según la ley de COULOMB.

§ 99. Energía potencial, mutua, en los campos culombianos. La masa m en el campo culombiano creado por la masa m_0 tiene la energía de posición:

$$\mathcal{W} = m\,\mathcal{V} = k\frac{mm_0}{r}. \qquad [1]$$

Pero también la masa m, de igual naturaleza que m_0, crea un campo de fuerza que actúa sobre m_0 con una fuerza igual y opuesta, de acuerdo con el principio de acción y reacción.

La [1] es también la energía de posición de m_0 en el campo creado por m; esto es, $\mathcal{W}$ es una *energía* potencial *mutua* de las dos masas, que corresponde a ambas con el mismo derecho.

Al variar la distancia r entre las dos masas, es decir, al producirse un movimiento relativo, cambia la energía mutua en:

$$\mathcal{W}_2 - \mathcal{W}_1 = k \cdot m\,m_0 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right). \qquad [2]$$

Para los efectos de la energía potencial mutua es indiferente que sea m quien se aproxime a m_0, o viceversa.

Con mayor generalidad, si se encuentran en presencia varias masas $m_1, m_2, m_3, \ldots m_n$, y $r_{1,2}$ es la distancia entre m_1 y m_2; $r_{1,3}$, la distancia entre m_1 y m_3, etc., dichas masas crean un campo de fuerza total, provisto de la *energía mutua* de posición, total:

$$\mathcal{W} = k\left\{\begin{array}{l} \dfrac{m_1m_2}{r_{1,2}} + \dfrac{m_1m_3}{r_{1,3}} + \dfrac{m_1m_4}{r_{1,4}} + \ldots\ldots + \dfrac{m_1m_n}{r_{1,n}} + \\ \quad + \dfrac{m_2m_3}{r_{2,3}} + \dfrac{m_2m_4}{r_{2,4}} + \ldots\ldots + \dfrac{m_2m_n}{r_{2,n}} + \\ \quad + \ldots\ldots + \dfrac{m_{n-1}m_n}{r_{(n-1),n}} \end{array}\right\}. \qquad [3]$$

Abreviadamente, escribiremos:

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2}\,k \sum\sum \frac{m_s m_t}{r_{s,t}} \quad \begin{matrix} s = 1,2,\ldots n \\ t = 1,2,\ldots n \end{matrix} \quad t \neq s. \qquad [4]$$

La $\Sigma\,\Sigma$ se extiende a todos los pares posibles de valores de los índices, y, por tanto, cada término de la [3] entra dos veces: $\frac{m_s m_t}{r_{s,t}}$ y $\frac{m_t m_s}{r_{t,s}}$; he aquí el porqué del coeficiente $\frac{1}{2}$.

Pero:

$$k \cdot \sum_s \frac{m_s}{r_{s,t}} = \mathcal{V}_t, \quad (t \neq s)$$

es el potencial $\mathcal{V}_t$ en el punto ocupado por la masa m_t en virtud de las otras masas del campo. Por tanto, la [4] se escribe también:

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2}\sum_t m_t \mathcal{V}_t. \qquad (t = 1, 2, 3, \ldots n) \qquad [5]$$

Las [4] y [5] dan la *energía mutua* (potencial) entre las masas $m_1, m_2, \ldots m_n$ presentes en el campo, y expresan el trabajo que puede obtenerse del campo cuando las n masas se alejan indefinidamente unas de otras.

Pero si imaginamos que tales masas se desmenuzan en partes dm_1, dm_2 ..... infinitesimales, y que se apartan luego indefinidamente unas de otras: se destruye el campo en todas partes; los campos pequeñísimos que cabe todavía imaginar en torno a cada una de las masas elementales dm, poseen aún energía, pero su total es despreciable. La [4] se convierte en:

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2}\,k \cdot \iint_{v_1\,v_2} \frac{dm_1\,dm_2}{r_{1,2}} = \frac{1}{2}\int_v \mathcal{V} \cdot dm = \frac{1}{2}\int_v \mathcal{V} \cdot \mu \cdot dv; \qquad [6]$$

en donde $\mu = \frac{dm}{dv}$ es la masa específica; $v = v_1 = v_2$ es el volumen ocupado por las masas del campo o (lo que es lo mismo y más cómodo) el volumen de todo el campo; $r_{1,2}$ es la distancia entre las masas elementales dm_1 y dm_2 engendradoras del campo.

La [6] expresa el trabajo total que puede obtenerse al destruir el campo y se llama *energía (potencial) del campo.*

Se tienen, pues, tres conceptos afines, pero distintos:

1.º La *energía potencial* (§ 90) de una masa m introducida en un punto del campo en donde el potencial preexistente es $\mathcal{V}$. Debe

suponerse que dicha introducción no perturba dicho potencial, es decir, no modifica el campo preexistente, aunque, como ya se ha dicho (§ 79), por regla general, no nos encontramos en este caso (por ejemplo, tratándose de campos eléctricos y magnéticos). Esta energía potencial de m se llama *externa*, porque se debe a un campo sobre el cual m no influye y con el cual m no colabora.

2.º La *energía mutua* entre n masas, dada por las expresiones [4] y [5], sometida cada una de ellas al campo preexistente de las n — 1 masas restantes, en el supuesto de que tal campo no es perturbado por la introducción de la masa n — ésima.

3.º La *energía del campo* [6]. La consideración de esta energía es, desde el punto de vista físico, mucho más satisfactoria, y no sólo porque no experimenta las perturbaciones que se mencionan en los dos casos anteriores. En oposición a la energía definida en el párrafo 1.º, las energías de los párrafos 2.º y 3.º se llaman *energías potenciales internas*.

La importancia substancial de la energía del campo consiste en que, al modificarse la configuración del mismo, esto es, al variar la posición mutua de las partículas que engendran al campo (cuerpos que pueden ser deformables, flúidos, masas que cambian de posición respecto a la Tierra, variaciones en la posición respectiva de dos conductores electrizados o de dos imanes, etc.), varía la energía del campo; por ejemplo, pasando de $\mathcal{W}_1$ a $\mathcal{W}_2$. La disminución $\mathcal{W}_1 - \mathcal{W}_2$ de esta energía, que es energía de posición, equivale al trabajo que puede obtenerse del campo modificando su configuración. Por consiguiente, han de existir fuerzas mutuas entre los varios cuerpos que se hallan presentes en el campo, que son los que dan origen a dicho trabajo.

Estas fuerzas, en último análisis, son las fuerzas newtonianas o culombianas, aunque se presentan ahora como sistemas de fuerzas que actúan sobre cada cuerpo situado en el campo, a consecuencia de las masas materiales, eléctricas o magnéticas que tales cuerpos poseen. Estos sistemas de fuerzas constituyen las llamadas *fuerzas ponderomotrices* a las cuales está sometido todo cuerpo. Son fuerzas ponderomotrices el peso de un cuerpo, las acciones atractivas o repulsivas entre cuerpos electrizados o entre imanes. Véanse también los §§ 170, 173, y el tomo II.

B. — ESTÁTICA DEL PUNTO

§ 100. Punto libre. ¿En qué condiciones un punto, con libertad de moverse en todas las direcciones, se halla en equilibrio bajo la acción simultánea de n fuerzas $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \ldots, \vec{F}_n$?

Se experimenta con cuerpos pequeñísimos (puntos materiales) cuyas dimensiones geométricas y cuyo peso pueden suponerse despreciables. Un punto material, con libertad de movimiento e inicialmente en reposo, no puede estar en equilibrio por la acción de una sola fuerza (§ 77 *a*], *b*]).

a] **Dos fuerzas aplicadas.** Se aplican al pequeño cuerpo A (figura 173) las dos fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ mediante hilos, poleas y pesos. Únicamente se encuentra A en equilibrio cuando los dos pedazos de hilo AC_1 y AC_2 están en línea recta y se tiene $P_1 = P_2$. En la figura 173 *a*), el punto A no está en equilibrio; sí lo está en la figura 173 *b*).

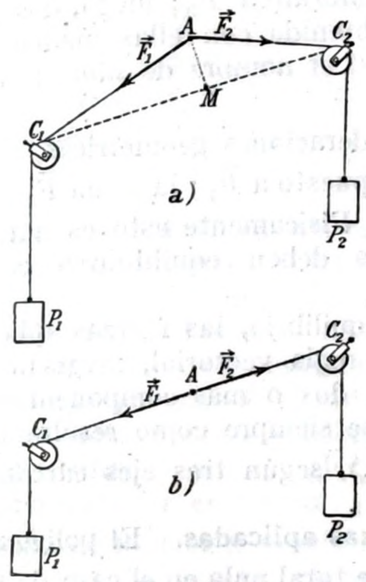


Fig. 173

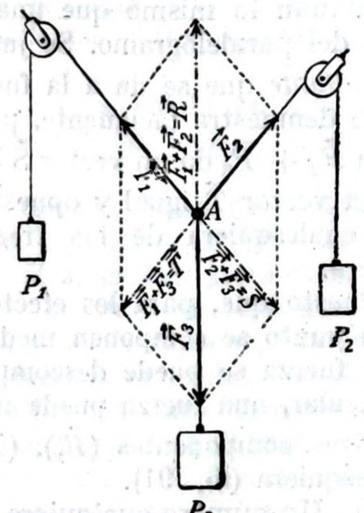


Fig. 174

Dos fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ se equilibran cuando son iguales y opuestas. En tal caso, A estará efectivamente en reposo únicamente si lo estaba en un principio.

Cualquier posición de A sobre la recta $C_1\ C_2$ es posición de equilibrio, y si A recibe un empujón en la dirección $C_1\ C_2$, sigue después por inercia con movimiento rectilíneo uniforme. Pero debido a las resistencias inevitables de la polea y del medio, el movimiento de A no resulta uniforme, sino retardado.

b] **Tres fuerzas aplicadas.** En el punto A (fig. 174) están aplicadas tres fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$; las dos primeras están materializadas mediante hilos, poleas y pesos, P_1 y P_2; y la tercera, mediante el peso P_3 aplicado directamente al hilo AP_3. Sencillamente, A es un nudo hecho con los tres hilos que sirven para la aplicación de las fuerzas. El sistema, abandonado a sí mismo, oscila, tomando una con-

figuración de equilibrio estable, contenida en el plano vertical que pasa por las dos poleas. Los hilos dan las direcciones de las tres fuerzas aplicadas en A; los pesos P_1, P_2 y P_3 dan los módulos de estas fuerzas. Se comprueba gráficamente que, en la configuración de equilibrio, la diagonal $\vec{R}$ del paralelogramo construído sobre $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ es igual y opuesta a $\vec{F}_3$. Éste es el experimento clásico del *paralelogramo de las fuerzas*.

Una fuerza representada gráficamente por $\vec{R}$, igual y opuesta a $\vec{F}_3$, se equilibra con esta última en el caso anterior; también F_1 y $\vec{F}_2$, actuando simultáneamente, equilibran a $\vec{F}_3$; luego, dos fuerzas actúan lo mismo que una sola obtenida con ellas mediante la regla del paralelogramo. Se justifica así el nombre de *suma vectorial* o *resultante* que se da a la fuerza $\vec{R}$.

Se demuestra fácilmente, por consideraciones geométricas, que la suma $\vec{F}_2 + \vec{F}_3$ da un vector $\vec{S}$ igual y opuesto a $\vec{F}_1$; la suma $\vec{F}_3 + \vec{F}_1$ da un vector $\vec{T}$ igual y opuesto a $\vec{F}_2$. Físicamente esto es natural: dos cualesquiera de las tres fuerzas deben equilibrarse con la tercera.

Puesto que, para los efectos del equilibrio, las fuerzas aplicadas a un punto se componen mediante la regla vectorial, inversamente, cada fuerza se puede descomponer en dos o más componentes. En particular, una fuerza puede imaginarse siempre como resultante de sus tres componentes $(\vec{F}_x)$, $(\vec{F}_y)$ y $(\vec{F}_z)$, según tres ejes cartesianos cualesquiera (fig. 91).

c] **Un número cualquiera de fuerzas aplicadas.** El polígono de las tres fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ da resultante total nula en el caso de equilibrio. También es nula en el caso *a*] la resultante de las dos fuerzas aplicadas.

Esto es siempre válido: aplicando sucesivamente la regla del paralelogramo, se deduce que n fuerzas aplicadas en un punto producen el mismo efecto que su resultante, obtenida según la regla del polígono de las fuerzas.

Para que exista equilibrio, esta resultante debe ser nula; es decir, la línea poligonal que forman las fuerzas ha de resultar *cerrada*:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots\ldots + \vec{F}_n = 0. \qquad [1]$$

Obsérvese que, cuando hay más de tres fuerzas, no es necesario que estén todas en un plano para que haya equilibrio; la línea poligonal de las fuerzas puede no ser plana, aunque sea cerrada.

La condición [1] necesaria y suficiente para que haya equilibrio

de *n fuerzas aplicadas en un punto*, puede escribirse en componentes, según (§ 50, [3]); así:

$$\left.\begin{aligned} F_{1x} + F_{2x} + \ldots\ldots + F_{nx} &= 0 \\ F_{1y} + F_{2y} + \ldots\ldots + F_{ny} &= 0 \\ F_{1z} + F_{2z} + \ldots\ldots + F_{nz} &= 0 \end{aligned}\right\}. \qquad [2]$$

Si en un punto están aplicados dos sistemas de fuerzas, cada uno de los cuales está en equilibrio, es decir, si son nulas las resultantes $\vec{R}_1$ y $\vec{R}_2$ de cada uno de estos sistemas, será también nula la resultante total $\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2$, es decir, que el punto está en equilibrio bajo la acción simultánea de los dos sistemas. Éste es el principio de la *superposición de los equilibrios*.

Veremos en seguida que este principio es válido en cualquier clase de equilibrio (puntos o cuerpos, libres o ligados).

§ **101. Equilibrio en un campo de fuerzas. Tipos de equilibrio.** Raramente se presenta el problema del equilibrio en esta forma: Dado el punto A y dadas las fuerzas a él aplicadas, ¿está el cuerpo en equilibrio? Se presenta más bien de la manera siguiente: El punto A puede ocupar infinitas posiciones en el espacio; para cada una de ellas se conoce el sistema de fuerzas aplicadas, es decir, cada una de las fuerzas aplicadas es una función conocida de las posiciones ocupadas por A. ¿Existen posiciones de equilibrio?

El punto A se encuentra, pues, en un campo de fuerzas que es resultante de la acción simultánea de las fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, ... $\vec{F}_n$ de n campos de fuerzas determinados.

Conocidos los campos de fuerzas aplicados, es conocida su resultante en todos los puntos del campo. Las posiciones de equilibrio del punto A son aquellas en las cuales la fuerza del campo resultante $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots\ldots + \vec{F}_n$ es nula.

Se puede, además, establecer si el equilibrio es *estable*, *inestable* o *indiferente*.

El equilibrio es *estable* cuando al separar el punto A de la posición de equilibrio tiende a volver a ella por efecto de las fuerzas del campo. Luego, las líneas de fuerza *del vector* $\vec{F}$, no de la intensidad del campo $\vec{H}$, la cual, para masas negativas, puede tener un sentido opuesto al de $\vec{F}$ (véase § 80), deben concurrir en el punto que es posición de equilibrio. Si las líneas de fuerza divergen desde este punto, el equilibrio es *inestable*, y al separar el punto A de su posición de equilibrio, no vuelve a ella por la acción de las fuerzas del campo.

Se ha visto que los campos de fuerzas de que dispone la Física admiten generalmente potencial, el cual disminuye a lo largo de las

líneas de fuerza en el sentido de éstas. Se sigue de aquí que la energía potencial $\mathcal{W}$ (§ 99, 1º), tanto para masas m positivas como para masas m negativas, disminuye a lo largo de las líneas de fuerza *del vector* $\vec{F}$. Luego, las posiciones de equilibrio estable coinciden con los puntos en que es mínimo $\mathcal{W}$, y las posiciones de equilibrio inestable coinciden con los puntos en que $\mathcal{W}$ es máximo.

El campo de fuerzas puede presentar una línea o una superficie S, lugar de los puntos en donde es nula la fuerza del campo.

Si existe potencial, dicha superficie (o dicha línea) es equipotencial, pues, de otro modo, una por lo menos de las [6], § 89, no sería nula, y tampoco lo serían $\vec{H}$ ni $\vec{F}$. La energía potencial $\mathcal{W}$ es constante en todos los puntos de S.

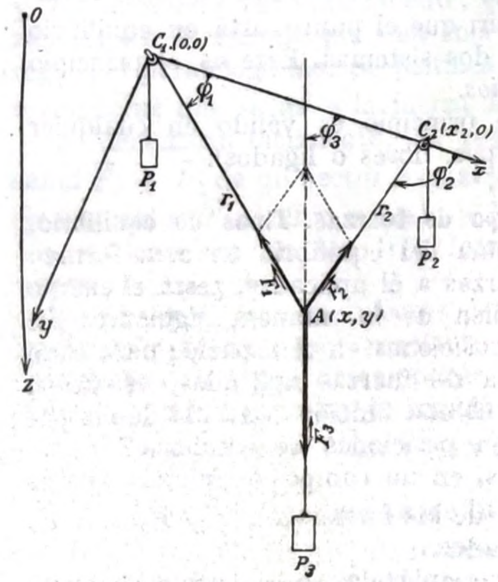


Fig. 175

Todos los puntos de S son posiciones de equilibrio. El punto A, trasladado a lo largo de esta superficie (o línea), se encuentra en equilibrio *indiferente*. Pero para corrimientos transversales respecto a dicha superficie, el equilibrio no es, en general, indiferente. Puede darse el caso, por ejemplo, de que el punto A sea devuelto a S por las fuerzas del campo; el equilibrio de A respecto a los corrimientos transversales será *estable;* las líneas de fuerza son normales a S y dirigidas hacia S, tanto en un lado de esta superficie como en el otro.

Se tiene un ejemplo de equilibrio estable en un punto en el dispositivo de la figura 174. Se separa A de la posición de equilibrio, y después se deja en libertad. El punto A, después de algunas oscilaciones amortiguadas por las resistencias, toma de nuevo la posición de equilibrio. El equilibrio es estable. Para mayor sencillez, limitémonos a consideraciones en el plano vertical (x, y, z) (fig. 175), que pasa por C_1 y C_2. Existen tres campos:

1.º Campo de la fuerza $\vec{F}_1$, central, atractivo, con centro en C_1, de módulo constante $|F_1| = P_1$ y energía potencial $\mathcal{W}_1 = P_1 \cdot r_1$.

2.º Campo de la fuerza $\vec{F}_2$, central, atractivo, con centro en C_2, de módulo constante $|F_2| = P_2$ y energía potencial $\mathcal{W}_2 = P_2 \cdot r_2$.

3.º Campo de la fuerza $\vec{F}_3$, uniforme, de energía potencial $\mathcal{W}_3 = -P_3 \cdot z$.

La energía potencial para el campo resultante es:

$$\mathcal{W} = P_1 \cdot r_1 + P_2 \cdot r_2 - P_3 \cdot z. \qquad [1]$$

La condición necesaria (y, en este caso, también suficiente) para que $\mathcal{W}$ tenga un mínimo, es que para cualquier corrimiento $(dr_1, dr_2; dz)$ se tenga:

$$P_1 \cdot dr_1 + P_2 \cdot dr_2 - P_3 \cdot dz = 0, \qquad [2]$$

donde únicamente son independientes entre sí dos de las tres diferenciales.

Conviene introducir los ejes xy indicados en la figura. Sean F_{1x}, F_{1y}; F_{2x}, F_{2y}; F_{3x}, F_{3y} las componentes de las tres fuerzas; se tiene, en valor y signo:

$$\left.\begin{aligned} F_{1x} &= -P_1 \cdot \cos\varphi_1, & F_{1y} &= -P_1 \cdot \operatorname{sen}\varphi_1 \\ F_{2x} &= -P_2 \cdot \cos\varphi_2, & F_{2y} &= -P_2 \cdot \operatorname{sen}\varphi_2 \\ F_{3x} &= P_3 \cdot \cos\varphi_3, & F_{3y} &= P_3 \cdot \operatorname{sen}\varphi_3 \end{aligned}\right\}; \qquad [3]$$

donde P_1, P_2, P_3 son valores absolutos, y φ_3 es constante, porque $\vec{F}_3$ tiene dirección constante.

Si x, y son las coordenadas del punto A al que están aplicadas las tres fuerzas, se tiene:

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2}; \qquad r_2 = \sqrt{(x - x_2)^2 + y^2};$$

y, por tanto, diferenciando:

$$dr_1 = \frac{x}{r_1}dx + \frac{y}{r_1}dy = \cos\varphi_1 \cdot dx + \operatorname{sen}\varphi_1 \cdot dy;$$

$$dr_2 = \frac{x - x_2}{r_2}dx + \frac{y}{r_2}dy = \cos\varphi_2 \cdot dx + \operatorname{sen}\varphi_2 \cdot dy,$$

Además, es:

$$dz = \cos\varphi_3 \cdot dx + \operatorname{sen}\varphi_3 \cdot dy.$$

La [2] se convierte, pues, en:

$$(P_1 \cdot \cos\varphi_1 + P_2 \cdot \cos\varphi_2 - P_3 \cdot \cos\varphi_3)\,dx + (P_1 \cdot \operatorname{sen}\varphi_1 + P_2 \cdot \operatorname{sen}\varphi_2 - P_3 \cdot \operatorname{sen}\varphi_3)\,dy = 0,$$

y debe ser satisfecha para cualquier par de corrimientos infinitesi-

males dx, dy de A, completamente arbitrarios. Esto sucede cuando

$$\left.\begin{aligned} P_1\cdot\cos\varphi_1+P_2\cdot\cos\varphi_2-P_3\cdot\cos\varphi_3=0, \text{ o sea }, \; F_{1x}+F_{2x}+F_{3x}=0 \\ P_1\cdot\operatorname{sen}\varphi_1+P_2\cdot\operatorname{sen}\varphi_2-P_3\cdot\operatorname{sen}\varphi_3=0, \text{ o sea, } F_{1y}+F_{2y}+F_{3y}=0 \end{aligned}\right\}. \quad [4]$$

La condición [2] de mínimo de la energía potencial queda satisfecha en cualquier punto A (x, y) donde la resultante [4] de las tres fuerzas es nula; esto es, allí donde existe equilibrio por la regla del paralelogramo de las fuerzas.

El dispositivo de la figura 173 nos ofrece un ejemplo de equilibrio estable con una línea de equilibrio indiferente.

Se tienen los dos campos de fuerzas centrales $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ con centros en C_1 y C_2, respectivamente, y energías potenciales $P_1\, r_1$ y $P_2\, r_2$. La energía potencial resultante es:

$$\mathcal{V} = P_1 r_1 + P_2 r_2; \qquad P_1 > 0;\ P_2 > 0. \quad [5]$$

En los puntos de mínimo tiene que ser:

$$P_1\, dr_1 + P_2\, dr_2 = 0. \quad [6]$$

Si existe un mínimo, no puede estar más que sobre el segmento $C_1\ C_2$. En efecto, si A [fig. 173, a)] queda fuera de este segmento, llevando A hacia su proyección M, disminuyen r_1 y r_2; la [6] no puede quedar satisfecha, porque en dicho punto tienen el mismo signo dr_1 y dr_2.

Por otra parte, se comprende ya por la [5] que $\mathcal{V}$ disminuye al trasladarse el punto desde A hacia M.

Si A se encuentra en la recta $C_1\ C_2$, fuera del segmento $C_1\ C_2$, al aproximar A a C_1 (y, por tanto, a C_2) se produce una disminución de r_1 y r_2; la [6] no puede quedar satisfecha, y se ve por la [5] que $\mathcal{V}$ disminuye al aproximarse A al segmento $C_1\ C_2$.

Por lo tanto, el valor mínimo de $\mathcal{V}$ se encuentra sobre el segmento $C_1\ C_2$. Pero para su corrimiento de A a lo largo del segmento $C_1\ C_2$ se tiene $dr_1 = -\, dr_2$.

Para que sea satisfecha la [6] ha de ser $P_1 = P_2$, y en tal caso será satisfecha la [6] (para corrimientos a lo largo de $C_1\ C_2$) en cualquier punto de $C_1\ C_2$.

El equilibrio de A a lo largo de C_1C_2 es *indiferente*. De acuerdo con esto, en los puntos del segmento C_1C_2, es $\mathcal{V} = P_1\cdot(r_1 + r_2) = \text{const}$.

En la figura 176 se da un ejemplo de equilibrio estable con una superficie de equilibrio indiferente. L es un recipiente lleno de agua y A es el centro de una esferita de madera de álamo que pesa 1000 di-

nas = 0,01 newton (≈ 1 g$_p$). Siendo el peso específico del álamo $0{,}005\ \frac{\text{newton}}{\text{cm}^3}$, esta bolita tendrá un volumen de 2 cm^3. La esferita se encuentra en un campo de fuerzas. Cuando la esferita se halla en el aire, la fuerza que actúa sobre ella es su peso (0,01 newton), el campo es uniforme, las líneas de fuerza son verticales, dirigidas hacia abajo, y la fuerza del campo = 0,01 newton. Si la esferita se halla sumergida en el líquido, la fuerza que sobre ella actúa es el peso (0,01 newton) menos el empuje de ARQUÍMEDES (0,02 newton); es decir, el campo es uniforme, las líneas de fuerza son verticales dirigidas hacia arriba y la fuerza del campo = — 0,01 newton. La fuerza del campo va pasando desde + 0,01 a — 0,01 newton en los puntos A_2, A_3, A_4, que corresponden a una inmersión parcial de la esferita. Si A se encuentra en la superficie del líquido, el campo es nulo y la energía potencial es mínima. La esferita se sumerge sólo por mitad, y se encuentra en equilibrio indiferente con respecto a los corrimientos horizontales de A, y en equilibrio estable para los corrimientos no horizontales.

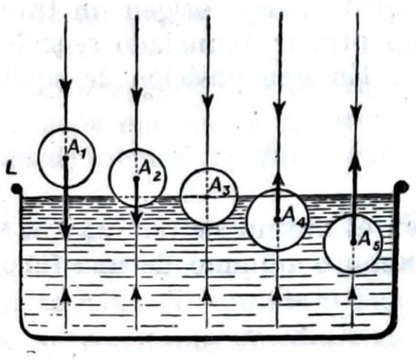


Fig. 176

Si las fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ..., $\vec{F}_n$ aplicadas al punto A constituyen otros campos de fuerzas uniformes y se verifica en un punto A la condición de equilibrio $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots\ldots \vec{F}_n = 0$, se verificará en todas partes: si se tiene equilibrio, sólo puede ser indiferente.

También se puede expresar de otro modo la condición de equilibrio en un campo de fuerzas: Cuando en A actúa una resultante $\vec{R}$, no nula, de las fuerzas aplicadas, un corrimiento $d\vec{l}$ del punto A supone un trabajo:

$$d\mathcal{L} = |R|\cdot|dl|\cdot\cos\varphi.$$

El punto está libre, pudiéndose mover en todas direcciones; $d\mathcal{L}$ es un infinitésimo del mismo orden que dl, porque cos φ, en general, no es nulo; sería nulo o infinitesimal sólo cuando $d\vec{l}$ fuese perpendicular a $\vec{R}$.

Si el punto se encuentra en una posición de equilibrio A, es nula $\vec{R}$, y durante el corrimiento $d\vec{l}$ la fuerza $\vec{R}$ es infinitésima como $d\vec{l}$, por cuanto se supone función regular del punto del campo.

Luego, $d\mathcal{L}$, producto de dos infinitésimos, es infinitésimo de orden superior al primero, y despreciable respecto a dl (y a R).

Para cualquier corrimiento infinitesimal de la posición de equilibrio, es nulo el trabajo de las fuerzas aplicadas, salvo un infinitésimo de orden superior.

Si el equilibrio es estable, el trabajo, infinitésimo de orden superior, es negativo ; es decir, las fuerzas del campo obstaculizan el movimiento (débilmente, porque tienden a cero con $d\vec{l}$). Si el equilibrio es inestable, este trabajo es positivo ; si, para movimientos especiales, el equilibrio es indiferente, los corrimientos $d\vec{l}$, según estos movimientos, dan origen un trabajo exactamente nulo. Constituye esto un primer enunciado sencillo del *principio de los trabajos virtuales.*

En una posición de equilibrio se tiene, pues :

$$d\mathfrak{L} = 0, \qquad [7]$$

en el mismo sentido en que se dice que en un punto $x = x_0$ de máximo o mínimo de una función $y = y\,(x)$ es :

$$(dy)_{x_0} = 0.$$

Si el campo resultante $\vec{R}$ admite potencial, y es regular, las condiciones de equilibrio estable, inestable o indiferente son las de mínimo, máximo o constancia de la energía potencial $\mathcal{W}$. Esto es, la condición de equilibrio puede escribirse :

$$d\mathcal{W} = -\,d\mathfrak{L} = 0. \qquad [8]$$

La energía potencial $\mathcal{W}$ considerada en los ejemplos anteriores es la externa (§ 99, 1º) ; pero recordando el significado de las variaciones de la energía potencial interna, en particular de la energía del campo (§ 99, 3º), se entiende que la condición precedente relativa a $\mathcal{W}$ es también válida si por $\mathcal{W}$ se entiende la energía potencial interna.

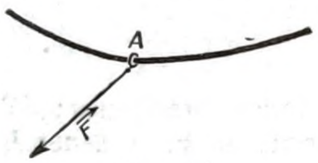


Fig. 177

§ 102. Punto ligado. Ligadura. Un pequeño anillo A (figura 177), pasado por una varilla l, sólo puede moverse corriendo a lo largo de la varilla (no interesa la rotación del anillo sobre sí mismo).

Se tiene el ejemplo de *punto ligado* a *una línea.* Esta línea es trayectoria de todos los movimientos posibles del punto.

Una esferita colocada entre dos planos paralelos Π_1, Π_2 (fig. 178), cuya distancia es igual al diámetro de la esfera, ofrece un ejemplo de *punto ligado a una superficie.*

Una esferita M apoyada sobre una mesa proporciona el ejemplo de un punto ligado a permanecer a un mismo lado (semiespacio) del plano representado por la mesa. La esferita P de un péndulo simple suspendido en el punto C proporciona un ejemplo de punto ligado a permanecer en una esfera de centro C y radio CP igual a la longitud del péndulo.

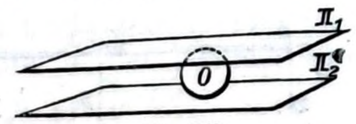


Fig. 178

En general, cualquier artificio capaz de imponer una limitación al movimiento de un cuerpo se llama *ligadura.*

Se piden las condiciones de equilibrio de un punto ligado al que se han aplicado n fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ..., $\vec{F}_n$.

Se admitirá siempre que las ligaduras son independientes del tiempo : la varilla l y los planos Π_1, Π_2 se supone que no se deforman ni se mueven con el tiempo. Además, consideraremos *ligaduras lisas,* esto es, sin rozamientos.

a] **Punto ligado a una línea.** Enseña la experiencia que el anillo A se encuentra en equilibrio bajo la acción de una fuerza $\vec{F}$ cuando ésta es normal en A a la línea l ; el anillo se halla en equilibrio bajo la acción de dos fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ cuando su resultante $\vec{F}$, obtenida mediante la regla del paralelogramo, es normal en A a la línea l.

Esto prueba que la regla del paralelogramo también es válida para los cuerpos ligados.

Entonces se deduce que n fuerzas aplicadas al anillo se equilibran si su resultante (obtenida con la regla del polígono) es normal a l en el punto A.

La comprobación experimental es tanto más precisa cuanto mejor deslice el anillo sobre l ; dicho de otro modo : es necesario tener en cuenta, además de las fuerzas aplicadas, la acción del rozamiento.

La resultante $\vec{F}$ puede tener cualquier valor, entre ciertos límites ; en particular, puede ser nula (en este caso, el equilibrio subsistiría aunque no existiese la ligadura) ; pero si $\vec{F}$ es demasiado grande, o bien se rompe el anillo, o se deforma o rompe la varilla l. En realidad, *toda ligadura es válida hasta cierto límite.*

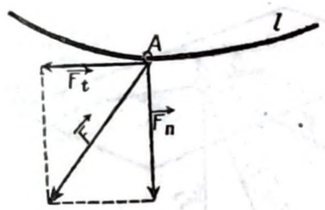


Fig. 179

Si $\vec{F}$ no es normal a l (fig. 179), tiene una componente $\vec{F}_t$ tangente en A a la trayectoria ; el anillo se mueve entonces a lo largo de l en el sentido dado por $\vec{F}_t$. La única parte de $\vec{F}$ capaz de producir el movimiento es la fuerza componente $\vec{F}_t$.

b] **Plano inclinado.** El *plano inclinado* destinado a este experimento (fig. 180) está constituído por dos robustos carriles que pueden girar alrededor de un eje horizontal colocado en O normal al plano

de la figura que se supone vertical; de este modo la inclinación α del plano inclinado es variable y conocida. Sobre los carriles puede moverse sin rozamiento apreciable un carrito A, al cual queda aplicado su propio peso $\vec{P}$, que puede variarse mediante la adición de pesas Z, en forma de discos. Además, puede aplicarse también otra fuerza $\vec{F}$, como en la figura 180, *b*) y *c*). En todos los casos *se alcanza el equilibrio cuando la resultante* $\vec{R}$ *de las fuerzas aplicadas es normal al plano inclinado.*

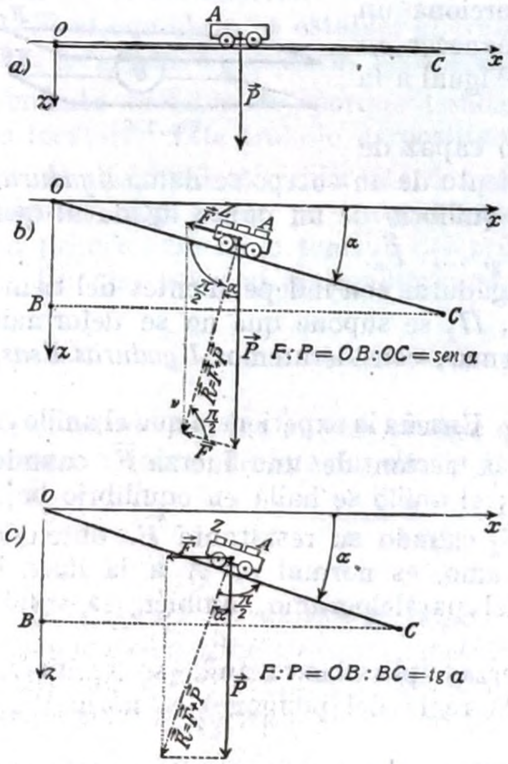


Fig. 180

Esta resultante debe estar dirigida desde el punto A hacia el plano, pues de otro modo el punto A se separaría de dicho plano; la ligadura de adherencia a los carriles OC obtenida mediante el plano indicado es unilateral, esto es, ejerce su acción en un solo sentido.

c] **Punto ligado a una superficie.** El anterior plano inclinado debería llamarse más apropiadamente «recta inclinada» y debería considerarse como un ejemplo particular del caso *a*].

En la figura 181 se tiene un plano inclinado efectivo, sobre el cual se imagina una esfera A sometida a varias fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ..., entre las cuales se incluye su peso.

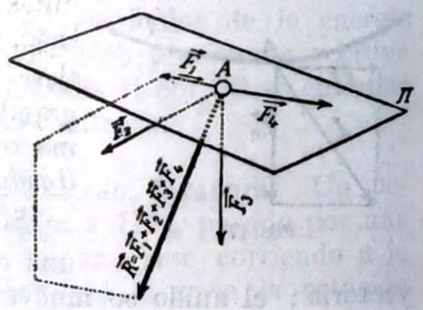


Fig. 181

Cuando se reducen suficientemente las resistencias, demuestra la experiencia que el equilibrio se obtiene cuando la resultante $\vec{R}$ de las fuerzas aplicadas es normal al plano.

En general, *hay equilibrio cuando la resultante de las fuerzas aplicadas es normal a la superficie de la ligadura en el sitio ocupado por el punto que se estudia.*

Si no es normal a la superficie, la resultante $\vec{R}$ tiene una componente $\vec{R}_t$ paralela al plano tangente en A a la superficie; la experiencia demuestra que entonces A se mueve sobre la superficie en el sentido dado por $\vec{R}_t$. La única parte de $\vec{R}$ capaz de producir el movimiento es $\vec{R}_t$.

El experimento de la figura 181 no es fácil; mucho más fácil es el siguiente *(péndulo simple)*. La bolita A del péndulo está sujeta a su peso $\vec{P}$ [fig. 182, *a*)].

Demuestra la experiencia que el péndulo A se halla en equilibrio cuando la recta de aplicación de $\vec{P}$ (*vertical* trazada por A) pasa por O, y la orientación de $\vec{P}$ va desde O hacia A.

Si hay varias fuerzas aplicadas [figura 182, *b*], la resultante $\vec{R}$ debe ser paralela a OA; es decir, OA tiene que ser la recta de aplicación de $\vec{R}$ y ésta debe estar dirigida de O hacia A.

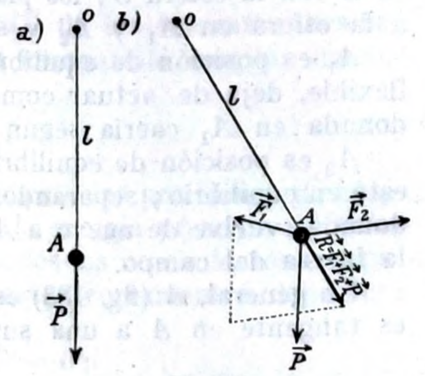


Fig. 182

Si $\vec{R}$ se dirigiese desde A hacia O, la bolita A subiría acercándose al centro O.

La ligadura es unilateral, puesto que el hilo l impide que A se aleje de O, pero no impide que se aproxime.

§ 103. Punto ligado en un campo de fuerzas. Fijémonos en el caso más frecuente: el de un punto A ligado a una superficie S (figura 183).

Si el campo de la fuerza aplicada $\vec{F}$, o resultante de las varias fuerzas aplicadas, admite potencial, el punto A tendrá una energía de posición $\mathcal{V}$ (§ 99, 1º), función de la posición ocupada.

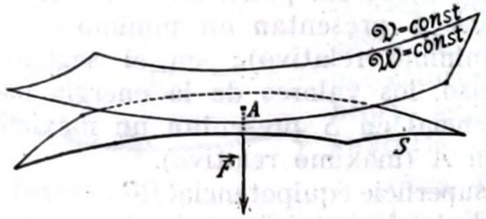


Fig. 183

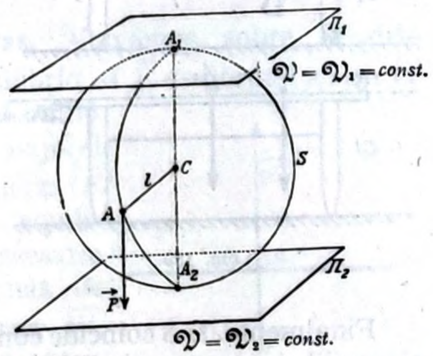


Fig. 184

Si el punto A representa una posición de equilibrio, la fuerza $\vec{F}$ es normal a S en A. Pero $\vec{F}$ también es normal a la superficie equipotencial (§ 89); luego, las posiciones de equilibrio de A sobre S son

aquellas en que S es tangente a una superficie equipotencial.

Así, por ejemplo, para un péndulo A (fig. 184), bajo la acción de la fuerza peso, la superficie S es la esfera de centro C y radio CA, y las superficies equipotenciales del campo son planos horizontales. A_1 y A_2 son las posiciones de equilibrio, intersecciones de la vertical en C con la esfera S; los planos horizontales Π_1, Π_2 son tangentes a la esfera en A_1 y A_2 y son superficies equipotenciales.

A_1 es posición de equilibrio *inestable*, y si el hilo del péndulo es flexible, deja de actuar como ligadura, la bolita del péndulo abandonada en A_1 caería según la vertical.

A_2 es posición de equilibrio *estable*, y la bolita A colocada en A_2 está en equilibrio; separándola de A_2 corre sobre la esfera S, y abandonada, vuelve de nuevo a A_2 bajo la acción de una componente de la fuerza del campo.

En general, A (fig. 183) es posición de equilibrio *estable* cuando S es tangente en A a una superficie equipotencial ($\mathcal{V} = \text{const.}$; por tanto, $\mathcal{W} = \text{const.}$), y S se halla toda ella en el lado de la superficie $\mathcal{W} = \text{const.}$ ocupado por las superficies equipotenciales correspondientes a una energía potencial *mayor* que $\mathcal{W}$. El equilibrio es inestable si S se extiende por completo en el lado de la superficie $\mathcal{W} = \text{const.}$ ocupada por superficies equipotenciales correspondientes a una energía potencial menor que $\mathcal{W}$; éste es el caso de la figura.

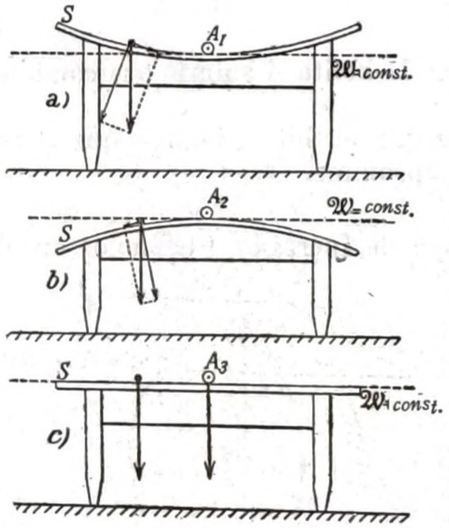


Fig. 185

En el primer caso, los valores de la energía potencial *en la superficie* S presentan un mínimo en A (mínimo relativo); en el segundo caso, los valores de la energía potencial en S presentan un máximo en A (máximo relativo).

Finalmente, si S coincide con la superficie equipotencial $\mathcal{W} = \text{const.}$, el equilibrio de A es *indiferente*, y todas las posiciones de A en S son posiciones de equilibrio.

Así, si una esferita A (fig. 185) está sólo sujeta a la fuerza peso y se apoya sobre una tabla S, se tiene una posición de equilibrio estable A_1, si S es cóncava; una posición A_2 de equilibrio inestable, si S es convexa; el equilibrio es indiferente cuando S es plana y horizontal.

Lo mismo que para el punto libre, puede expresarse la condición de equilibrio del punto ligado mediante el *principio de los trabajos*

virtuales. En una posición de equilibrio, la fuerza componente $\vec{F}_t$ (figura 179), tangente al vínculo, es nula. Pero para un *corrimiento infinitesimal compatible con la ligadura (corrimiento virtual)*, $\vec{F}_t$ es la única componente de las fuerzas aplicadas $\vec{F}$ que da un trabajo no nulo.

Luego, en el equilibrio, el trabajo $d\mathcal{L}$ de las fuerzas aplicadas, para cualquier corrimiento infinitesimal compatible con las ligaduras, debe ser nulo:

$$d\mathcal{L} = 0. \qquad [1]$$

Si las fuerzas aplicadas admiten potencial, las posiciones de equilibrio coinciden con los puntos en donde la energía presenta un valor máximo o mínimo relativo, respecto a todos los corrimientos compatibles con las ligaduras. Luego, para estos corrimientos debe ser:

$$d\mathcal{V} = 0; \qquad d\mathcal{W} = 0;$$

por tanto, se tiene:

$$d\mathcal{L} = -\,d\mathcal{W} = 0. \qquad [2]$$

Se vuelve a encontrar la [8] del § 101; y, como en aquel caso, la condición de equilibrio relativa a $\mathcal{W}$ vale incluso cuando por $\mathcal{W}$ se entiende la energía potencial interna (§ 99, 2.º, 3.º). Las consideraciones que acabamos de hacer son también válidas para los puntos ligados, *pero se aplican únicamente a los corrimientos virtuales*.

§ **104. Reacciones de las ligaduras.** Volvamos sobre el dispositivo de la figura 177. Se logra equilibrio si $\vec{F}$ es normal a l en el punto A. Si el anillo A fuese libre, bajo el efecto de la fuerza $\vec{F}$ no estaría en equilibrio; sería necesario aplicarle, además de $\vec{F}$, otra fuerza $\vec{F}'$, igual y opuesta. Atribuyamos el mismo efecto a la misma causa, y establezcamos que la ligadura (varilla l) es capaz de aplicar la fuerza $\vec{F}'$ necesaria para establecer el equilibrio: $\vec{F}'$ es la *reacción de la ligadura*.

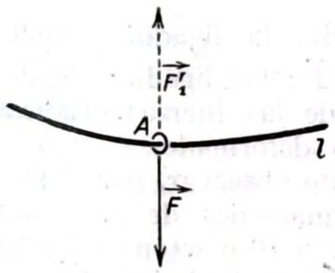


Fig. 186

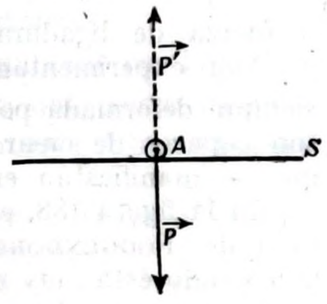


Fig. 187

Una ligadura no es capaz de crear fuerzas de reacción cualesquiera; por ejemplo, en un punto móvil *sin rozamiento* a lo largo de la línea l (fig. 186), la ligadura sólo es capaz de producir reacciones *perpen-*

diculares a la línea l; para corrimientos a lo largo de la ligadura *(corrimientos virtuales)*, estas reacciones producen un trabajo nulo.

Análogamente, una esferita (fig. 187), a la que está aplicada la fuerza $\vec{P}$, está en equilibrio sobre una superficie S (por ejemplo, plana) si $\vec{P}$ es normal a S en el punto A. Se obtendría el equilibrio del punto libre si, además de $\vec{P}$, estuviese también aplicada en A la fuerza $\vec{P}'$, igual y opuesta; el plano S crea la fuerza de *reacción* $\vec{P}'$ capaz de realizar el equilibrio. Un plano S, sobre el cual A puede deslizar sin rozamiento, sólo es capaz de crear reacciones normales al plano. Para corrimientos sobre el plano *(corrimientos virtuales)* estas reacciones efectúan un trabajo nulo.

Así también en el caso de la figura 182, en que la ligadura está constituída por el punto fijo O, mediante el hilo OA, esta ligadura sólo puede crear fuerzas de reacción orientadas según $A \longrightarrow O$. Estas fuerzas de reacción pueden imaginarse aplicadas en O, en A, o en un punto cualquiera del hilo.

Todo tipo de ligadura lisa solamente es capaz de producir fuerzas de reacción cuyo trabajo es nulo para cualquier corrimiento virtual.

Si entre las posibles fuerzas de reacción existe una igual y opuesta a la resultante de las fuerzas aplicadas a un punto, éste se halla en equilibrio. Tal es el *principio de acción y reacción* en la estática: durante el equilibrio, a toda acción (fuerza exterior aplicada por nosotros) se opone una reacción (fuerza exterior aplicada por nosotros, o fuerza de ligadura, igual y opuesta).

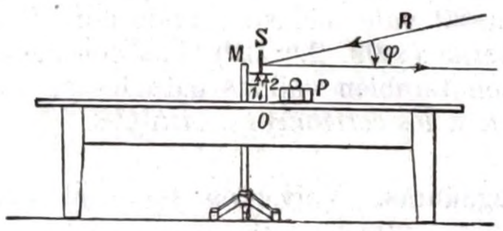


Fig. 188

Aun experimentando con mucho cuidado, la ligadura resulta siempre deformada por las fuerzas aplicadas $\vec{F}$; las ligaduras reales son capaces de crear reacciones en virtud de las fuerzas elásticas que se manifiestan en todo cuerpo elástico deformado.

En la figura 188, el dispositivo MO permite observar, por el método de POGGENDORFF, pequeñísimas deformaciones de la mesa; aun siendo ésta muy robusta, una carga de sólo 10 newton ($\approx 1\ kg_p$) produce ya una deformación observable; la punta 2, baja; el espejito S, apoyado en la punta 1, fija en M, y en la punta 2, gira un ángulo observable.

Repitamos que las reacciones de ligadura deben estar comprendidas dentro de ciertos límites impuestos por la resistencia de los materiales con que se ha construído la ligadura. Si $\vec{F}$ es demasiado fuerte, l (fig. 186) se dobla o se rompe; la ligadura l no es capaz de

producir una reacción tan grande como $\vec{F}$. Análogamente ocurre cuando la ligadura es una superficie S.

C. — ESTÁTICA DEL CUERPO RÍGIDO

§ 105. Cuerpo rígido libre. Un cuerpo rígido tiene, por lo general, un peso no despreciable. Pero un pedazo de madera, mediante un número suficiente de tornillos de lastre regulables, puede quedar en equilibrio indiferente cuando se le sumerge en agua (fig. 189). Dejando aparte el rozamiento con el medio, que no influye en la posición de equilibrio (§ 78), el pedazo de madera está allí con libertad de moverse de todas las maneras (traslación, rotación) y no tiende a tomar ninguna posición ni orientación especial de equilibrio. El peso está equilibrado por el empuje de ARQUÍMEDES.

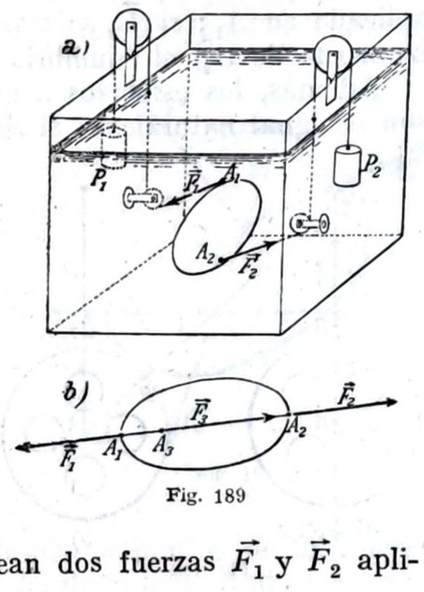


Fig. 189

a] **Una fuerza.** Bajo la acción de una fuerza $\vec{F}_1$, aplicada por ejemplo en A_1, demuestra la experiencia que el cuerpo, inicialmente en reposo, se pone en movimiento, y de un modo no muy sencillo. No hay equilibrio.

b] **Equilibrio de dos fuerzas.** Sean dos fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ aplicadas en A_1 y A_2 (fig. 189).

El cuerpo queda en equilibrio cuando $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ se hallan sobre la misma recta de aplicación y son iguales y contrarias.

En la figura 189, *b*), la fuerza $\vec{F}_2$ se deja equilibrar por la fuerza $\vec{F}_1$ igual y opuesta (y viceversa). Pero también una fuerza $\vec{F}_3$ aplicada en A_3, igual y opuesta a $\vec{F}_1$, se equilibra con esta última. Luego, $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$ producen el mismo efecto.

Una fuerza aplicada a un cuerpo rígido puede correrse a lo largo de su recta de aplicación sin que se altere el equilibrio.

Tal fuerza tiene el carácter de un vector deslizante (§ 49).

Se puede, pues, trasladar $\vec{F}_2$ hasta aplicarla en A_1, componer $\vec{F}_1$ con $\vec{F}_2$ y deducir así que, para el equilibrio, las dos fuerzas aplicadas deben tener la misma recta de aplicación y resultante nula.

Obsérvese, sin embargo, que este *transporte* de la fuerza se considera no como una posibilidad efectiva, sino como un artificio geométrico, cómodo para obtener fácilmente las condiciones de equilibrio;

el punto O (fig. 191), donde conviene *transportar* el punto de aplicación, puede no ser siquiera un punto del cuerpo rígido.

Además, si se traslada una fuerza a lo largo de su recta de aplicación, puede ocurrir que cambie la estabilidad del equilibrio.

En rigor, es necesario conocer el campo de las fuerzas aplicadas al cuerpo para hablar de la estabilidad del equilibrio ; nuestros hilos con poleas y pesos aplican fuerzas que constituyen otros tantos campos de fuerzas centrales, atractivas, constantes. En la figura 189, el equilibrio es estable en tanto que $\vec{F}_2$ está aplicada en un punto de la recta $A_1\,A_2$, a la derecha de A_1 ; sería indiferente si $\vec{F}_2$ estuviese aplicada en A_1 ; si $\vec{F}_2$ se trasladase hasta encontrarse aplicada a la izquierda de A_1, el equilibrio sería inestable.

Además, los esfuerzos a que se encuentra sometido el sólido no son de igual naturaleza : si A_2 está a la derecha de A_1, el sólido es

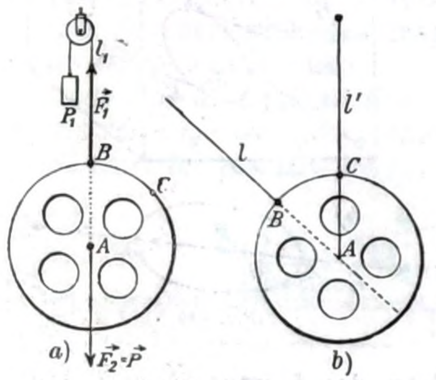


Fig. 190

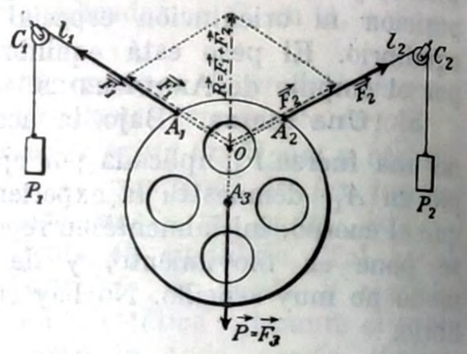


Fig. 191

estirado y tiende a romperse entre A_1 y A_2 ; si A_2 está a la izquierda de A_1, el sólido es comprimido y tiende a aplastarse entre A_1 y A_2.

Tómese un disco metálico agujereado y suspéndase por B [figura 190 *a*)]. El disco se halla en equilibrio si el peso P_1, y, por tanto, la fuerza F_1, es igual al peso del disco, y, además, el equilibrio se obtiene únicamente para una orientación particular del disco : aquella en que $\vec{F}_1$ es vertical y el centro del disco se encuentra en la prolongación de l_1. La fuerza peso $\vec{F}_2$ del disco es, pues, una fuerza dirigida según la recta l_1 (vertical) y aplicada en un punto todavía desconocido de dicha recta. Cuélguese el disco por otro punto (por ejemplo, por *C*) [fig. 190, *b*)]. Demuestra la experiencia que la fuerza equilibrante es todavía $\vec{F}_1$ y la fuerza peso del disco está aplicada en un punto de la recta l'. Las rectas l y l', determinadas experimentalmente, se encuentran en un punto *(centro de gravedad)* en el cual se imagina, por tanto, aplicada la fuerza peso del disco. Conocemos

así el importe, dirección, sentido y punto de aplicación de esta fuerza peso.

c] **Equilibrio de tres fuerzas no paralelas.** El mismo disco agujereado, en la disposición de la figura 191, sirve para encontrar la configuración de equilibrio, bajo la acción de las fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, y de la fuerza peso $\vec{F}_2$, que es el mismo peso del disco.

En el equilibrio, las fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ se encuentran en un mismo plano, y sus rectas de aplicación pasan por un mismo punto O ; además, trasladando cada una de las tres fuerzas de modo que se imaginen aplicadas en O, la resultante de dos de las tres fuerzas, obtenida con la regla del paralelogramo, resulta igual y contraria a la tercera fuerza : *la resultante de las tres fuerzas aplicadas es nula.*

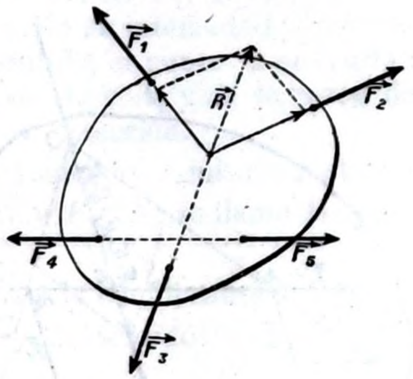


Fig. 192

Brevemente : vale todavía formalmente la regla del paralelogramo de las fuerzas, como para el punto libre; pero, en substancia, la regla es muy diferente. Se habla ahora de resultante de dos o más fuerzas *no* aplicadas a un mismo punto, a obtener con la regla del paralelogramo, previo el oportuno *transporte* de cada fuerza a lo largo de la propia recta de acción.

d] **Superposición de los equilibrios.** Sea $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ (fig. 192) un sistema de fuerzas en equilibrio, aplicadas a puntos de un cuerpo rígido, como, por ejemplo, los puntos del disco agujereado que constituye el cuerpo rígido que ha servido para los experimentos anteriores.

Se añade un nuevo sistema de fuerzas en equilibrio; por ejemplo $\vec{F}_4$, $\vec{F}_5$, iguales y contrarias, y teniendo la misma recta de aplicación. Demuestra la experiencia que todavía subsiste el equilibrio. Por consiguiente, sin alterar el equilibrio, se puede añadir al sistema de fuerzas aplicadas un nuevo sistema de fuerzas equilibradas entre sí *(principio de la superposición de los equilibrios)*.

Es posible demostrar este principio sin necesidad de recurrir a la experimentación, con tal que se admita que no se altera el equilibrio de un cuerpo rígido cuando se hace deslizar cada fuerza sobre su recta de aplicación y cuando se componen o descomponen las fuerzas mediante la regla del paralelogramo.

También se entiende mejor este hecho considerándolo sólo como un artificio geométrico útil ; pero, físicamente, la adición de nuevas fuerzas, aunque no altere el equilibrio, puede variar su carácter (estable, inestable o indiferente), y puede modificar las condiciones del

cuerpo sólido. En la figura 190, *a*), se puede añadir en A una fuerza peso cualquiera, con lo cual el equilibrio no se perturba si se aumenta en la misma cantidad el contrapeso P_1; pero al llegar a un cierto punto, el hilo se rompe, o el disco se abre, y falla la legitimidad de la superposición de varios sistemas de fuerzas en equilibrio.

§ 106. Fuerzas paralelas. Sean dos fuerzas paralelas y del mismo sentido $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ (fig. 193), aplicadas a los puntos A_1 y A_2 de un cuerpo rígido. Se añaden dos fuerzas $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$ iguales, opuestas y teniendo la misma recta de acción $A_1 A_2$; las resultantes $\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{S}_1$ y $\vec{R}_2 = \vec{F}_2 + \vec{S}_2$ son equivalentes a las cuatro fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$ y, por tanto, a las dos fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$. Pero $\vec{R}_1$ y $\vec{R}_2$ concurren en O y pueden componerse mediante la regla del paralelogramo.

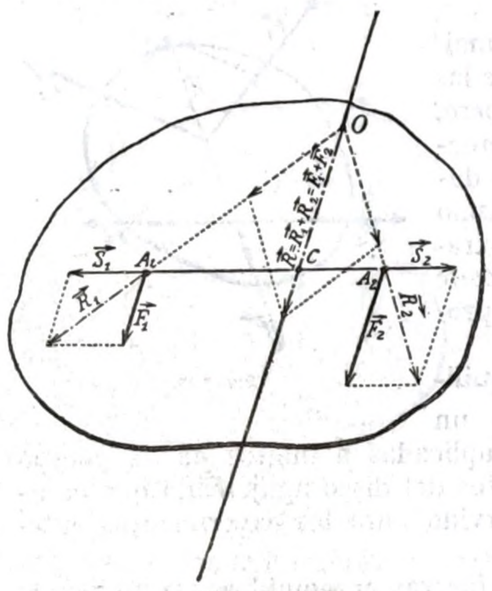


Fig. 193

$\vec{R}$ es la resultante $\vec{R}_1 + \vec{R}_2$ y, para los efectos del equilibrio, es equivalente a $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

Se deduce de sencillas consideraciones geométricas que $\vec{R}$ es paralela y del mismo sentido que las fuerzas componentes, y que si se miden los importes R, F_1, F_2 de los vectores $\vec{R}$, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, según un eje paralelo a las fuerzas (por ejemplo, OC) se tiene en valor y signo:

$$R = F_1 + F_2. \qquad [1]$$

R, F_1 y F_2 son todos positivos o todos negativos, según que sobre el eje de referencia el sentido positivo sea $O \longrightarrow C$, concordante con el de las fuerzas, o sea $C \longrightarrow O$. Así se miden también A_1C, CA_2 y los importes S_1, S_2 de $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$, en valor y signo, sobre el eje $A_1 \longrightarrow A_2$; entonces $S_1 < O$, $S_2 = -S_1 > O$.

$\vec{R}$ tiene una recta de aplicación que corta a $A_1 A_2$ en un punto C, que está dentro del segmento $A_1 A_2$, tal que:

$$A_1C : CA_2 = F_2 : F_1. \qquad [2]$$

Efectivamente, en los triángulos semejantes $\vec{R}_1\ A_1\ \vec{F}_1$ y A_1CO se tiene:

$$F_1 : -S_1 = OC : A_1C.$$

Análogamente, se tiene también:

$$F_2 : S_2 = OC : CA_2.$$

Dividiendo miembro a miembro, y teniendo en cuenta que $-S_1 = S_2$, se obtiene la [2].

C es ahora el punto de aplicación de la resultante *(centro de las fuerzas paralelas)* en el sentido que si las fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ giran alrededor de sus puntos de aplicación conservando su intensidad y permaneciendo paralelas entre sí y del mismo sentido, el punto C no varía; C depende únicamente de las posiciones de A_1 y A_2 y de la razón de las medidas de las fuerzas, pero no de su dirección.

Una fuerza $\vec{F}_3$, igual y opuesta a $\vec{R}$, teniendo la misma recta de acción que $\vec{R}$, equilibra a las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$; $\vec{F}_3$ se llama la *equilibrante* de las fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$.

Análogamente, se tiene la resultante $\vec{R}$ y la equilibrante $\vec{F}_1$ (figura 194) de dos fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, paralelas y de sentidos opuestos. La resultante $\vec{R}$ está dirigida en el sentido de la fuerza mayor $\vec{F}_2$, y se tiene $|R| = |F_2| - |F_1|$.

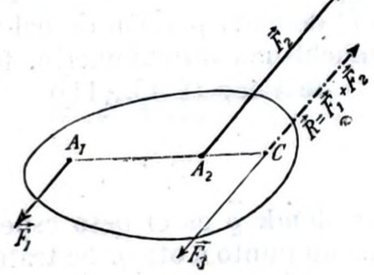


Fig. 194

Si se consideran las magnitudes R, F_1, F_2 de $\vec{R}$, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ medidas en valor y signo, según un eje dirigido según $\vec{F}_1$, se tiene, en valor y signo, $R = F_1 + F_2$, como en el caso de las fuerzas paralelas y del mismo sentido.

C está ahora en la recta $A_1 A_2$, fuera del segmento $A_1 A_2$, en el lado de la fuerza componente mayor, y es válida todavía la [2], en valor y signo, a lo largo del eje $A_1 \longrightarrow A_2$; A_1C y CA_2, y asimismo F_1 y F_2, tienen ahora signos opuestos.

La construcción de la figura 194, y, por tanto, la regla anterior, caen en defecto cuando las dos fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ forman *par*, esto es, cuando son iguales y opuestas y tienen dos rectas distintas de aplicación. ¡La resultante debería ser nula ($|R| = |F_2| = |F_1|$) y aplicada al punto del infinito de la recta $A_1 A_2$!

Físicamente, esto carece de significado; la resultante *no* existe; *no es posible equilibrar un par con una sola fuerzo* (§ 108).

Si hay n fuerzas paralelas, pueden componerse sucesivamente, como se ha efectuado para n fuerzas aplicadas en un punto. Se obtiene así una resultante, o, excepcionalmente, un par.

§ 107. Centro de gravedad. Baricentro. En el caso de fuerzas paralelas y del mismo sentido, existe siempre la resultante, cualquiera que sea el número de fuerzas componentes.

Se tiene:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots\ldots + \vec{F}_n,$$

y también, puesto que los vectores son paralelos y del mismo sentido,

$$|R| = |F_1| + |F_2| + |F_3| + \ldots\ldots + |F_n|.$$

Si las fuerzas componentes están aplicadas en los puntos A_1, A_2, A_3, ... A_n, la resultante $\vec{R}$ tiene un punto de aplicación C determinado *(centro de fuerzas paralelas)*: si todas las fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ... giran alrededor de su punto de aplicación, conservando su módulo y permaneciendo paralelas entre sí, C resulta invariable; C depende solamente de los puntos A_1, A_2, ... y de los módulos de las fuerzas aplicadas, pero no de la dirección común de éstas.

Este caso particular es importante porque se encuentra en el estudio del peso de un cuerpo. Este peso es la resultante de los pesos $d\vec{P}$ de cada porción dv del volumen v del cuerpo, los cuales son, con muchísima aproximación, fuerzas paralelas.

Se tiene (§ 45, [11]):

$$d\vec{P} = \vec{\varrho} \cdot dv,$$

en donde $\vec{\varrho}$ es el peso específico del cuerpo (eventualmente variable de un punto a otro). Se trata de un vector paralelo y del mismo sentido que $d\vec{P}$, cuyo módulo es el peso específico ϱ (1) del cuerpo; dv es un escalar. El peso total es un vector $\vec{P}$ que tiene, como $d\vec{P}$, la orientación de la vertical dirigida hacia abajo, y el módulo

$$P = \int_v \varrho \cdot dv. \qquad [1]$$

El centro de fuerzas paralelas se llama ahora *centro de gravedad G. Baricentro* de las masas m_1, m_2 (fig. 195, *a*)] de dos cuerpos prácticamente puntiformes es, por definición, el punto $B_{1,2}$ interior al segmento $A_1\ A_2$, determinado por la igualdad:

$$A_1\ B_{1,2} : B_{1,2}\ A_2 = m_2 : m_1. \qquad [2]$$

Si x_1, x_2, $x_{1,2}$ son las abscisas de A_1, A_2, $B_{1,2}$, respectivamente, contadas sobre el eje x que pasa por A_1 y A_2, la [2] se escribe en valor y signo:

$$\frac{x_{1,2} - x_1}{x_2 - x_{1,2}} = \frac{m_2}{m_1};$$

de donde se deduce:

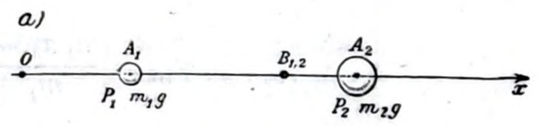
$$x_{1,2} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}; \qquad [3]$$

fórmula que da la abscisa del baricentro, conocidas las masas y las abscisas de los puntos donde están concentradas.

El centro de gravedad G_{12} de los mismos dos cuerpos de pesos $\vec{P}_1 = m_1\ \vec{g}$ y $\vec{P}_2 = m_2\ \vec{g}$ es un punto $G_{12} = C_{1,2}$ del segmento $A_1\ A_2$, determinado por la igualdad (§ 106, [2]):

$$A_1\ C_{1,2} : C_{1,2}\ A_2 = P_2 : P_1 = m_2 : m_1;$$

luego $B_{1,2} = C_{1,2} = G_{12}$; es decir, el baricentro y el centro de gravedad coinciden *en cuanto $\vec{g}$ es idéntico para los dos cuerpos.*



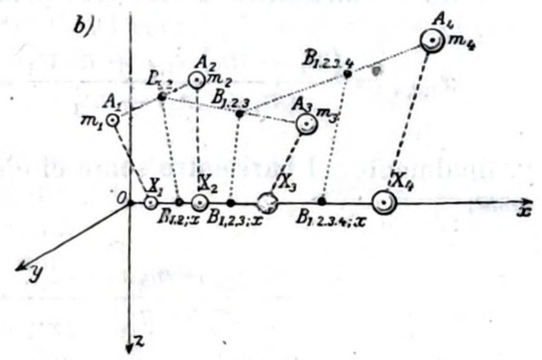


Fig. 195

Proyectemos A_1, A_2, $B_{1,2}$ sobre un eje x cualquiera [fig. 195, *b*)], y sean X_1, X_2, $X_{1,2,x}$ las proyecciones.

Por el teorema de TALES (en el espacio) se tiene:

$$A_1\ B_{1,2} : B_{1,2}\ A_2 = X_1\ B_{1,2,x} : B_{1,2,x}\ X_2 = m_2 : m_1;$$

es decir, $B_{1,2,x}$ es el baricentro de las masas m_1 y m_2 supuestas, respectivamente, en X_1 y X_2: la proyección del baricentro es el baricentro de las proyecciones.

El baricentro de tres masas m_1, m_2, m_3 se define como el punto que se obtiene construyendo el baricentro $B_{1,2}$ de m_1 y m_2 y hallando

(1) Siempre se tiene $\varrho > 0$, $P > 0$; luego es inútil indicar los módulos por medio del símbolo del valor absoluto.

después el baricentro $B_{1,2,3}$ de la masa $m_{1,2} = m_1 + m_2$, supuesta concentrada en $B_{1,2}$, y de la masa m_3 en A_3.

Análogamente haremos para n masas.

En todos los casos, *coinciden el baricentro y el centro de gravedad en cuanto el vector $\vec{g}$ es el mismo para todas las masas; además, la proyección del baricentro sobre un eje cualquiera es el baricentro de las proyecciones;* es decir, si m_1, m_2, ... m_n son las masas concentradas en los puntos A_1, A_2, ... A_n y B es su baricentro, las mismas masas m_1, m_2, ... m_n, concentradas en las proyecciones X_1, X_2, ... X_n, de los puntos dados sobre un eje cualquiera, tienen por baricentro la proyección del punto B sobre el mismo eje.

También sucede esto, en particular, cuando se imagina un cuerpo dividido en infinitos volúmenes elementales, como se ha supuesto para la [1].

Ahora bien, en el caso de n masas alineadas sobre un eje x, el baricentro de las dos primeras tiene por abscisas:

$$x_{1,2} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

Para el baricentro de las tres primeras se tiene:

$$x_{1,2,3} = \frac{(m_1 + m_2)\, x_{1,2} + m_3 x_3}{(m_1 + m_2) + m_3} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

y, finalmente, el baricentro sobre el eje x de las n masas tiene la abscisa:

$$x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + ... + m_n x_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n} = \frac{\sum_{r=1}^{r=n} m_r x_r}{\sum_{r=1}^{r=n} m_r}$$

Luego, si A_1, A_2, ... A_n están determinados mediante las coordinadas $(x_1\, y_1\, z_1)$, $(x_2\, y_2\, z_2)$, ..., $(x_n\, y_n\, z_n)$ con respecto a tres ejes cartesianos de referencia, el baricentro queda determinado por las coordenadas:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + ... + m_n x_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n} = \frac{\sum m_r x_r}{\sum m_r} \\ y &= \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + ... + m_n y_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n} = \frac{\sum m_r y_r}{\sum m_r} \\ z &= \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + ... + m_n z_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n} = \frac{\sum m_r z_r}{\sum m_r} \end{aligned}\right\} \quad [4]$$

Y éstas son también las coordenadas del centro de gravedad de los pesos $m_1 \cdot \vec{g}$, $m_2 \cdot \vec{g}$, ... $m_n \cdot \vec{g}$, concentrados, respectivamente, en los puntos A_1, A_2, ... A_n.

Finalmente, imaginando un cuerpo de masa m como un conjunto de infinitas partículas infinitesimales, de masa $dm = \mu \cdot dv$ (dv es el elemento de volumen y μ es la masa específica en dv), las coordenadas del baricentro, y, por tanto, las del centro de gravedad, son:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\int x \cdot dm}{\int dm} = \frac{\int x \cdot dm}{m} = \frac{\int x\mu \cdot dv}{m} = \frac{\int x\varrho \cdot dv}{P} \\ y &= \frac{\int y \cdot dm}{\int dm} = \frac{\int y \cdot dm}{m} = \frac{\int y\mu \cdot dv}{m} = \frac{\int y\varrho \cdot dv}{P} \\ z &= \frac{\int z \cdot dm}{\int dm} = \frac{\int z \cdot dm}{m} = \frac{\int z\mu \cdot dv}{m} = \frac{\int z\varrho \cdot dv}{P} \end{aligned}\right\} \quad [5]$$

en donde $P = m \cdot g$ es el peso total del cuerpo, y $\varrho = \mu \cdot g$ es el peso específico, que puede ser variable de unos puntos a otros.

La investigación del centro de gravedad de un cuerpo cuya forma y densidad son conocidas, constituye un ejercicio del cálculo integral, únicamente resoluble en casos muy sencillos.

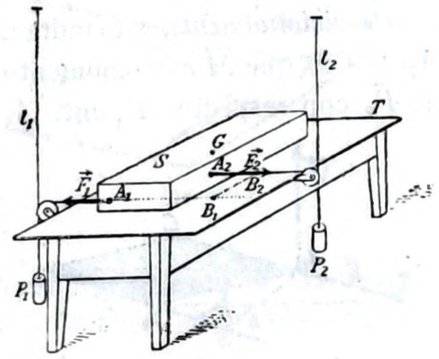


Fig. 196

Pero el centro de gravedad, y, por tanto, el baricentro, pueden encontrarse experimentalmente, en general con suficiente exactitud, por el cómodo procedimiento que se indica en la figura 190, *a*), *b*).

Recuérdese que el baricentro puede hallarse en un punto *no* ocupado del cuerpo; por ejemplo, el baricentro de una esfera hueca constituída por materia homogénea se halla en la cavidad.

§ **108. Pares de fuerzas.** Un par tiende a hacer girar el cuerpo al cual se aplica alrededor de su centro de gravedad G y en un sentido que es fácil determinar. Así, en la figura 196, el par $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$, aplicado al cuerpo S mediante el conocido dispositivo de las poleas y de los pesos (iguales) P_1, P_2, tiende a producir una rotación en el

sentido de las agujas de un reloj con respecto a un observador que estuviese de pie sobre la mesa T. La tablilla S es el cuerpo rígido, colocado sobre la mesa T, pero separado de la misma por algunas bolitas de acero de las de cojinetes. Los hilos metálicos delgados l_1 y l_2 impiden la acción de los pesos P_1 y P_2. Con un dispositivo eléctrico fácil de imaginar, se «queman» simultáneamente los dos hilos l_1 y l_2; P_1 baja y P_2 sube. Si las distancias desde G a las rectas de acción de las dos fuerzas aplicadas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ son entre sí como 2 es a 1, P_2 deberá levantarse la mitad de lo que baja P_1.

El experimento no da un resultado demasiado bueno, sea a causa de los rozamientos o porque se efectúa en un tiempo demasiado corto.

Se llama *momento* o *vector momento* $\vec{M}$ de un par $(\vec{F}_1\,\vec{F}_2)$ (fig. 197) a un vector normal al plano $\vec{F}_1\vec{F}_2$, cuyo módulo viene dado por el área del paralelogramo $A_1\,A_2\,B_2\,C_1$ o por la del paralelogramo equivalente $B_1\,A_1\,B_2\,A_2$.

El sentido lo da la regla de Ampère: Para un observador, atravesado por $\vec{M}$ de los pies a la cabeza, la rotación producida por el par se efectúa en sentido directo (antirreloj).

Luego se tiene:

$$\vec{M} = \overrightarrow{A_1A_2} \wedge \vec{F}_2 = \overrightarrow{A_2A_1} \wedge \vec{F}_1. \qquad [1]$$

Provisionalmente, supondremos que este vector está aplicado en A_1, por lo que $\vec{M}$ es el momento de $\vec{F}_2$ con respecto al punto A_1

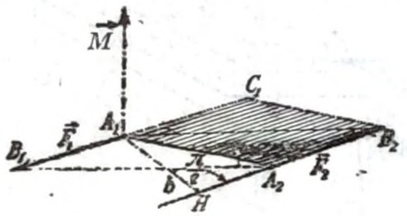


Fig. 197

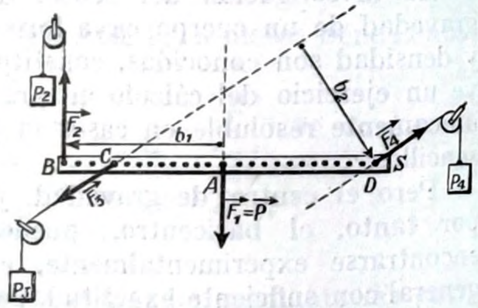


Fig. 198

(§ 109) o, lo que es lo mismo, es el momento de $\vec{F}_1$ con respecto al punto A_2.

La distancia b entre las rectas de acción de las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, se llama *brazo* del par, y se tiene:

$$|M| = b \cdot |F_1| = b \cdot |F_2|. \qquad [2]$$

Mediante el transporte de una de las dos fuerzas (por ejemplo, de $\vec{M}_2$) hasta aplicarla en H, pie de la perpendicular bajada desde A_1

a la recta de acción de $\vec{F}_2$, se puede suponer siempre que las fuerzas del par son perpendiculares al segmento determinado por los puntos de aplicación; sólo en este caso coincide con el *brazo* el segmento A_1A_2 de los puntos de aplicación.

Un par de momento $\vec{M}_1$ no puede ser equilibrado por una fuerza (§ 106); pero puede serlo por otro par cuyo momento $\vec{M}_2$ sea igual y contrario a $\vec{M}_1$.

Se efectúa el experimento con el dispositivo de la figura 198. La varilla S está sometida al par constituído por su propio peso $P = \vec{F}_1$ y por $\vec{F}_2$, y no se halla en equilibrio: el extremo S tiende a caer.

Se obtiene el equilibrio de la varilla aplicando otro par $(\vec{F}_3\ \vec{F}_4)$ situado en el mismo plano que el primero, que tiende a producir una rotación inversa, y tal que sea $|F_1|\,b_1 = |F_3|\,b_2$.

Se llega al mismo resultado por conducto puramente geométrico, demostrando que en este caso se pueden siempre componer las fuerzas $\vec{F}_1\ \vec{F}_2$, $\vec{F}_3\ \vec{F}_4$ mediante los convenientes *transportes* de las mismas a lo largo de la respectiva recta de acción, y que la resultante total es nula.

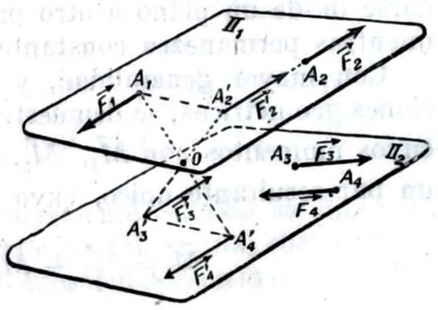


Fig. 199

Luego para el equilibrio se ha de tener:

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = 0;$$

es decir, ha de ser nula la resultante de los dos momentos. Otro par cualquiera de momento $\vec{M}_2$, y situado en el plano de los anteriores, equilibra al par de momento $\vec{M}_1$ independientemente de las posiciones de los puntos C y D, y, por tanto, de todo punto convencional de aplicación imaginado para $\vec{M}_2$.

Pero también se equilibran dos pares no situados en el mismo plano siempre que sus vectores momento sean iguales y opuestos.

En efecto, sean $(\vec{F}_1\vec{F}_2)$, $(\vec{F}_3\vec{F}_4)$ (fig. 199) los dos pares de momentos $\vec{M}_1$, $\vec{M}_2$ iguales y opuestos, situados en planos paralelos Π_1, Π_2, y, por tanto, respectivamente perpendiculares a los vectores paralelos $\vec{M}_1$ y $\vec{M}_2$.

Sabemos que, sin modificar el equilibrio, pueden efectuarse las siguientes operaciones:

a] transportar $\vec{F}_2$ a A_2', de modo que $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2'$ $(= \vec{F}_2)$ resulten perpendiculares a A_1A_2';

b] girar el par $(\vec{F}_3\vec{F}_4)$, trasladarlo al plano Π_2 y deformarlo (esto es, aumentar el brazo y disminuir la fuerza, dejando invariable el momento del par) hasta reducirlo al par $(\vec{F}'_3\vec{F}'_4)$, en el cual $A'_3A'_4$ es un segmento equipolente a $A_1A'_2$; por tanto, entonces se tiene $\vec{F}'_3 = \vec{F}'_2$; $\vec{F}'_4 = \vec{F}_1$.

Luego, A_1, A'_2, A'_3, A'_4 son vértices de un paralelogramo. Componiendo las fuerzas iguales $\vec{F}'_2$, $\vec{F}'_3$, y las fuerzas iguales $\vec{F}_1$, $\vec{F}'_4$, se obtienen dos resultantes parciales, iguales y opuestas, que tienen por centro común de aplicación el centro O del paralelogramo $A_1A'_2A'_3A'_4$.

Pero estas fuerzas se equilibran.

Lo mismo sucede, por tanto, con los pares dados; es decir, un par de momento $\vec{M}_1$ puede equilibrarse con otro par cualquiera, aunque no estén en el mismo plano, siempre que el momento $\vec{M}_2$ de este último sea igual y opuesto al del primero.

La acción equilibradora de un par está determinada por su momento $\vec{M}$, que es un *vector sin punto de aplicación*.

Un par $(\vec{F}_1\vec{F}_2)$ puede girar sobre su plano, deformarse y trasladarse desde un plano a otro paralelo, no variando la acción del par mientras permanezca constante el producto $b.|F_1|$.

Con mayor generalidad, y basándose únicamente en consideraciones geométricas, se demuestra que la acción simultánea de n pares, cuyos momentos son $\vec{M}_1$, $\vec{M}_2$, ... $\vec{M}_n$, es equivalente a la acción de un par resultante único, cuyo momento $\vec{M}$ es la suma vectorial:

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + ... + \vec{M}_n, \qquad [3]$$

que puede efectuarse siempre mediante la regla del polígono (§ 50), porque estos momentos pueden suponerse siempre aplicados a un mismo punto del espacio.

§ 109. Extensión al problema general. Momento de una fuerza. Si están aplicadas a un cuerpo rígido n fuerzas coplanares, es decir, cuyas rectas de acción se encuentran en un mismo plano, pueden componerse sucesivamente dos a dos, como se ha indicado en los §§ 105 y 106, y se llega ciertamente a reducirlas a *una resultante* o a *un par único*. Este último caso es excepcional y en él no existe resultante de las fuerzas dadas, según la hemos definido.

Quitando la limitación de que las fuerzas sean coplanares, la falta de resultante es el caso general: si se *cruzan* (1) las rectas de aplicación de dos fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ que actúan sobre un cuerpo rígido, no existe la resultante en el sentido en que la hemos definido.

(1) Sin tocarse.

De ahora en adelante hablaremos a menudo de la *existencia* o no existencia de la resultante de n fuerzas, según que sea o no posible su construcción mediante las reglas dadas en los §§ 105 y 106.

Conviene tratar todavía el problema general del equilibrio de un cuerpo rígido al que se han aplicado n fuerzas de un modo menos elemental que el empleado en los párrafos anteriores.

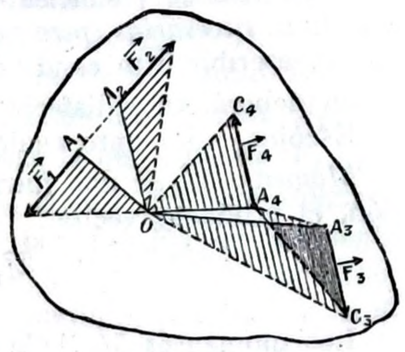


Fig. 200

Limitémonos al caso de dos fuerzas (fig. 200). Si están aplicadas al cuerpo rígido dos fuerzas $\vec{F}_1$ $\vec{F}_2$, iguales, opuestas y con la misma recta de aplicación, hay equilibrio; por el contrario, el par $(\vec{F}_3\vec{F}_4)$ *no* da equilibrio. No obstante, escribiendo en componentes la condición de que $\vec{F}_1$ (F_{1x}, F_{1y}, F_{1z}) sea igual y opuesta a $\vec{F}_2$ (F_{2x}, F_{2y}, F_{2z}), y la condición de que $\vec{F}_3$ (F_{3x}, F_{3y}, F_{3z}) sea igual y opuesta a $\vec{F}_4$ (F_{4x}, F_{4y}, F_{4z}), se tiene en los dos casos:

$$F_{1x} + F_{2x} = 0 \qquad F_{1y} + F_{2y} = 0 \qquad F_{1z} + F_{2z} = 0 \qquad [1]$$
$$F_{3x} + F_{4x} = 0 \qquad F_{3y} + F_{4y} = 0 \qquad F_{3z} + F_{4z} = 0. \qquad [2]$$

Físicamente, se elimina este inconveniente cuando se dice: La condición necesaria y suficiente para el equilibrio de un cuerpo rígido es que *exista la resultante*, tal como la hemos definido en los §§ 105, 106, y que *ésta sea nula*.

Analíticamente, es preferible otro camino.

Dadas n fuerzas aplicadas:

$$\vec{F}_1\,(F_{1x}, F_{1y}, F_{1z}); \quad \vec{F}_2\,(F_{2x}, F_{2y}, F_{2z}); \quad ..... \quad \vec{F}_n\,(F_{nx}, F_{ny}, F_{nz}),$$

se define como resultante, *existente en todos los casos*, el vector *no aplicado* de componentes:

$$\left.\begin{aligned} F_x &= F_{1x} + F_{2x} + ... + F_{nx} \\ F_y &= F_{1y} + F_{2y} + ... + F_{ny} \\ F_z &= F_{1z} + F_{2z} + ... + F_{nz} \end{aligned}\right\}, \qquad [3]$$

que se puede imaginar obtenido mediante el polígono de los vectores $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ... $\vec{F}_n$, como si éstos pudieran considerarse aplicados todos a un mismo punto; es decir, como si pudiera cambiarse arbitraria-

mente su punto de aplicación, y fuesen, por tanto, vectores *no aplicados*.

Por lo tanto, si se quieren emplear las componentes de las fuerzas aplicadas para escribir la condición de equilibrio, las condiciones [2], § 100, necesarias y suficientes en el caso del equilibrio de un punto, son ahora *necesarias, pero no suficientes*. Conviene ahora, además de las [3], escribir otra condición; en el caso de dos fuerzas, esta condición deberá ser satisfecha por $\vec{F}_1\,\vec{F}_2$, y no por $\vec{F}_3\,\vec{F}_4$ (fig. 200).

Escójase un punto cualquiera O.

Momento $\vec{M}_1$ de una fuerza $\vec{F}_1$ respecto al punto O es, por definición, el producto vector:

$$\vec{M}_1 = \overrightarrow{OA}_1 \wedge \vec{F}_1. \qquad [4]$$

Los momentos $\vec{M}_1$ de la fuerza $\vec{F}_1$ y $\vec{M}_2$ de la fuerza $\vec{F}_2$ respecto al punto O, son iguales y opuestos; su suma vectorial es nula:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = 0. \\ \text{En componentes:} \\ M_{1x} + M_{2x} = 0\,; \quad M_{1y} + M_{2y} = 0\,; \quad M_{1z} + M_{2z} = 0. \end{array}\right\} \qquad [5]$$

Tomando una terna de ejes cartesianos con origen en 0, sean x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 las coordenadas de los puntos de aplicación y F_{1x}, F_{1y}, F_{1z}; F_{2x}, F_{2y}, F_{2z} las componentes de las fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, respectivamente. Las [5] también se escriben (§ 52, [17]):

$$\left.\begin{array}{l} (y_1F_{1z} - z_1F_{1y}) + (y_2F_{2z} - z_2F_{2y}) = 0 \\ (z_2F_{1x} - x_1F_{1z}) + (z_2F_{2x} - z_2F_{2z}) = 0 \\ (x_1F_{1y} - y_1F_{1x}) + (x_2F_{2y} - y_2F_{2x}) = 0 \end{array}\right\} \qquad [6]$$

Al contrario, para un par $(\vec{F}_3\vec{F}_4)$ los dos momentos $\vec{M}_3$, $\vec{M}_4$ de las dos fuerzas $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$, respecto a O, son diferentes; si, por ejemplo, O se halla en el plano $\vec{F}_3\vec{F}_4$, vienen medidos estos momentos por el duplo de las áreas OA_3C_3 y OA_4C_4, que son diferentes por serlo las alturas de estos triángulos. Las dos áreas tienen signos opuestos y $M_3 + M_4$ es, en valor y signo, el duplo del área del triángulo $A_4A_3C_3$, es decir, mide el momento $\vec{M}$ del par $(\vec{F}_3\vec{F}_4)$. Vectorialmente, se tiene, en general:

$$\vec{M}_3 + \vec{M}_4 = \vec{M} + 0\,;$$

el momento de un par (§ 108) es la suma vectorial de los momentos de sus dos fuerzas respecto a un punto cualquiera O.

Para el equilibrio, es necesario que se cumplan la [1] y la [5]. En general, *han de ser nulas la resultante de las fuerzas definida por la* [3] *y la resultante de los momentos respecto a un punto cualquiera O*.

Conviene también presentar el mismo resultado de otra manera.

Si está aplicada una fuerza $\vec{F}_1$ en un punto A_1 (fig. 201), se puede imaginar, por el principio de la superposición de los equilibrios, que en un punto cualquiera O están aplicadas las dos fuerzas $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, una igual, y otra igual y opuesta a $\vec{F}_1$. Así, la única fuerza $\vec{F}_1$ aplicada en A_1 es equivalente a la fuerza $\vec{F}_2$, igual a $\vec{F}_1$, pero aplicada en otro punto cualquiera O, y a un par $(\vec{F}_1\,\vec{F}_3)$ de momento $\vec{M}_1 = \overrightarrow{OA}_1 \wedge \vec{F}_1$.

Una fuerza se puede transportar paralelamente a sí misma a cualquier punto, con tal de aplicar simultáneamente al cuerpo rígido un par de momento conveniente $\vec{M}_1$, normal a la fuerza dada.

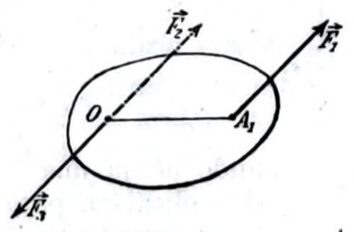


Fig. 201

Si están aplicadas al cuerpo n fuerzas y se transportan todas *a un mismo punto O*, nacerán otros tantos pares.

El sistema de las n fuerzas es equivalente a la resultante $\vec{R}$ de estas n fuerzas, como si estuvieran aplicadas todas en O, y al par resultante de los n pares así creados; si $\vec{R}$ no es nula, el momento del par resultante depende del punto elegido O.

Para el equilibrio, deben ser nulas tanto la resultante de las fuerzas (que ahora existe seguramente) *como la resultante de los momentos de los pares, es decir, la resultante de los momentos de las fuerzas dadas respecto a O*.

Vectorialmente:

$$\sum_r \vec{F}_r = 0\,; \qquad \sum_r \vec{M}_r = 0.$$

En componentes:

$$\left\{\begin{array}{ll} \sum_r F_{rx} = 0 & \left\{\begin{array}{l} \sum_r (y_r F_{rz} - z_r F_{ry}) = 0 \\ \sum_r (z_r F_{rx} - x_r F_{rz}) = 0 \\ \sum_r (x_r F_{ry} - y_r F_{rx}) = 0 \end{array}\right. \\ \sum_r F_{ry} = 0 & \\ \sum_r F_{rz} = 0 & \end{array}\right\}. \qquad [8]$$

Tal sistema de fuerzas se denomina *equilibrado*.

§ 110. Equilibrio de un cuerpo rígido ligado.

a] **Cuerpo que gira alrededor de un punto.** Un pedazo de madera (figura 202) tiene una concavidad que se corresponde con el baricentro B y está apoyado sobre una punta O; un número conveniente de tornillos equilibradores permite hacer coincidir el baricentro B, que es el centro de gravedad del cuerpo, con la punta de apoyo. En este caso, el equilibrio del cuerpo sobre la punta resulta indiferente; se tiene un cuerpo que puede girar alrededor de un punto y que, en cierto modo, está libre de la fuerza peso.

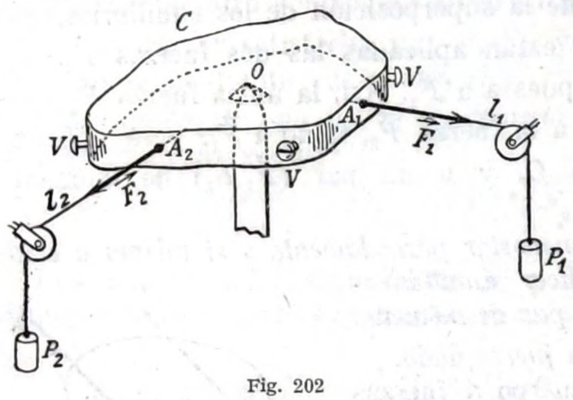


Fig. 202

El cuerpo está también provisto de numerosos tornillos con ojete para aplicar los hilos que transmitan las fuerzas con que se experimenta.

Cuando actúa una sola fuerza $\vec{F}_1$, se obtiene el equilibrio si su recta de aplicación pasa por el punto fijo O.

Esto se comprueba, por ejemplo, proyectando sobre una pantalla la sombra del aparato: la sombra del hilo l_1 pasará por la sombra de la punta O.

Por lo tanto, es nulo el momento $\overrightarrow{OA}_1 \wedge \vec{F}_1 = \vec{M}_1$ de la fuerza aplicada respecto al punto fijo.

Si $\vec{F}_1$ es la fuerza peso del cuerpo, y, por tanto, A_1 es el centro de gravedad, para que haya equilibrio, OA_1 debe ser vertical (recta de aplicación de la fuerza peso). Es el caso de la figura 190, *a*): el disco es el cuerpo rígido que puede girar alrededor del punto de suspensión B.

Introduciendo la reacción de la ligadura O, podemos decir que en O está aplicada al cuerpo, por efecto de la ligadura, una fuerza igual y opuesta a $\vec{F}_1$, y es la reacción de la ligadura la que debe equilibrar la fuerza $\vec{F}_1$ (compárese con § 104).

Limitándonos al caso en que la fuerza $\vec{F}_1$ corresponda a un campo uniforme, el equilibrio es estable, inestable o indiferente, según que $\overrightarrow{OA}_1$ sea del mismo sentido que $\vec{F}_1$, de sentido contrario, o que sea nulo.

Cuando el equilibrio es indiferente, la fuerza aplicada, a pesar de actuar en el punto O, no influye en el movimiento o en el equilibrio del cuerpo.

Una fuerza $\vec{F}_2$ (fig. 203), cuya recta de aplicación no pasa por O, tiende a hacer girar el cuerpo en el sentido determinado por el hecho

de que el punto de aplicación A_2 tiende a moverse en el sentido de la fuerza mientras O está quieto (pero la distancia OA_2 debe permanecer invariable). Sea n la normal en O al plano determinado por O y la fuerza $\vec{F}_2$; dicho plano es el del dibujo. El cuerpo tiende a girar alrededor del eje n en el sentido antes indicado; es decir, en el sentido positivo respecto al vector $\vec{M}_2 = \overrightarrow{OA}_2 \wedge \vec{F}_2$, momento de $\vec{F}_2$ respecto a O. La velocidad angular $\vec{\omega}$ [§ 76, *b*)] adquirida por el cuerpo a causa de la fuerza $\vec{F}_2$ y el momento $\vec{M}_2$, son paralelos y del mismo sentido; el momento $\vec{M}_2$ respecto a O indica aquí *en dirección y sentido* el giro que la fuerza $\vec{F}_2$ tiende a producir alrededor de O.

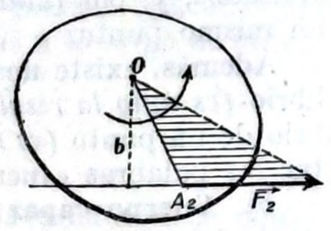


Fig. 203

Aplíquense simultáneamente al cuerpo de la figura 202 dos fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$. Se alcanza equilibrio cuando $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ son coplanares entre sí y con el punto O; además, es preciso que *exista* (§ 109) su resultante y que la recta de acción de ésta pase por O. Se llega de nuevo a la condición de equilibrio de una fuerza única, porque la regla del paralelogramo da una fuerza única equivalente a las fuerzas dadas incluso en el caso de fuerzas aplicadas al cuerpo rígido ligado.

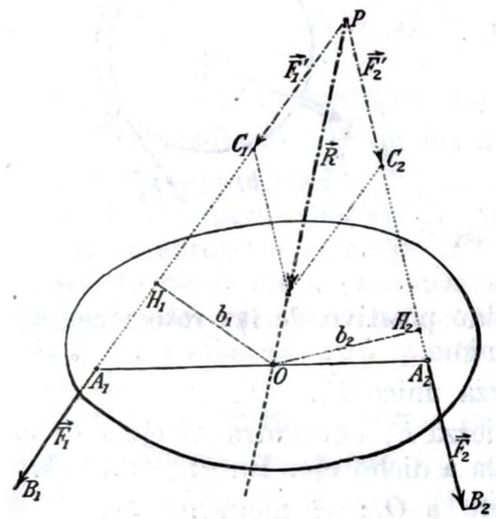


Fig. 204

Por lo tanto, cuando hay equilibrio, son iguales entre sí las áreas OPC_1 y OPC_2 (fig. 204) y, por consiguiente, también son iguales (y de signos opuestos) las áreas coplanares OA_1B_1 y OA_2B_2. La misma conclusión sirve, en virtud de la [2], § 106, si $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ son paralelas.

Pero los duplos de estas áreas miden los momentos $\vec{M}_1$, $\vec{M}_2$ respecto a O de las fuerzas aplicadas; luego, para el equilibrio, han de ser iguales y opuestos los momentos $\vec{M}_1$ y $\vec{M}_2$, es decir:

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = 0. \qquad [1]$$

En general, si hay n fuerzas aplicadas, y $\vec{M}_1$, $\vec{M}_2$, ... $\vec{M}_n$ son sus momentos respecto al punto fijo O, se obtiene el equilibrio cuando

existe la resultante de las fuerzas aplicadas y su recta de acción pasa por O, o, lo que es lo mismo, cuando

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \ldots\ldots + \vec{M}_n = 0. \qquad [2]$$

Esta condición es más cómoda; los momentos no son vectores aplicados, y, por tanto, puede suponerse siempre que salen todos de un mismo punto.

Además, existe una analogía formal entre esta condición de equilibrio *(es nula la resultante de los momentos)* y la condición de equilibrio de un punto *(es nula la resultante de las fuerzas)*; basta permutar las palabras «fuerza» y «momento».

b] **Cuerpo capaz de girar alrededor de un eje fijo.** Una rueda de bicicleta sirve muy bien para las experiencias.

La rueda se encuentra en equilibrio indiferente mediante la eventual adición de un pequeño contrapeso.

Sea x el eje de rotación sobre el que se ha fijado un sentido positivo; así, se fija también un sentido positivo de las rotaciones mediante la conocida regla de AMPÈRE.

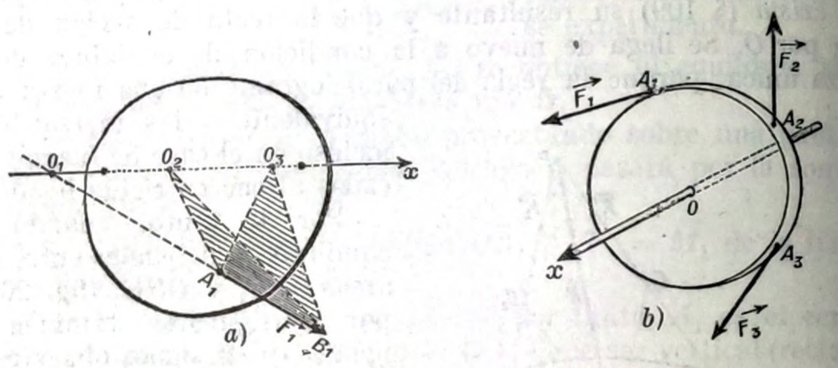


Fig. 205

Aplíquese a la rueda una fuerza única $\vec{F}_1$.

Se tiene equilibrio cuando la fuerza $\vec{F}_1$ encuentra al eje x en un punto O_1 [fig. 205, *a*)], o es paralela a dicho eje. En el primer caso, es nulo el momento de F_1 respecto a O_1; el momento $\vec{M}_1$ de la fuerza respecto a un punto cualquiera O de x depende de este punto, pero es siempre normal al eje x por serlo al plano OA_1B_1, que contiene también a x. Si $\vec{F}_1$ es paralela a x, el momento de $\vec{F}_1$ respecto a un punto cualquiera O de x es todavía perpendicular a x y, esta vez, es independiente de O.

Es frecuente el caso especial de *n fuerzas* $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ... $\vec{F}_n$ (fig. 205, *b*)], aplicadas todas en un plano normal al eje x.

Sea O la intersección de este plano con el eje x.

Sean, por ejemplo, dos fuerzas únicas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$. La experiencia demuestra que se produce equilibrio cuando la resultante de las dos fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ *existe* (§ 109) y actúa según una recta que pasa por O. La condición de equilibrio resulta idéntica a la del caso *a*], con tal que los momentos de las fuerzas aplicadas se tomen respecto a O. Entonces, los momentos $\vec{M}_1$, $\vec{M}_2$ de las dos fuerzas aplicadas son paralelos al eje x, y si M_1, M_2 son sus medidas a lo largo de tal eje, la condición de equilibrio es:

$$M_1 + M_2 = 0.$$

En general, para n fuerzas de esta clase, la condición de equilibrio se escribe:

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \ldots\ldots + \vec{M}_n = 0, \qquad [3]$$

donde los momentos están tomados todos respecto a O, y, por tanto, son todos paralelos a x. Luego si M_1, M_2, ... M_n, son, en valor y signo, las magnitudes de estos vectores, según el eje x, la [3] se convierte en

$$M_1 + M_2 + \ldots\ldots + M_n = 0 \qquad [4]$$

Digamos, sin demostrarlo, que, en general, se tiene equilibrio cuando la resultante $\vec{M}$ de los momentos $\vec{M}_1$, $\vec{M}_2$, + ... + $\vec{M}_n$, de las n fuerzas aplicadas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ... $\vec{F}_n$, respecto a un punto del eje de rotación x, es normal a este eje.

Si esta condición se verifica para un punto del eje, se verifica también para cualquier otro punto de dicho eje.

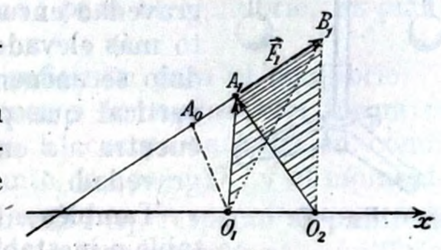


Fig. 206

Efectivamente (fig. 206), se tiene, para una fuerza cualquiera $\vec{F}_1$, que al cambiar el punto O sobre el eje x, varía el momento $\vec{M}$ por la adición de un vector normal a x. Si $\vec{M}_1 = \overrightarrow{O_1A_1} \wedge \vec{F}_1$ es el momento de $\vec{F}_1$ respecto a O_1 y $\vec{M}_2 = \overrightarrow{O_2A_1} \wedge \vec{F}_1$ es el momento de $\vec{F}_1$ respecto a O_2, se tiene (§ 52, [12]):

$$\vec{M}_2 = \overrightarrow{O_2A_1} \wedge \vec{F}_1 = (\overrightarrow{O_2O_1} + \overrightarrow{O_1A_1}) \wedge \vec{F}_1 =$$
$$= \overrightarrow{O_2O_1} \wedge \vec{F}_1 + \overrightarrow{O_1A_1} \wedge \vec{F}_1 = \overrightarrow{O_2O_1} \wedge \vec{F}_1 + \vec{M}_1,$$

y $\overrightarrow{O_2O_1} \wedge \vec{F}_1$ es precisamente normal a $\overrightarrow{O_2O_1}$, y, por tanto, a x.

Con mayor generalidad, cualquiera que sea el punto O del eje x, el momento $\vec{M} = \overrightarrow{OA_1} \wedge \vec{F}_1$ puede descomponerse en dos: $\vec{M}_x$ paralelo a x, y $\vec{M}_n$ normal a dicho eje. Al trasladarse O a lo largo de x, cambia solamente $\vec{M}_n$, mientras que $\vec{M}_x$ permanece constante.

$\vec{M}_x$ está completamente determinado por $\vec{F}_1$ y por el eje x, y se llama *momento de la fuerza* $\vec{F}_1$ *respecto al eje* x.

Si la resultante $\vec{M}$ de los momentos no es normal a x, puede descomponerse $\vec{M}$ en dos vectores: $\vec{M}_x$ paralelo a x, y $\vec{M}_n$ normal a x. El momento $\vec{M}_n$ no es capaz de hacer girar el cuerpo, siendo $\vec{M}_x$ la única componente activa.

La polea, el eje de una rueda, la palanca y el péndulo compuesto son casos particulares de cuerpos que pueden girar alrededor de un eje y con los cuales se verifican experimentalmente las conclusiones anteriores. Como de costumbre, a veces las resistencias pueden ser causa de notable desacuerdo entre los resultados anteriores y los resultados experimentales.

El caso más sencillo, porque en el mismo no actúa más que una fuerza, es el del *péndulo compuesto*, cuerpo que puede girar alrededor de un eje *horizontal* (1) x, que no pasa por el centro de gravedad y está sujeto solamente a la fuerza de su propio peso. El péndulo se encuentra, pues, en un campo de fuerzas uniforme.

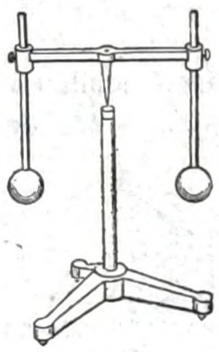


Fig. 207

El péndulo compuesto se halla en equilibrio estable cuando la vertical que pasa por su centro de gravedad encuentra al eje de rotación x en un punto más elevado que el centro de gravedad; el péndulo se encuentra en equilibrio inestable cuando la vertical que pasa por su centro de gravedad encuentra a x en un punto más bajo que el centro de gravedad.

También ahora las posiciones de equilibrio estable e inestable son las posiciones de energía potencial mínima y máxima, respectivamente, respecto a todas las posiciones que puede tomar el péndulo compuesto, compatibles con las ligaduras.

Si el centro de gravedad se halla en x, el equilibrio es indiferente: el cuerpo deja de ser un péndulo.

En el péndulo de la figura 311, al levantar la masa A, se eleva el centro de gravedad de todo el conjunto, lo cual permite realizar las tres clases de equilibrio.

(1) O, más generalmente, *no vertical*.

El dispositivo de la figura 207 constituye un cuerpo rígido que oscila, de una manera muy compleja, alrededor de un punto fijo, bajo el efecto de la fuerza de gravedad. También, en este caso, puede lograrse un equilibrio estable, indiferente o inestable, con sólo levantar convenientemente las dos masas laterales.

c] **Cuerpo apoyado sobre un plano.** Para mayor sencillez, suponemos solamente aplicada al cuerpo la fuerza peso.

El cuerpo puede apoyarse sobre el plano por un punto (fig. 208), por una línea (cilindro apoyado por una generatriz), por tres puntos (trípode), por más de tres puntos, y directamente por todos los puntos de un área plana (paralelepípedo apoyado por una de sus caras). Estos dos últimos son, teóricamente, casos muy especiales; en la práctica, a causa de la deformabilidad, no nula, de un cuerpo rígido y de un plano de apoyo real, se trata de casos ordinarios.

Si no hay rozamientos, el cuerpo puede también deslizar con movimiento de traslación a lo largo del plano, y volvemos al caso del

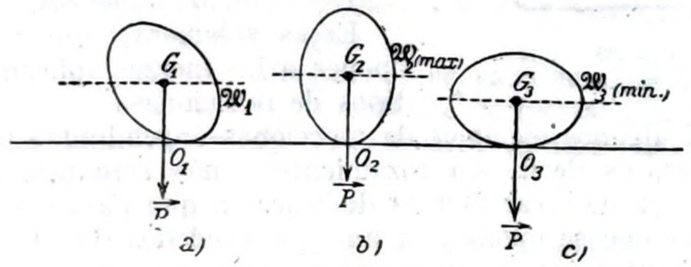


Fig. 208

movimiento de un punto en un plano: para el equilibrio, el plano debe ser horizontal.

Pero ahora esta condición no es suficiente para el equilibrio.

La posición *a*) (fig. 208) de un cuerpo *homogéneo* con forma de elipsoide no es posición de equilibrio. El cuerpo se halla en condiciones de poder girar alrededor del punto de apoyo O_1, y el momento del peso $\vec{P}$, aplicado al centro de gravedad G_1, respecto al punto de apoyo O_1, no es nulo; por lo tanto, el cuerpo no está en equilibrio. Se tiene éste cuando la recta de aplicación de $\vec{P}$, es decir, la vertical que pasa por el centro de gravedad, pasa por el punto de apoyo: *b*) y *c*) (fig. 208) son posiciones de equilibrio; *b*) es posición de equilibrio inestable, y *c*) es posición de equilibrio estable. Dentro del campo de fuerza de la gravedad, entre todas las posiciones que puede tomar el elipsoide apoyado sobre un plano horizontal, la posición *b*) de equilibrio inestable, es la que corresponde al nivel más alto del centro de gravedad G_2 y a la máxima energía potencial $\mathcal{U}_2$ de la gravedad, y la posición *c*), de equilibrio estable, es la que corresponde al nivel más bajo del centro G_3 y al mínimo de

energía potencial $\mathcal{U}_3$ de la gravedad (compárense los resultados con los del § 103).

En una esfera *homogénea* apoyada sobre un plano horizontal, el equilibrio es indiferente.

Para un cuerpo que se apoya sobre un plano en varios puntos, se tiene equilibrio si la vertical que pasa por su centro de gravedad cae dentro del polígono *convexo* de área máxima cuyos vértices se encuentran en puntos de apoyo; por ejemplo, este es el caso de los soportes para microscopio en forma de herradura (fig. 209).

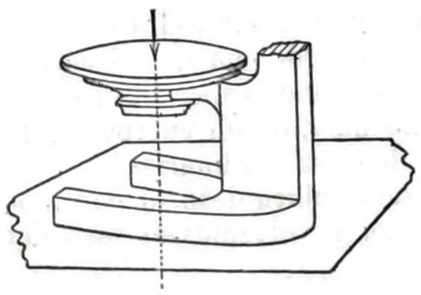


Fig. 209

También en el caso de los cuerpos rígidos, la acción de las ligaduras (punto o recta fija a cuyo alrededor debe girar el cuerpo; plano de apoyo, etc.) es equiparable a la de fuerzas convenientes que sustituyen las *reacciones de las ligaduras*.

Éstas solamente son capaces de oponer a las fuerzas aplicadas ciertos tipos de reacciones.

He aquí algunos ejemplos de reacciones engendradas por las ligaduras lisas, es decir, sin rozamientos, más comunes. Un punto fijo O es capaz de crear fuerzas de reacción que pasan por O, pero no en forma que se opongan a un giro alrededor de O; es decir, se trata de fuerzas que no actúan con un momento respecto al punto O.

Por esto, la resultante $\vec{M}$ de los momentos de las fuerzas aplicadas, respecto a O, debe ser nula por sí misma; pero la resultante $\vec{R}$ de las fuerzas aplicadas puede no ser nula; basta que pase por O: la reacción de la ligadura es capaz de crear una fuerza igual y contraria a $\vec{R}$, pero no un momento que se oponga a $\vec{M}$.

En conclusión, para que haya equilibrio debe existir (§ 109) la resultante $\vec{R}$ de las fuerzas aplicadas y su recta de acción debe pasar por O.

Un eje fijo, alrededor del cual gira un cuerpo rígido, puede reaccionar contra fuerzas cuyas rectas de aplicación pasan por el eje, y contra pares cuyo momento sea perpendicular a tal eje.

Un plano de apoyo sólo reacciona contra fuerzas normales al plano y dirigidas desde el plano hacia el cuerpo.

En todos los casos de equilibrio, a las fuerzas aplicadas se oponen reacciones o fuerzas de ligadura, y todas estas fuerzas juntas constituyen un sistema equilibrado (§ 109), esto es, un sistema cuya resultante y cuyo momento, respecto a un punto cualquiera, son nulos. Se llega de nuevo a las condiciones de equilibrio del cuerpo libre (§ 109, [7], [8]), y se tiene otra vez el *principio de acción y reacción*.

En forma cualitativa, pero muy expresiva, puede decirse que hay equilibrio en cualquier caso, cuando la acción de las fuerzas aplicadas (traslaciones producidas por la resultante, rotaciones producidas por momentos) tiende a engendrar un movimiento que puede ser impedido por la ligadura.

Suponemos siempre ligaduras que no cambian con el tiempo; es importante notar, en tal caso, que también para los cuerpos rígidos las reacciones de las ligaduras son siempre fuerzas que, habida cuenta de los movimientos que permiten las ligaduras, *no trabajan*.

D. — NOCIONES SOBRE EL PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES

§ 111. Principio de los trabajos virtuales. Este principio, enunciado ya para la estática del punto en los §§ 101 y 103, regula las condiciones de equilibrio en todos los casos, y, en particular, es también válido para los cuerpos rígidos.

Para mayor sencillez, imagínese que cada una de las fuerzas aplicadas pertenece a un campo uniforme de fuerzas; pero las conclusiones son también válidas cuando estos campos de fuerzas no sean uniformes, pero sí regulares.

Demos algunos ejemplos sencillos.

Un cuerpo rígido libre está en equilibrio si existe la resultante de las fuerzas aplicadas (§ 109), y ésta es nula. Entonces, en efecto, cualquier corrimiento o giro infinitesimal del cuerpo es *virtual*, y por esto es nulo el trabajo de la resultante de las fuerzas aplicadas.

Supongamos que un cuerpo rígido puede girar alrededor de un punto fijo O; un corrimiento virtual es cualquier giro infinitesimal alrededor de O.

Para que haya equilibrio debe pasar por O la resultante $\vec{R}$ de las fuerzas aplicadas (fig. 204).

Sea P un punto cualquiera de la recta de acción de la resultante, e imagínese aplicada la resultante en P. Un corrimiento virtual cualquiera hace girar OP y describir a P un corrimiento infinitesimal $\vec{dl}$ normal a OP, y, por tanto, a la resultante. El trabajo $\vec{R}\cdot\vec{dl} = |R|\cdot|dl|\cdot\cos\varphi$ es nulo.

La misma conclusión sirve para un cuerpo que puede girar alrededor de un eje en las condiciones sencillas de la figura 205, *b*).

Para un cuerpo que puede girar alrededor de un eje, en el caso general, se alcanza equilibrio cuando el momento resultante, respecto a un punto cualquiera del eje, es normal a este eje.

Pero una fuerza que da un momento normal al eje se encuentra con el eje en un mismo plano; por tanto, para un corrimiento virtual,

es decir, para un giro infinitesimal alrededor del eje, el punto de aplicación corre un trazo *dl* perpendicular a la fuerza, y el trabajo durante el corrimiento virtual es nulo.

Un cuerpo C_1 [fig. 208, *a*)] se apoya sin rozamiento sobre una mesa.

Son corrimientos virtuales: los giros alrededor del punto de contacto O y las traslaciones paralelas al plano.

Para el equilibrio:

1.º El trabajo de las fuerzas aplicadas al efectuarse un giro infinitesimal alrededor de O debe ser nulo, y, por tanto, debe existir la resultante de las fuerzas aplicadas y debe pasar por O (§ 110, *a*]).

2.º El trabajo de las fuerzas aplicadas al efectuarse una traslación infinitesimal, paralela al plano, debe ser nulo; es decir, la resultante de las fuerzas aplicadas ha de ser normal al plano.

Luego, para que haya equilibrio, debe existir la resultante de las fuerzas aplicadas (§ 109), debe ser normal al plano y tener una recta de acción que pase por el punto de apoyo.

Como caso particular de equilibrio, podrá existir la resultante y ser nula.

Trataremos de mostrar la utilidad del principio de los trabajos virtuales aplicándolo a la investigación de las condiciones de equilibrio de algunos sistemas no estudiados todavía.

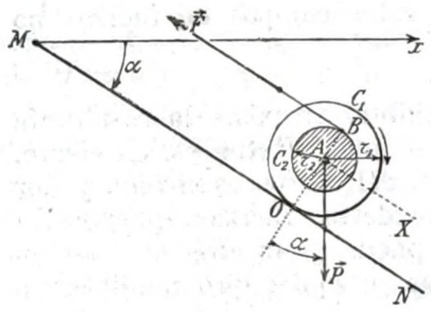


Fig. 210

a] **Cilindro que rueda sobre un plano inclinado.** Sea un cilindro C_1 (figura 210), de radio r_1, al que está aplicada la fuerza peso $\vec{P}$ en el centro de gravedad A, situado en el eje del cilindro. Suponemos que la fuerza equilibrante $\vec{F}$ es paralela al plano inclinado y está aplicada mediante un hilo, tangencialmente al cilindro C_2, que es coaxial con C_1 y está rígidamente unido a él.

El cilindro rueda sin resbalar por el plano inclinado. Único corrimiento virtual: un giro infinitesimal del cilindro alrededor de la generatriz de contacto O.

Se tendrá equilibrio si este corrimiento supone un trabajo total de las fuerzas aplicadas que sea nulo.

Un giro $d\varphi$ del cilindro (por ejemplo, en el sentido de las agujas del reloj) produce el corrimiento $r_1 \cdot d\varphi$ del punto A en el sentido AX; y el trabajo de $\vec{P}$ es: $+ |P|$ sen $\alpha \cdot r_1 \cdot d\varphi$; este giro produce un corrimiento $(r_1 + r_2) \cdot d\varphi$ del punto B; el trabajo de $\vec{F}$ es: $-|F| \cdot (r_1 + r_2) \cdot d\varphi$.

Luego se obtiene el equilibrio cuando:

$$|P| \cdot \text{sen } \alpha \cdot r_1 = |F| \cdot (r_1 + r_2); \qquad \frac{|F|}{|P| \cdot \text{sen } \alpha} = \frac{r_1}{r_1 + r_2}. \quad [1]$$

b] **Balanza de Roberval.** Las dos palancas iguales A_1B_1 y A_2B_2 (fig. 211), que pueden girar alrededor de los apoyos O_1, O_2, están unidas por las varillas A_1A_2M, B_1B_2N, con bisagras en $A_1A_2B_1B_2$; los cuatro brazos, O_1A_1, O_1B_1, O_2A_2, O_2B_2, son iguales.

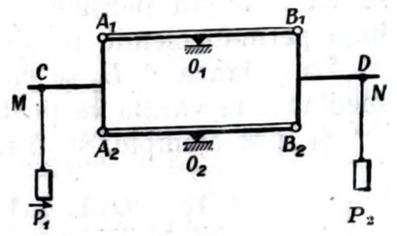


Fig. 211

Se deduce de sencillas consideraciones geométricas que, al oscilar las palancas alrededor de los apoyos, las varillas horizontales M, N suben o bajan permaneciendo paralelas a sí mismas.

Si se tiene $A_1O_1 = O_1B_1$ y, por tanto, $A_2O_2 = O_2B_2$, lo mismo que baja, por ejemplo, M, sube N.

Dos pesos $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, están aplicados, respectivamente, a los puntos C, D (cualesquiera) de las varillas M, N. ¿Cuál es la condición de equilibrio?

Los únicos corrimientos compatibles con las ligaduras son los debidos a los giros de las palancas alrededor de O_1 y O_2. Un giro infinitesimal produce un corrimiento de C, por ejemplo, hacia abajo, dz (> 0), y otro corrimiento de D, hacia arriba, $-dz$ (< 0).

Para que haya equilibrio, debe ser nulo el trabajo para este corrimiento virtual:

$$|P_1|\,dz - |P_2|\,dz = 0; \quad \text{o sea} \quad |P_1| = |P_2|.$$

Para que haya equilibrio, han de ser iguales los dos pesos, *cualquiera que sea su punto de aplicación.*

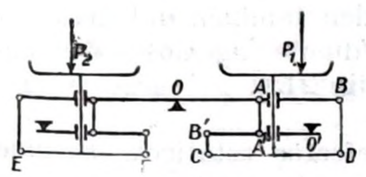


Fig. 212

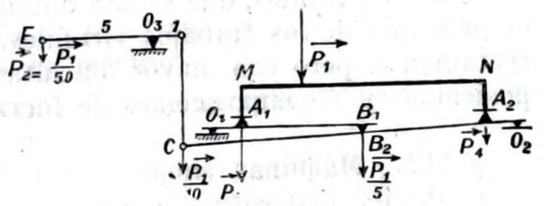


Fig. 213

Durante la oscilación de una balanza cualquiera deben moverse los platillos permaneciendo paralelos a sí mismos; solamente entonces el equilibrio es independiente de la posición de los pesos en cada uno de los platillos.

La balanza de ROBERVAL se construye hoy en día, generalmente, según el esquema de BÉRANGER (fig. 212) y es la balanza más co-

rriente de los comerciantes; su sensibilidad llega a ser de algunos gramos con una carga total de varios kilogramos.

c] **Básculas** (fig. 213). Las dos palancas $O_1A_1B_1$ y $O_2A_2B_2$ (con apoyos en O_1 y O_2) sostienen el plano de carga MN; sus brazos son iguales dos a dos: $O_1A_1 = O_2A_2$, $O_1B_1 = O_2B_2$.

B_1 se apoya sobre B_2 mediante una cuchilla, de modo que B_1 y B_2 suben o bajan permaneciendo en contacto. El plano MN sube o baja permaneciendo paralelo a sí mismo.

La palanca A_2B_2 se prolonga hasta C, en donde está articulada, mediante la varilla vertical CD, con el extremo D de la palanca ED.

Si, por ejemplo, se tiene

$$\frac{O_1A_1}{O_1B_1} = \frac{O_2A_2}{O_2B_2} = \frac{1}{n}; \qquad \frac{O_2B_2}{O_2C} = \frac{1}{2}; \qquad \frac{O_3D}{O_3E} = \frac{1}{m},$$

un corrimiento dz (por ejemplo, hacia abajo, > 0) del plano MN, origina un levantamiento $-(n \cdot 2 \cdot m)\, dz$ de E. Un peso $\vec{P}_1$, colocado en un punto cualquiera del plano MN está equilibrado por un peso $\vec{P}_2$ en E cuando es nulo el trabajo del corrimiento virtual:

$$|P_1| \cdot dz - n \cdot 2 \cdot m \cdot dz \cdot |P_2| = 0;$$

es decir, puesto que todos los pesos son positivos:

$$P_2 = P_1 \cdot \frac{1}{2 \cdot n \cdot m}$$

En la práctica, DO_3E es una romana cuyo pesón es $\vec{P}_2$. La posición del pesón en O_3E es función de $\vec{P}_1$; la barra O_3E está graduada y calibrada de modo que da directamente el peso $P_1 = 2 \cdot n \cdot m \cdot P_2$.

Estos resultados, que se han obtenido tan sencillamente mediante el principio de los trabajos virtuales, pueden también obtenerse directamente, pero con mayor dificultad, mediante ingeniosas descomposiciones y recomposiciones de fuerzas (fig. 213).

§ 112. Máquinas simples. Para los efectos estáticos, *máquina* es cualquier dispositivo capaz de equilibrar una fuerza dada con otra de punto de aplicación, magnitud y orientación diferentes.

Es discutible el número de máquinas simples. Pueden reducirse a tres: la *cuerda*, la *palanca* y el *plano inclinado*.

Pero es cómodo considerar un número mayor de máquinas simples.

a] **Cuerda.** Se supone despreciable el peso de la cuerda. Están aplicadas dos fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ en sus extremos A_1 y A_2, que estiran la cuerda. Ésta señala la recta de acción común a ambas fuerzas.

Para un corrimiento virtual de la cuerda a lo largo de sí misma, sus extremos A_1 y A_2 se trasladan en $d\vec{l}$.

Por el principio de los trabajos virtuales, se tiene equilibrio cuando:

$$d\vec{l} \cdot \vec{F}_1 + d\vec{l} \cdot \vec{F}_2 = 0; \qquad \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0.$$

Las dos fuerzas son iguales y opuestas.

b] **Polea fija** (fig. 214). OC_0 es la polea; está formada por una rueda que gira alrededor de un eje que pasa por O y es normal al plano de la figura. La armadura SO, que sostiene la polea, está fija; por ejemplo, sujeta al techo. La cuerda A_1A_2 se arrolla en la garganta de la polea; en A_1 está aplicado el peso $\vec{P} = \vec{F}_1$ que se quiere levantar; en A_2 actúa la fuerza equilibrante $\vec{F}_2$. Los corrimientos virtuales son los giros infinitesimales de la polea.

Si r es el radio de la misma y admitimos una adaptación perfecta de la cuerda sobre la garganta, para un giro $d\varphi$ (por ejemplo, en el sentido directo o antirreloj que se observa en el dibujo) se tienen los trabajos:

$$-|F_2| \cdot r \cdot d\varphi \quad \text{y} \quad +|F_1| \cdot r \cdot d\varphi.$$

Para que exista equilibrio, el principio de los trabajos virtuales da:

$$|F_1| \cdot r \cdot d\varphi - |F_1| \cdot r \cdot d\varphi = 0,$$
$$\text{o sea } |F_1| = |F_2|.$$

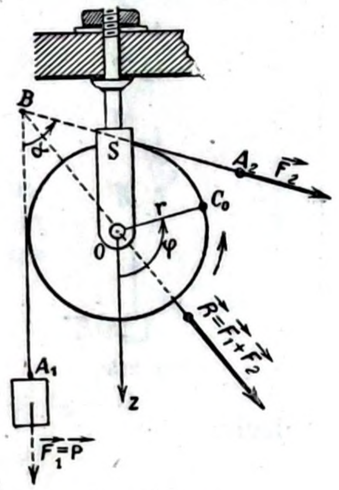


Fig. 214

Esto se sabía ya experimentalmente (§ 77).

Directamente, componiendo $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, se obtiene el equilibrio cuando la resultante $\vec{R}$ pasa por O; por simetría, se ve que esto sólo es posible si es $|F_1| = |F_2|$.

Llamando α al ángulo $\widehat{A_1BA_2}$, se tiene $|R| = 2 \cdot |F_1| \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$.

La reacción de la ligadura, esto es, del eje, debe ser igual y opuesta a $\vec{R}$. En la figura 214, R tiende a inclinar la armadura S hacia la derecha y a romperla.

c] **Polea móvil** (fig. 215). O es la polea móvil en cuya armadura está aplicado el peso $\vec{P}_1 = \vec{F}_1$; la cuerda está fija en el extremo A_1, y en el otro extremo va aplicada la fuerza equilibrante $\vec{F}_2$.

La armadura A_1, actuando a través de la cuerda $A_1 B_1$, sólo puede aplicar una reacción $\vec{V}$, dirigida según B_1A_1, La polea móvil se encuentra sometida a tres fuerzas: $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{V}$.

Para el equilibrio (§ 105, *c*]), las tres fuerzas deben ser coplanares y sus rectas de acción deben pasar por un mismo punto M (§ 105). Luego, el sistema debe hallarse en un plano vertical, por ser vertical $\vec{F}_1$; OM es bisectriz del ángulo $\alpha = \widehat{A_2MA_1}$, puesto que $OB_1 = OB_2 = r$; por tanto, $|V| = |F_2|$.

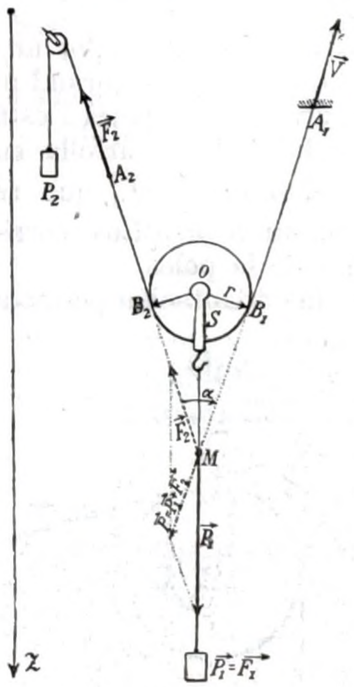


Fig. 215

Por fin:

$$|F_1| = 2\cdot|F_2|\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$$

Al mismo resultado se llega mediante la consideración de los trabajos virtuales.

Si P_1 desciende un trayecto dz (> 0), A_2 se traslada en el sentido $A_2 \longrightarrow B_2$ en un trayecto que es, en valor y signo, $-\,2\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot dz$.

Por lo tanto, si hay equilibrio, se tiene:

$$|F_1|\cdot dz - |F_2|\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot dz = 0;$$

es decir,

$$|F_1| = 2\cdot|F_2|\cdot\cos\frac{\alpha}{2}. \qquad [1]$$

En particular, para $\alpha = 0$ (A_1B_1 paralelo a B_2A_2) se tiene $|F_2| = \frac{|F_1|}{2}$; un peso P_1 está sostenido por otro peso P_2, cuya magnitud es la mitad del primero.

d] **Polipasto** (fig. 216). Si el peso P_1 que constituye la fuerza $\vec{F}_1$ baja dz, los seis cabos que lo sostienen se alargan en $6\cdot dz$, que es lo que corre A_2 en el sentido $F_2 \longrightarrow A_2$.

Por consiguiente, para el equilibrio:

$$|F_1| = 6\,|F_2|.$$

En general, si hay n poleas móviles (y otras tantas fijas):

$$|F_1| = 2\cdot n\cdot|F_2|. \qquad [2]$$

e] **Polea diferencial** (fig. 217). Si la polea da una vuelta en el sentido positivo, A_2 se traslada en el sentido de $\vec{F}_2$ en un trayecto $2\pi r_2$. Simultáneamente, O', y por tanto P_1, se levanta la mitad del acortamiento del pedazo $B_3\,O'B_1$ de la cuerda. Ahora esta cuerda se desarrolla en $2\pi r_1$, en B_3, y se arrolla $2\pi r_2$ en B_1. En total, la cuerda se acorta en $2\pi r_2 - 2\pi r_1$, y P_1 se levanta en $\pi(r_2 - r_1)$. Los corrimientos infinitesimales de A_2 y de O' para un giro $d\varphi$ de la polea superior son, respectivamente:

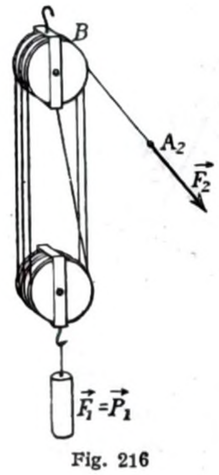


Fig. 216

$$r_2\,d\varphi \quad \text{y} \quad \frac{r_2 - r_1}{2}\,d\varphi.$$

Por lo tanto, se tiene equilibrio cuando es nula la suma de los trabajos de las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$:

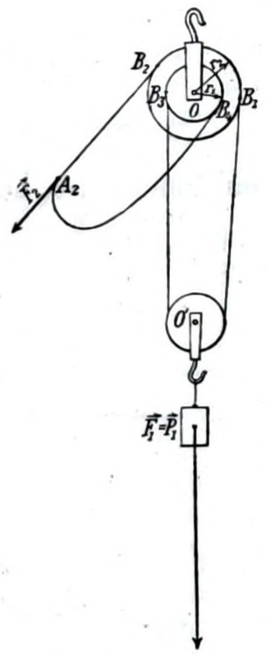


Fig. 217

$$-|F_1|\,d\varphi\,\frac{(r_2 - r_1)}{2} + |F_1|\cdot d\varphi\cdot r_2 = 0.$$

Esto es:

$$|F_2| = |F_1|\frac{(r_2 - r_1)}{2\cdot r_2}. \qquad [3]$$

La fuerza equilibrante puede ser tan pequeña como se quiera, con tal de escoger convenientemente pequeña la diferencia $r_2 - r_1$.

f] **Palanca** (fig. 218). Un corrimiento virtual es un giro $d\varphi$ de la palanca alrededor del apoyo O. Así, A_2 se traslada (por ejemplo, hacia arriba) en $dl_2 = d\varphi\cdot r_2$; y A_1 se traslada (hacia abajo) en $dl_1 = d\varphi\cdot r_1$.

Los trabajos efectuados son:

$$-|dl_2|\cdot|F_2|\cdot|\cos\,\widehat{F_2A_2C_2}|; \qquad |dl_1|\cdot|F_1|\cdot|\cos\,\widehat{F_1A_1C}|.$$

Por tanto, para el equilibrio:

$$-d\varphi \cdot r_2 \cdot |F_2| \cdot |\cos \widehat{F_2 A_2 C_2}| + d\varphi \cdot r_1 \cdot |F_1| \cdot \cos \widehat{F_1 A_1 C_1}| = 0.$$

Pero

$$r_2 \cdot |\cos \widehat{F_2 A_2 C_2}| = r_2 \cdot |\cos \widehat{A_2 O M_2}| = b_2,$$

$$r_1 \cdot |\cos \widehat{F_1 A_1 C_1}| = r_1 \cdot |\cos \widehat{A_1 O M_1}| = b_1.$$

en donde b_1, b_2 son los brazos de las fuerzas respecto al apoyo O.

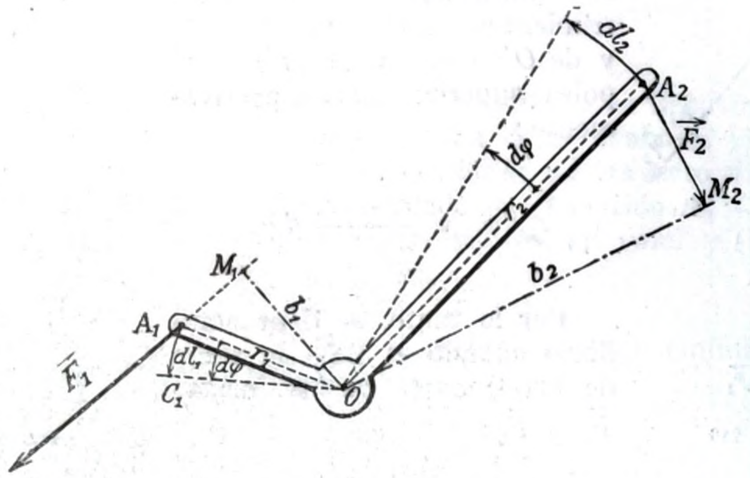


Fig. 218

Luego, para el equilibrio, se tiene la condición muy conocida:

$$|F_2| \cdot b_2 = |F_1| \cdot b_1. \qquad [4]$$

Análogamente se tratan todos los géneros de palanca, y también el torno, el árgana, el cabrestante, los sistemas de palancas, los trenes de engranaje, etc.

g] **Plano inclinado** (fig. 180). Los corrimientos virtuales son paralelos al plano inclinado. Si el cuerpo A debe hallarse en equilibrio, la suma de los trabajos de las fuerzas aplicadas, o sea el trabajo de la resultante (§ 52, 2.º]), debe ser nulo para cualquier corrimiento virtual. Luego esta resultante $\vec{R}$ debe ser normal al plano (§ 102, *b*]).

La ligadura constituída por el plano inclinado, sobre el que se apoya A, es unilateral; es decir, pueden existir corrimientos virtuales perpendiculares al plano, capaces de separar A del plano. Para estos corrimientos, de acuerdo con lo dicho al final del § 110, la condición de equilibrio es que el trabajo virtual sea nulo o negativo; luego $\vec{R}$ debe ser o nulo o normal al plano y dirigido contra el plano. Análogo es el caso de la *cuña* (figura 219), en la cual, sin embargo, los rozamientos son tan grandes que no permiten una comprobación experimental satisfactoria de la condición teórica de equilibrio.

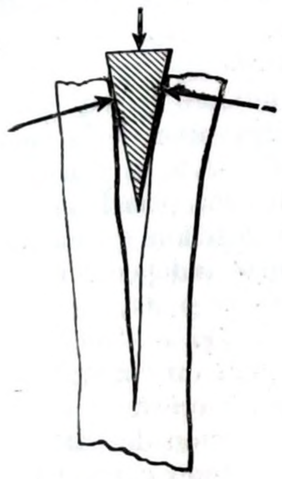


Fig. 219

h] **Tornillo** (fig. 220). El tornillo V tiende a atornillarse en la hembra o tuerca M, por efecto de la fuerza $\vec{F}_2$ aplicada en A_2 perpendicularmente al radio r_2 (y al eje z).

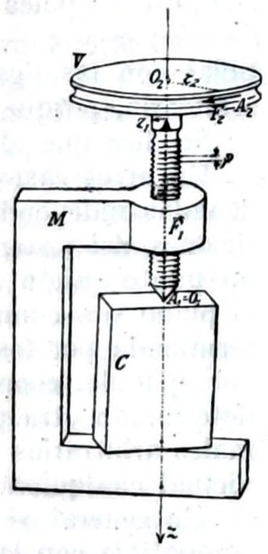


Fig. 220

De este modo, el tornillo comprime al cuerpo subyacente, que reacciona con la fuerza $\vec{F}_1$. Sea p el paso de rosca del tornillo.

Corrimiento virtual: un giro infinitesimal $d\varphi$ (por ejemplo, > 0 respecto del eje z). Entonces, en un tornillo corriente (llamado *dextrorso*), A_2 se traslada en $r_2 \cdot d\varphi$ en el sentido indicado por $\vec{F}_2$; A_1 baja en dz (> 0) y se tiene $\frac{dz}{p} = \frac{d\varphi}{2\pi}$, es decir, $dz = \frac{p}{2\pi} d\varphi$.

El principio de los trabajos virtuales da para el equilibrio:

$$|F_2| \cdot r_2 \cdot d\varphi - |F_1| \frac{p}{2\pi} d\varphi = 0;$$

esto es:

$$\frac{|F_1|}{|F_2|} = \frac{2\pi r_2}{p} \qquad [5]$$

Lo mismo que en la cuña, el rozamiento en el tornillo es casi siempre tan grande que impide que pueda comprobarse la [5], ni siquiera de un modo aproximado.

§ 113. Coordenadas y grados de libertad. En los ejemplos del apartado anterior (si se excluyen el plano inclinado y la cuña), el valor de un solo parámetro, es decir, de una sola variable, determinaba la posición del sistema.

Así, por ejemplo, en la polea fija (fig. 214), el ángulo φ que un determinado radio OC_0 forma con una dirección fija z, que sale del centro O, es la variable que con sus valores determina todas las posiciones de la polea compatibles con las ligaduras; φ es la única *coordenada*; φ y $\varphi + d\varphi$ determinan dos posiciones de la polea compatibles con las ligaduras; $d\varphi$ es un corrimiento virtual infinitesimal arbitrario, porque también lo es el valor infinitesimal $d\varphi$.

Se dice que el sistema tiene *un grado de libertad*.

En otros casos puede ser mayor que *uno* el número de las coordenadas independientes entre sí necesario para fijar una de las posiciones del sistema compatibles con las ligaduras. Así, si tenemos un punto sujeto a moverse sobre un plano, todas las posiciones en el plano son compatibles con las ligaduras; una posición queda determinada por los valores x, y de dos coordenadas independientes; por ejemplo, coordenadas cartesianas; los valores $(x + dx, y + dy)$ determinan otra posición del punto en el plano, y dx, dy, infinitesimales arbitrarios independientes entre sí, determinan un corrimiento virtual cualquiera: el sistema tiene *dos grados de libertad*.

En general, si las coordenadas que fijan una posición del sistema compatible con las ligaduras son en número de n, todo corrimiento virtual queda determinado por n variaciones elementales dx_1, dx_2, ... dx_n; y si todas éstas son independientes entre sí, el sistema tiene también n *grados de libertad*.

Pues bien, el principio de los trabajos virtuales, aplicado a tal sistema, impone como condición la anulación del trabajo de las fuerzas aplicadas para n corrimientos infinitesimales, virtuales e independientes entre sí. Estas n condiciones son, a su vez, las condiciones de equilibrio del sistema bajo la acción de las fuerzas aplicadas. Este asunto se discute más ampliamente en los tratados de Mecánica racional.

CAPÍTULO V

Dinámica

§ 114. Objeto de la dinámica. También nos limitamos en este capítulo a establecer las leyes experimentales que sirven de punto de partida para el desarrollo de la Mecánica racional.

La fuerza muscular aplicada a un resorte lo deforma, y, viceversa, de esta deformación puede deducirse la existencia de una fuerza que actúa sobre el resorte, por ejemplo, una fuerza peso (§ 77). Una fuerza muscular aplicada a un cuerpo inicialmente en reposo, pero con libertad de movimientos, produce un movimiento en el sentido

de la fuerza. Un cuerpo dejado en libertad cae según la vertical; esto indica que la fuerza peso es capaz de actuar como la fuerza muscular no solamente en estática (deformación del resorte), sino también produciendo un movimiento *(dinámica)*.

De un modo más preciso: En Estática, la fuerza peso que se atribuye a la presencia de la Tierra, está aplicada al cuerpo P (fig. 148); el resorte aplica en el punto de suspensión A'' una fuerza elástica, igual y opuesta, que permite establecer el equilibrio.

Si un cuerpo, inicialmente en reposo, se pone en movimiento en una cierta dirección, demuestra la experiencia que el cuerpo puede ser mantenido en la posición inicial si se sujeta a un resorte (fig. 151); este resorte da, así, la orientación y la medida de la fuerza a la cual atribuíamos la puesta en movimiento del cuerpo.

El problema fundamental de la dinámica es establecer las leyes del movimiento de los cuerpos, cuando las fuerzas aplicadas se hayan determinado equilibrándolas con el dispositivo *estático* del § 77, figura 151.

Sin embargo, con este procedimiento, cuando las fuerzas que actúan dependen de la velocidad (fuerzas de rozamiento con el medio, acción de un campo magnético sobre una carga eléctrica en movimiento, etc.), sólo se determina el valor de la fuerza que corresponde a una velocidad nula.

Pero las fuerzas con que se experimenta ¿son independientes de la velocidad? Volveremos sobre esta cuestión en el § 116.

Utilizaremos como fuerza motriz la fuerza peso, y admitiremos que el peso de un cuerpo es independiente de su velocidad y de su aceleración.

Hay que confesar que es necesario postular muchas cosas para ofrecer un experimento que permita comprobar directamente las leyes de la dinámica. GALILEO y NEWTON llegaron a estas leyes a través de una maravillosa intuición, más bien que basándose en un sólido apoyo experimental. Este apoyo es siempre muy mediocre en las experiencias que siguen, porque los experimentos directos didácticos sobre las leyes de la dinámica resultan poco precisos.

El valor y la bondad de las leyes de la dinámica se deducen, esencialmente, de las innumerables comprobaciones indirectas.

Mientras no advirtamos lo contrario, nos limitaremos a considerar el movimiento de *puntos materiales*, esto es, de partículas de dimensiones pequeñas respecto a los corrimientos en estudio, de modo que el movimiento del baricentro determine suficientemente el movimiento del cuerpo entero, y que sean despreciables los giros del cuerpo alrededor de su baricentro.

El movimiento del punto material, es decir, de su baricentro, está referido a los tres ejes fijos en las paredes de la habitación donde se experimenta y, por lo tanto, fijos respecto a la Tierra.

La dinámica del punto está contenida en dos leyes: la *segunda ley* de la dinámica o *principio de acción de las fuerzas*, y la *tercera ley* de la dinámica o *principio de acción y reacción*.

La *primera ley o principio de inercia* es un caso particular de la segunda ley, y nada motiva que se constituya en ley aparte.

A. — DINÁMICA DEL PUNTO

§ 115. Principio de acción de las fuerzas. Dejando un cuerpo libre bajo el efecto de su fuerza peso, cae según la vertical. Los cuerpos de forma irregular y pequeño peso específico (una pluma, una hoja de papel) no obedecen a esta ley, ni siquiera aproximadamente. Ello es debido al rozamiento con el aire.

En el vacío, estos cuerpos caen también según la vertical (*tubo de* NEWTON).

Los experimentos en el aire se efectúan con cuerpos de forma conveniente (por ejemplo, esferitas), de peso específico muy elevado y llegando a velocidades no demasiado grandes, para que el rozamiento con el aire no perturbe excesivamente.

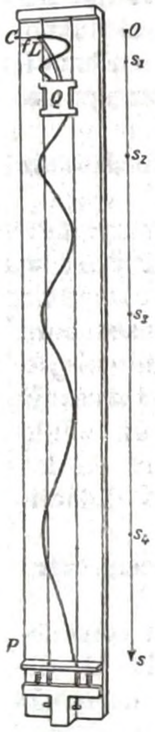


Fig. 221

Por lo tanto, la fuerza peso, cuya magnitud y orientación son conocidas gracias al experimento *estático* de la plomada, produce un movimiento rectilíneo a lo largo de la recta de acción de la misma fuerza. (Para la caída de los graves hacia Oriente, véanse § 116 y § 177, *a*]).

¿Cuál es la ley del movimiento?

a] **Aparato de Laborde-C. Neumann.** Un bloque de plomo Q (fig. 221) corre con muy poco roce a lo largo de dos guías verticales de alambre de acero, y está provisto de una lámina L, que puede efectuar vibraciones isócronas, de período conocido T; por ejemplo $T = 0{,}1$ seg.

La lámina L termina en una lengüeta que se apoya sobre el tablero ahumado CP.

Un hilo f, fijo en C, mantiene simultáneamente levantado el bloque Q y desviada la lámina L.

Se quema bruscamente el hilo con una llama; Q cae, y L comienza sus vibraciones.

Los espacios Os_1, Os_2, Os_3, ..., correspondientes a una, dos, tres, ... ondas dibujadas por L durante la caída de Q, dan, por tanto, los espacios s recorridos por el grave en intervalos de tiempo $T = 0{,}1$; $2T = 0{,}2$; $3T = 0{,}3$ ..... seg, respectivamente.

Demuestra el experimento (con un error menor que el 5 %) que

estos espacios s son proporcionales a los cuadrados de los tiempos; se tiene (§ 56, *b*]):

$$s = \frac{1}{2}\, gt^2 \qquad [1]$$

con g constante para todos los cuerpos en un lugar dado; es $g = 9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{seg}}$.

Por lo tanto, *una fuerza*, determinada estáticamente, *actuando sobre un cuerpo inicialmente en reposo, pero con libertad de movimientos, en el sentido de la fuerza, produce un movimiento uniformemente acelerado en dicho sentido*; la fuerza $\vec{F}$ y la aceleración $\vec{a_c}$ (en nuestro experimento, $\vec{g}$) son vectores de la misma orientación.

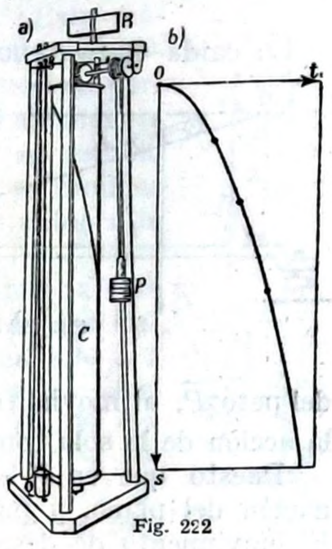


Fig. 222

b] **Máquina de Morin.** Esta máquina (figura 222) sirve para un experimento análogo al anterior. El cuerpo Q cae a lo largo de dos hilos que sirven de guía, y, mediante una punta inscriptora, deja una línea sobre el papel que recubre el cilindro registrador C, mientras éste gira con movimiento uniforme, gracias a un peso motor P y a un regulador de molinete de aire R. Otros dispositivos permiten soltar la masa Q cuando el cilindro ha tomado la velocidad constante de régimen estacionario, y así se puede hacer de modo que empiece la caída de Q cuando una determinada generatriz del cilindro pasa por debajo de la punta inscriptora.

Desarrollado el papel del cilindro registrador, se verifica (con un error menor que el 5 %) que la línea dibujada por Q [fig. 222 *b*)] es una parábola de eje vertical, cuyo vértice se encuentra en el punto O de partida.

El eje vertical da los espacios recorridos s, mientras los segmentos x, sobre el eje horizontal, son proporcionales a los tiempos. Luego la parábola registrada $s = kx^2$ demuestra que también se tiene:

$$s = k' \cdot t^2.$$

Es decir, el movimiento de la caída es naturalmente acelerado.

c] **Tubo de Newton.** Es un tubo de vidrio de unos dos metros de largo, en el interior del cual se ha practicado el vacío. Con una aproximación más bien grosera, permite demostrar experimentalmente que en vacío todos los cuerpos obedecen a la misma ley de caída.

Se deduce que la aceleración $\vec{g}$ en un lugar dado tiene el mismo valor g para todos los cuerpos.

Por otra parte, es fácil comprobar que la vertical obtenida con una plomada no depende de la naturaleza del cuerpo que pende del hilo.

Por consiguiente, el vector $\vec{g}$, es el mismo para todos los cuerpos en un lugar determinado.

El péndulo (§ 144) permite comprobar esta conclusión con una aproximación mucho mayor que la del tubo de NEWTON.

La caída libre de los graves es demasiado rápida para permitir una observación cómoda de las leyes del movimiento.

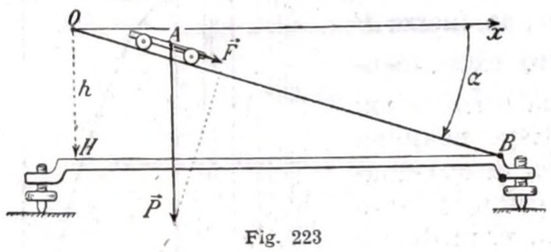


Fig. 223

Los siguientes dispositivos experimentales eliminan este inconveniente.

d] **Plano inclinado de Galileo.** Se equipara el movimiento *ligado* del carrito A (fig. 223), bajo el efecto del peso $\vec{P}$, al movimiento libre de A a lo largo de la recta OB por la acción de la sola componente eficaz $\vec{F}$ paralela al plano.

Puesto que es $F = P \cdot \text{sen } \alpha$, la fuerza eficaz varía con la inclinación del plano, y puede reducirse a una pequeña fracción de P. El movimiento de descenso puede observarse fácilmente: es uniformemente acelerado. Entre los numerosos artificios que permiten comprobar esto experimentalmente, recordemos el que consiste en proporcionar al carrito A, que baja por el plano inclinado, una punta que escribe sobre un cilindro giratorio, cuyo eje es paralelo a los carriles que guían el carrito: en resumen, se acopla el plano inclinado con la máquina de MORIN. La aceleración $\vec{a}_c$ cambia al variar α; pero, para un cuerpo dado, resulta:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}_c ; \qquad [2]$$

en donde m es una constante positiva característica del cuerpo, pero, para cada cuerpo, independiente de $\vec{F}$; esta constante se llama *masa inerte* o *masa del cuerpo*. $\vec{F}$ y $\vec{a}_c$ son, pues, vectores paralelos y del mismo sentido.

En particular, para la caída libre, $\vec{F} = \vec{P}$, $\vec{a}_c = \vec{g}$, y la [2] se escribe:

$$\vec{P} = m \cdot \vec{g}. \qquad [3]$$

En el plano horizontal ($\alpha = 0$) es $\vec{a}_c = 0$; es decir, el movimiento es uniforme.

Sobre un plano muy liso y mantenido bien horizontal mediante un nivel, un cuerpo sujeto tan sólo a la fuerza peso e inicialmente en reposo, permanece quieto: si inicialmente está en movimiento (por ejemplo, bola de billar), el movimiento es rectilíneo y ligeramente retardado, nunca uniforme, porque los rozamientos pueden disminuirse, pero no eliminarse por completo.

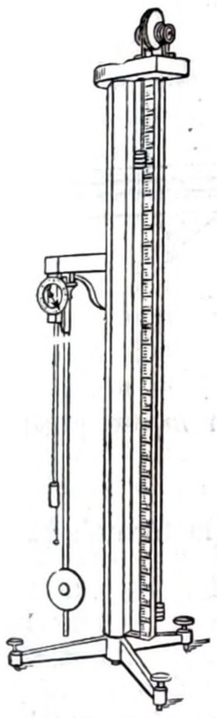


Fig. 224

c] **Máquina de Atwood.** Esta máquina (fig. 224) es notablemente complicada en los detalles de construcción, porque se quiere obtener automáticamente la iniciación del movimiento en estudio en el preciso instante en que se produce uno de los batidos del péndulo unido a la máquina.

Esquemáticamente, se reduce a una polea C, que gira sin rozamiento apreciable (fig. 225) y que soporta un hilo l, a cuyos extremos están aplicados los cuerpos A, B, de pesos iguales P_A, P_B. El sistema está en equilibrio indiferente. Se coloca un pequeño cuerpo N encima del B. El equilibrio desaparece y la fuerza motriz es la fuerza peso $\vec{F}$ del cuerpo N. El B desciende con movimiento uniformemente acelerado, levantando al mismo tiempo el cuerpo A.

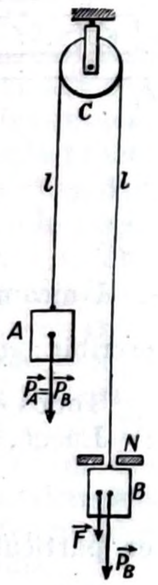


Fig. 225

La aceleración depende de la fuerza motriz $\vec{F}$ y de la masa del sistema en movimiento, constituído por los cuerpos A, B, y por la polea C que está girando. Estamos bien lejos del caso simple de movimiento libre de un punto material.

f] **Aparato de L. Fletcher.** Un carrito A_1 se mueven con roce muy pequeño sobre los carriles horizontales R_1 R_2 (fig. 226) gracias a la fuerza motriz $\vec{F}$, proporcionada por el peso del pequeño cuerpo A_2.

La lámina vibrante L, con la plumilla P, registra sobre una hoja de papel, pegada al carrito, una sinusoide de ondas cada vez más largas. Por lo tanto, el dispositivo es el mismo que hemos descrito en el aparato de LABORDE y C. NEUMANN (*a*]).

El movimiento resulta uniformemente acelerado.

Obsérvese que las masas en movimiento son las del carrito A_1 (m_1), del cuerpo A_2 (m_2) y de la polea giratoria C.

Despreciando la influencia de la polea, la masa en movimiento es $m_1 + m_2$ y la fuerza motriz es $F = m_2 g$; con el experimento se comprueba que el movimiento de A_1 (y, por tanto, de A_2) es uniformemente acelerado, con aceleración:

$$a_c = \frac{F}{m_1 + m_2} < \frac{F}{m_1}; \qquad a_c = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2}. \qquad [4]$$

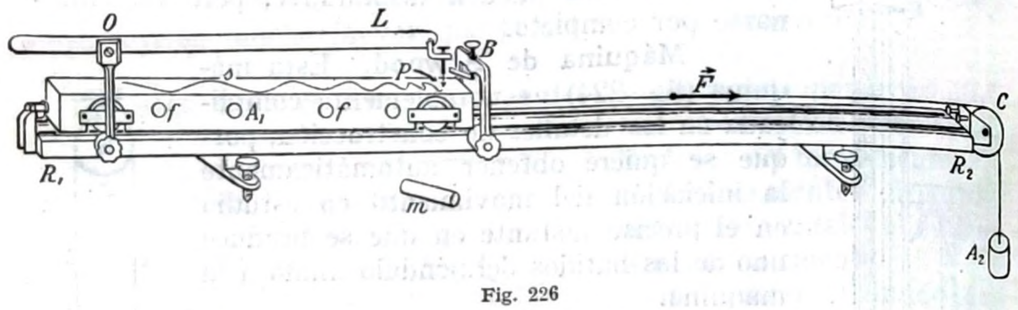


Fig. 226

Únicamente cuando m_2 es despreciable respecto a m_1 se puede escribir: $a_c = \frac{F}{m_1}$.

Todos estos experimentos confirman la validez de la fórmula [2]. Luego, vectorialmente, se tiene:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a_c}; \qquad [5]$$

en particular:

$$\vec{P} = m \cdot \vec{g}, \qquad [6]$$

y admitiremos que la [5], *segunda ley (o principio) de la dinámica*, es válida en cualquier caso; por ejemplo, cuando $\vec{F}$ sea función del tiempo o de la velocidad; $\vec{a_c}$ varía entonces con el tiempo, y la [5] da, en cada instante, la relación que existe entre $\vec{F}$ y $\vec{a_c}$.

La masa inerte m del móvil mide lo que podría llamarse la *inercia para el movimiento*: m es tanto mayor cuanto mayor sea la fuerza necesaria para producir en el cuerpo que se estudia una determinada aceleración.

Como se ha indicado, no es grande la precisión de los experimentos descritos, que tienen carácter didáctico; pero se conocen confirmaciones indirectas muy precisas de la validez de la [5]; por ejemplo, las que resultan del estudio del movimiento del péndulo (§ 144).

Éstas permitirán deducir que $\vec{g}$ es constante para todos los cuerpos en un lugar determinado, y que, para un cuerpo dado, varían $\vec{P}$ y $\vec{g}$ de un lugar a otro, mientras que m se conserva constante. Se

justifica así la medida de las masas mediante la balanza (§ 43) y la conveniencia de introducir como unidad fundamental de medida la unidad de masa (*gramo-masa*, g_m). La masa m, constante, característica del cuerpo, es independiente de su velocidad, de la temperatura, del estado de agregación, de la proximidad de otros cuerpos, etc.

Puede tomarse la masa como medida de la «cantidad de materia» del cuerpo. De acuerdo con esto, en cuerpos homogéneos, la masa y el peso son proporcionales al volumen, y, por tanto, a la «cantidad de materia». La [5] permite, pues, definir cantidades iguales de materias de naturaleza química diferente: son cantidades iguales de materia las que tienen igual masa; por ello, la masa inerte se denomina también *masa material*.

La constancia de la masa inerte de un sistema, al variar sus condiciones, tanto físicas como químicas (es decir, durante las reacciones químicas que se efectúan entre las partes del sistema) es la prueba *de la conservación de la materia*, es decir, de su indestructibilidad.

Los dos fenómenos que contradicen la conservación de la masa, variación de la masa con la velocidad cuando ésta alcanza valores elevadísimos [que representen una fracción importante de la velocidad de la luz en el vacío ($3 \cdot 10^{10}$ cm·seg^{-1})], y equivalencia entre la masa y la energía, o sea posibilidad de transformación de una en otra, carecen de interés en el dominio de las cuestiones aquí tratadas; sólo daremos breves indicaciones de dichos hechos en el tomo II.

Así, pues, la [5] ha nacido históricamente como ecuación de definición de la masa, relación entre la fuerza agente y la aceleración obtenida, considerando la fuerza y la aceleración como magnitudes físicas previamente definidas y susceptibles de ser medidas.

Sin embargo, es preferible considerar la masa m como magnitud fundamental, definida por el método directo (§§ 5, 6), y considerar a la [5] como ecuación que define la fuerza.

En tal caso se escoge como unidad de medida fundamental para la masa:

en el sistema cm g_m seg (CGS), el *gramo-masa* (g_m); la unidad coherente de fuerza es la *dina*, fuerza que imprime a la masa de 1 g_m la aceleración de 1 cm. seg^{-2};

en el sistema m kg_m seg (MKS) el *kilogramo-masa* (kg_m); la unidad coherente de fuerza es el *newton* (Nw), fuerza que imprime a la masa de 1 kg_m la aceleración de 1 m·seg^{-2}.

Véase también § 41, nota 2.

De la [6], que no es más que un caso particular de la [5], se sigue, en el sistema CGS, para $m = 1$ g_m:

$$P_m = 1\ g_m = 1\ g \cdot g_m \cdot cm \cdot seg^{-2} = g\ dinas \approx 980\ dinas,$$

valor variable de un lugar a otro.

Por lo tanto, *1 g_m pesa* g *dinas*; por lo cual 1 g_p (§ 41) equivale a g dinas, es decir, vale, según el lugar, desde unas 978 dinas a unas 981; como promedio, 980 dinas, aproximadamente.

Análogamente, en el sistema m kg_m seg, *1 kg_m pesa 9,8 newton*; por lo tanto, 1 kg_p equivale a 9,8 newton.

Véase asimismo § 41.

Definida la fuerza mediante la [5], como las aceleraciones sólo son efectivamente observables en los puntos materiales, tampoco cabe imaginar las fuerzas obrando en otra forma que sobre puntos materiales, esto es, sobre «cuerpos». ¿Qué significaría una fuerza aplicada a un mero punto geométrico? ¿Qué aceleración le imprimiría?

Esta necesidad de imaginar siempre a la fuerza como aplicada a una masa material vale incluso en la Estática.

§ **116. Principio de inercia. Sistemas inertes.** Pudiendo medirse la masa de un cuerpo en g_m mediante la balanza (§§ 43 y 115), y la aceleración mediante el movimiento *respecto a los tres ejes de referencia*, admitir la validez de la [5], § 115, significa admitir que toda aceleración observada se ha de atribuir a la existencia de una fuerza motriz, y viceversa.

Un cuerpo no sujeto a ninguna fuerza, o está quieto ($\vec{u} = 0$, y por tanto, $\vec{a_c} = 0$) o se mueve con movimiento rectilíneo uniforme ($\vec{u} \neq 0$, constante; $\vec{a_c} = 0$).

Éste es el *principio de inercia* o *primer principio de la dinámica*, que es, por tanto, un caso particular del segundo principio.

Se ha dicho ya que el peso y los rozamientos impiden la comprobación experimental directa del principio de inercia, porque imposibilitan la realización de un cuerpo no sujeto a fuerzas exteriores.

Una vez fijado el sistema de ejes de referencia, admitir que es verdadera la [5] equivale a establecer que las fuerzas aplicadas *deben* medirse por el producto $m \cdot \vec{a_c}$ de la masa del cuerpo por su aceleración.

Por el contrario, nosotros hemos supuesto que la fuerza aplicada se había medido estáticamente mediante el dinamómetro; entonces la [5] asegura que debe ser constante para cada cuerpo la razón $\frac{\vec{F}}{\vec{a_c}}$.

Esto está demostrado, al menos en primera aproximación, con los experimentos del § 115. Pero existen casos en que la [5], así interpretada, está en desacuerdo con los hechos experimentales:

a] Una esfera pesada abandonada en un flúido cae con movimiento cada vez menos acelerado hasta alcanzar una velocidad de caída constante. Una esferita de acero de un milímetro de radio tiene una masa $\approx 0{,}033$ g_m; sumergida en aceite lubricante, resulta estáticamente sujeta a una fuerza vertical continua y constante, diferencia entre el peso (≈ 32 dinas) y el empuje de Arquímedes (≈ 4 dinas); según la [5], la esferita debería caer con movimiento naturalmente acelerado, con aceleración $\frac{28}{0{,}033} = \approx 900 \frac{\text{cm}}{\text{seg}^2}$; en realidad, la esferita alcanza en pocos segundos una velocidad de caída constante, la cual, si el aceite es suficientemente viscoso, puede reducirse hasta valer 1 cm/seg, o incluso menos.

Si el grave no tiene simetría esférica, ni siquiera cae según la vertical; ¿quién no ha observado la trayectoria irregular de un cartoncito que cae desde una ventana?

La causa del gran desacuerdo entre la experiencia y la [5] es la resistencia del medio, que es función de la velocidad, y que se anula con ésta, por lo cual no puede ser descubierta en la medida estática de las fuerzas, efectuada con el dinamómetro.

Si se elimina el medio flúido, desaparece el flagrante desacuerdo. Sin embargo, véase *d*].

b] Se obtiene una acción de frenado, que, como la resistencia del medio, es función de la velocidad, y se anula con ésta, mediante las corrientes inducidas, en particular con las corrientes de Foucault, según la ley de Lenz (véase tomo II). La caída de una esferita de plata entre los polos de un potente electroimán resulta fuertemente frenada.

Pero si se experimenta con esferitas no conductoras o en ausencia de campo magnético, vuelve a ser válida la [5].

c] El movimiento de los electrones en el tubo de Braun (véase tomo II) puede suponerse regulado por la fórmula [5], con tal que se admita que una partícula electrizada moviéndose en un campo magnético transversal está sujeta a una fuerza proporcional a la velocidad de la partícula y normal al campo magnético y a esta velocidad (*fuerza de* Lorentz). Pero si se experimenta en ausencia de campo magnético o con una partícula no electrizada, es perfectamente válida la [5], aparte de la dificultad práctica de medir estáticamente con el dinamómetro las fuerzas actuantes.

d] Un grave que se deja libremente bajo la acción de la fuerza peso, sólo en primera aproximación cae en el vacío según la vertical, es decir, según la línea de acción de la fuerza, como determina la [5].

Se trata del famoso experimento de Galileo respecto a la desviación hacia Oriente en la caída libre de los graves.

En el vacío y en el ecuador, el valor de la desviación hacia Oriente, para una altura de caída libre de 80 m, es de $\approx$ 15 mm.

Para que fuese válida la [5] se podría inventar la existencia de una fuerza desviadora hacia Oriente que se anulase con la velocidad

y que, por tanto, no pudiese encontrarse estáticamente mediante el dinamómetro (1).

La falta de validez de la [5] conducirá, en todo caso, a la existencia de fuerzas que dependen de la velocidad y que se anulan con ésta.

Pero la caída de los graves hacia Oriente, al contrario de los casos a], b] y c], es un hecho común a todos los cuerpos, y no sirve, para anularla, ni experimentar en el vacío ni eliminar campos magnéticos o eléctricos. Conviene investigar su origen por otro camino.

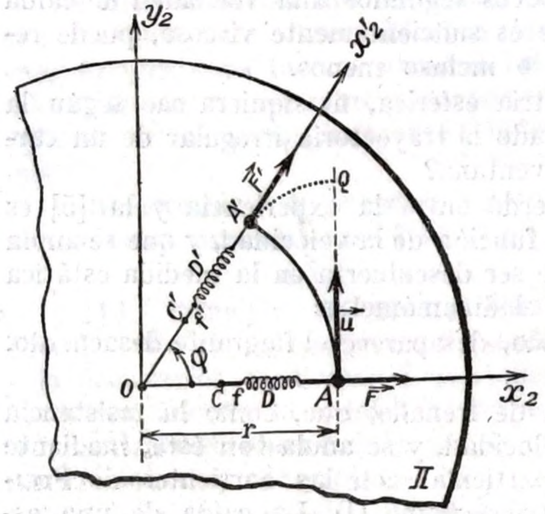


Fig. 227

Sea Π (fig. 227) la plataforma de un «tiovivo», horizontal, muy lisa, que puede girar alrededor del eje vertical O con velocidad angular $\vec{\omega}$, constante con respecto al suelo. Limitemos los fenómenos al plano de la plataforma. Se tienen dos observadores: uno de ellos, X_1, fijo en el suelo; éste refiere el movimiento de la plataforma y de los cuerpos que se hallan encima de ella a un par de ejes, x_1, y_1, situados en el plano de la plataforma, pero fijos respecto al suelo.

Se coloca sobre la plataforma un observador, X_2, que refiere sus experimentos a los ejes x_2, y_2, fijos en la plataforma.

Una bolita A, cuando gira la plataforma, para ser mantenida en reposo con respecto a x_2, y_2, debe sujetarse mediante un hilo f, fijo en un punto C de la plataforma, que toma la orientación del radio OC; la deformación del resorte D hace suponer al observador X_2 (compárese con § 77) que el punto A está sujeto a una fuerza cuyo valor permite medir estáticamente la deformación de D.

X_2 encontraría que la bolita con la cual experimenta, colocada en las posiciones A, A', ..., está sujeta a un campo central de fuerzas, cuyo centro se encontraría en un punto especial O de la plataforma; hallaría que la fuerza varía en razón directa de la distancia r al centro:

$$\vec{F} = k \cdot \vec{r};$$

finalmente, encontraría que la constante k es diferente para distintas

(1) Es la llamada fuerza de Coriolis; véase un tratado cualquiera de mecánica racional.

bolitas, y esto lo conduciría a definir una *masa* de cada bolita, proporcional a k.

(El observador X_1 podría sugerir a X_2 poner $k = \omega^2 \cdot m$ y dar a tal fuerza el nombre de *fuerza centrífuga*.)

Ahora, X_2 corta el hilo f cerca de A, y la bolita A parece moverse un breve instante con movimiento acelerado según el radio OA; de este modo es válida la [5] del § 115.

Pero esperemos un tiempo finito t, durante el cual la plataforma habrá girado un ángulo $\varphi = \omega \cdot t$.

Respecto al suelo, la bolita A tiene la velocidad $\vec{u} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$ (cuya magnitud es $u = \omega \cdot r$), que le animaba en el momento en que se ha cortado el hilo, y en el tiempo t ha recorrido el segmento $AQ = \omega \cdot r \cdot t$.

Entretanto, el eje x_2, fijo en la plataforma, ha girado un ángulo $\varphi = \omega \cdot t$ y se encuentra en Ox'_2, de tal modo que se tiene: arco $AA' = \omega \cdot r \cdot t$.

Luego,

$$AA' = AQ;$$

A' y Q *no* se encuentran sobre el mismo radio que pasa por O.

El observador X_2, bajo el efecto de una fuerza (estática) dirigida a lo largo del radio Ox_2, que, en el instante t, respecto a X_1 va a tomar la posición Ox'_2, ve moverse la bolita a lo largo de $A'Q$ y no según la línea de acción de la fuerza aplicada. No es válida la [5].

Excluyendo las fuerzas a], b], c], se llamará *sistema inerte* a todo sistema de ejes de referencia para los cuales es válida la [5] (y, por tanto, el principio de inercia), con valores invariables de las masas de los cuerpos en juego, y *cuando la existencia de las fuerzas esté comprobada estáticamente* mediante el consabido dinamómetro y el consabido hilo, fijados en el sistema de ejes de referencia. En un sistema inerte, puede efectuarse la medida de una fuerza *estáticamente* con el dinamómetro, o también deducirla *dinámicamente* del movimiento, a partir de la masa del punto móvil y de su aceleración, obteniéndose el mismo resultado (se excluye el caso de fuerzas que dependen de la velocidad, citadas en a], b] y c]).

El sistema de ejes $x_2\, y_2$, fijo a la plataforma giratoria de la figura 227, no es inerte, porque está en rotación.

Análogamente, a causa de la desviación de los graves hacia Oriente, el sistema de ejes fijo a la Tierra, escogido por nosotros en el § 115, sólo es inerte en primera aproximación, debido al movimiento diurno de rotación de la Tierra.

Al final del § 130 volveremos a tratar de las condiciones que debe también satisfacer el sistema inerte para que se cumpla la invariabilidad de las masas.

Todos los fenómenos conocidos nos inducen a llegar a la conclusión de que *es inerte un sistema constituído por tres ejes cuyo origen se encuentre en el baricentro del sistema solar y cuya orientación sea invariable respecto a las estrellas fijas.*

Una vez encontrado un sistema inerte, también son inertes (con los mismos valores de las fuerzas y de las masas) todos los sistemas dotados de movimiento de traslación rectilíneo uniforme respecto al primer sistema. Por consiguiente, el movimiento referido a tres ejes que constituyen un sistema inerte no es, en modo alguno, un movimiento absoluto.

§ 117. Independencia de las acciones simultáneas. La acción de la fuerza $\vec{F}$ es independiente del estado de reposo o de movimiento preexistente en el móvil A, y es independiente de la coexistencia o no de otras fuerzas actuantes *(independencia de las acciones simultáneas)*.

Va comprendido implícitamente en la [5], § 115, que la acción de una fuerza no depende de una velocidad preexistente, paralela y del mismo sentido que la fuerza $\vec{F}$.

En efecto, aquella ecuación viene a indicar que si una fuerza constante $\vec{F}$ actúa sobre A durante un cierto tiempo, la aceleración producida $\vec{a}_c$ está dada por $\vec{a}_c = \dfrac{\vec{F}}{m} = \text{const.}$, tanto en el instante inicial (A está en reposo), como en los instantes sucesivos (A ha adquirido ya cierta velocidad por la acción precedente de $\vec{F}$).

Pero el principio de las acciones simultáneas establece que esta independencia de la velocidad $\vec{u}$, que tiene A, también se cumple aunque $\vec{u}$ y $\vec{F}$ no sean vectores paralelos y del mismo sentido.

Luego, según este principio, si actúan simultáneamente dos fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, el punto adquiere simultáneamente dos aceleraciones $\vec{a}_{c1}$ y $\vec{a}_{c2}$, proporcionales a las fuerzas:

$$\vec{F}_1 = m \cdot \vec{a}_{c1}; \qquad \vec{F}_2 = m \cdot \vec{a}_{c2};$$

y nos hallamos en el caso del § 62; por lo tanto, la aceleración resultante $\vec{a}_2$ es:

$$\vec{a}_c = \vec{a}_{c1} + \vec{a}_{c2}.$$

Pero, por la [5] del § 115, el punto de masa m adquiere la misma aceleración si está sujeto a la fuerza única:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}_c = m \cdot (\vec{a}_{c1} + \vec{a}_{c2}) = m\vec{a}_{c1} + m\vec{a}_{c2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

La fuerza única $\vec{F}$, capaz de producir los mismos efectos que las dos fuerzas actuando simultáneamente, se obtiene también mediante la regla del paralelogramo: «El principio de la independencia de las acciones simultáneas es la autorización para emplear en dinámica la regla del paralelogramo de las fuerzas».

En particular, si las fuerzas aplicadas tienen una resultante nula, el movimiento se realiza como si no existiesen fuerzas aplicadas, por inercia (§ 116); si el punto está en movimiento, prosigue con movimiento rectilíneo y uniforme; hay *equilibrio dinámico*.

Se puede, pues, limitar el estudio de la acción de una fuerza sobre un punto material al caso de un punto móvil a lo largo de un eje y de una fuerza aplicada paralelamente a este eje. Se pasa al caso general con convenientes aplicaciones sucesivas del principio de la independencia de las acciones simultáneas y del principio de la composición de los movimientos.

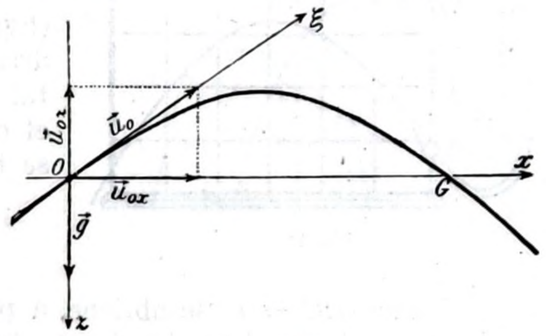


Fig. 228

Se comprende, pues, el alcance enorme de este principio de la independencia de las acciones simultáneas.

He aquí algunos experimentos para comprobarlo.

a] **Trayectoria de los graves lanzados.** La velocidad inicial $\vec{u}_0$ (u_{0x}, u_{0z}) da origen al movimiento uniforme según el eje ξ (fig. 228):

$$x_1 = u_{0x}\, t; \qquad z_1 = u_{0z}\, t. \tag{1}$$

(O es la *posición inicial* del grave, y en la figura 228 es $u_{0z} < 0$.)

La aceleración de la gravedad da origen al movimiento:

$$x_2 = 0; \qquad z_2 = \frac{1}{2}\, gt^2. \tag{2}$$

Si la acción de la gravedad es independiente de la velocidad $\vec{u}_0$, el movimiento efectivo se obtendrá componiendo estos movimientos; debe tenerse:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 = u_{0x}\, t \\ z &= z_1 + z_2 = u_{0z}\, t + \frac{1}{2}\, gt^2 \end{aligned}\right\}. \tag{3}$$

Eliminando t entre las ecuaciones [3], se obtendrá la ecuación de la trayectoria, que es una parábola de eje vertical.

Así lo comprueba la experiencia; por ejemplo, la vena líquida de mercurio que sale por A (fig. 229) con dirección y velocidad variables a voluntad del experimentador, dibuja en el plano vertical una línea cuya sombra puede ser proyectada y registrada sobre un tablero T.

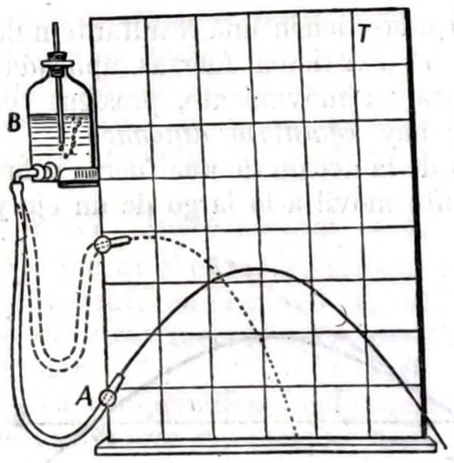


Fig. 229

Se comprueba que esta línea es una parábola de eje vertical.

Una bolita lanzada desde O (figura 228) oblicuamente hacia arriba, cae sobre el plano horizontal Ox en el instante $t_0 \neq 0$, para el cual la [3] vuelve a dar $z = 0$; se tiene:

$$t_0 = -\frac{2\,u_{0z}}{g}; \qquad [4]$$

y el alcance $OG = x_0$ se obtiene, a partir de la primera de las [3], poniendo en lugar de t el valor t_0 dado por [4]:

$$x_0 = -2\,\frac{u_{0x}\,u_{0z}}{g} \qquad (u_{0x} > 0,\ u_{0z} < 0\,;\ x_0 > 0).$$

Para una velocidad de lanzamiento de magnitud constante u_0 se tiene:

$$u_0 = \sqrt{u_{0x}^2 + u_{0z}^2} = \text{const.}$$

El alcance es

$$x_0 = -2\,\frac{u_{0x}\sqrt{u_0^2 - u_{0x}^2}}{g}$$

y es máximo para $\dfrac{dx_0}{du_{0x}} = 0$, es decir, cuando $u_{0x} = u_{0z}$, y, por tanto, para $\widehat{xO\xi} = 45^\circ$.

El aparato de la fig. 230 permite verificar que la bolita, que, cayendo de una altura constante h, alcanza siempre la misma velocidad u_0,

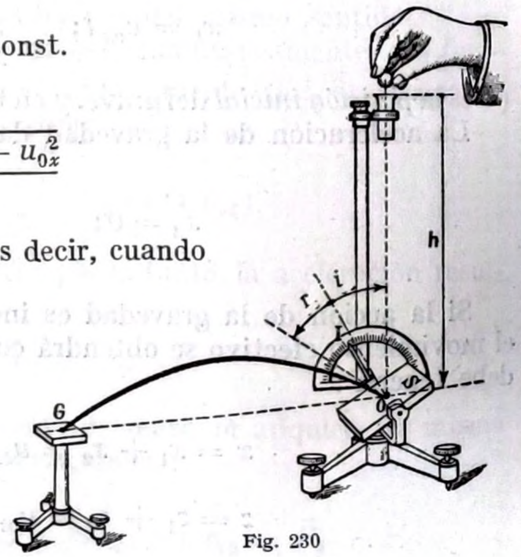


Fig. 230

rebota y cae a la máxima distancia OG, cuando el espejo S está inclinado respecto a la horizontal un ángulo $i = 22^\circ,5$. En efecto, en tal caso la velocidad de rebote forma un ángulo $i + r = 2\,i = 2 \cdot 22^\circ,5 = 45^\circ$ con respecto al plano horizontal (§ 141).

b] Dos bolitas de hierro O_1 y O_2 se dejan caer simultáneamente (fig. 231). En el momento en que O_1, descendiendo por la canal G, queda libre bajo la acción de la gravedad, O_1 abre un contacto eléctrico y la bolita O_2 es abandonada por el electroimán E.

Las dos bolitas chocan en un punto O_3, que depende de la velocidad del lanzamiento horizontal de O_1, esto es, de la altura desde la cual se ha dejado caer a lo largo de la guía G. Luego, la caída en sentido vertical se efectúa con la misma ley para O_1 que para O_2.

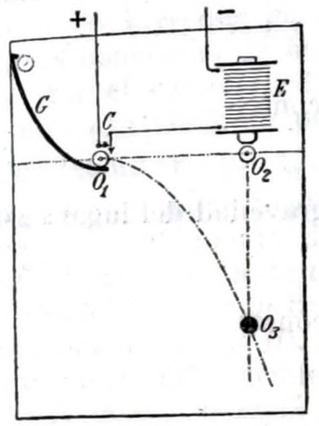


Fig. 231

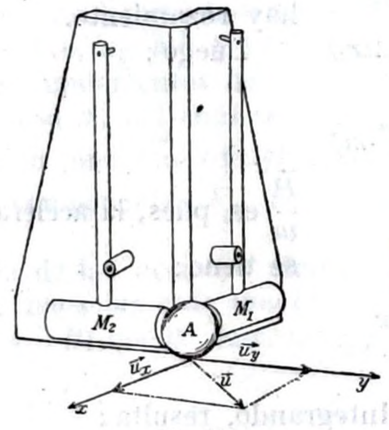


Fig. 232

Es necesario que O_1 sea lanzada *horizontalmente*, y que O_1 y O_2, en las posiciones indicadas en la figura, se encuentren en un mismo plano horizontal.

c] El choque que, por separado, producen en la esfera A (figura 232) cada uno de los dos martillos M_1 y M_2, iguales e igualmente levantados, produce un movimiento en el sentido del choque. Después de la brevísima fase del choque, el movimiento es rectilíneo y uniforme, con velocidad $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$, de igual magnitud en los dos casos.

El choque simultáneo en A de los dos martillos produce un movimiento según la diagonal del paralelogramo construído sobre $\vec{u}_x$ y $\vec{u}_y$, y la velocidad $\vec{u}$ es, por tanto, $\vec{u}_x + \vec{u}_y$ (el paralelogramo, en este caso, es un cuadrado).

§ 118. Problema general de la dinámica del punto libre.

a] **Sobre un eje x.** He aquí el problema: Dada la masa m del punto A y la fuerza aplicada $\vec{F}_x$ (paralela al eje x y cuya magnitud es $\vec{F}_x$), determinar la ley del movimiento $x = x\,(t)$.

Es conocida la aceleración $a_c = \frac{F_x}{m}$, y, por tanto, se conoce $\frac{d_2 x}{dt^2}$; interesa encontrar la función $x(t)$, cuya derivada segunda es $\frac{F_x}{m}$.

Ejemplo: Determinar la ley de caída según la vertical de un cuerpo A (fig. 233) de masa m. Se transforma la vertical en un eje, fijando el origen O y el sentido positivo (hacia abajo, por ejemplo).

La fuerza aplicada es el peso $\vec{P}$; sea P la magnitud de $\vec{P}$, en valor y signo, sobre el eje de las x; nos limitamos a un espacio reducido para que podamos suponer que el campo de la gravedad es uniforme (§ 94); $\vec{P}$, y por lo tanto P, son constantes. No se tienen otras fuerzas; en particular, no hay rozamiento.

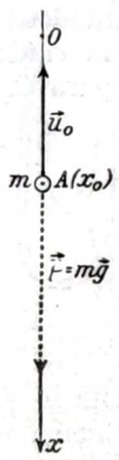


Fig. 233

Luego:

$$\frac{P}{m} = \frac{d^2x}{dt^2} = \text{const.}$$

$\frac{\vec{P}}{m}$ es, pues, la aceleración de la gravedad del lugar; así que se tiene:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g = \text{const.} \qquad [1]$$

Integrando, resulta:

$$u = g \cdot t + u_0 = \frac{dx}{dt}; \qquad [2]$$

$$x = x(t) = \frac{1}{2} g t^2 + u_0 t + x_0 \qquad [3]$$

en donde g se supone conocida una vez para siempre en el lugar en donde se experimenta; por ejemplo: $g = 980 \frac{\text{cm}}{\text{seg}^2}$.

El movimiento de caída es uniformemente acelerado, con aceleración g; u_0 y x_0 son dos constantes arbitrarias de integración; para $t = 0$ se tiene $u = u_0$ y $x = x_0$; luego estas constantes de integración tienen el significado físico de *velocidad inicial* y de *posición inicial* del grave. El problema propuesto es indeterminado, y solamente será determinado si se enuncia del siguiente modo: Un cuerpo A de masa m se ha lanzado verticalmente con la velocidad u_0 desde la posición x_0; el cuerpo A está sometido al peso $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$. ¿Cómo se mueve A?

El problema fundamental de la dinámica es, por tanto: Dada la masa m y la fuerza F_x, dadas la posición y la velocidad iniciales x_0 y u_0 del punto A, encontrar el movimiento de dicho punto; es decir, resolver la ecuación diferencial:

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = F_x; \qquad [4]$$

F_x en general, no será constante, sino una función conocida, *sea del tiempo t o, más a menudo, de la posición x*, en que el cuerpo A se encuentra durante su movimiento (campo de fuerzas F_x a lo largo del eje x).

No se excluye que puedan también considerarse fuerzas que sean funciones conocidas de la velocidad (§ 116, *a*], *b*]; § 148).

b] **En el espacio.** El problema fundamental de la dinámica del punto es: Dado un punto A de masa m, del cual se conocen la posición inicial (x_0, y_0, z_0), y la velocidad inicial $\vec{u}_0$ (de componentes u_{0x}, u_{0y}, u_{0z}) y dada la fuerza $\vec{F}$ (de componentes F_x, F_y, F_z), determinar el movimiento del punto.

Por el principio de la independencia de las acciones simultáneas, *el problema se divide en tres problemas, uno sobre cada uno de los ejes.* El movimiento $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ queda determinado por las ecuaciones diferenciales siguientes:

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = F_x, \qquad m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = F_y, \qquad m \cdot \frac{d^2z}{dt^2} = F_z, \qquad [5]$$

y por las siguientes *condiciones iniciales*: para $t = 0$, sean (x_0, y_0, z_0) la posición inicial del punto, y $\vec{u}_0$ (u_{0x}, u_{0y}, u_{0z}) su velocidad inicial.

F_x, F_y, F_z son, en general, funciones dadas del tiempo t, o bien, más frecuentemente, funciones dadas del lugar (x, y, z) ocupado por el punto en movimiento. En el primer caso es más simple la resolución matemática de la [5]. Y el problema inverso es muy sencillo: La fuerza $\vec{F}(t)$ $\{F_x(t), F_y(t), F_z(t)\}$, necesaria para producir cierto movimiento $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = (t)$ del punto A de masa m, se obtiene fácilmente derivando dos veces estas últimas funciones:

$$F_x(t) = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad F_y(t) = m \cdot \frac{d^2y}{dt^2}, \qquad F_z(t) = m \cdot \frac{d^2z}{dt^2}.$$

El segundo caso es físicamente mucho más importante: Conociendo un campo de fuerzas $\vec{F}$ $\{F_x(x, y, z), F_y(x, y, z), F_z(x, y, z)\}$

aplicado al punto A de masa m, ¿cómo se muéve el punto A en este campo de fuerzas?

La resolución de este problema pertenece a la Mecánica racional; nos limitaremos aquí a exponer algunos casos muy sencillos y de especial interés físico.

§ 119. Movimiento curvilíneo. Movimiento ligado. Para mayor sencillez limitémonos al movimiento de un punto A en un plano (fig. 234). Sea l la trayectoria, fijando sobre l un sentido positivo y un origen O; la posición del móvil A está individualizada por la longitud del arco $l = OA$ (§ 57); $l = l(t)$ es la ley del movimiento; m es la masa del punto.

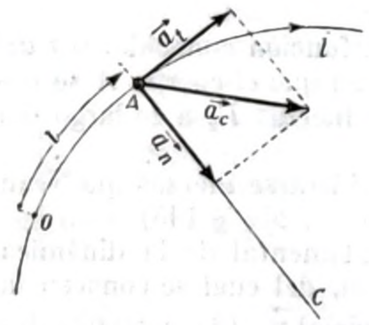


Fig. 234

En lugar de descomponer la aceleración $\vec{a}_c$ según dos ejes cartesianos ortogonales y volver a la [5] del § 118, descompongamos $\vec{a}_c$ en dos componentes, una tangencial $\vec{a}_t$ y otra centrípeta $\vec{a}_n$.

Se tiene (§ 57, [4] y [5]):

$$a_t = \frac{du}{dt}, \qquad a_n = \frac{u^2}{r}; \qquad [1]$$

en donde r es el radio de curvatura de la trayectoria en el punto ocupado por A.

El movimiento supuesto se engendra aplicando al punto A dos fuerzas, respectivamente tangencial y centrípeta:

$$F_t = m \cdot \frac{du}{dt} = m \cdot \frac{d^2 l}{dt^2}; \qquad F_n = m \cdot \frac{u^2}{r}. \qquad [2]$$

Un movimiento curvilíneo es debido a la acción simultánea de la fuerza tangencial $\vec{F}_t$ y de la fuerza centrípeta $\vec{F}_n$. La fuerza centrípeta no es una fuerza de naturaleza especial, pero *el efecto de las dos fuerzas es netamente distinto*; $\vec{F}_t$ *sirve únicamente para acelerar o retardar el movimiento* a lo largo de la trayectoria, es decir, para variar la velocidad $u = \frac{dl}{dt}$ (no es un vector), y $\vec{F}_n$ *sirve tan sólo para hacer desviar el punto* del camino recto. El movimiento es rectilíneo

cuando $\vec{F}_n$ es constantemente nula, y es curvilíneo, pero uniforme, si solamente existe $\vec{F}_n$. La fuerza $\vec{F}_t$ trabaja en todo su valor durante el movimiento, puesto que $\vec{F}_t$ es paralela a los corrimientos $\vec{dl}$; en cambio, la fuerza $\vec{F}_n$ *no trabaja*. El trabajo de F_t sirve para hacer variar la energía cinética $\frac{1}{2} mu^2$ (§ 125) de la masa en movimiento; la fuerza $\vec{F}_n$ cambia la dirección del movimiento, pero *no* modifica la cantidad de energía cinética de A.

Conforme con esto, la acción de la fuerza $\vec{F}_1$ puede sustituirse por la acción de una ligadura lisa (esto es, sin rozamiento). En vez de considerar el punto A con libertad de movimientos y sujeto a las fuerzas $\vec{F}_t$ y $\vec{F}_n$, se obtendrá el mismo movimiento si, con la misma posición inicial y la misma velocidad inicial $\vec{u}_0$, se imagina que el punto A está ligado a recorrer la trayectoria l y se encuentra sometido únicamente a la fuerza tangencial $\vec{F}_t$.

Por ejemplo, el movimiento circular uniforme de A [fig. 235, *a*)] se obtiene aplicando al punto móvil la fuerza centrípeta $F_n = m \cdot \frac{u^2}{r}$ mediante el hilo OA, y el dinamómetro D permite la medida de esta fuerza aplicada.

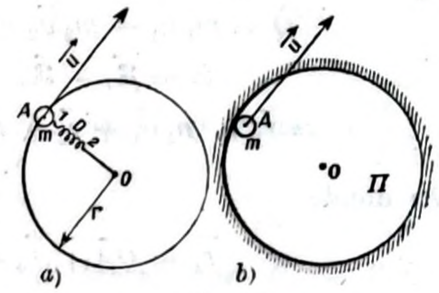


Fig. 235

El mismo movimiento circular se obtiene lanzando A con la misma velocidad u, tangencialmente a la pared interna del vaso cilíndrico Π [figura 235, *b*)], cuando el rozamiento entre A y las paredes de Π se pueda considerar despreciable. Las paredes del vaso constituyen la ligadura impuesta al movimiento de A. En realidad, también el hilo OA de la figura 235, *a*) puede considerarse como una ligadura, si se supone que es inextensible y con un extremo fijo en O.

Si el dinamómetro D está calibrado, del alargamiento del resorte puede deducirse el valor de la fuerza centrípeta aplicada. Se está así en condiciones de comprobar que

$$F_n = m \cdot \frac{u^2}{r} = m \cdot r \cdot \omega^2 = \frac{4\pi^2 m \cdot r}{T^2}; \qquad [3]$$

en donde ω es la velocidad angular del movimiento circular, y T es el período.

§ 120. Cantidad de movimiento, impulso y sus momentos. Se define como *cantidad de movimiento* de un punto A, de masa m y velocidad $\vec{u}$, el vector

$$\vec{Q} = m \cdot \vec{u} \qquad [1]$$

paralelo y del mismo sentido que $\vec{u}$.

El *momento* $\vec{\mathfrak{K}}$ *de la cantidad de movimiento de* A respecto a un punto O es, por definición:

$$\vec{\mathfrak{K}} = \vec{r} \wedge m\vec{u} = m\,(\vec{r} \wedge \vec{u}), \qquad [2]$$

en donde $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$. El vector $\vec{\mathfrak{K}}$ se denomina *momento cinético* de la masa m.

Un sistema de puntos materiales A, A_2, ..., A_n, de masas m_1, m_2, ..., m_n, y velocidades $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, ..., $\vec{u}_n$, respectivamente, tiene, por definición, la cantidad de movimiento y el momento cinético respecto al punto O, dados por:

$$\left.\begin{aligned} \vec{Q} &= m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 + m_3\vec{u}_3 + ... + m_n\vec{u}_n\,; \\ \vec{\mathfrak{K}} &= \vec{\mathfrak{K}}_1 + \vec{\mathfrak{K}}_2 + \vec{\mathfrak{K}}_3 + ... + \vec{\mathfrak{K}}_n = \\ &= \vec{r}_1 \wedge m_1\vec{u}_1 + \vec{r}_2 \wedge m_2\vec{u}_2 + ... + \vec{r}_n \wedge m_n\vec{u}_n \end{aligned}\right\}; \qquad [3]$$

en donde

$$\vec{r}_1 = \overrightarrow{OA}_1\,;\quad \vec{r}_2 = \overrightarrow{OA}_2\,;\quad ..... \vec{r}_n = \overrightarrow{OA}_n.$$

Puesto que (§ 57, [2])

$$\vec{a}_c \cdot dt = d\vec{u}, \quad \text{y} \quad \vec{F} = m\vec{a}_c,$$

se tiene:

$$\vec{F} \cdot dt = m \cdot d\vec{u} = d\,(m\vec{u}), \qquad [4]$$

y también:

$$\vec{r} \wedge \vec{F}dt = \vec{r} \wedge d\,(m\vec{u}). \qquad [5]$$

Ahora bien, en el tiempo dt, A se traslada hasta A'; por lo tanto, $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$ se convierte en $\vec{r} + d\vec{r} = \overrightarrow{OA'}$; luego, $d\vec{r} = \overrightarrow{AA'}$ (compárese con la fig. 111); $m\vec{u}$, por la variación de $\vec{u}$, varía en $d\,(m\vec{u}) = m \cdot d\vec{u}$ El vector $\vec{r} \wedge m\vec{u}$, al variar el tiempo, cambia en:

$$d\,(\vec{r} \wedge m\vec{u}) = [(\vec{r} + d\vec{r}) \wedge (m\vec{u} + d\{m\vec{u}\})] - [\vec{r} \wedge m\vec{u}],$$

y, por tanto, por la [14], § 52, despreciando los infinitésimos de orden superior, se tiene:

$$d\,(\vec{r} \wedge m\vec{u}) = d\vec{r} \wedge m\vec{u} + \vec{r} \wedge d\,(m\vec{u}).$$

Pero $d\vec{r} = \overrightarrow{AA'}$ es paralelo a $\vec{u}$ y, por tanto, a $m\vec{u}$; por consiguiente, el primer término del segundo miembro es nulo y la [5] se escribe:

$$\vec{r} \wedge \vec{F}dt = d\,(\vec{r} \wedge m\vec{u})\,; \qquad [6]$$

y, finalmente, puesto que $\vec{r} \wedge \vec{F}dt = (\vec{r} \wedge \vec{F})\,dt$, y $\vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{M}$, momento de $\vec{F}$ respecto a O:

$$\vec{M} \cdot dt = d\vec{R}. \qquad [8]$$

Las igualdades [4], [6] y [7] se extienden fácilmente a un intervalo de tiempo finito:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt = \Delta\,(m\vec{u}) = m\vec{u}_2 - m\vec{u}_1 = \vec{Q}_2 - \vec{Q}_1, \qquad [8]$$

$$\left.\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \vec{r} \wedge \vec{F}dt &= \int_{t_1}^{t_2} \vec{M} \cdot dt = \Delta\,(\vec{r} \wedge m\vec{u}) = (\vec{r}_2 \wedge m\vec{u}_2) - (r_1 \wedge m\vec{u}_1) = \\ &= \vec{\mathfrak{K}}_2 - \vec{\mathfrak{K}}_1. \end{aligned}\right\} \qquad [9]$$

El vector $\vec{F} \cdot dt$, paralelo y del mismo sentido que $\vec{F}$, se llama *impulso* de la fuerza $\vec{F}$ en el tiempo dt; el vector $\vec{r} \wedge \vec{F} \cdot dt$ se llama *momento del impulso* respecto a O.

Las cantidades que figuran en los primeros miembros de estas últimas fórmulas constituyen, respectivamente, el *impulso de la fuerza* y el *momento del impulso* en el intervalo de tiempo $t_2 - t_1$.

Las [8] y [9] son una generalización, legítima para un punto dotado de cualquier clase de movimiento, de una fórmula que se deduce en física elemental para el caso de un punto libre, inicialmente en reposo, al que se aplica una fuerza $\vec{F}$, constante y paralela al movimiento.

Dichas ecuaciones se enuncian como sigue: *El impulso de una fuerza mide la variación de la cantidad de movimiento; y el momento del impulso respecto a un punto cualquiera O, mide la variación del momento cinético* respecto al mismo punto O.

Limitándonos al caso de una fuerza siempre paralela a un eje fijo x, conocidas la masa m y la velocidad u comunicada por la fuer-

za a un cuerpo inicialmente en reposo, se conoce el impulso $\int_{t_1}^{t_2} F dt$ de la fuerza motriz; si se pudiera conocer la duración $(t_2 - t_2)$ del impulso, podría calcularse el valor medio F_m de la fuerza:

$$F_m = \frac{\int_{t_1}^{t_2} F dt}{t_2 - t_1} = \frac{mu}{t_2 - t_1}. \qquad [10]$$

Esta medida dinámica de la fuerza motriz (más exactamente, de su valor medio) es prácticamente útil en el caso de las fuerzas llamadas instantáneas, esto es, que actúan durante un brevísimo intervalo de tiempo, del cual puede presumirse la duración. Esto sucede en el caso del choque (§ 136).

Las [8] y [9] o las ecuaciones diferenciales equivalentes [4] y [6] (ó [7]) constituyen formas nuevas del principio de la dinámica, y no añadiendo nada a la [5] del § 115.

Un punto en movimiento rectilíneo uniforme tiene una cantidad de movimiento $m\vec{u}$ y un momento cinético $\vec{r} \wedge m\vec{u}$ respecto a un punto cualquiera O, que son constantes respecto al tiempo.

Un punto que gira con movimiento circular uniforme tiene una cantidad de movimiento $m\vec{u}$, que varía continuamente (en dirección); pero el momento cinético *respecto al centro de rotación* es constante.

Este ejemplo es muy instructivo: en el movimiento circular uniforme, $\vec{u}$ varía, en el tiempo dt, en un vector $d\vec{u}$, cuya magnitud es (figura 114):

$$u \cdot d\varphi = u \frac{dl}{r} = \frac{u^2}{r} dt,$$

y cuya orientación es centrípeta.

La única fuerza actuante es la fuerza centrípeta, de magnitud $F_n = F = m \cdot \frac{u^2}{r}$; luego se tiene:

$$u \cdot d\varphi = \frac{F}{m} \cdot dt,$$

y la variación de la cantidad de movimiento es:

$$d(m\vec{u}) = m \cdot d\vec{u} = F \cdot dt;$$

es decir, la fuerza centrípeta produce una variación de la cantidad de movimiento, que se mide también con la fórmula [4].

El hecho es general: Mientras la fuerza tangencial $\vec{F}_t$ y la fuerza centrípeta $\vec{F}_n$, en el movimiento curvilíneo, se comportan diversamente para los efectos del trabajo ($\vec{F}_t$ trabaja de lleno, $\vec{F}_n$ *no* trabaja), tanto $\vec{F}_t$ como $\vec{F}_n$ producen variaciones no nulas de la cantidad de movimiento que vienen medidas, en ambos casos, mediante la [4].

Una ligadura lisa que sustituye la acción de $\vec{F}_n$, no trabaja, pero produce una variación *(en dirección)* de la cantidad de movimiento $m\vec{u}$.

§ 121. Principio de acción y reacción. En los §§ 104 y 110 se ha enunciado el principio de acción y reacción relativo a la estática, regulador de las reacciones de las ligaduras. Pero es útil considerar también este principio desde otro punto de vista.

En la figura 148, la mano o el peso P ejercen una acción sobre el resorte, pero éste reacciona a su vez, y la mano se siente atraída por el muelle; del peso P tira el resorte, puesto que está en equilibrio bajo la acción de dos fuerzas: su propio peso y la reacción del resorte. Esta reacción se debe, a su vez, a la ligadura constituída por el punto fijo O.

Un polo magnético de un imán atrae la extremidad de una barra de hierro, pero simultáneamente esta barra atrae el imán. Una varilla de ebonita electrizada atrae el péndulo de saúco, pero simultáneamente es atraída.

Así, en el empuje de ARQUÍMEDES, el líquido empuja hacia arriba a una bolita sumergida en él; pero si el recipiente que contiene el líquido se encuentra sobre el platillo de una balanza equilibrada, demuestra la experiencia que a su vez la bolita sumergida reacciona contra el líquido, aplicándole una fuerza igual y contraria al empuje de ARQUÍMEDES.

La experiencia nos enseña que siempre que observamos que sobre un cuerpo C_1 actúa una fuerza, podemos encontrar la causa de esta fuerza en la presencia de otro cuerpo C_2. Así, es la mano la que actúa sobre el resorte de la fig. 149, *a*), *b*), o la que obra sobre una piedra lanzada; el peso de un cuerpo es debido a la Tierra, el empuje de ARQUÍMEDES tiene su origen en el líquido que rodea el cuerpo sumergido; la acción magnética acusada por una aguja imanada radica en otro cuerpo imanado o en un circuito recorrido por una corriente eléctrica, situados en las proximidades de la aguja, etc.

El caso más simple es el de dos cuerpos C_1, C_2, cuyas configuraciones son tan simétricas (o «isótropas») y cuyos tamaños son tan

limitados que dichos cuerpos pueden asimilarse a dos pequeñas esferas, e incluso a dos puntos materiales A_1, A_2.

Estamos bien lejos de este caso cuando consideramos la acción de un imán sobre una aguja magnética. Ambos cuerpos, por más pequeños que sean, conservan siempre, gracias a los dos polos de que están necesariamente dotados, la simetría de un vector; es decir, tienen una dirección y un sentido privilegiados. También presenta necesariamente esta simetría vectorial un «elemento de corriente», tanto si se trata de un trocito de un conductor metálico recorrido por una corriente eléctrica, como si consideramos una carga eléctrica; por ejemplo, un electrón en movimiento.

Pues bien, en el caso de una simetría isótropa, sea durante el equilibrio, sea durante el movimiento, *siempre que el punto (material) A_1 ejerce una fuerza acción sobre el punto A_2, A_2 ejerce, a la vez, una fuerza igual y contraria (reacción) sobre A_1*. Por mera razón de simetría, debida a la «isotropía», la recta de aplicación de ambas fuerzas ha de ser la misma y ha de coincidir con la recta $A_1 A_2$; luego las fuerzas *no* forman un par.

Éste es el *principio de la acción y la reacción*, o *tercer principio de la dinámica*, en su caso más sencillo.

Si la simetría de los dos puntos A_1, A_2 no es isótropa, ya no es necesario que se cumpla el tercer principio en una forma tan sencilla, pero éste puede todavía ser válido, porque, por la ley de simetría de los fenómenos físicos (P. Curie), un fenómeno puede ser más simétrico que la causa que lo ha producido (pero nunca menos simétrico). Por ejemplo, tenemos motivos para creer que dicho principio se cumple, si se trata de la acción de gravitación universal entre dos esferillas materiales A_1, A_2, cualquiera que sea el movimiento que presenten, incluso si este movimiento es perpendicular a la recta $A_1 A_2$.

Si F_1 es la fuerza que actúa sobre A_1 por efecto de A_2, y viceversa, F_2 es la fuerza que actúa sobre A_2 por efecto de A_1, el tercer principio se escribe:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0\,; \qquad [1]$$

$$\overrightarrow{M}_1 + \overrightarrow{M}_2 = 0\,; \qquad [2]$$

en donde:

$$\overrightarrow{M}_1 = \overrightarrow{OA}_1 \wedge \vec{F}_1 = \vec{r}_1 \wedge \vec{F}_1\,; \qquad \overrightarrow{M}_2 = \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_2$$

son los momentos de $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ respecto a un punto cualquiera O.

Si $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ se encuentran constantemente en un eje x, es inútil la notación vectorial, y el principio de acción y reacción se escribe simplemente:

$$\left.\begin{aligned} F_1 + F_2 &= 0, \\ m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + m_2 \cdot \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= 0 \end{aligned}\right\}; \qquad [3]$$

o sea:

en donde $\vec{F}_1 = m_1 \cdot \frac{d^2 x_1}{dt^2}$ es la magnitud, en valor y signo, de la fuerza $\vec{F}_1$ según el eje x; análogamente diremos para $\vec{F}_2$.

Cuando la acción y la reacción actúan durante un intervalo finito de tiempo $(t_2 - t_1)$, las [1] y [2] dan:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_1\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_2\, dt = 0 \qquad [4]$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \overrightarrow{M}_1\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \overrightarrow{M}_2\, dt = 0\,; \qquad [5]$$

es decir, los impulsos recibidos por A_1 y por A_2 son iguales y opuestos, y lo mismo ocurre con los momentos de los impulsos.

Aplicando a la [4], la [8] del § 120, se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} (m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2)_{t_2} - (m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2)_{t_1} &= 0 \\ \vec{Q}_{t_2} - \vec{Q}_{t_1} = 0\,; \qquad \vec{Q} &= \text{const.} \end{aligned}\right\}; \qquad [6]$$

o sea:

se tiene *conservación de la cantidad total de movimiento* $\vec{Q} = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2$ del sistema constituído por A_1 y A_2.

Aplicando la [9] del § 120 a la [5], se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} [\vec{r}_1 \wedge m_1 \vec{u}_1 + \vec{r}_2 \wedge m_2 \vec{u}_2]_{t_2} - [\vec{r}_1 \wedge m_1 \vec{u}_1 + \vec{r}_2 \wedge m_2 \vec{u}_2]_{t_1} &= 0, \\ \vec{\mathfrak{K}}_{t_2} - \vec{\mathfrak{K}}_{t_1} = 0\,; \qquad \vec{\mathfrak{K}} &= \text{const.} \end{aligned}\right\}; \qquad [7]$$

o sea:

lo cual indica que se cumple la *conservación del momento cinético total* $\vec{\mathfrak{K}}$ *del sistema*.

El tercer principio de la dinámica asegura que, después de la acción de A_1 sobre A_2 (y, por tanto, de la reacción de A_2 sobre A_1), permanecen constantes tanto la cantidad de movimiento del sistema formado por los puntos A_1 y A_2, como el momento de esta cantidad de movimiento, o momento cinético, respecto a un punto cualquiera.

He aquí tres experimentos para demostrar el principio dinámico de acción y reacción:

a] Se tienen dos carritos A_1, y A_2 (fig. 236) de masas m_1 y m_2; A_1 se halla en el extremo de un resorte L que se mantiene

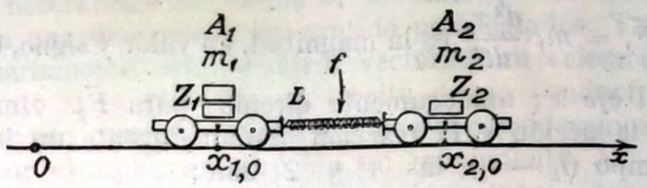


Fig. 236

comprimido entre A_1 y A_2 mediante el hilo f. Los carritos están apoyados en carriles horizontales que les sirven de guía; el rozamiento está reducido al mínimo. Los dos carritos se encuentran inicialmente en reposo respecto a la mesa.

Se quema el hilo f, el muelle se dispara y A_2 parte en un sentido con velocidad u_2; A_1 también parte a lo largo del mismo eje, pero en sentido opuesto, con velocidad u_1. Mediremos estas velocidades sobre un eje x paralelo al movimiento de los carritos.

Variando la compresión del muelle y variando los pesos lastre Z_1 y Z_2 colocados sobre los carritos, varían m_1, m_2 y u_1, u_2; pero resulta siempre, en valor y signo:

$$Q_1 + Q_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 = 0. \qquad [8]$$

El experimento es poco demostrativo, por lo que se refiere a la dirección en que son proyectados los carritos, porque éstos, aun sin carriles, sólo pueden moverse en una dirección. El experimento debería realizarse con dos esferas apoyadas sobre un plano horizontal, pero sería mucho menos cómodo.

Por lo tanto, los impulsos $F_1\,dt$ y $F_2\,dt$ recibidos por los dos carritos durante el tiempo común dt del empuje de un carrito sobre otro, son iguales y opuestos; por tanto, en valor y signo, tenemos:

$$F_1 + F_2 = 0.$$

Vectorialmente, se puede escribir:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0.$$

Además, $\vec{u_1}$ y $\vec{u_2}$ tienen la misma recta de aplicación y, por tanto, la suma de los momentos cinéticos respecto a un punto cualquiera, que es nula antes de abrirse el muelle, permanece también nula después; es decir, se cumple también la [2].

Si $x_{1,0}$ y $x_{2,0}$ son las posiciones iniciales de los dos carritos, sus posiciones x_1 y x_2 en el instante t serán:

$$x_1 = x_{1,0} + u_1 \cdot t\,; \qquad x_2 = x_{2,0} + u_2 \cdot t.$$

El baricentro del sistema constituído por los dos carritos se halla inicialmente en el punto (§ 107, [3]):

$$x_0 = \frac{x_{1,0}\,m_1 + x_{2,0}\,m_2}{m_1 + m_2}\,;$$

y en el instante t se encuentra en el punto:

$$x = \frac{(x_{1,0} + u_1 \cdot t)\,m_1 + (x_{2,0} + u_2 \cdot t)\,m_2}{m_1 + m_2} =$$

$$= \frac{x_{1,0}\,m_1 + x_{2,0}\,m_2 + t\,(m_1 u_1 + m_2 u_2)}{m_1 + m_2} = \frac{x_{1,0}\,m_1 + x_{2,0}\,m_2}{m_2 + m_1} = x_0.$$

Es decir, el baricentro de los dos carritos, inicialmente en reposo, permanece fijo al alejarse mutuamente uno de otro.

El hecho es general: La acción mutua entre los cuerpos de un sistema, a causa del principio de acción y reacción, no puede influir en el movimiento del baricentro del sistema; conviene tomar este baricentro como origen de los ejes de referencia (§ 130).

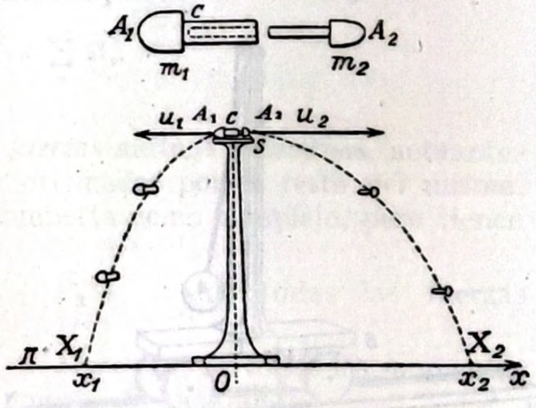


Fig. 237

b] **Pistola doble de Grimsehl.** Las dos masas m_1 y m_2, de la forma especial indicada en la figura 237, funcionan una como pistola y otra como proyectil. El punto O es el pie de la vertical bajada desde la pistola $A_1 A_2$ al pavimento Π. Se pone en el interior del cañón de A_1 un poco de explosivo, se apoya la pistola sobre el soporte *horizontal* S y se da fuego con la mecha C. El proyectil m_2 parte en un sentido con velocidad horizontal u_2, y la pistola m_1 parte en sentido opuesto con velocidad u_1; m_1 y m_2 describen al caer dos parábolas; los puntos de caída X_1 y X_2 sobre el plano horizontal Π están determi-

nados sobre el eje Ox mediante las abscisas x_1 y x_2; sea t el tiempo de caída, igual en los dos casos (§ 117, *b*]). Se tiene:

$$OX_1 = |x_1| = |u_1 \cdot t|; \qquad OX_2 = |x_2| = |u_2 \cdot t|. \qquad [9]$$

El experimento prueba que

$$X_1O : OX_2 = m_1 : m_2;$$

luego el baricentro de las dos masas en movimiento continúa hallándose en la vertical que pasa por O, lo mismo que en el experimento anterior, y, además, se tiene, en valor y signo:

$$x_1 m_1 + x_2 m_2 = 0;$$

en donde, en virtud de la [9]:

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = 0, \qquad \text{y, por tanto,} \qquad F_1 + F_2 = 0.$$

Vectorialmente se tendrá:

$$m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 = 0; \qquad \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0;$$

y, como en el caso *b*], vale también la [2].

c] He aquí un curioso experimento que sólo tiene carácter cualitativo: Un péndulo está montado sobre un carrito que puede moverse sin rozamiento apreciable en un plano horizontal (fig. 238). La masa oscilante del péndulo y la masa del carrito son poco diferentes. La oscilación del péndulo va acompañada de una oscilación del carrito, en fase opuesta.

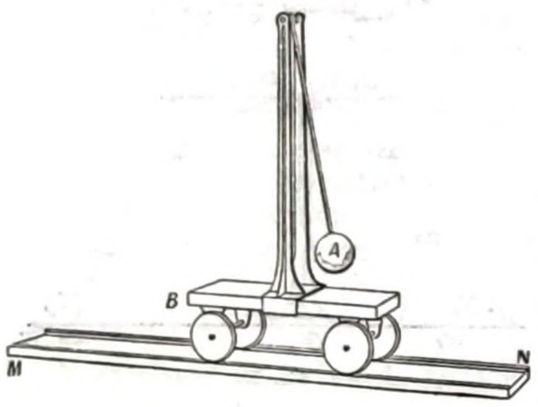


Fig. 238

El baricentro del sistema carrito-péndulo permanece fijo o, si el carrito y el péndulo no se han dejado en libertad de modo adecuado, corre dicho baricentro con movimiento rectilíneo uniforme.

d] El aparato de la figura 239 demuestra la conservación del momento de la cantidad de movimiento, o sea del momento cinético.

Mientras la locomotora se pone en movimiento en un sentido, la plataforma gira alrededor del eje vertical OO' en sentido opuesto. Los momentos respecto a OO' de las cantidades de movimiento adquiridas por la locomotora y por la plataforma resultan iguales y opuestos. Su suma es nula.

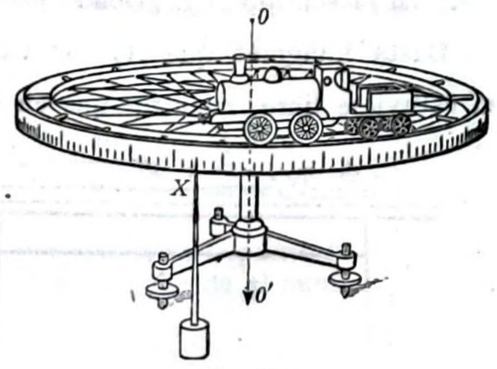


Fig. 239

En realidad, ni la máquina ni la plataforma pueden compararse con suficiente aproximación a puntos, y tendremos que volver a tratar (§ 161) de este experimento.

Aquí está indicado anticipar un caso en el cual el principio de acción y reacción se manifiesta en una forma más general. El hecho experimental, válido en todo sistema, tan complejo como se quiera, de masas inertes, es que por la acción mutua de cualquier naturaleza (gravitación, rozamiento, fuerzas eléctricas, magnéticas, ...) entre sus varias partes A_1, A_2, A_3, ..., no se observa variación en la resultante $\vec{Q} = \Sigma\, m_r \cdot \vec{u}_r$ de la cantidad de movimiento de las varias partículas del sistema ni de la resultante de los momentos de tales cantidades de movimiento (momentos cinéticos) respecto a un punto fijo O cualquiera.

$$\vec{R} = \sum_r \vec{\mathfrak{R}}_r.$$

De ello se desprende que las *fuerzas* mutuas o *internas*, actuantes sobre cada punto del sistema y originadas por el resto del mismo, constituyen un sistema que se comporta como complejo, pero tienen que ser nulas:

la resultante $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots\ldots$ de todas las fuerzas internas,

la resultante $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \ldots\ldots$ de todos los momentos de tales fuerzas respecto a un punto O cualquiera.

En otras palabras, las fuerzas internas tienen que constituir en su complejidad un sistema «equilibrado» (§ 109).

§ **122. Fuerzas de inercia. Fuerza centrífuga.** Considérese, primero, un movimiento rectilíneo; no hay aceleración centrípeta.

Se deja caer una piedra bajo la acción de su peso. ¿Dónde está la reacción? Responderemos cumplidamente en el § 124. Empecemos

observando que es más cómodo efectuar esta pregunta en las condiciones del experimento *f*], § 115: el carrito A_1 (fig. 240), por la acción del peso A_2, se mueve con movimiento uniformemente acelerado en el sentido $A_1 f$. ¿Dónde está la reacción?

Basta imaginar que A_2 caería con la aceleración $g \approx 980 \frac{\text{cm}}{\text{seg}^2}$ si estuviese libre, mientras que en el experimento de la figura 240

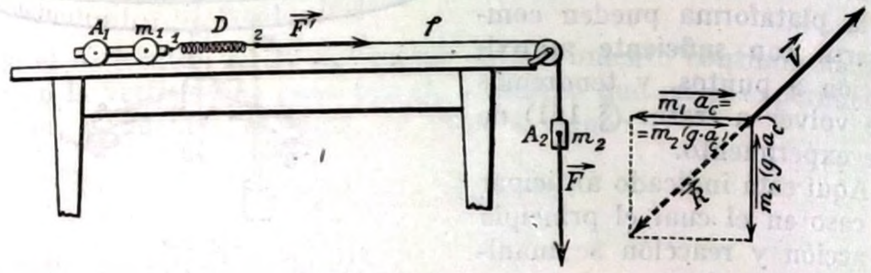


Fig. 240

baja con una aceleración mucho menor, para deducir que A_1 reacciona contra A_2 (a través del hilo y de la polea), retardando así el movimiento de caída libre de A_2. Además, se inserta el resorte D a lo largo del hilo f. Este resorte nos advierte que, mientras la fuerza peso $F = m_2 g$ actúa entera sobre A_1 en reposo, actúa solamente una fracción (§ 115, [4])

$$F' = a_c m_1 = F \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

cuando A_1, con libertad para moverse, avanza con la aceleración

$$a_c = \frac{F}{m_1 + m_2}.$$

Téngase presente que en este caso el observador que quiere determinar la deformación de D ha de imaginar fijo el carrito A_1.

La fuerza íntegra $F = m_2 g$ produciría la aceleración

$$a_c' = \frac{F}{m_1} > a_c.$$

Pero, como durante el experimento se encuentra tenso el resorte D, esto demuestra que durante el movimiento están aplicadas a los extremos del resorte dos tensiones iguales y opuestas.

Si una ligadura (por ejemplo, la mano del experimentador) impide el movimiento de A_1, el dinamómetro D indica una fuerza $F = m_2 g$ aplicada por A_2 a través de la polea y el hilo f en A_1; y la mano del experimentador en A_1 crea la reacción que estira el muelle D en el extremo *1*. Si el carrito A_1 está libre, las tensiones iguales y opuestas son la fuerza motriz

$$F' = m_1 a_c = F \frac{m_1}{m_1 + m_2} < F,$$

que puede imaginarse aplicada, por ejemplo, en el punto *2*, y la *reacción*, que se puede imaginar, por ejemplo, aplicada al punto *1* y cuya medida es, pues:

$$-F \frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$

El cuerpo inerte A_1 es capaz de aplicar a D una fuerza de tensión en 1 por el solo hecho que A_1 está moviéndose con movimiento uniformemente acelerado, mientras que, *por inercia*, tendería a proseguir con movimiento uniforme. Esta fuerza de reacción es opuesta a la fuerza motriz por parte de un cuerpo libre para moverse, y, por tanto, procede del movimiento uniformemente acelerado; se la llama *fuerza de inercia*. Ésta es igual y opuesta a la fuerza motriz y, por tanto, vale $-m \cdot \vec{a}_c$; en donde m es la masa, y $\vec{a}_c$, la aceleración producida por la fuerza motriz.

Análogamente, cuando un hombre pone en movimiento un vagón, aplica a éste una fuerza y (prescindiendo del rozamiento) siente durante su esfuerzo que el vagón reacciona contra sus brazos.

Estos dos ejemplos señalan la fuerza de inercia que se manifiesta cuando se pone un cuerpo en movimiento, esto es, se acelera.

Acaso parece más acertado el nombre de «fuerza de inercia» cuando se consideran sus efectos durante la disminución de la velocidad de un cuerpo que se mueve: por la fuerza de inercia un ariete derriba una puerta, un martillo hinca un clavo en la madera. El martillo es frenado por la fuerza amortiguante que le es aplicada por el clavo; la fuerza de inercia, igual y contraria a la fuerza retardatriz, es aplicada por el martillo al clavo y lo introduce en la madera. Véase también §§ 125 y 129.

Son también instructivos los siguientes experimentos.

a] La balanza B (fig. 241) está equilibrada cuando está en reposo el peso P.

Se quema el hilo f_2; el peso P cae según la vertical, retenido todavía por el hilo f_1, que va desarrollándose de la polea C. La ba-

lanza se inclina hacia el lado Z. No es que haya variado el peso $P = m \cdot g$; pero si P cae con aceleración a_c ($< g$), la parte $m \cdot a_c$ del peso está equilibrada por la fuerza de inercia de P; únicamente $m\,(g - a_c)$ es la fuerza todavía capaz de actuar sobre la balanza a través del hilo f_1.

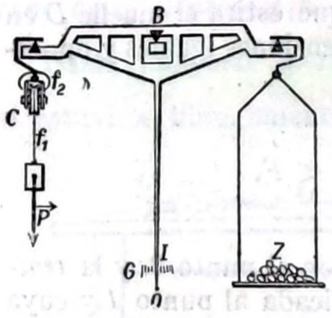


Fig. 241

b] El peso A_1 (fig. 242) está sostenido con la mano, apoyándose sobre él la hoja de papel N que tiene encima el peso A_2. Se intenta tirar del papel con el hilo f y, como está comprimido entre A_2 y A_1, se rompe. Se deja caer todo junto; al tirar ligeramente del hilo f, se logra arrastrar la hoja de papel; A_2 no aprieta contra A_1.

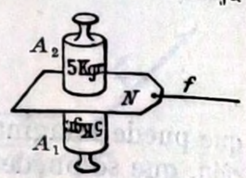


Fig. 242

La fuerza de inercia es también $-m\vec{a}_c$ en el caso del movimiento curvilíneo; limitémonos, para mayor sencillez, al caso del movimiento circular uniforme. El punto O [fig. 227] debe aplicar en A la fuerza centrípeta $\frac{mu^2}{r}$, y el dinamómetro señala y mide esta fuerza; pero el resorte D, tenso, indica (a un observador que gira con la plataforma y con A) la existencia de tensiones iguales y opuestas en los extremos *1* y *2*. La fuerza aplicada en *1* se debe al cuerpo inerte A, que quisiera moverse según la tangente con movimiento rectilíneo uniforme; ésta es la fuerza centrífuga $-\frac{mu^2}{r}$; el cuerpo A es capaz de ejercer tal reacción *(fuerza de inercia, fuerza centrífuga)* contra la fuerza que tiende a hacerlo desviar de la trayectoria rectilínea.

§ 123. Fuerza centrífuga. Entre todas las fuerzas de inercia, es la más interesante, sin duda, la fuerza centrífuga, que produce *efectos estáticos* completamente equivalentes a los de una fuerza real, si bien, como se ha visto (§ 116), revela su carácter ficticio, debido al movimiento relativo, cuando un observador X_2, que gira con el cuerpo en estudio, quiere observar los efectos dinámicos de esta fuerza.

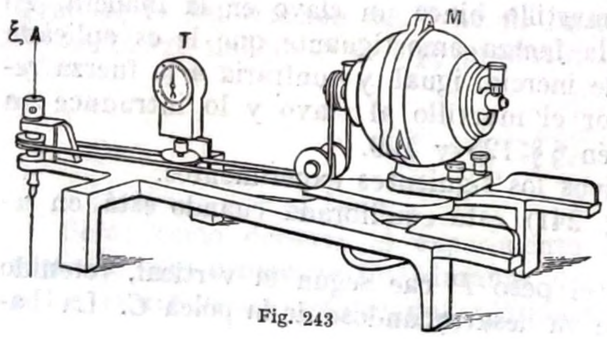


Fig. 243

La máquina de fuerza centrífuga consta (figura 243) de un eje vertical ξ que puede

girar a una velocidad variable entre muy amplios límites, mediante el motor M. Se determina la velocidad con el tacómetro T.

Se montan en el eje ξ los más diversos aparatos sobre los cuales se quiera hacer actuar la fuerza centrífuga F_n.

Se demuestra así, experimentalmente, que es

$$F_n = m\,\omega^2\,r,$$

equilibrando la fuerza centrífuga con un peso (fig. 244), o con la fuerza elástica del resorte de un dinamómetro D (fig. 245), o bien con una componente de la fuerza peso, como en la figura 246. En ésta se representa el *regulador de fuerza centrífuga*: el aumento de la velocidad angular ω alrededor del eje ξ produce un levantamiento del collar C, y así éste puede actuar sobre la válvula de admisión del vapor o de la mezcla explosiva, etc., en un motor, y regular automáticamente su marcha.

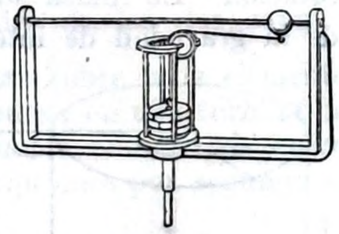


Fig. 244

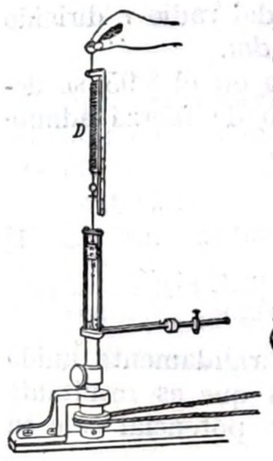


Fig. 245

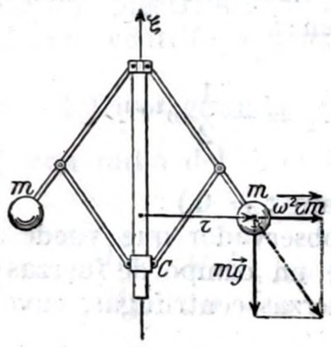


Fig. 246

Dos fuerzas centrífugas pueden equilibrarse entre sí (fig. 247).

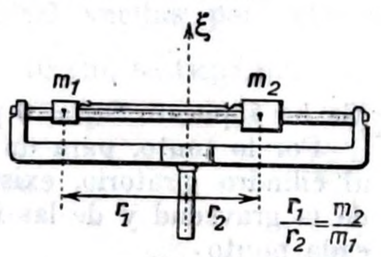


Fig. 247

Finalmente, el aplastamiento de los anillos elásticos del aparato de la figura 248, debido a la fuerza centrífuga, sirve para indicar, de una manera esquemática, el origen del aplastamiento de la Tierra, como consecuencia del movimiento diurno.

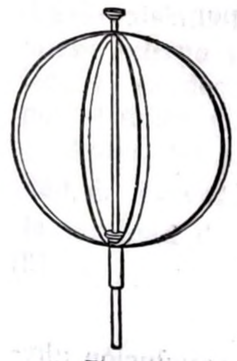


Fig. 248

A causa de la fuerza centrífuga, una cinta que huye de la garganta de una polea, estando animada de una gran velocidad de rotación, se comporta como si estuviese dotada de una notable rigidez.

Imagínese un cuerpo (por ejemplo, un cilindro) que gira alrededor de su eje vertical, con velocidad angular constante ω en todos sus puntos. Sea z (fig. 249) dicho eje vertical, dirigido hacia

abajo, y $dm = \mu \cdot dv$, un elemento de masa del cuerpo, siendo μ su masa específica y dv su volumen.

Llamemos r a la distancia a que está dicho elemento del eje de rotación. La masa dm se encuentra sujeta al campo uniforme de la gravedad de intensidad $\vec{H}_1$ ($H_x = H_y = 0$, $H_z = g$; $g > 0$), cuyo potencial es $\mathcal{V}_1 = -gz$, ($\mathcal{V}_1 = 0$ para $z = 0$) y a un campo $\vec{H}_2$ de las fuerzas centrífugas, de magnitud $dF_n = dm \cdot \omega^2 r_1$ y, por tanto, de intensidad

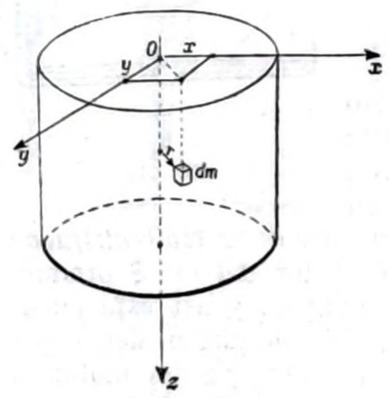


Fig. 249

$$H_2 = \frac{dm \cdot \omega^2 r}{dm} = \omega^2 r,$$

siendo en cada punto la orientación de $\vec{H}_2$ la misma que la del radio r dirigido desde el eje z hacia dm.

Procediendo como en el § 95, se deduce que este campo de fuerza admite un potencial $\mathcal{V}_2$, y se tiene:

$$\mathcal{V}_2 = -\frac{1}{2}\omega^2 r^2. \qquad [1]$$

(Se ha supuesto $\mathcal{V}_2 = 0$ para $r = 0$.)

Por lo tanto, para un observador que ruede rígidamente unido al cilindro giratorio, existe un campo de fuerzas que es resultante de la gravedad y de las fuerzas centrífugas, cuyo potencial vale en cada punto

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 = -gz - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 = -gz - \frac{1}{2}\omega^2 (x^2 + y^2). \qquad [2]$$

Las superficies equipotenciales quedan definidas por

$$gz + \frac{1}{2}\omega^2 (x^2 + y^2) = \text{const.};$$

esto es:

$$z = -\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{g}(x^2 + y^2) + C, \qquad [3]$$

y constituyen, pues, una familia de paraboloides de revolución alrededor del eje z, todos iguales entre sí. Se pasa de una superficie equipotencial a otra, cambiando la constante C, es decir, mediante una simple traslación paralela al eje z.

La razón $\frac{H_2}{H_1} = \frac{\omega^2 r}{g}$ entre las intensidades de los dos campos y, por tanto, entre las dos fuerzas que actúan sobre cada elemento de masa dm, puede tomar valores muy elevados; en una turbina de acero, cuyo rotor está constituído por un simple cilindro de acero de radio $r = 2$ cm, al rebasar las 20 000 revoluciones por segundo se tiene:

$$\omega^2 = (2\pi \cdot 20\,000)^2 \left(\frac{\text{rad}}{\text{seg}}\right)^2 = \quad 1{,}5 \cdot 10^{10} \left(\frac{\text{rad}}{\text{seg}}\right)^2$$

$$\frac{\omega^2 r}{g} = \frac{3 \cdot 10^{10}}{980} = \approx 3 \cdot 10^7 = ¡30\,000\,000!$$

Puede suceder, y a veces se provoca con fin experimental, que el rotor de una máquina eléctrica se rompa por exceso de velocidad, debido a que la fuerza centrífuga venza la resistencia de cohesión del material.

En un motor eléctrico girando a 3000 vueltas por minuto $\left(50\,\frac{\text{rev}}{\text{seg}} = 314\,\frac{\text{rad}}{\text{seg}}\right)$, con radio del rotor de 10 cm, se tiene que

$$\frac{H_2}{H_1} = \frac{\omega^2 r}{g} = \approx 1000;$$

¡la fuerza centrífuga es 1000 veces mayor que la fuerza peso!

§ 124. Fuerzas internas y externas. Teorema de las cantidades de movimiento. En el experimento de la figura 236 se puede considerar aisladamente el cuerpo A_2. Éste se encuentra sujeto a una *fuerza externa* por parte de A_1 (fuerza externa, porque A_1 es «externo», es decir, no forma parte del *sistema* considerado, formado por el único cuerpo A_2).

Antes del disparo del resorte L, el cuerpo A_2 tenía una cantidad de movimiento nula $\vec{Q}_{2,t_1} = 0$; después del disparo, A_2 tiene la cantidad de movimiento $\vec{Q}_{2,t_1}$ dada por la fórmula:

$$\vec{Q}_{2t_2} = \vec{Q}_{2,t_2} - \vec{Q}_{2,t_2} = m_{t_2}\,\vec{u}_{2,t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_2 dt; \qquad [1]$$

en donde m_2 es la masa de A_2; $\vec{u}_{2,t_2}$ la velocidad final; F_2 es la fuerza ejercida por el resorte L sobre A_2, y la integral está extendida a la duración de la acción del resorte. La cantidad de movimiento ha variado, y su variación viene medida por el impulso $\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_2\, dt$ de la fuerza externa aplicada (§ 120, [8]).

Ahora bien, indica la experiencia que toda fuerza tiene origen en un cuerpo o en un sistema de cuerpos; en este caso especial $\vec{F}_2$ está aplicada a A_2 por parte del resorte y de A_1.

Para el *sistema* más complicado constituído por los cuerpos A_1 y A_2, la fuerza $\vec{F}_2$ es *interna*; pero ahora, *por el principio de acción y reacción*, se tiene simultáneamente otra fuerza $\vec{F}_1$ igual y opuesta en A_1, y se ha dicho ya (§ 121), [6], [8]) que la cantidad de movimiento del sistema $\vec{Q} = \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2$, nula antes del disparo del resorte, permanece todavía nula después de éste:

$$(\vec{Q}_1 + \vec{Q}_2)_{t_2} - (\vec{Q}_1 + \vec{Q}_2)_{t_1} = \vec{Q}_{1,t_2} + \vec{Q}_{2,tt_2} = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 = 0;$$

esto es, se conserva (= es constante) la resultante de la cantidad de movimiento.

Análogamente, por [7], § 121, se conserva la resultante de la cantidad de movimiento.

El hecho, ya señalado al final del § 121, es general; de ello se infiere la validez del principio de acción y reacción en la forma general allí enunciada.

Recíprocamente, admitido este principio en tal forma general, se deduce la conservación de la cantidad de movimiento y del momento cinético para un *sistema aislado*, esto es, sometido solamente a fuerzas internas.

Desde luego, podrá haber cuerpos del sistema que modifiquen su cantidad de movimiento o su momento cinético en un sentido; pero, en tal caso, en otros cuerpos se producirán variaciones de sentido contrario.

Si un sistema está también sujeto a fuerzas externas, la cantidad de movimiento del sistema varía, y la variación viene dada por el impulso de las fuerzas externas *solamente*.

Lo mismo puede decirse de los momentos cinéticos y de los impulsos.

También se cumple esto, escalarmente, para cada eje de referencia: Si es nula la resultante de las proyecciones sobre un eje de las fuerzas externas, es constante la resultante de las proyecciones sobre dicho eje de las cantidades de movimiento de los diversos puntos del sistema. Por ejemplo, en el experimento *b*] del § 121, el sistema considerado estaba sometido a fuerzas externas verticales (el peso de A_1 y el de A_2), y era, por tanto, satisfecho el teorema de la conservación de las cantidades de movimiento únicamente para un eje horizontal, como Ox.

Éste es el *teorema de las cantidades de movimiento*, cuyo alcance se indica más ampliamente en Mecánica racional.

Este teorema no es más que una transformación, a menudo conveniente, del principio de acción y reacción, y se llama también *principio de las cantidades de movimiento*.

En el caso especial en que sólo hay fuerzas internas, el *principio* se llama *de la conservación de las cantidades de movimiento*.

Obsérvese que, ampliando suficientemente el sistema, podemos encontrarnos siempre en este último caso. Por ejemplo, una piedra está sometida a la fuerza exterior proporcionada por su *peso*; el sistema piedra-Tierra está sujeto a la acción mutua de la Tierra sobre la piedra (peso de la piedra) y de la piedra sobre la Tierra (reacción), y el peso ya no es una fuerza externa; pero es fuerza externa la ejercida por el Sol, que modifica la trayectoria de la Tierra y de la piedra encima de ésta; pero para el sistema piedra-Tierra-Sol, esta nueva fuerza es interna; y así sucesivamente.

Un enunciado equivalente al principio de la conservación de la cantidad de movimiento es el que establece la generalización del resultado, indicado en el § 121, *a*], sobre el movimiento del baricentro del sistema: el baricentro de un sistema aislado, es decir, no sometido a fuerzas externas, está fijo o se mueve con movimiento rectilíneo uniforme. *El origen de los ejes de referencia debe ponerse en el baricentro del sistema*. La orientación de los ejes se ha de suponer invariable respecto a las estrellas fijas (§ 130).

Como conclusión, puede responderse a la pregunta del principio del § 122 de tres maneras:

la fuerza peso es externa a la piedra, el impulso de dicha fuerza da la variación de cantidad de movimiento de la piedra; no hay reacción contra la fuerza externa o, por lo menos, no interesa;

la reacción a la fuerza externa es la fuerza de inercia $-m\vec{a}_c$;

toda fuerza tiene como origen una masa actuante, que en el caso del peso es la Tierra; la reacción está aplicada desde la piedra a la Tierra.

Esta última respuesta es, físicamente, la más satisfactoria; el principio de acción y reacción se reconduce, pues, en todos los casos, al teorema de la conservación de la cantidad de movimiento en un sistema aislado.

§ 125. Trabajo. Potencia. Energía. En un punto A de masa m, moviéndose con velocidad $\vec{u}$, está aplicada la fuerza $\vec{F}$. En ge-

neral, $\vec{F}$ y $\vec{u}$ son vectores funciones del tiempo, y forman entre sí un ángulo φ, también función del tiempo.

Por definición se llama *trabajo* $d\mathfrak{L}$ de $\vec{F}$ a lo largo del corrimiento infinitesimal $d\vec{l} = u \cdot d\vec{t}$ al producto :

$$d\mathfrak{L} = \vec{F} \cdot d\vec{l} = \vec{F} \cdot \vec{u} \cdot dt = |F| \cdot \cos\varphi \cdot |d\vec{l}| = |F| \cdot \cos\varphi \cdot |u|\, dt. \qquad [1]$$

Se ha visto ya en el § 52, *b*], que el trabajo de varias fuerzas aplicadas a un mismo punto es igual al trabajo de la resultante.

En el sistema de unidades cm g_m seg (CGS), la unidad de trabajo es la efectuada por la fuerza de 1 *dina* cuando su punto de aplicación se traslada 1 *cm* en el sentido de la fuerza. Esta unidad de trabajo se llama *erg*.

En el sistema de medidas m kg_m seg (MKS), la unidad de trabajo la realiza la fuerza de 1 *newton* cuyo punto de aplicación se corre 1 *m* en la dirección de la fuerza.

A esta unidad de trabajo se le da el nombre de *joule*.

Por consiguiente,

$$1 \text{ joule} = 1 \text{ m} \cdot \text{Nw} = 100 \text{ cm} \cdot 10^5 \text{ dinas} = 10^7 \text{ dinas} \cdot \text{cm} = 10^7 \text{ erg}.$$

Para el concepto de «trabajo de una fuerza» no importa el tiempo durante el cual se ha efectuado el trabajo.

Pero, en la práctica, es fundamental saber cuánto trabajo efectúa una fuerza $\vec{F}$ en la unidad de tiempo.

Potencia $\mathfrak{w}$ en un instante determinado t es, por definición, la relación entre el trabajo $d\mathfrak{L}$ realizado en un intervalo temporal dt infinitesimal alrededor del instante t; por ejemplo, en el intervalo temporal t, $t + dt$ y tal intervalo de tiempo.

Así, pues,

$$\mathfrak{w} = \frac{d\mathfrak{L}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{u} = |F| \cdot |u| \cdot \cos\varphi\,; \qquad [2]$$

luego :

$$d\mathfrak{L} = \mathfrak{w} \cdot dt. \qquad [3]$$

La potencia media $\mathfrak{w}_m$ en un intervalo de tiempo $t_2 - t_1$, durante el cual se ha efectuado el trabajo $\mathfrak{L}_{12}$, es :

$$\mathfrak{w}_m = \frac{\mathfrak{L}_{12}}{t_2 - t_1} \qquad [4]$$

En el sistema CGS se mide la potencia en *erg por segundo* $\left(\frac{erg}{seg}\right)$.

En el sistema MKS, la potencia se mide en *joule por segundo* $\left(\frac{joule}{seg}\right)$, unidad que recibe el nombre de *watt*; por lo tanto : $\text{watt} = \frac{\text{joule}}{\text{seg}}$.

Del mismo modo que puede decirse que la velocidad es el espacio recorrido en la unidad de tiempo (lo cual sólo es verdad en el movimiento uniforme), puede decirse que la potencia es el trabajo efectuado por la fuerza en la unidad de tiempo. Pero esto solamente es cierto mientras la relación diferencial [3] pueda suponerse suficientemente aproximada para $dt = 1$.

Se define la *energía* de un cuerpo como la capacidad de éste para producir trabajo, es decir, para producir una fuerza a lo largo de cierto camino.

También la energía, o mejor, la variación de energía de un cuerpo, se mide, por definición, mediante el trabajo que el cuerpo ha efectuado.

Los fenómenos naturales en los que observamos variaciones del estado de movimiento (y, en último análisis, ocurre así en todos los fenómenos), conducen a imaginar la existencia de fuerzas aplicadas a un móvil A_2 por parte de un cuerpo actuante A_1 (por ejemplo : gravitación, acciones eléctricas o magnéticas, etc.). Estos fenómenos nos hacen pensar, por lo tanto, en que A_1 posee energía (energía de gravitación, electromagnética, etc.), porque puede mover a A_2 ; se dirá, con menos compromiso, que el sistema (A_1, A_2) posee energía (mutua).

Un sistema puede efectuar un trabajo por acción mutua entre sus diversas partes ; por ejemplo, por acción newtoniana de gravitación, o por el estado eléctrico o magnético en que se encuentran sus partes, o por su estado térmico (energía térmica, energía interna, máquinas térmicas), o por su estado químico (energía química, energía interna ; explosiones), o por su estado mecánico (energía elástica, motores de resorte, como los relojes).

Se tienen, pues, diversas formas de energía, definidas todas por los correspondientes trabajos, medidos todos ellos en el sistema de unidades CGS, en *dinas-cm*, esto es, en *erg*, y en el sistema MKS, en *joule*.

Ahora bien, un cuerpo, en virtud de su movimiento, puede efectuar un trabajo ; pero entonces disminuye su velocidad.

Llámase *energía cinética* $\mathfrak{E}$ de un cuerpo respecto a un observador, al trabajo que el cuerpo en movimiento puede efectuar al detenerse respecto a dicho observador ; el cuerpo, para este objeto, pone en juego su fuerza de inercia.

La energía cinética es la forma de energía que se atribuye a las fuerzas de inercia.

En el dispositivo de la figura 250, un carrito A, que ha recibido un empuje dirigido según el plano horizontal ON, se mueve con velocidad constante y conocida $\vec{u}$.

El muelle D termina en un ojal C, que, al pasar el carrito, se engancha en G; el muelle, puesto en tensión, detiene el movimiento.

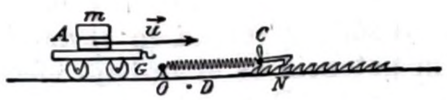


Fig. 250

Si el resorte fuese capaz de acortarse, el experimento demostraría que el carrito, después de haber sido parado, sería luego rechazado por la detención elástica CO y volvería hacia atrás con velocidad $-\vec{u}$. En lugar de esto, debido al pestillo N, no puede anularse la deformación del muelle; queda así registrado el alargamiento a que el carrito puede producir en el resorte al pararse.

El trabajo de alargamiento del resorte mide la energía cinética del carrito.

Si F es la fuerza capaz de producir estáticamente dicho alargamiento a, el trabajo de alargamiento valdrá $\frac{1}{2}\, a \cdot F$ (§ 194).

Se puede comprobar que el carrito A, de másа m y velocidad u, es capaz de producir al detenerse el trabajo:

$$\mathcal{E} = \mathfrak{L} = \frac{1}{2}\, m \cdot u^2, \qquad [5]$$

en unidades coherentes; por ejemplo: erg, g_m, cm, seg, o bien: joule, kg_m, m, seg. (1)

Esta expresión de la energía cinética $\mathcal{E}$, siempre positiva, de segundo grado en u, goza de una propiedad característica.

Si se refiere el movimiento del punto A a tres ejes (x, y, z), la velocidad $\vec{u}$ tiene tres componentes, u_x, u_y, u_z, y se tiene (§ 49, [4]):

$$u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2.$$

Luego:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\, m \cdot u^2 = \frac{1}{2}\, m u_x^2 + \frac{1}{2}\, m u_y^2 + \frac{1}{2}\, m u_z^2 = \mathcal{E}_x + \mathcal{E}_y + \mathcal{E}_z.$$

Puede imaginarse que la energía cinética es una suma *(aritmética,* de términos todos positivos) de la energía cinética que corresponde separadamente a cada uno de los tres movimientos componentes de A según los tres ejes. Esto deriva del teorema de PITÁGORAS.

(1) En cambio, en el sistema m, kg_p seg (§ 41) se tienen las unidades coherentes: kilográmetro, $[m] = g_n\ km_m$, m, seg; en donde $g_n = 9{,}806\,65$ es el número que mide la aceleración de la gravedad normal (§ 174) en $\frac{m}{seg^2}$.

Respecto a la energía de posición y a su medida, véase §§ 90, 99: la *energía de posición* de un punto A en un campo de fuerzas conservador es la *energía potencial* que corresponde a dicho punto en la posición ocupada por él; la energía de posición entre dos puntos A_1, A_2, entre los cuales se ejercen fuerzas mutuas conservadoras, es la *energía potencial mutua.*

§ **126. Teorema de las fuerzas vivas.** El teorema de las fuerzas vivas es una deducción simplemente algebraica del principio de acción de las fuerzas de la dinámica (§ 115), [5]); es, pues, una nueva forma de este mismo principio, a menudo muy conveniente, porque elimina de las fórmulas las aceleraciones, es decir, las segundas derivadas, como ocurre con las fórmulas [8] y [9] del § 120.

De la ley de acción de las fuerzas $\vec{F} = m\vec{a}_c$ y de la [1], § 125, se tiene:

$$\vec{F} \cdot d\vec{l} = \vec{F} \cdot \vec{u} \cdot dt = m \cdot \vec{a}_c \cdot \vec{u} \cdot dt. \qquad [1]$$

Pero (§ 57, [3]):

$$\vec{a}_c = \vec{a}_n + \vec{a}_t$$

y $\vec{a}_n$ es normal a $d\vec{l} = \vec{u} \cdot dt$, mientras que $\vec{a}_t$ es páralelo a $d\vec{l}$. Además, se tiene (§ 57, [5]) $a_t = \frac{du}{dt}$; luego:

$$d\mathfrak{L} = \vec{F} \cdot d\vec{l} = m \cdot a_t \cdot u \cdot dt = m \cdot u \cdot \frac{du}{dt} \cdot dt = \frac{1}{2}\, m \cdot d\,(u^2) = d\left(\frac{1}{2}\, m u^2\right) \qquad [2]$$

El trabajo a lo largo de una trayectoria finita, desde P_1 a P_2, es:

$$\mathfrak{L}_{12} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{P_1}^{P_2} d\left(\frac{1}{2}\, m u^2\right) = \frac{1}{2}\, m u_2^2 - \frac{1}{2}\, m u_1^2 = \Delta\left(\frac{1}{2}\, m u^2\right) \qquad [3]$$

En particular, si el movimiento se realiza según un eje x, y $\vec{F}$ está constantemente dirigida a lo largo del mismo, siendo F la magnitud de la fuerza en valor y signo, sobre este eje, la [3] se escribe:

$$\int_1^2 F \cdot dx = \frac{1}{2}\, m u_2^2 - \frac{1}{2}\, m u_1^2 \qquad [4]$$

Más sencillamente todavía: si la fuerza $\vec{F}$ sobre el eje x es continua y constante en todo el corrimiento finito $x_2 - x_1 = l$, el trabajo vale (en valor y signo):

$$F \cdot l = \frac{1}{2} m u_2^2 - \frac{1}{2} m u_1^2 \qquad [5]$$

Si, finalmente, el cuerpo se halla inicialmente en reposo, se tiene la conocida fórmula elemental:

$$F \cdot l = \frac{1}{2} m u^2. \qquad [6]$$

La tradición también conserva para la energía cinética $\frac{1}{2} mu^2$ la antigua y poco acertada denominación de *fuerza viva* del punto A de masa m y velocidad $\vec{u}$; y la [3] se enuncia así: *El trabajo de la fuerza aplicada es igual a la variación de la fuerza viva (o energía cinética)* $\mathcal{E} = \frac{1}{2} mu^2$ *del punto*:

$$\mathfrak{L}_{12} = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1. \qquad [7]$$

Este *teorema de las fuerzas vivas* se extiende al caso de un sistema de muchos puntos materiales: se escribe la [3] para cada punto del sistema y se suman las ecuaciones así obtenidas. Pero, al contrario de lo que sucede en el principio de las cantidades de movimiento, la variación de energía cinética del sistema viene dada por el trabajo de *todas* las fuerzas aplicadas, y no sólo de las fuerzas externas; las fuerzas internas, iguales y opuestas dos a dos, según el principio de acción y reacción, producen trabajos que no son ya magnitudes vectoriales, los cuales no se anulan dos a dos, como sucedía para las variaciones de cantidades de movimiento debidas a las fuerzas internas.

Así, en el experimento de la fig. 236, los trabajos efectuados por la acción y la reacción producidos al disparar el resorte, son, respectivamente, sobre A_1 y A_2:

$$\mathcal{E}_1 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 > 0; \qquad \mathcal{E}_2 = \frac{1}{2} m_2 u_2^2 > 0;$$

por tanto, el trabajo total de las fuerzas internas es:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 > 0.$$

Los dos trabajos, es decir, las dos energías cinéticas $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ no son iguales, y siendo $|m_1 u_1| = |m_2 u_2|$, se tiene:

$$\frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{m_2}{m_1};$$

a la masa menor le corresponde la energía cinética mayor.

El retroceso del fusil se efectúa con una energía cinética mucho más pequeña que la energía del proyectil.

§ 127. Conservación de la energía.

1.º Sea primero un punto A de masa m, con libertad para moverse y sujeto a una fuerza externa $\vec{F}$, definida para todas las posiciones que puede ocupar A y constituyendo, por tanto, un campo de fuerzas.

Supongamos que este campo de fuerzas admite potencial; existirá, pues, una función $\mathcal{U}(x, y, z)$ de los puntos del campo tal que el trabajo de las fuerzas $\vec{F}$

$$\mathfrak{L}_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 |F| \cdot \cos\varphi \cdot |dl|$$

sea (§ 90)

$$\mathfrak{L}_{12} = \mathcal{U}_1 - \mathcal{U}_2, \qquad [1]$$

que sólo depende de los extremos (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) de la trayectoria.

La [3], § 126, se escribe:

$$\frac{1}{2} m u_2^2 - \frac{1}{2} m u_1^2 = \mathcal{U}_1 - \mathcal{U}_2,$$

o sea:

$$\frac{1}{2} m u_1^2 + \mathcal{U}_1 = \frac{1}{2} m u_2^2 + \mathcal{U}_2 = \text{const.} \qquad [2]$$

constante respecto al tiempo y, por tanto, respecto a la posición del móvil sobre la trayectoria recorrida.

Por la acción del campo de fuerzas sobre el cuerpo A se produce un trabajo durante su movimiento. El campo tiene una energía que se revela mediante el trabajo que efectúa sobre A.

Es cómodo imaginar que esta energía pertenece al punto A: en un punto (x, y, z), en donde $\mathcal{U}$ tiene el valor $\mathcal{U}(x, y, z)$, decimos que A tiene la *energía de posición* $\mathcal{U}(x, y, z)$ (§ 90).

Así, la [2] se enuncia pomposamente: *En un campo de fuerzas conservador es constante la suma de la energía cinética* $\mathcal{E} = \frac{1}{2} mu^2$ *y de la energía potencial* $\mathcal{W}$:

$$\mathcal{E} + \mathcal{W} = \text{const.} \qquad [3]$$

Éste es el *teorema de la conservación de la energía* de la mecánica racional. ¿Y cuál es su valor?

Sólo sirve para señalar en una forma expresiva y concisa el hecho experimental de que el campo de fuerzas utilizado da un trabajo que sólo depende de los extremos de la trayectoria.

El hecho experimental físicamente importante es que muchos campos de fuerzas que nos ofrece la naturaleza admiten potencial (§§ 94, 95 y 96). Si se conociese el potencial en todo punto del campo y la velocidad del móvil en un cierto instante, la [2] determinaría inmediatamente la velocidad del móvil en otra cualquiera de sus posiciones.

Ello no es todavía la resolución general del problema del movimiento. Ésta requiere que se determinen $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Pero se sabe que la [2], lo mismo que las [8] y [9] del § 120, no contienen más que derivadas de primer orden.

Veremos más tarde algunos ejemplos en los que la [2] permite, efectivamente, encontrar la ley del movimiento.

2.º Pero, como en el teorema de la cantidad de movimiento (§ 124), la consideración de fuerzas externas no es siempre satisfactoria.

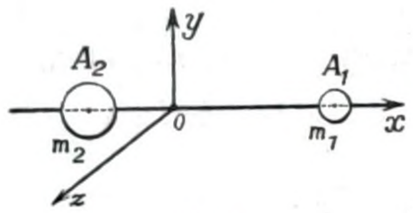


Fig. 251

La fuerza $\vec{F}$ del campo de fuerzas conservador que actúa sobre A_1 (figura 251) tiene su origen en la presencia de otro cuerpo A_2 (por ejemplo, la Tierra A_2, que atrae a una piedra A_1; un polo magnético, que atrae un pedazo de hierro; una varilla de ebonita frotada, que atrae una bolita de saúco, etc.).

Fíjense ejes de referencia con origen en el baricentro del sistema y orientación invariable respecto de las estrellas, y repítase el razonamiento del caso 1.º. Ahora admítase que existe una energía potencial $\mathcal{W}_{12}$ de A_1 *respecto a* A_2 (o viceversa), que puede imaginarse como energía mutua de A_1 y A_2 (§ 99). Sea $\vec{F}$ la fuerza del campo creado por A_2 y que actúa sobre el cuerpo A_1; $-\vec{F}$ es, por reacción, la fuerza que A_1 ejerce sobre A_2; $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ son las velocidades de A_1 y A_2, respecto al sistema de ejes; y $\frac{1}{2} mu_1^2$, $\frac{1}{2} mu_2^2$ son las energías cinéticas *relativas* a estos ejes.

La [2] es todavía válida, si bien $\vec{F}$ y $-\vec{F}$ ahora deben considerarse como fuerzas internas en el sistema constituído por los cuerpos A_1 y A_2.

Bajo la acción de estas fuerzas varían las energías cinéticas de A_1 y de A_2; pero también ahora la suma de las energías cinéticas y de la energía de posición mutua es constante para todas las configuraciones del sistema.

Admitiendo, para mayor sencillez, que A_1 y A_2 se mueven a lo largo del eje x, resulta esto inmediatamente. Sean dx_1 y dx_2 los espacios recorridos respectivamente por A_1 y A_2 durante un tiempo dt; la distancia entre A_1 y A_2 habrá variado en $dx_1 + dx_2$, y la energía mutua, en $-d\mathcal{W}_{12} = F \cdot (dx_1 + dx_2)$. Pero $F \cdot dx_1$ da la variación $d\mathcal{E}_1$ de la energía cinética de A_1, y análogamente para A_2; luego:

$$-d\mathcal{W}_{12} = d\mathcal{E}_1 + d\mathcal{E}_2;$$

o sea:

$$d(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{W}_{12}) = 0; \quad \text{es decir,} \quad \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{W}_{12} = \text{const.} \qquad [4]$$

En general, en un sistema de un número cualquiera de cuerpos A_1, A_2, A_3, ..., llamando $\mathcal{E}$ a la energía cinética total y $\mathcal{W}$ a la energía mutua total, la [4] se escribe:

$$\mathcal{E} + \mathcal{W} = \text{const.},$$

expresión formalmente idéntica a la [3]; pero aquí $\mathcal{W}$ es la energía potencial *mutua* (§ 99, 2.º, 3.º) del sistema.

3.º El teorema de la conservación de la energía debe su valor, más que al enunciado que corresponde a las [3] y [4], al hecho que, con oportunos convenios respecto al modo de definir y medir la energía (§ 125), es posible extender el enunciado, y de este modo dicho teorema gobierna no solamente los fenómenos puramente mecánicos, en los que únicamente entran en juego las dos especies de energía mecánica (potencial y cinética) que aparecen en la [2], sino cualquier otro fenómeno químico o físico (térmico, óptico, electromagnético, etc.).

En los sistemas aislados se verifican, pues, simultáneamente, el teorema de la conservación de la cantidad de movimiento y el teorema de la conservación de la suma de las varias energías presentes.

§ 128. **Teorema de la energía.** El teorema de las fuerzas vivas (§ 126) relaciona el trabajo realizado por las fuerzas aplicadas con la variación de la energía cinética; el teorema de la conservación de la energía (§ 127) dice lo mismo que el anterior en el caso en que

las fuerzas sean conservativas y, por lo tanto, cuando sus trabajos sean expresables como variaciones de la energía potencial.

En general, puede ocurrir que tan sólo el trabajo de algunas de las fuerzas que intervienen en el sistema puedan expresarse de esta manera; es decir, que sólo a algunas de dichas fuerzas (por ejemplo, a las fuerzas internas, mutuas, del sistema) corresponda una energía potencial, que en tal caso es «mutua» (§ 127, 2.º).

Entonces, en lugar de las [7], § 126; [5], § 127, se tiene, sumando:

$$\mathfrak{L}_{12} = (\mathfrak{E} + \mathfrak{W})_2 - (\mathfrak{E} + \mathfrak{W})_1 = (\mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E}_1) + (\mathfrak{W}_2 - \mathfrak{W}_1); \quad [1]$$

en donde $\mathfrak{L}_{12}$ es el trabajo de las fuerzas no expresadas como variación de la energía potencial (por ejemplo, de las fuerzas no conservadoras) durante el paso del sistema desde el estado inicial 1 al estado final 2; $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{W}_1$ son las energías en el estado inicial, y $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{W}_2$ son las energías en el estado final. El trabajo se descubre o en variaciones de la energía cinética o en variaciones de la energía potencial.

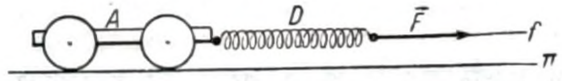


Fig. 252

Así, tirando del carrito A (fig. 252), mediante la fuerza $\vec{F}$, en el plano horizontal Π, se tienen, en general, oscilaciones del resorte D; el trabajo realizado por $\vec{F}$ se resuelve tanto en una variación de la energía potencial del resorte deformado como en una variación de la energía cinética de AD. Pero el fenómeno no es simple, a causa de las citadas oscilaciones.

§ 129. Dinámica y movimiento relativo. Se han tenido que hacer muchos equilibrios en los párrafos anteriores por no haber fijado en ningún caso la relatividad de los conceptos de la dinámica.

No se tratará el problema general del movimiento relativo, pero aquí, y en el § 130, llamaremos la atención sobre algunas cuestiones elementales que suelen presentarse en seguida en la mente de quien aborda estos problemas por primera vez.

Mientras no se consideren velocidades comparables a la de la luz, la masa de un cuerpo y los intervalos de tiempo pueden considerarse conceptos absolutos, esto es, independientes del sistema de ejes de referencia.

Pero la fuerza es relativa: dos observadores, X_1 y X_2, que están en movimiento uno respecto al otro, al observar el mismo fenómeno, únicamente se encuentran de acuerdo, en cuanto a las fuerzas existentes, cuando el movimiento relativo de los sistemas de ejes de referencia utilizados respectivamente por X_1 y X_2 es un movimiento

de traslación rectilíneo uniforme *(relatividad de* Galileo). Supongamos X_1 sujeto al suelo, y fijos también al suelo sus tres ejes. Con la aproximación ya indicada (§ 116) dicho sistema de ejes es inerte.

a] Un cuerpo A, de masa m (fig. 253), está suspendido de un dinamómetro D, cuyo otro extremo está fijo en B. De este modo, D indica la presencia de la fuerza peso $\vec{F}$ de A, cuando B está fijo respecto a los habituales ejes de referencia: las aristas de la estancia donde se experimenta. Si B, el dinamómetro y el cuerpo A se hallan en la cabina de un ascensor que desciende con movimiento acelerado, la fuerza *aparente* $\vec{F}'$, señalada por el dinamómetro, es menor que el peso $\vec{F}$ (compárese con el experimento de la fig. 241). Si el ascensor cayese en caída libre *(ascensor de* Einstein), A no pesaría; es decir, no se alargaría el resorte D, que cae también con la misma aceleración g. Un observador X_2 que estuviese dentro del ascensor deduciría que ninguna fuerza actúa sobre A. Un observador X_1, en reposo respecto al suelo, declara que el resorte D no es capaz de indicar ninguna fuerza motriz, porque la fuerza peso de A, cuya magnitud, en valor y signo, sobre el eje z es $\vec{F} = m \cdot g = m \cdot \frac{d^2z}{dt^2}$, está completamente equilibrada por la fuerza de inercia $-m \cdot \frac{d^2z}{dt^2}$, de A; sin embargo, declara que A, cayendo con la aceleración $g = \frac{d^2z}{dt^2}$, está sujeto siempre a su fuerza peso $m \cdot g$.

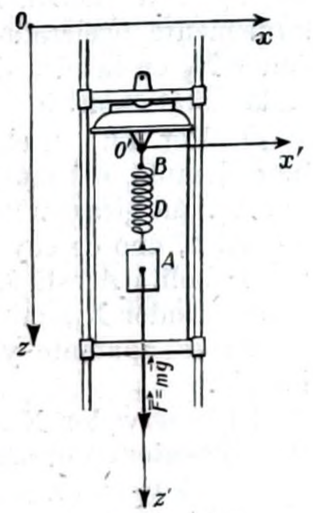


Fig. 253

b] Es análogo el caso de la figura 254: el vagón tiene un movimiento uniformemente acelerado según el eje x, con aceleración a_c. El dinamómetro D, fijo mediante el hilo f a las paredes del vagón, señala a un observador X_2 del interior del mismo que la bolita A está sometida a una fuerza $-m \cdot a_c$.

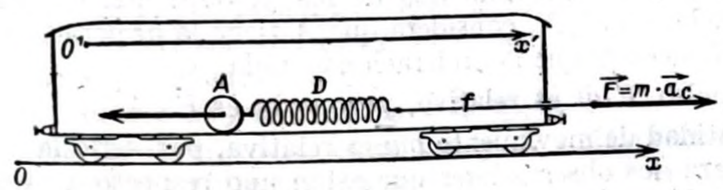


Fig. 254

Un observador X_1, fijo al suelo, esto es, al eje Ox, declara que dicha fuerza indicada por D, es una fuerza aparente, una fuerza de inercia. Al soltar la bolita A del resorte del dinamómetro, la declara en movimiento uniforme (o, eventualmente, en reposo), luego no sujeta a fuerza. Pero entonces, X_2 la ve con movimiento unitormemente acelerado en el sentido $-x'$. Esto confirma al observador X_2 en la idea de la existencia real de la primera fuerza observada estáticamente con el dinamómetro D.

c] Por fin, en el caso del movimiento curvilíneo de un punto [por ejemplo, del movimiento circular uniforme (§ 116)] el observador X_2, que gira con la plataforma Π (fig. 227) y está provisto de dinamómetro, uno de cuyos extremos está fijo en la plataforma, establece que la bolita A está sujeta a un campo de fuerzas centrífugas $m\cdot\omega^2 r$; el observador X_1, en reposo fuera de la plataforma, declara que dicha fuerza es aparente y que es, como de costumbre, una fuerza de inercia.

El observador X_1, fijo respecto a la Tierra, declara que los tres experimentos citados son experimentos de dinámica. El observador X_2, fijo en el ascensor, en el vagón o en la plataforma giratoria, declara que los tres experimentos efectuados con su dinamómetro D son experimentos de estática.

El observador fijo X_1 y el observador en movimiento X_2 únicamente observan fuerzas iguales actuando sobre la bolita A cuando el sistema de ejes de referencia, unido al observador llamado «en movimiento», está dotado de movimiento de traslación rectilíneo uniforme respecto a los ejes de referencia, ligados con el observador llamado «en reposo». De lo contrario, es decir, si X_2 está en movimiento acelerado respecto a X_1, el X_2 considera como reales y aplicadas ¡a todas las masas de su sistema! las fuerzas *de inercia*, que para X_1 son ficticias.

Posiciones, velocidades y aceleraciones, todo son conceptos relativos. Esto es consecuencia puramente analítica de la regla de composición de los movimientos de los §§ 59 ÷ 62. Cuando cae el ascensor del caso *a*], X_1 considera que A tiene la aceleración g, mientras que X_2 declara que la aceleración es nula.

El impulso $\vec{F}\cdot dt$ es relativo, porque lo es $\vec{F}$.

La cantidad de movimiento $m\vec{u}$ es relativa, por serlo la velocidad, y ni siquiera dos observadores que están uno respecto a otro en movimiento relativo rectilíneo uniforme, se ponen de acuerdo en lo que toca a estos valores. Si el vagón de la figura 254 avanza con movimiento rectilíneo uniforme, de velocidad $\vec{u}$, el observador X_2, fijo al vagón, y el observador X_1, fijo al suelo, concuerdan en deducir que A no está sujeto a ninguna fuerza (la fuerza peso está equilibrada por la reacción del piso del vagón), pero X_1 declara que A tiene la cantidad de movimiento $m\vec{u}$, mientras X_2 dice que A tiene una cantidad de movimiento nula.

El trabajo es relativo, porque en el producto $\vec{F}\,\vec{l}$ son relativos tanto $\vec{F}$ como $\vec{l}$.

En el ascensor en caída libre (fig. 253), X_1 dice que para una caída l se produce un trabajo de la fuerza peso mg de la bolita A, que al ser medido da $m\cdot g\cdot l$; X_2 dice que el trabajo es nulo, por ser para él nulos la fuerza y el corrimiento.

Modifíquese el experimento de la figura 254 del siguiente modo: El vagón se mueve con aceleración a_c; la bolita A, que puede correr sin rozamiento por el pavimiento del vagón, es retirada desde fuera mediante un hilo f con la fuerza $F = m\cdot a_c$. Así, imaginando que el vagón y la bolita parten del reposo, prosiguen su movimiento conjuntamente.

Recorrido un espacio $s_1 = \frac{1}{2}a_c t^2$ respecto al observador X_1, éste dice que A ha efectuado el trabajo $F\cdot s_1 = m\cdot a_c\cdot s_1$ y comprueba que A posee la energía cinética $\frac{1}{2}mu^2$ con $u = a_c t$. En lugar de esto, X_2 declara que A está sometido a una fuerza estática $F = -m\cdot a_c$, señalada por el dinamómetro D, y cuyo trabajo ha sido nulo, porque así lo es el espacio s_2 para tal observador. Éste también declara que es nula la energía cinética de A.

También la energía cinética es relativa (como la velocidad $\vec{u}$).

Pero en tanto que las fuerzas de gravedad, eléctricas y magnéticas, pueden suponerse independientes de la velocidad y de las aceleraciones, la energía mutua de posición *no* es un concepto relativo, es decir, no cambia con los ejes de referencia.

La atracción newtoniana entre la Tierra y la Luna es función de su distancia r, de sus masas m_T, m_L, y obedece al principio de acción y reacción.

La Luna y la Tierra tienen una energía *mutua* de posición, newtoniana, que no conviene considerar atribuída ni a la Luna ni a la Tierra, y que es independiente de los ejes de referencia.

Lo mismo ocurre con una piedra y la Tierra.

Empezarán las divergencias entre uno y otro observador cuando, al variar la distancia entre los dos cuerpos, cambie la energía de posición en una cantidad equivalente de energía cinética y se quiera decidir a quién ha de atribuirse esta energía cinética.

La indeterminación cesa si se establece como sistema de referencia privilegiado aquel cuyo origen está en el baricentro, y se halla orientado de una manera invariable con relación a las estrellas, y se distribuye la energía cinética relativamente a tales ejes.

§ **130. Invariabilidad de la masa en los sistemas inertes.** El caso más sencillo, esquematizado como el de la fig, 236, se realiza mediante el dispositivo de la fig. 255. A, B, C, son tres carritos móviles a lo largo del eje x; este eje forma parte de un sistema de referencia inerte x, y, z; por ejemplo, los tres ejes usuales, fijos al suelo, o a la mesa (horizontal) sobre la que se encuentran los carritos, que en primera aproximación constituyen un sistema inerte. El plano de la figura sea el plano xy, horizontal.

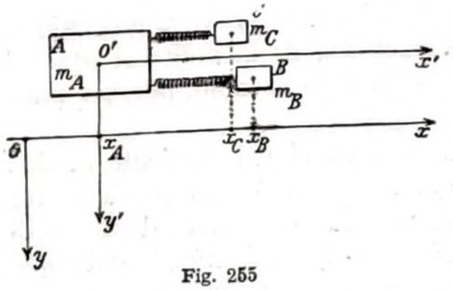


Fig. 255

Sean m_A, m_B, m_C las tres masas, y x_A, x_B, x_C las coordenadas que fijan en cada instante sobre el eje x las posiciones de A, B, C, respectivamente.

Supongamos A capaz de repeler a cada uno de los carritos B, C, con fuerzas continuas y constantes dirigidas según el eje x; estas fuerzas F_{AB}, F_{AC} pueden medirse estáticamente con los dinamómetros de costumbre y las suponemos graduables a voluntad del experimentador.

A, B, C están inicialmente en reposo respecto al eje x, y B está unido rígidamente a A de manera que no pueda obedecer a la fuerza repulsiva F_{AB}.

Hágase partir C bajo la acción de la fuerza F_{AC}.

Puesto que el sistema x, y, z es inerte, por el principio de acción y reacción [3], § 121, un observador X_1, fijo en el eje x (esto es, en el tablero), puede escribir:

$$F_{AC} = m_C \frac{d^2x_C}{dt^2}; \qquad [1]$$

$$m_C \frac{d^2x_C}{dt^2} + (m_A + m_B) \frac{d^2x_A}{dt^2} = 0. \qquad [2]$$

Pero en muchos casos (Tierra y Sol; Tierra y Luna, etc.) no existe el tablero. Se halla el observador en uno de los cuerpos en estudio, y fija rígidamente en ellos sus ejes de referencia. Un observador X, fijo en el carrito A, escoge por ejes de referencia x', y', z', y declara que C está sometido a la fuerza F_{AC} de acuerdo con X_1, pero que C se mueve con la aceleración:

$$\frac{d^2x'_C}{dt^2} = \frac{d^2x_C}{dt^2} - \frac{d^2x_A}{dt^2}, \qquad [3]$$

y, creyendo que su sistema es inerte, atribuye a C la masa m'_C dada por:

$$m'_C \frac{d^2x'_C}{dt^2} = F_{AC}, \quad \text{o sea,} \quad m'_C\left(\frac{d^2x_C}{dt^2} - \frac{d^2x_A}{dt^2}\right) = m_C \frac{d^2x_C}{dt^2};$$

de donde, eliminando $\frac{d^2x_A}{dt^2}$ con la [2], resulta:

$$m'_C = m_C \frac{m_A + m_B}{m_A + m_B + m_C} \qquad [4]$$

Se repite el experimento haciendo partir simultáneamente los carritos B y C y graduando F_{AB} y F_{AC} de modo que B y C adelanten juntos, esto es, con la misma aceleración: $\frac{d^2x_C}{dt^2} = \frac{d^2x_B}{dt^2}$, y, por tanto, también: $\frac{d^2x'_C}{dt^2} = \frac{d^2x'_B}{dt^2}$.

A, por reacción, retrocede también esta vez con movimiento uniformemente acelerado.

El observador X_1 encuentra las siguientes leyes del movimiento:

$$F_{AC} = m_C \frac{d^2x_C}{dt^2}; \qquad F_{AB} = m_B \frac{d^2x_B}{dt^2} = m_B \frac{d^2x_C}{dt^2}, \qquad [5]$$

y, por el principio de acción y reacción:

$$m_C \frac{d^2x_C}{dt^2} + m_B \frac{d^2x_B}{dt^2} + m_A \frac{d^2x_A}{dt^2} = 0,$$

o sea:

$$(m_C + m_B) \frac{d^2x_C}{dt^2} + m_A \frac{d^2x_A}{dt^2} = 0. \qquad [6]$$

El observador X_2 encuentra ahora que C se mueve con la aceleración:

$$\frac{d^2x'_C}{dt^2} = \frac{d^2x_C}{dt^2} - \frac{d^2x_A}{dt^2}; \qquad [7]$$

en donde las dos aceleraciones del segundo miembro están ahora relacionadas por la [6], y atribuye a C la masa m''_C dada por:

$$m''_C \frac{d^2x'_C}{dt^2} = F_{AC} = m_C \frac{d^2x_C}{dt^2};$$

o sea, eliminando $\frac{d^2x_C'}{dt^2}$ y $\frac{d^2x_A}{dt^2}$ con las [6] y [7]:

$$m_C'' = m_C \frac{m_A}{m_A + m_B + m_C} + m_C'. \qquad [8]$$

En resumen: Si A lanza simultáneamente B y C, retrocede con más viveza que cuando lanza sólo a C. Por lo tanto, en el primer caso, el observador que se halla en A ve alejarse C más violentamente, es decir, con mayor aceleración. Pero midiendo con los dinamómetros las fuerzas que obran sobre C en los dos casos, éstas resultan ser iguales. Es por esto que el observador situado en A saca la conclusión de que C tiene en el primer caso una masa menor que en el segundo.

El observador X_2 debe deducir que su sistema de ejes no es inerte, porque *no encuentra el mismo valor para la masa de cada móvil en las distintas experiencias.*

Para determinados m_o' y m_o'', y supuesto que los carritos B y C sean iguales y, por tanto, $m_B = m_C$, puede deducir de las [4] y [8] los valores efectivos de m_A y m_C $(= m_B)$ de las masas de los carritos, determinar en todos los instantes el baricentro del sistema A, B, C, y admitir que sólo *un sistema de ejes fijo a este baricentro es inerte* (como era en nuestro caso el sistema x, y, z, empleado por X_1). Sin embargo, él ignora, naturalmente, el movimiento absoluto de dicho sistema inerte (§ 116).

En particular, si m_A es muy grande respecto a m_B y m_C, resulta sensiblemente $m_o'' = m_o' = m_C$. Un sistema de ejes fijos en la superficie terrestre es aproximadamente inerte, gracias a la pequeña acción perturbadora de la rotación terrestre, gracias a la enorme masa de la Tierra respecto a la masa de los graves con que se experimenta y gracias a la acción despreciable ejercida sobre los graves terrestres por los cuerpos celestes restantes (Luna, Sol).

En resumen: Es inerte un sistema de ejes de referencia si están orientados de modo invariable respecto a las estrellas, tiene origen en el baricentro y si éste está aislado, es decir, no está sujeto a fuerzas externas.

Consideraciones análogas a las indicadas para el escensor de Einstein (§ 128) conducen a las mismas fórmulas [4] ÷ [8] y, por tanto, a la misma posibilidad de que un experimentador X_2 pueda renunciar a los ejes provisionales x', y', z', fijos en una parte del sistema y que le resultan no inertes, y encontrar un sistema inerte de ejes, unido al baricentro del sistema, que, en este ejemplo, a pesar de la presencia del campo de fuerzas uniforme, externo, de la gravedad, es inerte.

§ **131. Paradoja.** Un hombre (fig. 256), montado sobre una carretilla ferroviaria en reposo, lanza una piedra A_1 en la dirección A_1C, imprimiéndole una velocidad $\vec{u}$.

La energía cinética comunicada a la piedra por el trabajo muscular es $\frac{1}{2} m_1 u^2$.

Supongamos ahora que la carretilla se mueve en el sentido A_1C, y admitamos, para mayor sencillez, que sea también u la velocidad de la misma. Puesto que la piedra A_1 está en la mano del hombre conducido por la carretilla, tiene una energía cinética $\frac{1}{2} m_1 u^2$; al lanzar ahora la piedra, su velocidad será $2u$, y su energía cinética $4 \cdot \left(\frac{1}{2} m_1 u^2\right)$; luego, esta energía cinética queda aumentada en tres veces $\frac{1}{2} m_1 u^2$. El hombre no *siente* haber ejecutado un trabajo triple al del caso precedente; sin embargo, el hombre ha efectuado un

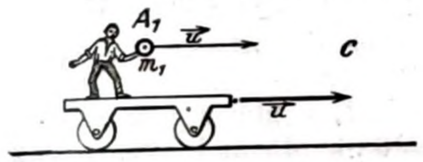


Fig. 256

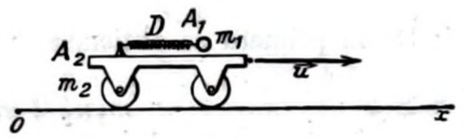


Fig. 257

trabajo mayor, porque el espacio l recorrido por la piedra durante la acción de la fuerza muscular ha sido efectivamente mayor, gracias al movimiento de arrastre del carro.

Sin embargo, esta respuesta no es conveniente y dejaría bajo una luz muy ambigua el concepto de trabajo y de energía, que es tan importante para los físicos.

Esquematicemos el fenómeno: Sobre el carro en reposo A_2 (figura 257) está la piedra A_1, apoyada en el extremo de un muelle comprimido D. Quemando el hilo que mantiene comprimido el resorte, éste se dispara y proyecta A_1, de masa m_1, con velocidad u_1, en el sentido positivo del eje de las x. Pero, entretanto (§ 121), el carro A_2 de masa m_2, retrocede con velocidad u_2 (en valor y signo); u_1 y u_2 son las velocidades de A_1 y de A_2 respecto al baricentro del sistema (A_1, A_2), que, inicialmente en reposo, continúa permaneciendo quieto.

El muelle ha perdido, al estirarse, una energía potencial elástica $\mathcal{U}$ para comunicar energía cinética a A_1 y a A_2.

Se tiene (§§ 121 y 127):

$$\left.\begin{aligned} m_1 u_1 + m_2 u_2 &= 0 \\ \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 &= \mathfrak{W} \end{aligned}\right\}. \qquad [1]$$

Supongamos ahora que la carretilla A_2 esté en movimiento con velocidad u_0. Haciendo saltar el muelle, sea todavía $\mathfrak{W}$ la energía potencial transformada en energía cinética; sean $u_0 + u_1'$ y $u_0 + u_2'$ las nuevas velocidades de A_1 y de A_2; u_1' y u_2' son las velocidades de A_1 y de A_2 respecto al baricentro del sistema; dicho baricentro avanza con velocidad constante u_0, no perturbada, porque las fuerzas consideradas son internas.

Los teoremas de la cantidad de movimiento y de las fuerzas vivas dan:

$$\left.\begin{aligned} m_1 (u_0 + u_1') + m_2 (u_0 + u_2') &= m_1 u_0 + m_2 u_0 \\ \frac{1}{2} m_1 (u_0 + u_1') + \frac{1}{2} m_2 (u_0 + u_2)^2 &= \frac{1}{2} m_1 u_0^2 + \frac{1}{2} m_2 u_0^2 + \mathfrak{W} \end{aligned}\right\}.$$

De la primera se obtiene:

$$m_1 u_1' + m_2 u_2' = 0\,; \qquad [2]$$

y la segunda, teniendo en cuenta la última igualdad, da:

$$\frac{1}{2} m_1 u_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2'^2 = \mathfrak{W}. \qquad [3]$$

Las [2] y [3] son idénticas a las [1], esto es:

$$u_1' = u_1\,; \qquad u_2' = u_2.$$

Esto podía preverse: Un movimiento rectilíneo uniforme del sistema con velocidad u_0 no influye en el fenómeno del movimiento relativo de la piedra y la carretilla.

Si, en particular, se tiene $u_0 = u_1 = u_1'$, resulta $u_0 + u_1' = 2u_1$; el teorema de conservación de la energía indica que la energía cinética de la piedra A_1 es, la primera vez, justamente cuádruple que la segunda, aun siendo igual en los dos casos la energía $\mathfrak{W}$ que interviene en el fenómeno.

El exceso de energía cinética en el caso de la carretilla A_2 en movimiento, es proporcionado, de acuerdo con el teorema de la cantidad

de movimiento, por la carretilla A_2, que retarda su movimiento por reacción contra el lanzamiento de A_1.

§ 132. Un ejemplo de conservación de la cantidad de movimiento o de la energía. El siguiente ejemplo demuestra la cautela con que han de ser interpretados los fenómenos mecánicos, incluso en casos muy elementales. Una bolita A, de masa m, gira alrededor del punto O, al que está sujeta por un hilo, con una velocidad $u = \omega r$; el hilo le aplica, por tanto, una fuerza centrípeta $m \frac{u^2}{r}$, siendo $r = OA$.

Se puede acortar el hilo de dos maneras. O bien se tira del hilo en B [fig. 258, *a*)] con una fuerza F igual a $m \frac{u^2}{r}$ (o, en realidad, un poco superior) a través del tubito T para disminuir la longitud OA; o bien se hace arrollar el hilo alrededor de la varilla MN [fig. 258, *b*)] y a medida que el hilo se arrolla disminuye la distancia OA.

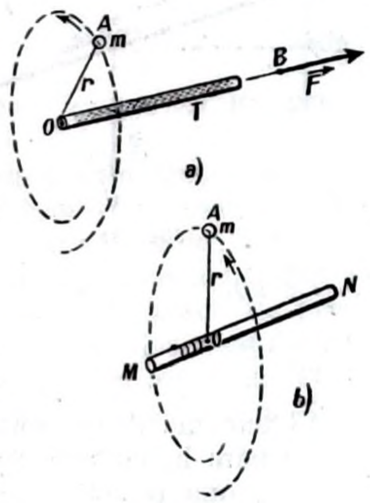


Fig. 258

En el primer caso, se trabaja sobre A durante el acortamiento y debe aumentar la energía cinética de la bolita a medida que se aproxima a O. Por el contrario, la fuerza aplicada a A mediante el hilo está constantemente dirigida hacia O; el momento de su impulso respecto a O es, pues, nulo; luego (§ 120, [9]), el momento de la cantidad de movimiento de la bolita (momento cinético) respecto a O debe permanecer constante.

Por consiguiente, la ecuación del movimiento es:

$$\vec{\mathfrak{K}} = \text{const.}\,; \quad |\,\mathfrak{K}\,| = m \cdot \omega \cdot r \cdot r = \text{const.}\,;$$

o sea:

$$\omega r^2 = \text{const.}, \qquad [1]$$

que da para cada radio $r = OA$ la correspondiente velocidad angular ω de la bolita.

En el segundo caso *no* hay trabajo ejercido por la ligadura MN sobre el sistema hilo-bolita; por lo tanto, la energía cinética es constante:

$$\frac{1}{2} m \cdot \omega^2 \cdot r^2 = \text{const.},$$

esto es:

$$\omega r = \text{const.},$$

que da para cada valor de r el valor correspondiente de ω.

Los dos movimientos, que en un examen superficial hubieran podido parecer casi equivalentes, se desarrollan con leyes bien distintas.

B. — PLANO INCLINADO

§ 133. Movimiento sobre el plano inclinado. El cuerpo A, de masa m, inicialmente en reposo en O, desciende a lo largo de la recta ON de máxima pendiente del plano inclinado. Esta recta y la vertical en O determinan el plano de la figura 259; sea l el eje de los espacios, que coincide con ON, con origen en O y dirigido hacia abajo; Ox es un eje horizontal y Oz es un eje vertical; el ángulo α es la *inclinación* del plano.

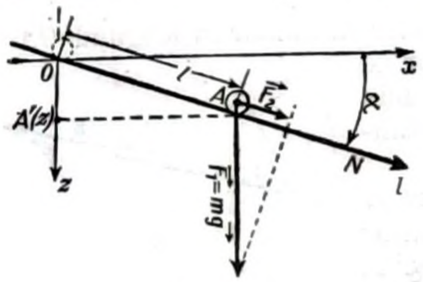


Fig. 259

La fuerza motriz es:

$$F_2 = m \cdot g \cdot \operatorname{sen} \alpha,$$

y la aceleración:

$$\frac{d^2 l}{dt^2} = g \cdot \operatorname{sen} \alpha.$$

Luego,

$$l = \frac{1}{2} g \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot t^2. \qquad [1]$$

El teorema de la conservación de la energía puede servir igualmente para hallar esta ley del movimiento.

Para una posición cualquiera $l = l(t)$, A posee la energía de posición $\mathfrak{W} = m \cdot \mathfrak{V}$, en donde $\mathfrak{V}$ es el potencial de la gravedad (§ 94):

$$\mathfrak{V} = -g \cdot z; \quad (g > 0);$$

no existe constante aditiva, lo que equivale a suponer $\mathfrak{V} = 0$ para $z = 0$.

Luego:

$$\mathfrak{V} = -m \cdot g \cdot z = -m \cdot g \cdot l \cdot \operatorname{sen} \alpha.$$

Además, $u = \dfrac{dl}{dt}$ es la velocidad del punto; por lo tanto, la [2], § 127, da

$$\frac{1}{2} m \cdot u^2 - m \cdot g \cdot l \cdot \operatorname{sen} \alpha = \text{const.}$$

respecto al tiempo.

Se ha supuesto que para $t = 0$ es $u = 0$ y $l = 0$; por lo tanto, la constante es nula para $t = 0$.

Luego el movimiento obedece a la ecuación

$$\frac{1}{2} m \cdot u^2 - m \cdot g \cdot l \operatorname{sen} \alpha = 0; \quad \text{o sea:} \quad \frac{1}{2} m \cdot u^2 = m \cdot g \cdot z, \qquad [2]$$

en donde z es el descenso en altura del cuerpo; o sea

$$u = \sqrt{2 \cdot g \cdot l \cdot \operatorname{sen} \alpha} = \sqrt{2gz}, \qquad [3]$$

valor independiente del cuerpo.

La [3] se escribe también:

$$\frac{dl}{dt} = \sqrt{2 \cdot g \cdot l \cdot \operatorname{sen} \alpha}, \qquad [4]$$

ecuación diferencial, cuya solución, teniendo en cuenta las condiciones iniciales, es precisamente la [1].

Los experimentos con el plano inclinado permitieron a GALILEO establecer la validez de las [1] y [3]. Aquí hemos deducido, a la inversa, las [1], [3] de las leyes generales de la dinámica. De todos modos, los experimentos de GALILEO se repiten todavía hoy por su gran valor didáctico, aunque no alcanzan un alto grado de precisión, porque es notable la acción perturbadora de los rozamientos; además, el cuerpo A está constituído por una esfera o por un carrito ligero, por lo cual el movimiento no es simplemente de traslación (compárese con § 160, 1.º y 2.º).

§ 134. Rozamiento de deslizamiento. Se origina este rozamiento (§ 78, 2.º) cuando deslizan dos cuerpos uno sobre otro; para mayor sencillez, se supondrá fijo uno de los dos cuerpos. El rozamiento de deslizamiento es un fenómeno originado por las asperezas de las superficies que rozan entre sí y por la adherencia entre ellas, que puede producir una verdadera soldadura en los puntos de contacto; por lo tanto, depende del grado de pulimento y de la naturaleza de estas superficies. La adherencia tiene una particular importancia en el caso de rozamiento entre superficies muy lisas. La naturaleza de los cuerpos influye considerablemente: el cobre ya *se engrana, se agarra*, cuando se aprieta contra cobre, con una presión de 400 newton por $cm^2 \approx 40$ kg_p por cm^2, existiendo pares de metales (o aleaciones) que presentan una adherencia y *engranamiento* mínimos.

La notable influencia de la adherencia hace que no convenga pulir excesivamente las superficies.

El rozamiento de deslizamiento se presenta como un sistema de fuerzas aplicadas cada una a un elemento ΔS de la superficie deslizante, en sentido opuesto al movimiento, y, por tanto, paralelamente a ΔS.

Es muy sencillo el caso en que uno de los cuerpos, por ejemplo C_1 (fig. 260), constituye la superficie de un plano, y el otro, C_2, con

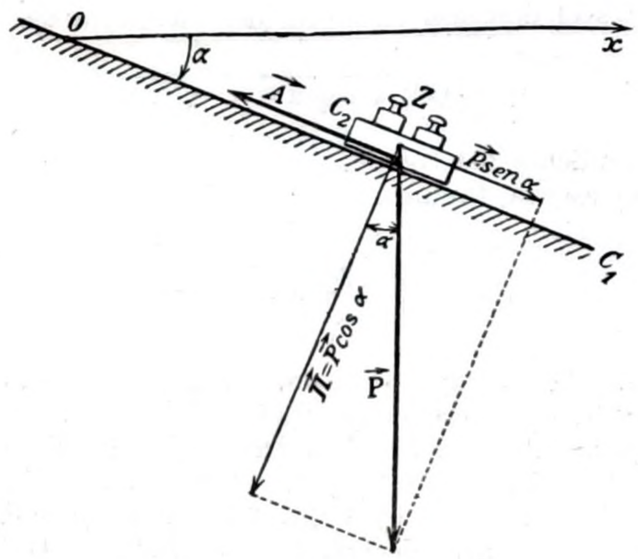


Fig. 260

superficie tambien plana, se apoya sobre aquél y desliza con movimiento de traslación.

Para el estudio del rozamiento de deslizamiento pueden servir tanto el plano inclinado como el dispositivo de COULOMB (fig. 262), análogo al de L. FLETCHER (fig. 226).

El cuerpo C_2, colocado sobre el plano inclinado (fig. 260), está sujeto a su peso $\vec{P}$, que es conocido, aplicado a su centro de gravedad y a una resultante $\vec{A}$ de las fuerzas de rozamiento, cuyo punto de aplicación no puede determinarse fácilmente; admitiremos que $\vec{A}$ está aplicada en el centro geométrico de la superficie de apoyo de C_2. La fuerza motriz $(\overrightarrow{P \cdot \text{sea } \alpha})$ y $\vec{A}$ son, pues, paralelas y opuestas (pero, en realidad, tienen diferentes rectas de acción). Mostremos cómo puede determinarse A.

La presión total ejercida por la carga P sobre la superficie de contacto S_1 es $\Pi = P \cdot \cos \alpha$. Introduciendo la presión p por unidad de superficie, se tiene:

$$\Pi = p \cdot S = P \cdot \cos \alpha.$$

He aquí lo que, con bastante aproximación, demuestra la experiencia:

1.º El movimiento de descenso del cuerpo C_2 por el plano inclinado es uniformemente variado. Luego la fuerza aplicada

$$(P \cdot \text{sen } \alpha - A)$$

es independiente de la velocidad u. Pero $P \cdot \text{sen } \alpha$ es independiente de u. Luego *el rozamiento A es independiente de la velocidad.*

2.º Para un valor particular de la inclinación, $\alpha = \varphi$, el movimiento producido por un empujón inicial es uniforme; para mayor inclinación, el movimiento es uniformemente acelerado; para una inclinación menor, el movimiento ha de ser engendrado por un impulso inicial y es uniformemente retardado: en esta caso C_2 llega a detenerse.

Para el valor particular φ antes señalado, el movimiento es uniforme y, por tanto, $P \cdot \text{sen } \varphi - A = 0$; entonces es:

$$A = P \cdot \text{sen } \varphi = \frac{\Pi}{\cos \varphi} \cdot \text{sen } \varphi = \text{tg } \varphi \cdot \Pi. \qquad [1]$$

P y φ pueden medirse y se deduce el valor de A. El ángulo φ se llama *ángulo de rozamiento* o *ángulo límite.*

3.º El ángulo φ es independiente de los pesos colocados encima de C_2, es decir, es independiente a la carga P y, por tanto, también de Π a igualdad de superficie S.

Poniendo $tg\ \varphi = f$, la fórmula anterior se convierte en:

$$A = f \cdot \Pi;$$

por consiguiente, para una superficie de contacto S determinada, A es proporcional a la presión total Π y, por tanto, también es proporcional a $p = \frac{\Pi}{S}$.

f se denomina *coeficiente de rozamiento para el deslizamiento*, y es independiente de u y de Π, lo mismo que φ.

Se tiene $[f] = [l^o \cdot m^o \cdot t^o]$; f carece de dimensiones.

4.º Coloquemos sobre el plano inclinado varios cuerpos iguales C_2, C_3, C_4..... unidos por hilos [fig. 261 *a*)].

Naturalmente, todos estos cuerpos descienden con movimiento uniforme, para un mismo ángulo de rozamiento φ.

Cada uno de los cuerpos desciende con movimiento uniforme gracias al equilibrio entre su fuerza motriz $P_2 \cdot \text{sen } \varphi = P_3 \cdot \text{sen } \varphi = P_4 \cdot \text{sen } \varphi$ ..... y su fuerza de rozamiento $A_2 = A_3 = A_4$ .....

Luego, en total, la fuerza de rozamiento, a igualdad de presión específica p, es proporcional a la superficie S.

La [2] se convierte en:

$$A = f \cdot p \cdot S.$$

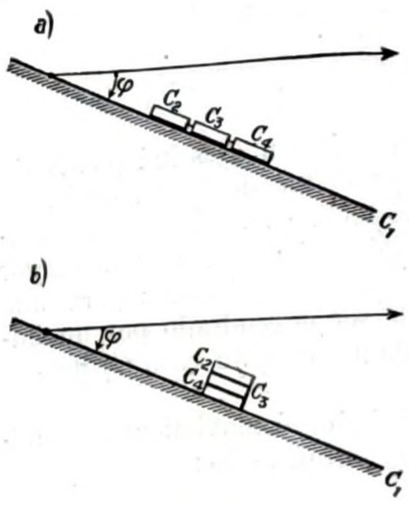


Fig. 261

5.º Pero, a *igualdad de presión total* $\Pi = p \cdot S$, el rozamiento es independiente de S (y de p).

En confirmación de ello, se repite el experimento 4.º después de haber superpuesto los cuerpos C_2, C_3, C_4 ..... [figura 261, *b*)]. El ángulo de rozamiento no ha cambiado; la superficie de contacto S se ha reducido a la tercera parte, pero la presión específica p se ha triplicado y no ha variado la presión total Π.

Se tiene, pues:

$$A = f \cdot \Pi = f \cdot p \cdot S. \qquad [3]$$

Con el dispositivo de COULOMB (fig. 262) se repiten los mismos experimentos con el cuerpo C_2, más o menos cargado con pesas Z, apoyado en el plano horizontal C_1; $\vec{F}$ es la fuerza motriz. Se tiene movimiento uniforme para $|F| = |A|$; Π es ahora el peso de C_2 más el de las pesas superpuestas.

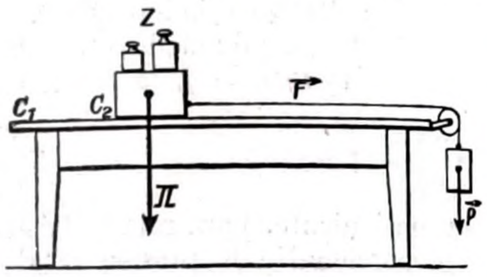


Fig. 262

El coeficiente f depende de la naturaleza de las superficies de contacto y de su pulimento. Al ser más lisas, disminuyen las asperezas que dificultan el deslizamiento de una superficie sobre otra, pero aumenta la influencia de la adherencia y, por tanto, la influencia de la naturaleza de los dos cuerpos. Para cierto grado de pulimento el coeficiente de rozamiento pasa por un valor mínimo.

Pueden darse significados concretos muy simples del coeficiente de rozamiento f. Por ejemplo, se tiene $f = 0{,}3 \div 0{,}4$. (1) para encina sobre encina, en el supuesto que se trate de madera seca.

(1) Se han obtenido, para encina sobre encina, valores comprendidos entre 0,2 y 0,5, según el estado de las superficies y según la orientación de las fibras de la madera.

Esto significa que al arrastrar un pedazo de encina sobre encina se necesita un esfuerzo horizontal igual al $30 \div 40$ % del peso de la madera arrastrada.

Dicho de otro modo: Una viga de encina, cuando está apoyada sobre otra de igual naturaleza, sólo resbala si la pendiente de esta última llega al $30 \div 40$ % (inclinación: $16^\circ \div 22^\circ$).

También significa que al lanzar el pedazo de encina por un plano horizontal de encina, con velocidad inicial u_0, adquiere un movimiento uniformemente retardado *hasta pararse*, siendo la aceleración igual al $30 \div 40$ % de la aceleración de la gravedad.

Hasta pararse: el rozamiento de deslizamiento, al contrario de las otras fuerzas, tiene la característica de existir y ser definido mientras existe un movimiento; así que el movimiento cesa, *cesa* el rozamiento, pero está allí, en guardia, dispuesto a revelarse contra toda fuerza que tienda a producir el movimiento, y con medida precisamente igual a la fuerza aplicada para obligar al móvil a estar en reposo.

Al aumentar la fuerza externa aplicada, aumenta el rozamiento, pero hasta cierto límite, y sólo entonces puede iniciarse el movimiento: la fuerza motriz es la diferencia entre la fuerza aplicada y la fuerza límite de rozamiento.

Es instructivo conocer algunos valores de coeficientes de rozamiento (MORIN):

Hierro sobre piedra.....	$f = 0{,}7 \div 0{,}3$	$\varphi = 35^\circ \div 16{,}5^\circ$
Madera sobre madera ..	$f = 0{,}5 \div 0{,}2$	$\varphi = 26{,}5^\circ \div 11^\circ$
Metal sobre metal.....	$f = 0{,}25 \div 0{,}15$	$\varphi = 14^\circ \div 8{,}5^\circ$
Cuero sobre metales....	$f = 0{,}6 \div 0{,}5$	$\varphi = 32^\circ \div 26^\circ$

Se trata, pues, de coeficientes mal definidos, que pueden sólo determinarse groseramente y que, sin embargo, tienen una grandísima importancia técnica.

Ni siquiera los experimentos delicados, efectuados recientemente en el vacío, han dado resultados bien reproducibles y constantes. Sin embargo, se ha observado, en general, que la resistencia entre superficies privadas de aire y en el vacío puede ser el triple del valor encontrado en el aire; parte de esta exaltación de la resistencia se debe a la eliminación de las películas gaseosas superficiales que corrientemente están adheridas a todos los cuerpos y que actúan como lubricantes; sin embargo, otra parte se debe a la alteración de la superficie en estudio por efecto del *desgasado* que resulta al calentar a $300 \div 400$ °C, esto es, a temperaturas para las cuales la superficie metálica con que se experimenta sufre ya un *recocido* sensible.

Además, hoy se sabe con seguridad que f no es completamente

independiente de u, e incluso se ha propuesto la siguiente fórmula:

$$f = \frac{1 + 0{,}0112\,u}{1 + 0{,}06\,u}\, f_0\,; \qquad u \text{ en } \frac{\text{m}}{\text{seg}}$$

para velocidades muy grandes, f se reduce aproximadamente a $\frac{1}{5}$ del valor f_0 que corresponde a u muy pequeña.

Los experimentos anteriores se complican si no se efectúan mientras está en movimiento el cuerpo C_2. Si C_2 ha estado mucho tiempo fijo sobre C_1 (especialmente bajo fuerte presión y cuando es notable la adherencia entre C_1 y C_2), *el rozamiento de deslizamiento al arranque*, llamado también *resistencia estática*, viene medida por la fuerza $P \cdot \text{sen}\,\alpha$ necesaria para iniciar el movimiento; esta resistencia es mucho mayor, hasta doble, que la resistencia que actúa durante el movimiento. Esto se debe no sólo a la compenetración de las rugosidades de los cuerpos, sino también a una especie de soldadura que se efectúa entre los dos cuerpos cuando la presión es fuerte (*difusión* entre sólidos; § 225, *a*]).

Cuando las superficies que se tocan están recubiertas de grafito, talco, parafina, jabón, o mejor, están *lubricadas*, queda muy disminuído f; pero el fenómeno ha cambiado de naturaleza, pues entra en juego el rozamiento interno (§ 78, 1.º) del lubricante: A ya no es independiente de S a igualdad de presión total, ni f es independiente de Π: bajo presiones fuertes escapa el lubricante hasta desaparecer y se exalta el rozamiento. Esto sucede particularmente durante los períodos en que el cuerpo está en reposo; reaparece el fenómeno del rozamiento de arranque. Por ello se emplean lubricantes más viscosos cuando p es fuerte, u es pequeña y el movimiento experimenta frecuentes paros.

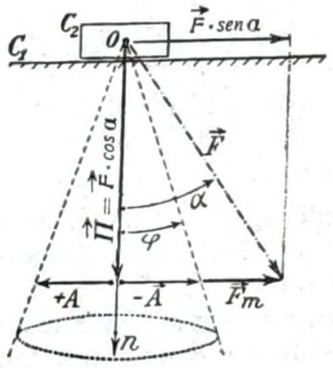


Fig. 263

El fenómeno del rozamiento de arranque se encuentra muy exaltado al patinar, probablemente en virtud del rehielo: el coeficiente de rozamiento de arranque es 0,1 y desciende a 0,003 durante el movimiento.

§ **135. Cono de rozamiento.** Con alguna mayor generalidad que en el caso de la figura 260, imagínese un cuerpo C_2 apoyado sobre un plano C_1 y comprimido sobre éste por un sistema de fuerzas que admite una resultante $\vec{F}$ (fig. 263). Por ejemplo, $\vec{F}$ podrá ser la resultante del peso $\vec{P}$ y de una presión ejercida sobre C_2 con la mano o con un resorte.

§ 136

Imagínese que $\vec{F}$ está aplicada en el punto O. Sea φ el ángulo de límite de rozamiento entre C_1 y C_2 (si el cuerpo C_2 está en reposo, se tratará del ángulo límite correspondiente al arranque). Sea α el ángulo que forma la fuerza $\vec{F}$ con la normal n al plano C_1. La magnitud de la presión total de C_2 sobre C_1 es $\Pi = F \cdot \cos\alpha$; la magnitud de la fuerza que tiende a mover a C_2 es $F \cdot \text{sen}\,\alpha$.

La fuerza $\vec{F}$ produce el movimiento del cuerpo cuando $F \cdot \text{sen}\,\alpha$ es mayor que el rozamiento $A = \Pi \cdot f = \Pi \cdot \text{tg}\,\varphi$; esto es, cuando

$$F \cdot \text{sen}\,\alpha \wedge \Pi \cdot \text{tg}\,\varphi, \quad \text{o sea} \quad \text{tg}\,\alpha > \text{tg}\,\varphi\,;$$

de donde $\alpha > \varphi$.

El cono circular de vértice O, eje n y ángulo de abertura φ se llama *cono de rozamiento*; el cuerpo C_2 únicamente resbala cobre C_1 cuando la recta de acción de la fuerza F, aplicada en O, es exterior al cono de rozamiento.

C. — CHOQUE

§ **136. Choque.** Se tiene choque siempre que dos cuerpos llegan a ponerse en contacto y tienen, en los puntos de la superficie común, componentes de la velocidad perpendiculares a dicha superficie, diferentes una de otra.

Nos limitaremos al choque entre dos esferas homogéneas A_1, A_2, de masas m_1 y m_2, o entre una esfera y un plano, pudiendo este último considerarse como una esfera de radio ∞. Así, el choque es siempre *central*; esto es, la normal común a las superficies de las esferas en el punto de contacto pasa por los baricentros de las dos esferas, y, por tanto (§ 161), los dos cuerpos, después del choque, no adquieren una rotación alrededor del propio baricentro.

El choque es *normal* cuando el movimiento de los centros de las dos esferas se efectúa según una misma recta, que será la normal común a las dos esferas en el punto de contacto; no siendo así, el choque es *oblicuo*.

El choque es *inelástico* cuando se realiza entre cuerpos inelásticos, es decir, en los cuales la deformación es permanente y no desarrolla en los cuerpos reacciones elásticas que tiendan a destruir, o por lo menos a disminuir, la deformación producida. El choque y la deformación prosiguen entonces hasta que se igualan las componentes de la velocidad normales a la superficie de contacto.

El choque es *elástico* cuando se efectúa entre cuerpos elásticos; la deformación experimentada por las esferas aumenta hasta que se igualan las velocidades normales, pero después la fuerza elástica

engendrada por la deformación repele las esferas entre sí. Después del choque las esferas rebotan y no queda en las mismas ninguna huella del choque instantáneo; la energía elástica almacenada por las esferas, como consecuencia de la deformación experimentada en la primera fase del choque, se encuentra sucesiva e integralmente restituída al término del mismo.

Si durante el fenómeno los cuerpos elásticos que chocan no están sujetos a ninguna fuerza externa, sino sólo a las fuerzas mutuas engendradas por el choque, la única energía presente, antes y después del choque, es la energía cinética, y debe permanecer invariable en su total.

En los casos corrientes, es muy corta la duración τ del choque.

Los experimentos de HAMBURGER han dado resultados que concuerdan con una teoría de HERTZ que, en particular, permite calcular la duración τ. Por ejemplo, cuando una esfera de acero de 26 mm de diámetro y velocidad de $300\,\frac{\text{mm}}{\text{seg}}$ choca con otra esfera igual en reposo, se tiene $\tau = 0{,}000\,14$ seg.

En el caso de dos esferas de acero de 70 mm y velocidad relativa de $800\,\frac{\text{mm}}{\text{seg}}$ se tiene $\tau = 0{,}002$ seg. La fuerza máxima de presión es de unos 10 000 newton (≈ 1000 kg_p), y el diámetro del círculo de contacto es de unos 2 mm.

Para dos esferas de acero del tamaño de la Tierra, si la velocidad relativa fuese de $10\,\frac{\text{mm}}{\text{seg}}$ se tendría: ¡$\tau = 27$ horas!

τ disminuye al aumentar la velocidad del choque.

En el intervalo de tiempo τ, que mide la duración del choque entre dos cuerpos A_1 y A_2, uno de ellos (por ejemplo, A_1) ejerce sobre el otro una fuerza $\vec{F}$ *(presión de choque*, § 142), que varía desde cero (principio del choque, $t = 0$) hasta un máximo, para volver a cero (final del choque, $t = \tau$). La integral

$$\int_0^\tau \vec{F}\cdot dt \qquad [1]$$

es el impulso que A_1 ejerce sobre A_2, y, por tanto, la que, por reacción, A_2 ejerce en sentido opuesto sobre A_1; este impulso puede tomarse como una medida de la *percusión* de A_1 sobre A_2.

Como se ha indicado, en los casos prácticos, τ es siempre muy pequeño en el sentido que, durante el tiempo τ, los cuerpos A_1 y A_2 experimentan variaciones de posición, que se suponen despreciables, mientras no es despreciable la integral [1] y, por tanto (§ 120), no lo es la variación instantánea de cantidad de movimiento de A_1 y de A_2.

§ **137. Choque normal inelástico.** Dos esferas inelásticas, de masas m_1 y m_2, se mueven a lo largo del eje x (fig. 264) con velocidades constantes $u_1 = \frac{dx_1}{dt}$, $u_2 = \frac{dx_2}{dt}$; no existen fuerzas aplicadas ni en A_1 ni en A_2. No es preciso emplear notaciones vectoriales.

Supondremos siempre que, en valor y signo, $x_1 < x_2$; entonces se verifica el choque si, en valor y signo, es $u_1 > u_2$.

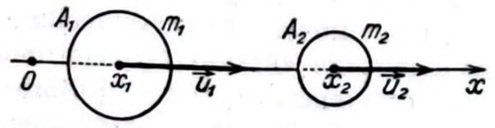


Fig. 264

Se busca la velocidad final U, después del choque.

Como no está aplicada ninguna fuerza externa al sistema constituído por las dos esferas que chocan, puede aplicarse el teorema de las cantidades de movimiento:

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = U(m_1 + m_2); \qquad [1]$$

de donde:

$$U = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2}. \qquad [2]$$

Por ejemplo, para $m_2 = \infty$, y $u_2 = 0$ (choque de un cuerpo blando contra un muro fijo), resulta $U = 0$; es decir, la esfera se aplasta contra la pared y ésta permanece prácticamente inmóvil.

La variación de energía cinética en el choque es:

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\,U^2 - \left(\frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2^2\right);$$

por tanto, por la [2]:

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{1}{2}\frac{(m_1 u_1 + m_2 u_2)^2}{m_1 + m_2} - \left(\frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2^2\right) =$$

$$= -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\cdot\frac{(u_1 + u_2)^2}{2} < 0. \qquad [3]$$

Se tiene, pues, una pérdida de energía cinética, que se transforma en una cantidad equivalente de calor, a causa del rozamiento interno, debido a la deformación de los cuerpos inelásticos.

Empleando como cuerpo inelástico el mercurio (o el plomo, v. § 187, *a*], 2.º), se puede medir groseramente el equivalente me-

engendrada por la deformación repele las esferas entre sí. Después del choque las esferas rebotan y no queda en las mismas ninguna huella del choque instantáneo; la energía elástica almacenada por las esferas, como consecuencia de la deformación experimentada en la primera fase del choque, se encuentra sucesiva e integralmente restituída al término del mismo.

Si durante el fenómeno los cuerpos elásticos que chocan no están sujetos a ninguna fuerza externa, sino sólo a las fuerzas mutuas engendradas por el choque, la única energía presente, antes y después del choque, es la energía cinética, y debe permanecer invariable en su total.

En los casos corrientes, es muy corta la duración τ del choque.

Los experimentos de HAMBURGER han dado resultados que concuerdan con una teoría de HERTZ que, en particular, permite calcular la duración τ. Por ejemplo, cuando una esfera de acero de 26 mm de diámetro y velocidad de 300 $\frac{\text{mm}}{\text{seg}}$ choca con otra esfera igual en reposo, se tiene $\tau = 0{,}000\,14$ seg.

En el caso de dos esferas de acero de 70 mm y velocidad relativa de 800 $\frac{\text{mm}}{\text{seg}}$ se tiene $\tau = 0{,}002$ seg. La fuerza máxima de presión es de unos 10 000 newton (≈ 1000 kg_p), y el diámetro del círculo de contacto es de unos 2 mm.

Para dos esferas de acero del tamaño de la Tierra, si la velocidad relativa fuese de 10 $\frac{\text{mm}}{\text{seg}}$ se tendría: ¡$\tau = 27$ horas!

τ disminuye al aumentar la velocidad del choque.

En el intervalo de tiempo τ, que mide la duración del choque entre dos cuerpos A_1 y A_2, uno de ellos (por ejemplo, A_1) ejerce sobre el otro una fuerza $\vec{F}$ *(presión de choque*, § 142), que varía desde cero (principio del choque, $t = 0$) hasta un máximo, para volver a cero (final del choque, $t = \tau$). La integral

$$\int_0^\tau \vec{F} \cdot dt \qquad [1]$$

es el impulso que A_1 ejerce sobre A_2, y, por tanto, la que, por reacción, A_2 ejerce en sentido opuesto sobre A_1; este impulso puede tomarse como una medida de la *percusión* de A_1 sobre A_2.

Como se ha indicado, en los casos prácticos, τ es siempre muy pequeño en el sentido que, durante el tiempo τ, los cuerpos A_1 y A_2 experimentan variaciones de posición, que se suponen despreciables, mientras no es despreciable la integral [1] y, por tanto (§ 120), no lo es la variación instantánea de cantidad de movimiento de A_1 y de A_2.

§ 137. Choque normal inelástico. Dos esferas inelásticas, de masas m_1 y m_2, se mueven a lo largo del eje x (fig. 264) con velocidades constantes $u_1 = \frac{dx_1}{dt}$, $u_2 = \frac{dx_2}{dt}$; no existen fuerzas aplicadas ni en A_1 ni en A_2. No es preciso emplear notaciones vectoriales.

Supondremos siempre que, en valor y signo, $x_1 < x_2$; entonces se verifica el choque si, en valor y signo, es $u_1 > u_2$.

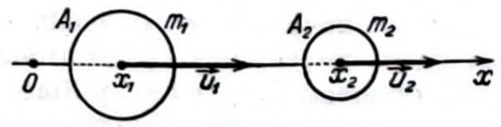


Fig. 264

Se busca la velocidad final U, después del choque.

Como no está aplicada ninguna fuerza externa al sistema constituído por las dos esferas que chocan, puede aplicarse el teorema de las cantidades de movimiento:

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = U (m_1 + m_2); \qquad [1]$$

de donde:

$$U = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2}. \qquad [2]$$

Por ejemplo, para $m_2 = \infty$, y $u_2 = 0$ (choque de un cuerpo blando contra un muro fijo), resulta $U = 0$; es decir, la esfera se aplasta contra la pared y ésta permanece prácticamente inmóvil.

La variación de energía cinética en el choque es:

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) U^2 - \left(\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2\right);$$

por tanto, por la [2]:

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{1}{2} \frac{(m_1 u_1 + m_2 u_2)^2}{m_1 + m_2} - \left(\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2\right) =$$

$$= -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{(u_1 + u_2)^2}{2} < 0. \qquad [3]$$

Se tiene, pues, una pérdida de energía cinética, que se transforma en una cantidad equivalente de calor, a causa del rozamiento interno, debido a la deformación de los cuerpos inelásticos.

Empleando como cuerpo inelástico el mercurio (o el plomo, v. § 187, *a*], 2.º), se puede medir groseramente el equivalente me-

cánico de la caloría, mediante el calentamiento del mercurio inmediatamente después del choque producido por su caída desde una altura conocida.

§ **138. Péndulo balístico.** Una bala de fusil de masa conocida m_1 se dispara horizontalmente contra un cuerpo A_2 (fig. 265, bloque de plomo o cajita de arena) de masa conocida m_2 e inicialmente en reposo, suspendida en O *(péndulo balístico)*.

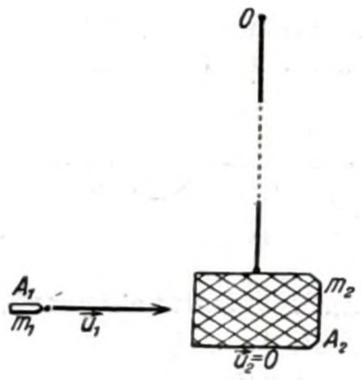


Fig. 265

Inmediatamente después del choque recibido, entra el péndulo en oscilación con movimiento armónico y con una amplitud pequeña a, medible. Se conoce también el período T del péndulo.

Ahora bien (§ 56, [10]), la amplitud a, el período T y la velocidad u_0 que tiene el péndulo al pasar por la posición de equilibrio, están relacionados por la expresión:

$$u_0 = a \cdot \omega = a \frac{2\pi}{T} \ (^1);$$

de modo que se conoce la velocidad u_0 adquirida por el péndulo en virtud del choque recibido.

El teorema de la cantidad de movimiento da:

$$m_1 u_1 = U (m_1 + m_2) = u_0 (m_1 + m_2).$$

Podrá calcularse u_1 por ser conocidas todas las otras magnitudes.

El dispositivo permite determinar rápidamente (pero no con mucha precisión) la velocidad del proyectil.

La teoría más completa del péndulo balístico se obtiene teniendo en cuenta que el aparato, en su forma real, es un péndulo compuesto (§ 162).

§ **139. Choque oblicuo inelástico.** Únicamente trataremos el caso de una esfera lanzada contra una gruesa pared plana y fija. Se descompone la velocidad de la esfera en dos componentes. Para la componente normal a la pared sirven las consideraciones anteriores, de modo que esta componente es anulada por el choque. Debería quedar la componente tangencial, inalterada. Pero el rozamiento entre las paredes y la esfera destruye también esta componente de

(1) Véase nota del § 56.

la velocidad: una bola de yeso, de estuque o de nieve, lanzada oblicuamente contra una pared, se aplasta y queda allí pegada.

§ **140. Choque normal elástico.** Sirve todavía la figura 264. Sean U_1 y U_2 las velocidades de las esferas después del choque. Por el teorema de las cantidades de movimiento se tiene:

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 U_1 + m_2 U_2 ; \qquad [1]$$

pero ahora también es válido el teorema de la conservación de la energía; en efecto, no existen fuerzas externas que efectúen trabajo sobre el sistema, y las energías «internas» puestas en juego son sólo la cinética y la elástica; su suma total ha de permanecer invariable; pero la energía elástica es nula tanto antes del choque como al final del mismo, porque entonces están las esferas indeformadas; se tiene, pues, conservación de la energía cinética, que puede escribirse, eliminando el factor $\frac{1}{2}$:

$$m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 = m_1 U_1^2 + m_2 U_2^2. \qquad [2]$$

Estas dos ecuaciones pueden tomar la forma:

$$\left.\begin{aligned} m_1 (u_1 - U_1) &= m_2 (U_2 - u_2) \\ m_1 (u_1 + U_1)(u_1 - U_1) &= m_2 (u_2 + U_2)(U_2 - u_2) \end{aligned}\right\}.$$

Dividiéndolas miembro a miembro, resulta:

$$u_1 + U_1 = u_2 + U_2. \qquad [3]$$

Ésta y la [1] dan:

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= \frac{(m_1 - m_2) u_1 + 2 m_2 u_2}{m_1 + m_2} \\ U_2 &= \frac{(m_2 - m_1) u_2 + 2 m_1 u_1}{m_1 + m_2} \end{aligned}\right\}. \qquad [4]$$

A partir de la [3] se tiene:

$$U_1 - U_2 = u_2 - u_1 ;$$

es decir, la velocidad relativa $U_1 - U_2$ de la esfera A_1 respecto a

la esfera A_2, después del choque, es igual y de signo contrario a la velocidad relativa inicial $u_1 - u_2$.

Casos particulares:

Para $m_1 = m_2$ se tiene:

$$U_1 = u_2\,; \qquad U_2 = u_1\,;$$

las velocidades de las dos esferas se permutan a consecuencia del choque.

Para $u_2 = 0$ se tiene:

$$U_1 = \frac{(m_1 - m_2)\,u_1}{m_1 + m_2}, \quad U_2 = \frac{2\,m_1\,u_1}{m_1 + m_2}\,;$$

y si, además, $m_1 = m_2$, resulta:

$$U_1 = 0\,; \quad U_2 = u_1\,;$$

la esfera en movimiento se para y la que estaba quieta se pone en movimiento con la velocidad de la primera.

Si se tiene $m_1 > m_2$, U_1 y u_1 tienen igual signo, pero es $U_1 < u_1$; es decir, cuando la bola A_1, que estaba primero en movimiento, tiene mayor masa, sigue moviéndose después del choque en el sentido primitivo, pero con menor velocidad.

Si $m_1 < m_2$, U_1 y u_1 tienen signos opuestos, pero $|U_1| < |u_1|$; la bola A_1, de menor masa, primitivamente en movimiento, rebota, pero con velocidad reducida.

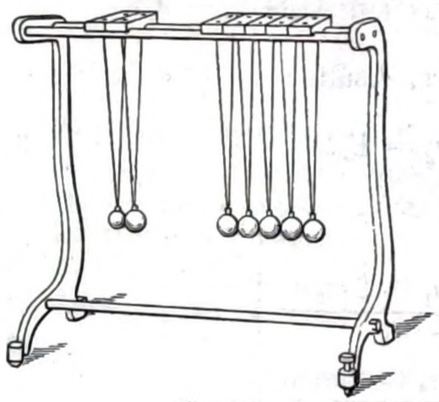


Fig. 266

Si, por fin, es $m_2 = \infty$, se tiene $U_1 = -u_1$, $U_2 = 0$; el obstáculo queda en reposo y la bola que choca rebota perfectamente.

Se efectúan los experimentos de comprobación con esferas de marfil o de acero formando péndulos (fig. 266).

Si se dispone de una serie de muchas esferas iguales, el choque de la primera esfera se comunica sucesivamente a las demás de la fila y rebota la última.

Si el choque se produce mediante dos esferas de un extremo, rebotan, aparentemente juntas, las dos del otro extremo; tres esferas hacen rebotar otras tres, y así sucesivamente. Se trata de dos choques sucesivos, de tres choques sucesivos, etc., que se suceden quizá en menos de 0,001 seg. Si las dos esferas que chocan están unidas rígidamente (por ejemplo, soldadas), su choque sólo hace rebotar la última esfera de la serie, pero con mayor velocidad que antes.

§ 141. Choque oblicuo elástico. Supongamos que se realiza el choque contra una pared plana, fija, de masa $m_2 = \infty$. Se tiene, pues, $u_2 = U_2 = 0$. Sea n la normal al plano.

Descompóngase la velocidad $\vec{u}_1$ de la esfera en movimiento en las dos componentes u_y, paralela al plano, y u_x, normal (fig. 267).

Después del choque, u_y queda inalterada (despreciando los rozamientos) y u_x se cambia en $-u_x$. Luego:

a] $\vec{U}_1$ permanece en el plano $(\vec{u}_1, n)$;

b] se tiene: $\operatorname{tg} i = \left|\frac{u_y}{u_x}\right|$ y $\operatorname{tg} r = \left|\frac{U_y}{U_x}\right| = \left|\frac{u_y}{-u_x}\right|$; luego, $i = r$.

Se tienen las dos conocidas leyes de la reflexión.

En la práctica, el experimento se realiza:

1.º Con el choque de una bolita de acero contra una pared de acero o de vidrio (fig. 268); compárese con el experimento de la figura 230.

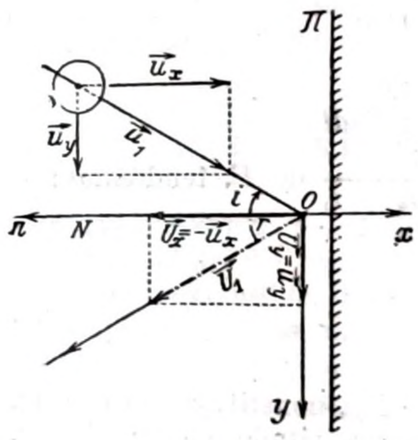


Fig. 267

2.º Con el choque de un chorro de mercurio contra una pared de vidrio que conviene ahumar ligerísimamente: la reflexión de la vena líquida se obtiene entonces con mucha regularidad, porque se ha reducido al mínimo la adherencia entre el mercurio y el vidrio.

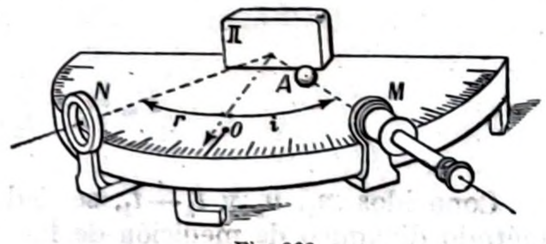


Fig. 268

§ 142. Presión producida por el choque. Nos limitaremos al caso del apartado anterior.

La cantidad de movimiento $m_1 \vec{u}_1$ de la bola que choca es un vector de componentes

$$m_1 u_x, \qquad m_1 u_y.$$

Después del choque, la cantidad de movimiento $m_1 \vec{U}_1$ tiene por componentes:

$$-m_1 u_x, \qquad m_1 u_y.$$

La variación de cantidad de movimiento $m_1 \vec{U}_1 - m_1 \vec{u}_1$ es, pues,

$$m_1 \vec{U}_1 - m_1 \vec{u}_1 = -2 m_1 u_x, \qquad [1]$$

perpendicular a la pared y dirigida en el sentido *ON* (fig. 267).

Esta variación se atribuye a una fuerza $\vec{F}$ (presión) que la pared ha ejercido contra la esfera; la reacción de la esfera contra la pared *(presión de choque)* es $-\vec{F}$; tanto $\vec{F}$ como $-\vec{F}$ son *normales a la pared.*

Si la duración del choque es $t_2 - t_1$ y tomamos el eje de las x como eje de referencia, se tiene (§ 120, [8]):

$$\int_{t_1}^{t_2} F \cdot dt = -2 m_1 u_x. \qquad [2]$$

Introduciendo el valor medio $F_m = \dfrac{\int_{t_1}^{t_2} F \cdot dt}{t_2 - t_1}$ de F, tendremos:

$$F_m = -\frac{2 m_1 u_x}{t_2 - t_1} \qquad [3]$$

Conocidos m_1, u_x y $t_2 - t_1$, se deduce F_m, constituyendo esto un método dinámico de medición de las fuerzas, citado ya en el § 42. F_m es tanto mayor cuanto menor sea la duración del choque, y mayor, por tanto, la rigidez de la esfera y de la pared. Por una razón análoga se doblan los clavos cuando se intenta introducirlos en un medio muy resistente.

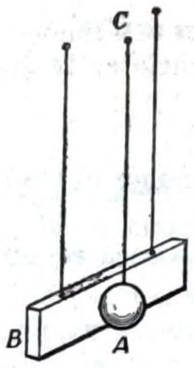


Fig. 269

El siguiente experimento (fig. 269) demuestra que la presión debida al choque es perpendicular a la pared: se levanta la bolita de acero A del péndulo CA y se deja caer en dirección oblicua contra la lámina plana B, también de acero, suspendida por dos hilos. El choque oblicuo del péndulo CA pone en oscilación a la lámina B en dirección perpendicular al plano de esta última.

Análogo experimento puede efectuarse lanzando

oblicuamente contra una pared un chorro líquido o gaseoso; la presión producida por el chorro es sensiblemente normal a la pared.

§ **143. Choque entre cuerpos reales.** En la práctica, el choque nunca es completamente elástico; aunque no fuese más que por la energía sonora del sonido producido en el choque, energía que se toma de las esferas, no podría ser exacta la [2], § 140; también son raros los choques completamente inelásticos.

El rozamiento entre los cuerpos que chocan no es nulo; y, frecuentemente, las esferas no tienen un simple movimiento de traslación, sino también un sensible movimiento de rotación, como en el billar.

Las conclusiones anteriores sólo son, pues, aproximadas, pero sirven de base para numerosos ensayos sobre las características mecánicas de los cuerpos.

Entre estas aplicaciones sólo recordaremos una de las más elegantes: la regularidad de rebote de las esferas de acero para cojinetes sirve para contrastar su elasticidad y homogeneidad: una de estas esferas, al caer sobre un plano de acero o de vidrio, bien horizontal, puede rebotar centenares de veces.

D. — DINÁMICA DE LAS OSCILACIONES

§ **144. Péndulo simple.** Una bolita A (fig. 270), de masa m, está suspendida del centro C mediante un hilo inextensible, de masa despreciable, y está sujeta únicamente a la acción de la fuerza peso $\vec{P} = m\vec{g}$; se desprecian los rozamientos. Sea l la distancia AC (*longitud* del péndulo simple). CO, vertical que pasa por C, da la posición de equilibrio (de reposo) de la bolita o lenteja; O es el centro de oscilación.

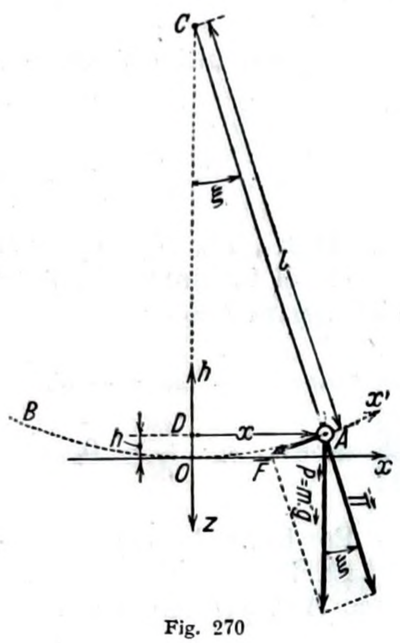


Fig. 270

En el instante inicial ($t = 0$) se *abandona* la lenteja en A.

Establezcamos tres ejes fijos al suelo y con origen en O; z (vertical), x (en el plano vertical que pasa por O y por A), y normal a x y a z.

Nos limitaremos a pequeñas elongaciones OA, de modo que se pueda confundir x con el arco de circunfe-

rencia $OA = x'$. Se tiene entonces:

$$x = l \cdot \xi$$

(ξ en radianes, $l > 0$; ξ y x de igual signo).

La fuerza peso $\vec{P} = m\vec{g}$ se descompone en dos partes: $\vec{\Pi}$, según CA, y $\vec{F}$ en el plano vertical que pasa por CA, tangente al arco OA. La única componente que provoca el movimiento de A es $\vec{F}$, cuya magnitud, en valor y signo, sobre el eje x, es $-P \cdot \text{sen } \xi$.

Las componentes F_x, F_y, F_z de la fuerza motriz F son, pues, para los puntos del eje x:

$$F_x = -P \cdot \text{sen } \xi = -m \cdot g \cdot \text{sen } \xi = -m \cdot g \cdot \xi = -m \cdot \frac{g}{l} \cdot x;$$

$$F_y = 0; \quad F_z = 0.$$

La ley de acción de las fuerzas (§ 115) da para tales puntos:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= -m\frac{g}{l}x \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= 0 \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= 0 \end{aligned}\right\}. \qquad [1]$$

Las dos últimas ecuaciones diferenciales dan por integración:

$$\left.\begin{aligned} y &= K_1 t + K_2 \\ z &= K_3 t + K_4 \end{aligned}\right\}. \qquad [2]$$

siendo K_1, K_2, K_3, K_4 constantes de integración.

En el instante inicial ($t = 0$) se *abandona* la lenteja en A y se tiene, para $t = 0$:

$$\left.\begin{aligned} x = OA = a, \quad y = 0, \quad z = 0 \\ \frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = 0, \quad \frac{dz}{dt} = 0. \end{aligned}\right\}.$$

Por tanto, las [2] se reducen a $y = z = 0$.

La lenteja que se ha abandonado en A se mueve a lo largo del arco AB, *permaneciendo siempre en el plano vertical* $CAOB$. Si no

se verifica esto (*péndulo de* FOUCAULT, § 177, *b*]), no quedan satisfechas las [1], y el sistema de ejes de referencia escogido *no* es inerte.

La primera de las [1] da:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{l} \cdot x = -\omega^2 x; \quad \left(\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}\right)^{(1)} \qquad [3]$$

La solución real más general de esta ecuación diferencial es:

$$x = a \cdot \cos(\omega t + \varphi_0), \qquad [4]$$

siendo a *(amplitud)* y φ_0 *(fase inicial)* constantes arbitrarias de integración.

Para determinar el movimiento del péndulo es preciso, en efecto, especificar la posición y la velocidad inicial de la lenteja. Si en el instante inicial se ha abandonado la lenteja en A, se tiene:

$x_{t=0} = OA = a; \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = 0$; la [3] se reduce a:

$$x = a \cdot \cos \omega t.$$

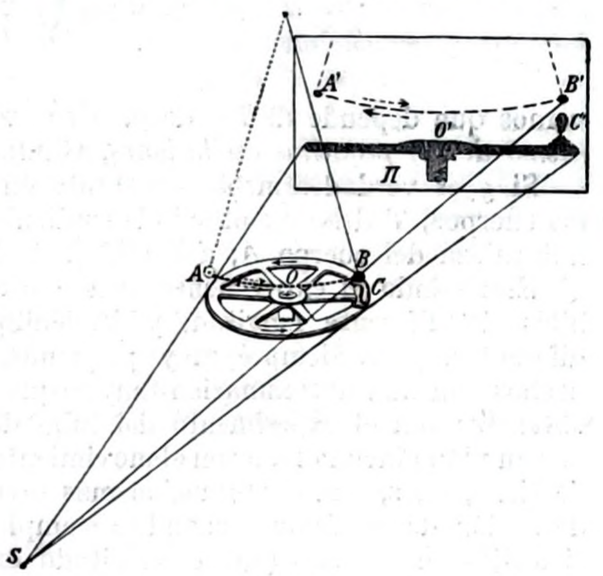


Fig. 271

Por consiguiente, el movimiento del péndulo para pequeñas amplitudes de oscilación es armónico simple, como indica la [4].

Se comprueba esto experimentalmente proyectando al mismo tiempo y sobre la misma pantalla, con luz procedente de un manantial puntiforme y lejano (fig. 271), los dos movimientos siguientes:

el movimiento del péndulo AB, que se efectúa en un plano vertical paralelo al plano Π de la pantalla;

el movimiento circular uniforme del pomo C de una rueda de eje vertical.

---

(1) Véase nota del § 56. Esta ω tiene las dimensiones de «un tiempo elevado a -1», $[\omega] = [t^{-1}]$. En cambio, en la expresión [4], ω es una velocidad angular; es decir, $[\omega] = [\varphi \cdot t^{-1}]$.

Para un período, amplitud y fase convenientes del movimiento circular uniforme, aparecen coincidentes sobre la pantalla de proyección el movimiento del péndulo y el movimiento circular uniforme.

El experimento es muy instructivo, porque prueba lo difícil que es, sin un dispositivo automático de *acoplamiento*, mantener en *sincronismo* los dos movimientos, es decir, obtener los dos períodos exactamente iguales, de manera que se conserve constante la direrencia de fase entre ellos.

Siendo

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}}, \qquad [5]$$

el período de oscilación T del péndulo es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}; \qquad [6]$$

vemos que depende de l y de g, pero es independiente de a (*isocronismo de las pequeñas oscilaciones*, GALILEO).

Si g es verdaderamente constante en un lugar dado para todos los cuerpos, T debe resultar independiente de m y, en general, de la naturaleza del cuerpo A, a igualdad de longitud l.

Efectuando el experimento con bolitas metálicas suspendidas de hilos de diferente longitud, y haciéndolas oscilar con amplitudes diferentes, pero siempre muy pequeñas, se confirman todos estos hechos con una aproximación mayor que la que puede generalmente obtenerse con el experimento del tubo de NEWTON, con el descenso por un plano inclinado, o con el movimiento en la máquina de ATWOOD. Se tiene, pues, una confirmación más precisa de la bondad de la ley de acción de las fuerzas cuando se emplean como ejes de referencia ejes fijos en el suelo (aparte el citado experimento del péndulo de FOUCAULT, § 177, *b*]).

Además, la [6], una vez medidos T y l, permite determinar el valor de g, común a todos los cuerpos en un lugar dado, con una precisión de 0,5 %, aproximadamente; en cambio, el tubo de NEWTON da un resultado bastante menos preciso.

Si el péndulo simple no permite mayor precisión, ello se debe a que la bolita, mientras oscila, gira alrededor del punto C; por tanto, su movimiento no es sencillamente de traslación y caen en defecto las consideraciones anteriores. Hoy en día, se han logrado valores de g con una aproximación de 1 en 1 000 000, obtenidos con el péndulo compuesto (§ 162).

§ 145. Oscilaciones libres, no amortiguadas. Los resultados del apartado precedente pueden generalizarse. Sea un punto material A, de masa m (fig. 272), en el eje de las x, sometido a una fuerza $\vec{F}$, dirigida hacia el centro O y proporcional a $OA = x$, de modo que, en valor y signo, sea:

$$F = -k^2 x \qquad (k^2 > O). \qquad [1]$$

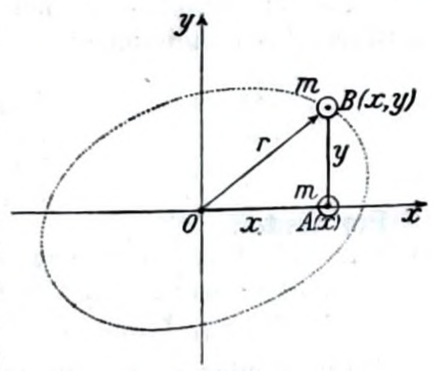


Fig. 272

Se dice que estas fuerzas son *de tipo elástico*, porque, en particular, son de esta clase las fuerzas elásticas más corrientes que se engendran inmediatamente después de la deformación x de una partícula de un cuerpo elástico, dentro de los límites de la Ley de HOOKE (§ 188).

Pero fuerzas $\vec{F}$ no elásticas pueden también satisfacer a la [1]; por ejemplo, se ha visto en el § 144, que en el péndulo, para pequeñas oscilaciones, la fuerza que actúa es del tipo [1] y es una componente de la fuerza peso.

En general, cuando un punto material se mueve sobre un eje a un lado y otro de la posición de equilibrio estable O, hacia la cual está atraído por una fuerza $F = F(x)$, que se anula para $x = 0$, es válida la [1] para pequeños valores de x, siempre que sea posible y suficientemente aproximado el desarrollo de la $F(x)$ en serie de MC. LAURIN, interrumpida en el término en x.

Puesto así el problema, es también evidente que una fuerza del tipo [1] debe producir oscilaciones de A alrededor de O.

Precisamente, si A está sometido a la fuerza de tipo elástico [1], la ecuación del movimiento de A es:

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -k^2 \cdot x, \quad \text{o sea} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \qquad \left(\omega = \sqrt{\frac{k^2}{m}}\right) \qquad [2]$$

Como en el § 144, la solución más general de esta ecuación diferencial es:

$$x = a \cdot \cos(\omega t + \varphi_0), \qquad [3]$$

con a y φ_0 constantes arbitrarias de integración.

Por lo tanto, el movimiento producido por una fuerza de tipo elástico es un movimiento armónico de período $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k^2}}$, independiente de la amplitud a: las oscilaciones son isócronas. La

amplitud a y la fase inicial φ_0 quedan indeterminadas hasta que no se establezcan, como para el movimiento pendular, la posición x_0 y la velocidad u_0 del punto móvil en un cierto instante, por ejemplo para $t = 0$; entonces quedan determinadas a y φ_0, porque deben satisfacer las condiciones:

$$x_0 = a \cdot \cos \varphi_0 ;$$

$$u_0 = \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = - a \cdot \omega \cdot \operatorname{sen} \varphi_0 .$$

Por tanto:

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{u_0^2}{\omega^2}}; \qquad \varphi_0 = \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{u_0}{\omega \cdot x_0}\right).$$

En particular, si en el instante inicial es nula la velocidad, se tiene:

$$u_0 = 0, \qquad \text{y resulta} \quad \varphi_0 = 0, \quad x_0 = a ;$$

por consiguiente, el móvil se encuentra en el momento inicial en la posición de elongación máxima. La [3] se reduce a:

$$\left.\begin{aligned} x &= a \cdot \cos \omega t = x_0 \cos \omega t ; \\ \text{en donde:} \qquad u &= \frac{dx}{dt} = - a\,\omega \cdot \operatorname{sen} \omega t = - x_0\,\omega \cdot \operatorname{sen} \omega t \end{aligned}\right\}. \qquad [4]$$

Viceversa: Si un punto A efectúa oscilaciones armónicas, es decir, si x es una función del tiempo de la forma [3], se tiene $a_c = \frac{d^2x}{dt^2} = - \omega^2 x$, y, por tanto, A debe estar sometida a una fuerza $F = m \frac{d^2x}{dt^2} = - m\,\omega^2 x$, esto es, a una fuerza de tipo elástico.

Conocido m, y determinado experimentalmente el período de oscilación $T = \frac{2\pi}{\omega}$, la expresión $\omega^2 = \frac{k^2}{m}$ permite calcular k^2, y mediante la [1], resulta la fuerza F una función conocida de x.

Aparte el caso de la percusión (§ 142), éste es el único caso importante de determinación dinámica de una fuerza (§ 42).

§ 146. Energía y movimiento armónico. La energía cinética que posee el móvil A en cierto instante t es (suponiendo para mayor sencillez que $\varphi_0 = 0$):

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2} m a^2 \omega^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \omega t. \qquad [1]$$

Como k es independiente del tiempo y sólo se consideran movimientos según el eje de las x, el trabajo $\mathfrak{L}_{12}$ de la fuerza F depende únicamente de los extremos x_1, x_2 de la trayectoria; se tiene, en efecto:

$$\mathfrak{L}_{12} = \int_{x_1}^{x_2} F \cdot dx = - k^2 \int_{x_1}^{x_2} x \cdot dx = - k^2 \frac{x_2^2}{2} + k^2 \frac{x_1^2}{2}.$$

En el mismo instante t se puede atribuir al punto A, a distancia x del origen O (fig. 272), una energía potencial $\mathcal{W}$ respecto al centro O, que viene medida, por definición, por el trabajo que la fuerza aplicada $\vec{F}$ efectúa durante el movimiento del punto desde A (x) a O. Resulta:

$$\mathcal{W} = \int_{x=x}^{x=0} F \cdot dx = - k^2 \int_{x}^{0} x \cdot dx = \frac{1}{2} k^2 \cdot x^2 = \frac{1}{2} m\,\omega^2\,a^2 \cdot \cos^2 \omega t. \qquad [2]$$

Se tiene:

$$\mathcal{E} + \mathcal{W} = \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 \cdot a^2 = \frac{1}{2} m \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot a^2 = \text{const.} \qquad [3]$$

El punto oscilante tiene energía cinética y energía potencial; la energía total, suma de las dos clases de energía, es constante respecto al tiempo; durante las oscilaciones hay una continua transformación de la energía cinética en energía potencial, y viceversa, transformación regida por el teorema de la conservación de la energía (§ 127, [2]).

Para $t = 0$ es $x_0 = a$; $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = 0$: la energía es toda potencial $(\mathcal{W}_0)$; para $t = \frac{T}{4}$ es $x = 0$, $\left(\frac{dx}{dt}\right) = - a \cdot \omega$: la energía es toda cinética $(\mathcal{E}_0)$.

La energía cinética media $\overline{\mathcal{E}}$ durante un intervalo de tiempo $(t_2 - t_1)$ es:

$$\overline{\mathcal{E}} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{E} \cdot dt}{t_2 - t_1} = \frac{\frac{1}{2} m a^2 \omega^2 \int_{t_1}^{t_2} \operatorname{sen}^2 \omega t dt}{t_2 - t_1} \qquad \left(\omega = \frac{2\pi}{T}\right).$$

Pero

$$\omega \int \operatorname{sen}^2 \omega t \, dt = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2z) \, dz = \frac{z}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2z + C =$$

$$= \frac{\omega t}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2\omega t + C.$$

Luego:

$$\overline{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} ma^2 \omega \frac{\omega}{2} - \frac{1}{8} ma^2 \omega \left(\frac{\operatorname{sen} 2\omega t_2 - \operatorname{sen} 2\omega t_1}{t_2 - t_1} \right).$$

El segundo término tiende hacia cero al aumentar $t_2 - t_1$, y es exactamente nulo para todos los valores de $t_2 - t_1$, iguales a un número entero n de semiperiodos $\frac{T}{2}$, porque $\operatorname{sen} 2\omega t = \operatorname{sen} 2\omega \left(t + n \frac{T}{2} \right)$.

Por tanto, exactamente para $t_2 - t_1 = n \frac{T}{2}$, y con buena aproximación si $t_2 - t_1 \gg T$, se tiene:

$$\overline{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} ma^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 = \frac{1}{2} \mathcal{U}_0.$$

Análogamente se halla el valor medio de la energía potencial:

$$\overline{\mathcal{U}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} ma^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \mathcal{U}_0 = \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 = \overline{\mathcal{E}}. \qquad [4]$$

Nótese que la energía [3] del movimiento oscilatorio es proporcional al cuadrado de la amplitud de oscilación a.

La fuerza aplicada en el movimiento armónico admite potencial, y $\frac{1}{2} k^2 x^2$ es la energía potencial de la masa oscilante m cuando se encuentra en el punto de abscisa x; luego, en lugar de escribir la ley de acción de la fuerza [2], § 145, para deducir de ella la ley del movimiento, se podría partir del teorema de la conservación de la energía [2], § 127, y escribir la ecuación del movimiento en forma diferencial, pero de primer orden:

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} k^2 x^2 = \text{const.} = \frac{1}{2} k^2 a^2; \qquad [5]$$

es decir, durante el movimiento oscilatorio es constante la suma de las energías cinética y potencial en todo instante.

De la [5] se deduce:

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{k^2}{m}} \sqrt{a^2 - x^2} = \pm \omega \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Se separan las variables:

$$\frac{dx}{\pm \sqrt{a^2 - x^2}} = \omega \cdot dt;$$

y ahora, integrando, se tiene:

$$\operatorname{arc\,cos} \frac{x}{a} = \omega t + \varphi_0; \quad \text{o sea,} \quad x = a \cdot \cos (\omega t + \varphi_0).$$

Habiendo fijado la energía potencial máxima $\frac{1}{2} k^2 a^2$, es decir, la amplitud de oscilación a, queda aún como constante arbitraria de integración la fase inicial φ_0.

En el caso del péndulo (§ 144), la energía de posición $\frac{1}{2} k^2 x^2 = \frac{1}{2} m \frac{g}{l} x^2$ es propiamente la energía de posición $mg \cdot h$ de la fuerza de gravedad respecto al punto O (fig. 270), en donde $h = OD$, porque se tiene:

$$2l : AD = AD : OD,$$

o sea, con la aproximación acostumbrada:

$$2l : x = x : h,$$

y, por tanto, es:

$$\frac{x^2}{2l} = h.$$

§ **147. Energía y composición de las oscilaciones.** En un plano x, y (no ya en un eje x), el punto $B(x, y)$ (fig. 272), de masa m, está sometido a una fuerza $\vec{F}$, dirigida hacia el origen O y proporcional a $OB = r = \sqrt{x^2 + y^2}$:

$$|F| = k^2 \cdot r;$$

$\vec{F}$ constituye un campo de fuerzas central atractivo; $\mathcal{W} = \frac{1}{2} k^2 r^2$ es la energía de posición de la masa m, situada a la distancia r del centro O, en todas las posiciones de B. Las componentes de $\vec{F}$, según los ejes, son (r está dirigido desde O hacia B):

$$F_x = -|F| \cdot \cos(xr) = -k^2 \cdot r \cdot \cos(xr) = -k^2 \cdot x;$$
$$F_y = -|F| \cdot \cos(yr) = -k^2 \cdot r \cdot \cos(yr) = -k^2 \cdot y.$$

Las ecuaciones del movimiento del punto B resultan:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{k^2}{m} x = -\omega^2 \cdot x \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{k^2}{m} y = -\omega^2 \cdot y \end{aligned}\right\} \qquad \omega^2 = \frac{k^2}{m} > 0. \qquad [1]$$

Por tanto, integrando:

$$\left.\begin{aligned} x &= a \cdot \cos(\omega t + \varphi_{0x}) \\ y &= b \cdot \cos(\omega t + \varphi_{0y}) \end{aligned}\right\}. \qquad \begin{matrix} a, b, \varphi_{0x}, \varphi_{0y}, \text{ constantes} \\ \text{de integración arbitrarias} \end{matrix} \qquad [2]$$

Luego, el movimiento de B es resultante de dos oscilaciones perpendiculares, del mismo período; por consiguiente, es elíptico (§ 66, *b*]), con período $T = \frac{2\pi}{\omega}$, independiente de las amplitudes a, b. Las oscilaciones son todavía isócronas.

Un péndulo simple puede, efectivamente, girar alrededor de un punto C (fig. 270); y sólo efectúa las oscilaciones rectilíneas estudiadas en el § 144 cuando es nula la componente de la velocidad perpendicular al plano OCx. Es más frecuente que efectúe oscilaciones elípticas alrededor del centro O *(péndulo cónico)*.

En el punto (x, y) (fig. 272), el punto B, oscilando según las [2], tiene:

según el eje de las x:

la energía cinética: $\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2} m u_x^2$; y la energía de posición: $\frac{1}{2} m \omega^2 x^2$;

según el eje de las y:

la energía cinética: $\frac{1}{2} m \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2} m u_y^2$; y la energía de posición: $\frac{1}{2} m \omega^2 y^2$.

La velocidad del movimiento resultante de las dos oscilaciones es:

$$|u| = \sqrt{u_x^2 + n_y^2}; \qquad \text{además: } x^2 + {}^2y = r^2.$$

Por consiguiente, el punto B tiene en cada posición (x, y) una energía cinética $\frac{1}{2} m u^2$ y una energía de posición $\frac{1}{2} m \omega^2 r^2$; ésas son la suma de las correspondientes energías de los movimientos ortogonales componentes.

Se enuncia a veces este resultado diciendo que las oscilaciones ortogonales *no interfieren*. Es mejor decir que *interfieren* con conservación de las energías componentes.

La suma total es, como para la [3], § 146, constante respecto al tiempo, y es la energía total (cinética y potencial) del movimiento resultante.

Por el contrario, si se componen dos oscilaciones sobre un mismo eje, en general, la energía total (cinética y potencial) de la oscilación resultante no es la suma de las energías totales de las oscilaciones componentes.

Dos oscilaciones $x_1 = x_2 = a \cdot \cos \omega t$ tienen cada una, según la [3], § 146, la energía total:

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{W}_1 = \mathcal{E}_2 + \mathcal{W}_2 = \frac{1}{2} m \omega^2 a^2, \qquad [3]$$

y dan origen a la oscilación resultante:

$$x = 2a \cdot \cos \omega t,$$

a la que corresponde la energía total:

$$\mathcal{E} + \mathcal{W} = \frac{1}{2} m \omega^2 (2a)^2 = 4 (\mathcal{E}_1 + \mathcal{W}_1).$$

Dos oscilaciones:

$$x_1 = a \cdot \cos \omega t, \quad x_2 = a \cdot \cos(\omega t \pm \pi) = -a \cdot \cos \omega t,$$

tienen todavía las energías totales componentes [3], pero la oscilación resultante es:

$$x = 0,$$

a la que corresponde la energía total $\mathcal{E} + \mathcal{W} = 0$.

Procediendo como en el § 131, se verá inmediatamente que no hay contradicción con el teorema de la conservación de la energía, y se comprenderá el origen y el destino de las energías aparentemente creadas o desaparecidas.

§ **148. Oscilaciones libres amortiguadas.** Los resultados de los apartados precedentes sólo son confirmados parcialmente por la experiencia: las oscilaciones elásticas y las oscilaciones de un péndulo son siempre amortiguadas; la energía total [3], § 146, en lugar de mantenerse constante, disminuye hasta anularse, lo cual se debe a los rozamientos. Es preciso considerar de nuevo el problema teniendo en cuenta dichos rozamientos.

Se supone que la resultante de las fuerzas de rozamiento es una fuerza

$$-r^2 \cdot \frac{dx}{dt}, \qquad [1]$$

proporcional a la velocidad $\frac{dx}{dt}$ del punto oscilante A y que se opone siempre al movimiento; según esto, $-r^2$, coeficiente de la fuerza de rozamiento, es siempre negativo, y, por tanto, la [1] mide una fuerza siempre contraria a la dirección del movimiento.

No se puede dar una justificación completa de la [1]; solamente se puede observar que así es fácil solucionar analíticamente el problema, y que los resultados son bastante concordantes, por ejemplo, con los experimentos de oscilación de un péndulo en el aire.

La ecuación del movimiento de A, de masa m, sometido a la fuerza de tipo elástico $-k^2 \cdot x$ y al rozamiento [1], es:

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -r^2 \cdot \frac{dx}{dt} - k^2 \cdot x. \qquad [2]$$

Poniendo $\frac{k^2}{m} = \omega^2$, la [2] se escribe:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r^2}{m}\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0. \qquad [3]$$

Se reconduce de nuevo el problema del movimiento del punto a la resolución de una ecuación diferencial lineal, homogénea, de coeficientes constantes (1):

(1) Se suponen conocidas del lector la teoría y la resolución de este tipo de ecuaciones diferenciales. Por otra parte, es fácil comprobar que la [5], teniendo en cuenta la [6] y la [7], es solución de la [2].

La ecuación auxiliar para la solución de [3] es:

$$\xi^2 + \frac{r^2}{m}\xi + \omega^2 = 0;$$

su discriminante es $\frac{r^4}{m^2} - 4\omega_2$; poniendo $\psi = \frac{r^4}{4\omega^2 m^2}$, el discriminante es positivo, nulo o negativo, según que se tenga $\psi > 1$, $\psi = 1$, $\psi < 1$; en correspondencia con ello las raíces ξ_1, ξ_2 de la ecuación característica son reales y distintas, o reales y coincidentes, o conjugadas complejas.

ψ es el *índice de amortiguamiento* del movimiento que se estudia.

Se deben distinguir, pues, tres casos:

1.º Para $\psi > 1$, o sea para $r^2 > 2m\omega$; el rozamiento es notable, lo bastante intenso para que exista tal desemejanza.

La solución $x = x(t)$ de la [3] tiene la forma

$$x = C_1 e^{\xi_1 t} + C_2 e^{\xi_2 t}; \qquad [4]$$

en donde ξ_1 y ξ_2, raíces de la ecuación auxiliar, son ambas reales y negativas; C_1 y C_2 son constantes arbitrarias que se determinan mediante las condiciones iniciales impuestas al movimiento.

El movimiento es *aperiódico* y tiende a llevar asintóticamente el punto A a la posición de reposo O.

2.º Para $\psi < 1$, o sea $r^2 < 2m\omega$, es decir, para un rozamiento bastante pequeño, es:

$$x = a \cdot e^{-\frac{2\pi}{T_0}\varkappa t} \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0); \qquad [5]$$

por consiguiente, el movimiento es oscilatorio amortiguado; a y φ_0 son constantes arbitrarias que se determinan mediante las condiciones iniciales impuestas al movimiento.

ω_0 y $\varkappa$ son dos constantes convenientes; se tiene $[\omega_0] = \frac{[\varphi]}{[t]}$; $[\varkappa] = [\varphi^{-1}]$.

La constante ω_0 viene dada por:

$$\omega_0 = \omega\sqrt{1-\psi} = \sqrt{\omega^2 - \frac{r^4}{4m^2}} = \sqrt{\omega^2 - \lambda^2} > 0 \qquad [6]$$

$$\left(\text{poniendo } \lambda = \frac{r^2}{2m}\right).$$

ω_0 substituye a la ω de la [3], § 145, y determina el período T_0 del movimiento oscilatorio amortiguado:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{1-\psi}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \dfrac{r^4}{4m_2}}},$$

mayor que el período que tendría el punto A si oscilara sin rozamiento bajo el efecto de la única fuerza $F = -k^2 \cdot x$.

La constante $\varkappa$ viene dada por la expresión

$$\frac{2\pi}{T_0}\varkappa = \lambda = \frac{r^2}{2m} > 0, \text{ de donde } \varkappa = \frac{\sqrt{\psi}}{\sqrt{1-\psi}}, \qquad [7]$$

y hace el papel de coeficiente de amortiguamiento, como en el § 56, *d*].

$2\pi\varkappa$ es el decremento logarítmico de las oscilaciones; y $1 - e^{-2\pi\varkappa}$ es el factor de amortiguamiento.

3.º $\psi = 1$, o sea $r^2 = 2m\omega$; el punto se mueve asintóticamente hacia el origen O, como en el caso 1.º. A este valor particular de r^2 corresponde un rozamiento *crítico*, límite superior de los rozamientos para los cuales el punto A es todavía capaz de efectuar oscilaciones.

El caso 2.º es el más importante de los tres. En la práctica no se observan las infinitas oscilaciones previstas por la [5] (al suponer que se amortigua con ley exactamente geométrica), ya sea por de-

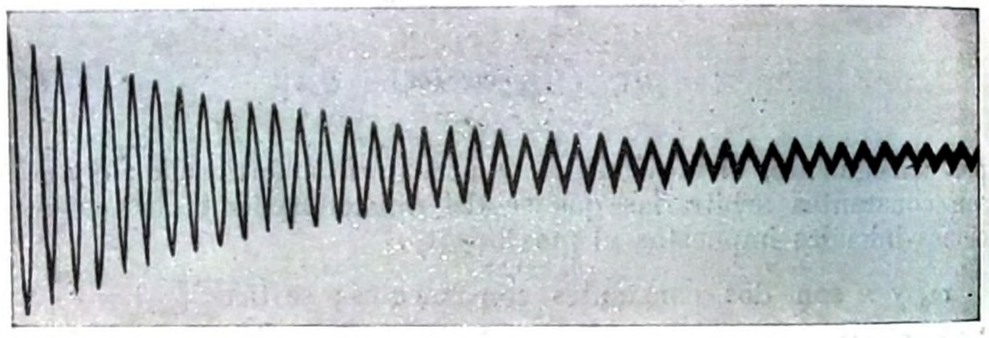


Fig. 273

fecto de los medios de observación de las oscilaciones, o ya, especialmente, por la inexactitud de la ley de rozamiento que se ha supuesto. Sin embargo, en la figura 273 se representa la fotografía obtenida con un dispositivo substancialmente análogo al de la figura 138. En lugar del diapasón hay solamente una laminita vibrante dispuesta como las ramas D_2 S_2, en las cuales se refleja el rayo R; después de reflejarse en S_2, el rayo se refleja en el espejo giratorio F, y de allí va a la pantalla Π, que está constituída ahora por una placa fotográfica. Las oscilaciones de la laminita, producidas por un golpe inicial excitador, son notablemente amortiguadas.

Las amplitudes sucesivas de las vibraciones determinan, con bastante aproximación, una curva exponencial.

En condiciones análogas se encuentran las oscilaciones de torsión de un disco horizontal AB (fig. 274) alrededor del hilo vertical de acero OC. El momento de inercia del disco substituye a la masa m; el momento de las fuerzas substituye a las fuerzas actuantes, y el ángulo de torsión reemplaza a x (§§ 157 y 158).

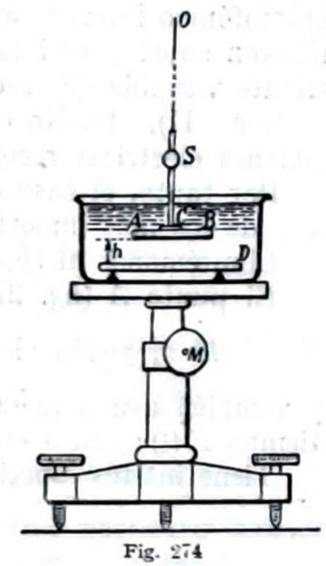


Fig. 274

Se observan las oscilaciones por el método de Lord Kelvin, siendo S el espejo que sirve para este objeto. El segundo disco D, paralelo al primero, puede levantarse o bajarse para variar, a voluntad del experimentador, el espesor h del líquido (agua, aceite de vaselina, aceite espeso, etc.), interpuesto entre D y AB, por ejemplo, desde 50 a 1 mm.

Puede también obtenerse el amortiguamiento por rozamiento en un gas contenido entre AB y D. El amortiguamiento de las oscilaciones de AB se produce esencialmente por rozamiento interno.

Nos hallamos en las mejores condiciones para suponer lícita la [1] (§ 187, [3] y [4]). Por otro lado, al disminuir el espesor h, aumenta el rozamiento que se opone a las oscilaciones, y se pueden realizar sucesivamente los tres casos, 1.º, 2.º y 3.º.

También es interesante el caso 3.º. Los *amortiguadores* de oscilaciones (§§ 44, 78) deben tratar de realizar la resistencia crítica del caso 3.º, o poco menos. Un rozamiento superior al crítico aumentaría de un modo prácticamente inadmisible el tiempo necesario para que el equipo móvil, por ejemplo, el de un galvanómetro, alcanzase la posición definitiva.

§ **149. Oscilaciones forzadas.** Es un poco más complicado, pero tiene un interés fundamental, el caso en que un sistema, o más simplemente un punto A, de masa m, es capaz de efectuar oscilaciones según un eje x (fig. 272) alrededor de una posición de equilibrio estable O, gracias a una fuerza de tipo elástico; estas oscilaciones serán, generalmente, amortiguadas por los rozamientos. Además, supondremos *el punto A sometido a una fuerza externa*, función conocida del tiempo, por ejemplo *función periódica del tiempo*.

Se hallan en este caso un puente por el que marchan los soldados marcando el paso; un pavimiento sobre el que alguien salta con ritmo constante, o en el que están instalados motores o máquinas en movimiento uniforme. También se halla en este caso la lámina de un micrófono, impulsada a vibrar alrededor de su posición de reposo por la acción de las ondas sonoras que llegan, la lámina de un gramófono obligada a repetir las vibraciones que el surco del disco gramofónico imprime a la aguja, la lámina de un teléfono o la de un altavoz sujetas a vibrar bajo la acción electromagnética de la corriente variable que reciben, el equipo móvil de un oscilógrafo (véase tomo II), etc. No es muy diferente tampoco el caso de las oscilaciones eléctricas recogidas por un aparato radiorreceptor.

Por tanto, el caso de las vibraciones forzadas se presenta como uno de los más importantes problemas de física.

Limitémonos al siguiente caso esquemático.

El punto A (fig. 272) está sometido a una fuerza de tipo elástico $-k^2 \cdot x$, según el eje x, a una fuerza de rozamiento $-r^2 \frac{dx}{dt}$, y también a una fuerza *externa* que es una cierta función dada del tiempo $F(t)$: todas estas fuerzas se suponen paralelas al eje x.

Tiene interés especial el caso en que es

$$F(t) = F_0 \cdot \cos \omega_e t\,; \qquad [1]$$

esto es, en que $F(t)$ es función armónica simple del tiempo; F_0 y ω_e son constantes;

$$\frac{2\pi}{\omega_e} = \frac{1}{\nu_e} = T_e$$

es el período de la fuerza *externa*. Para simplificar, se supone nula su fase inicial.

La ecuación del movimiento es:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k^2 \cdot x - r^2 \frac{dx}{dt} + F(t),$$

o sea:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r^2}{m}\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = \frac{1}{m} F_0 \cdot \cos \omega_e t\,; \qquad \left(\omega^2 = \frac{k^2}{m}\right) \qquad [2]$$

En este caso, la [2] tiene la solución particular:

$$x = a \cdot \cos(\omega_e t + \varepsilon),$$

a condición de que a y ε vengan dados por las expresiones: (1)

$$\left.\begin{aligned} a \cdot \cos \varepsilon &= \frac{\omega^2 - \omega_e^2}{m^2(\omega^2 - \omega_e^2)^2 + r^4\omega_e^2}\,; \\ a \cdot \operatorname{sen} \varepsilon &= -\frac{r^2\omega_e F_0}{m^2(\omega^2 - \omega_e^2)^2 + r^4\omega_e^2} \end{aligned}\right\}. \qquad [3]$$

Luego, es:

$$a = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega^2 - \omega_e^2)^2 + r^4\omega_e^2}} \qquad [4]$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = -\frac{r^2\omega_e}{m(\omega^2 - \omega_e^2)} \qquad [5]$$

$$x = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega^2 - \omega_e^2)^2 + r^4\omega_e^2}} \cos(\omega_e t + \varepsilon). \qquad [6]$$

De la segunda de las [3] se deduce que ε es siempre negativo; de la [5] resulta que ε varía desde 0 a $-\frac{\pi}{2}$ cuando ω_e varía de 0 a ω, y que ε varía de $-\frac{\pi}{2}$ a $-\pi$, mientras ω_e varía de ω a ∞.

La integral general es la suma de la solución particular hallada para la ecuación no homogénea y de la solución general de la ecuación hecha homogénea anulando su segundo miembro.

Este procedimiento de integración corresponde al siguiente hecho físico: el punto A está sometido a dos movimientos:

1.º un movimiento que es una oscilación *no* amortiguada *(oscilación forzada)*, dada por la [6], de período $\frac{2\pi}{\omega_e}$ igual al período de la fuerza externa, con una diferencia de fase ε respecto a esta fuerza; la amplitud y la fase de esta vibración forzada dependen en particular del valor del ángulo ε definido por las [3] y [5];

2.º un movimiento análogo al estudiado en el § 148, esto es, una oscilación propia amortiguada, que satisface a la [2] hecha homogénea; esto es, coincidente con la [3], § 148, y con un período

$$T_0 = \frac{1}{\nu_0}$$

dado por la expresión:

$$\frac{2\pi}{T_0} = \omega_0 = \sqrt{\omega^2 - \frac{r^4}{4m^2}} = \omega\sqrt{1 - \psi}\,. \qquad [7]$$

(1) Véase la nota del § 148.

Después de algún tiempo de haberse iniciado el movimiento se han desvanecido las oscilaciones propias y quedan solamente las oscilaciones forzadas [6], porque éstas no son amortiguadas.

Ha pasado la *fase o régimen transitorios* y se ha llegado a la *condición de régimen constante o estacionario.*

Ésta condición es la más simple y es de notable interés práctico; cuando se ha establecido esta condición de régimen estacionario, el punto oscilante A tiene, como en la oscilación libre, una energía total suma de una energía de posición y de una energía cinética.

La energía *cinética* es:

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2} m \omega_e^2 \frac{F_0^2}{m^2 (\omega^2 - \omega_e^2)^2 + r^4 \omega_e^2} \operatorname{sen}^2 (\omega_e t + \varepsilon).$$

Esta energía alcanza durante la oscilación el valor máximo:

$$\mathfrak{E}_0 = \frac{1}{2} m \omega_e^2 \frac{F_0^2}{m^2 (\omega^2 - \omega_e^2)^2 + r^4 \omega_e^2} = \frac{1}{2} m \omega_e^2 a^2,$$

en los instantes en que x es nulo, esto es, cuando A pasa oscilando, por su posición de reposo; coincide en tal instante con la energía total.

El valor medio de esta energía cinética es (compárese § 146, [4]):

$$\bar{\mathfrak{E}} = \frac{1}{4} m \omega_e^2 \frac{F_0^2}{m^2 (\omega^2 - \omega_e^2)^2 + r^4 \omega_e^2} = \frac{1}{2} \mathfrak{E}_0. \qquad [8]$$

La amplitud de oscilación a, la fase ε, la energía cinética media $\bar{\mathfrak{E}}$ de la oscilación forzada (y, por tanto, la energía total $\mathfrak{E}_0$) son funciones de las dos variables ω_e y r^2, esto es, de la frecuencia de la fuerza externa y del rozamiento, según las [4], [5] y [8], a las que corresponden los haces de curvas de las figuras 275, 276 y 277, respectivamente. Las curvas de la fig. 278, *a*), se han obtenido de las de la fig. 277, ampliando mucho la escala de las abscisas; las curvas de la fig. 278, *b*), se han obtenido a partir de las de la fig. 278, *a*), modificando curva a curva la escala de las ordenadas (que, por lo demás, en todas las figuras se han trazado con unidad arbitraria), para que resulte en todas $\mathfrak{E}_{0\,máx} = 1$.

§ 150. Resonancia en las oscilaciones forzadas. En las fórmulas precedentes, ω sería la pulsación $\frac{2\pi}{T}$ de la vibración de A, si este punto efectuara oscilaciones libres y sin rozamiento. A causa del

rozamiento, A efectuaría oscilaciones libres con pulsación:

$$\omega_0 = \omega \sqrt{1 - \frac{r^4}{4 m^2 \omega^2}} = \omega \sqrt{1 - \psi}. \qquad [1]$$

La oscilación forzada, en cambio, se efectúa con pulsación ω_e. Se deben hacer ahora varias observaciones.

a] Se deduce de la [8], § 149, que al variar ω_e, $\bar{\mathfrak{E}}$ (y por tanto $\mathfrak{E}_0$) es máximo para el siguiente valor especial de ω_e:

$$(\omega_e)_{\mathfrak{E}_0 = máx.} = \omega.$$

Se dice que para $\omega_e = \omega$ hay *resonancia para la energía.*

Se deduce de la [4], § 149, que al variar ω_e se halla el valor máximo de a para el valor particular de ω_e:

$$(\omega_e)_{a = máx.} = \omega \sqrt{1 - \frac{r^4}{2 m^2 \omega^2}} = \omega \sqrt{1 - 2\psi} \begin{cases} +\omega \\ +\omega_0. \end{cases}$$

Se tiene ahora *resonancia para la amplitud de oscilación.*

Sólo cuando es muy pequeño el rozamiento (y por tanto r^2), y este caso es muy común en la práctica, se puede suponer que coincidan ω_0, $\omega = (\omega_e)_{\mathfrak{E}_0 = máx.}$ y $(\omega_e)_{a = máx.}$; se tiene *resonancia* (o *sintonía*) cuando la frecuencia de la fuerza externa coincide con la frecuencia propia del sistema oscilante.

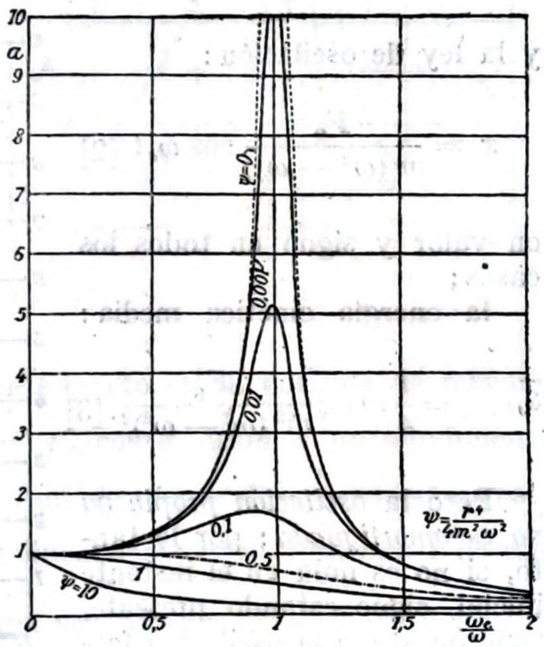


Fig. 275

Obsérvese que no son simétricas respecto a la ordenada $\frac{\omega_e}{\omega} = 1$ ni las curvas de la figura 275 ni las de las figuras 277 y 278.

b] La resonancia es tanto más precisa, o *aguda*, cuanto menor es el amortiguamiento, y, por tanto, cuanto menor es r^2. Se puede tomar como índice de la agudeza de resonancia la diferencia $\left(\frac{\omega_e}{\omega}\right)_2 - \left(\frac{\omega_e}{\omega}\right)_1$ (fig. 278, *b*]); esto es, la amplitud del campo

de los valores de $\frac{\omega_e}{\omega}$, en los que la energía $\overline{\mathcal{E}}$, y por tanto $\mathcal{E}_0$, es mayor que la mitad de la energía máxima correspondiente.

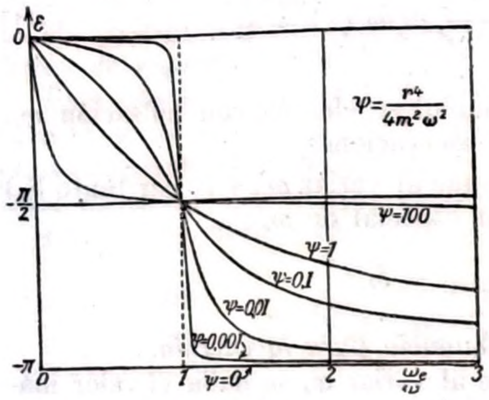


Fig. 276

De la amplitud de este campo se deduce r^2, y, por tanto, el amortiguamiento que tendría el sistema si oscilase libremente. Se comprende la utilidad de estas consideraciones, si se tiene en cuenta que, por ejemplo, permiten medir la potencia de emisión de energía por ondas electromagnéticas de un radiotransmisor aéreo.

c] Para $r^2 = 0$, caso límite no realizable experimentalmente, se exalta la resonancia de una manera excepcional.

Las [5], [6] y [8], § 149, dan *para la oscilación forzada*, la fase:

$$\varepsilon = 0 \text{ para } \omega_e < \omega\,; \qquad \varepsilon = -\pi \text{ para } \omega_e > \omega\,;$$

y la ley de oscilación:

$$x = \frac{F_0}{m\,(\omega^2 - \omega_e^2)} \cos \omega_e t \quad [2]$$

en valor y signo en todos los casos;

la energía cinética media:

$$\overline{\mathcal{E}}_{r^2=0} = \frac{1}{4}\, m\, \omega_e^2 \frac{F_0^2}{m^2\,(\omega^2 - \omega_e^2)^2}. \quad [3]$$

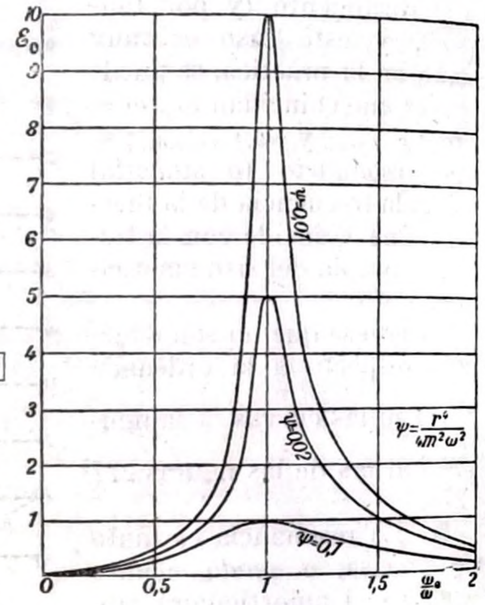


Fig. 277

Pero la *oscilación propia ya no es amortiguada*; por lo tanto, si no es nula en el instante inicial, sigue estando presente, superpuesta a la oscilación forzada, y origina una resultante no armónica (§ 70).

La oscilación forzada está en concordancia de fase con la fuerza externa ($\varepsilon = 0$) hasta que es $\omega_e < \omega$; para $\omega_e > \omega$ la oscilación forzada está en oposición de fase con la fuerza ($\varepsilon = -\pi$);

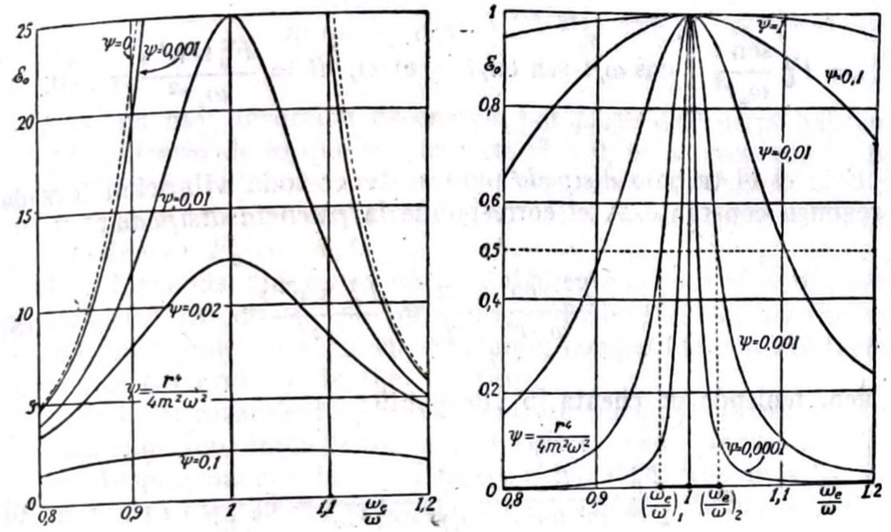
para $\omega_e = \omega$ la fase ε salta bruscamente de 0 a $-\pi$ (fig. 276).

Para $\omega_e = \omega$, esto es, en condiciones de resonancia, las [4] y [8], § 149, también presentan singularidades: la amplitud y la energía de las oscilaciones de resonancia son infinitas y no tienen ya significado físico.

Efectivamente, en este caso ($r^2 = 0$; $\omega_e = \omega$), la [2], § 149, tiene la solución particular:

$$x = \frac{F_0 \cdot t}{2\,\omega\, m} \operatorname{sen} \omega t. \quad [4]$$

Si la oscilación de A es nula para $t = 0$, es decir, si se tiene $x_{t=0} = 0$



a Fig. 278 b

y $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = 0$ (A está inicialmente quieto en su posición de reposo), la fuerza externa en resonancia $F_0 \cdot \cos \omega t$ produce un movimiento oscilatorio de pulsación ω, con un retardo de fase $\frac{\pi}{2}$ respecto a esta fuerza, y cuya amplitud crece linealmente con el tiempo más allá de todo límite finito.

d] Excluído este caso, una vez alcanzado el movimiento de régimen constante, esto es, cuando sólo queda la oscilación forzada (§ 149, [6]), el movimiento es entretenido a expensas de la energía dada al punto vibrante por el trabajo de la fuerza extensa $F(t) = F_0 \cdot \cos \omega_e t$, que se transforma durante el movimiento en energía calorífica a causa de los rozamientos.

Se tiene ahora para el trabajo efectuado desde el exterior en cada período $T_e = \frac{2\pi}{\omega_e}$:

$$\mathfrak{L} = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_e}} F(t)\cdot dx =$$

$$= -\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_e}} F_0\cdot\cos\omega_e t\cdot\frac{F_0\,\omega_e}{\sqrt{m^2(\omega^2-\omega_e^2)^2+r^4\omega_e^2}}\,\mathrm{sen}\,(\omega_e t+\varepsilon)\cdot dt =$$

$$= F_0^2\,\frac{\mathrm{sen}\,\varepsilon}{\omega_e r^2}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_e}}\cos\omega_e t\cdot\mathrm{sen}\,(\omega_e t+\varepsilon)\cdot\omega_e\cdot dt = \frac{F_0^2\,\mathrm{sen}^2\,\varepsilon}{\omega_e r^2}\,\pi > 0.$$

Éste es el trabajo *disipado* para sostener toda vibración forzada a régimen constante. A él corresponde la *potencia disipada*:

$$\mathfrak{w} = \frac{F_0^2\cdot\mathrm{sen}^2\,\varepsilon}{\omega_e\cdot r^2}\cdot\frac{\pi}{T_e} = \frac{F_0^2\cdot\mathrm{sen}^2\,\varepsilon}{2r^2}; \qquad [5]$$

o bien, teniendo en cuenta [5], de § 149:

$$\mathfrak{w} = \frac{F_0^2}{2r^2}\cdot\frac{r^4\omega_e^2}{m^2(\omega^2-\omega_e^2)^2+r^4\omega_e^2} = \mathfrak{E}_0\cdot\frac{r^2}{m}. \qquad [6]$$

La potencia disipada es proporcional a la energía total $\mathfrak{E}_0$ y, por lo tanto, a la energía cinética media $\overline{\mathfrak{E}}$. Aparte de la escala de las ordenadas, que varía de una curva a otra a causa del factor $\frac{r^2}{m}$, las curvas de las figs. 277 y 278 dan también la potencia disipada de en función $\frac{\omega_e}{\omega}$. En particular, este trabajo es máximo en el caso de resonancia para la energía:

$$\omega_e = \omega; \qquad \left(\varepsilon = -\frac{\pi}{2}; \qquad \mathrm{sen}^2\,\varepsilon = 1\right).$$

Si falta el rozamiento y *no* están *en resonancia*, la vibración forzada viene dada por la [2], y entonces:

$$\mathfrak{L} = -\frac{F_0^2}{m(\omega^2-\omega_e^2)}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_e}}\cos\omega_e t\cdot\mathrm{sen}\,\omega_e t\cdot\omega_e dt =$$

$$= -\frac{F_0^2}{m(\omega^2-\omega_e^2)}\int_0^{2\pi}\cos\varphi\cdot\mathrm{sen}\,\varphi\cdot d\varphi; \qquad (\varphi=\omega_e t)$$

$$= \frac{F_0^2}{m(\omega^2-\omega_e^2)}\,\frac{1}{2}\Big|\cos^2\varphi\Big|_0^{2\pi} = 0;$$

esto es, no hay absorción de energía por parte del cuerpo vibrante.

Al contrario de lo que sucede para $r^2 \neq 0$, no se crea que la oscilación forzada [2], pueda obtenerse físicamente aplicando, durante un tiempo suficiente, en el punto A, quieto inicialmente en el origen, la fuerza $F_0\cdot\cos\omega_e t$.

Las fórmulas anteriores sólo establecen que para $r^2 = 0$, *cuando la oscilación* [2] *existe*, ésta prosigue, constituyendo un movimiento oscilatorio simple de régimen constante, compatible con las fuerzas actuantes (externas y de tipo elástico).

Si falta el rozamiento y se está en resonancia, el trabajo efectuado aumenta indefinidamente con el tiempo, como indica la [4].

e] Inspeccionando la [6], § 149, y el haz de curvas de la fig. 275, se encuentra otro hecho notable: para un amplio campo de valores de $\frac{\omega_e}{\omega}$, y, por tanto, de ω_e, cerca del origen y para un valor conveniente del amortiguamiento $\left(\text{p. ej.: } \psi = \frac{r^4}{4m^2\omega^2} = 0{,}5\right)$, la curva de la amplitud a de régimen constante es prácticamente paralela al eje de las abscisas: fuerzas $F_0\cdot\cos\omega_e t$, de períodos diversos $T_e = \frac{2\pi}{\omega_e}$, pero siempre muy grandes respecto al período propio del sistema oscilante $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ y, por tanto, en virtud de la [1], grandes también respecto a $T = \frac{2\pi}{\omega}$, dan amplitudes de vibración forzada proporcionales a F_0 (§ 149, [4]) con una constante de proporcionalidad prácticamente independiente del período de la fuerza externa. Y se comprende: el sistema oscilante es, por decirlo así, extraordinariamente

movible respecto al período de variación de la fuerza impuesta, y tiene, por tanto, tiempo de obedecerla.

Un sistema oscilante en estas condiciones es capaz de vibrar bajo la acción simultánea de fuerzas imprimidas oscilantes y, por tanto, (§ 71) de una fuerza imprimida $F = F(t)$ variable con el tiempo, produciendo una oscilación resultante de régimen constante $x = x(t)$ proporcional a $F = F(t)$.

Cualquier dispositivo, capaz de registrar el movimiento $x = x(t)$ del sistema vibrante A (p. ej., un dispositivo fotográfico como el utilizado para obtener la figura 273), da una reproducción *fiel*, sin *distorsión*, de la causa $F = F(t)$ de la vibración forzada.

Naturalmente, en los casos prácticos, sucederá a menudo que la amplitud de oscilación de la vibración forzada no es enteramente proporcional a la amplitud F_0 de oscilación de la fuerza actuante al variar la frecuencia $\nu_e = \frac{1}{T_e}$ (el reproductor está afectado de *distorsión lineal)*, y a veces ni siquiera es verdad que una fuerza imprimida sinusoidal produzca una oscilación de régimen constante puramente sinusoidal (el reproductor está afectado de *distorsión no lineal)*.

Se perfila aquí en pocas líneas (y bajo una forma necesariamente esquemática, porque se ocultan los *fenómenos transitorios*, es decir, los de la *fase o régimen transitorio)* todo el problema del registro y reproducción fiel de las vibraciones del terreno *(sismógrafos)*, de los edificios *(vibrógrafos)*, de los sonidos (gramófonos, teléfonos, micrófonos, cintas sonoras, etc.), de las corrientes eléctricas rápidamente variables *(oscilógrafos)*.....

La duración de la fase transitoria viene dada por el tiempo τ necesario para que se anulen prácticamente las vibraciones libres, amortiguadas. El valor de τ puede tomarse como un índice de la *rapidez* del sistema oscilante en el sentido de que cuanto menor es τ, mayor será la rapidez. Un índice de oscilógrafo DUDDEL (tomo II) cuando recibe una corriente continua y constante, se traslada hacia la nueva posición de equilibrio, característica de la corriente eléctrica que atraviesa el aparato. Pero ello requiere cierto tiempo, durante el cual el índice efectúa algunas oscilaciones amortiguadas alrededor de la nueva posición de equilibrio, constituyendo esto la fase transitoria. El mismo fenómeno se repite cuando se interrumpe la corriente y vuelve al cero el índice del oscilógrafo.

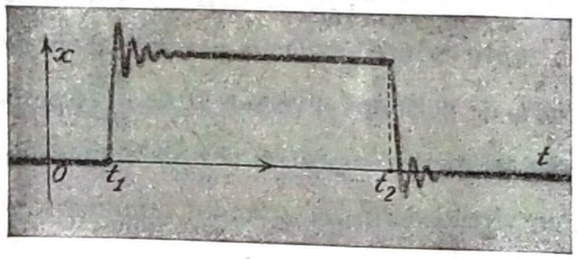


Fig. 279

El registro fotográfico de la desviación x del índice en función del tiempo t es, por ejemplo, del tipo indicado, en la figura 279; en el instante t_1 se ha lanzado la corriente, y se ha interrumpido en el instante t_2.

Se observa también la fase transitoria con el registro, mediante el oscilógrafo, de la desviación x en función del tiempo t, cuando se lanza en él una corriente alterna en el instante t_1, la cual se interrumpe en el instante t_2.

La presencia de las oscilaciones propias en la fase transitoria demuestra que el rozamiento que acompaña al movimiento del equipo del oscilógrafo queda todavia demasiado por debajo del rozamiento crítico, y que, por tanto, es insuficiente.

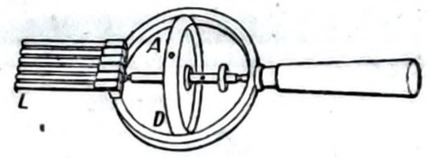


Fig. 280

§ 151. Experimentos sobre las oscilaciones forzadas. El caso de la reproducción fiel y el de la resonancia son soluciones antitéticas del mismo problema de las oscilaciones forzadas.

En la resonancia se consigue la exaltación privilegiada de una frecuencia especial, la de resonancia, y una fuerza externa periódica débil basta para producir oscilaciones forzadas de amplitud notable.

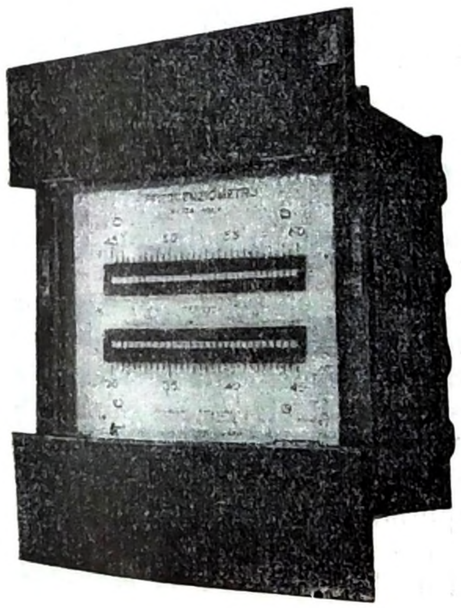


Fig. 281

Un columpio se presta bien a los experimentos de resonancia; pero conviene describir algunos dispositivos más adecuados para fines didácticos, [por ejemplo, el *giroscopio* de FRAHM (fig. 280)]; en el borde del disco giratorio D se ha practicado un agujero A para que la masa que rueda no sea ya simétrica; durante la rápida rotación del giroscopio siente la mano del experimentador el temblor debido a esta asimetría. En el anillo en donde va montado el giroscopio se han fijado unas láminas de acero L, cuyas longitudes disminuyen progresivamente. Puesto el giroscopio en rotación rápida, va disminuyendo de velocidad a causa de los rozamientos, y cuando va alcanzando la frecuencia propia de una de las láminas, el temblor constituye la fuerza $F \cdot \cos \omega_e t$ en resonancia con la lámina, presentando ésta una exagerada amplitud de vibración. A medida que el giros-

copio se va parando, van entrando sucesivamente en resonancia todas las láminas, desde la más corta a la más larga.

El *frecuencímetro de laminillas* (fig. 281), para la medida de la frecuencia de las corrientes alternas industriales, se basa en un principio análogo : la corriente alterna excita a un electroimán que atrae periódicamente las laminillas de acero del frecuencímetro. Cada una de éstas tiene una frecuencia característica propia, indicada por el constructor. La lámina que está en mejor resonancia señala con su frecuencia propia la de la corriente excitadora (fig. 282). El aparato también funciona si la excitación es puramente mecánica : fijado a un pavimento, a una mesa o a un soporte que vibran a causa de una máquina en rotación, mal equilibrada, colocada encima, el frecuencímetro indica la frecuencia de la vibración si ésta cae dentro del ámbito de su escala.

Fig. 282

En el aparato de la figura 283 está montado rígidamente, en el eje AB, el disco D, que es ligeramente asimétrico porque en su periferia se ha practicado un agujero F.

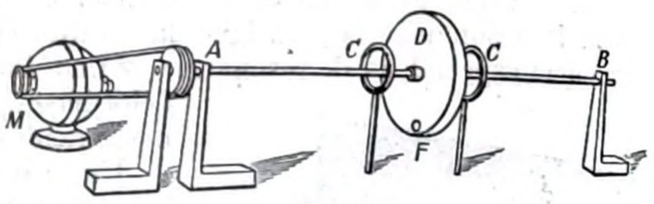


Fig. 283

Un motor M, de velocidad variable, pone en rotación ABD. Al aumentar la velocidad, cuando el período de rotación de D se aproxima al período fundamental propio de vibración del sistema elástico ADB, éste efectúa vibraciones forzadas de resonancia, que serán suficientemente fuertes para desquiciar el eje de los soportes. Los anillos CC sirven para evitar que esto ocurra y para limitar la amplitud de las oscilaciones de resonancia. Aumentando la velocidad de M, se rebasa la *velocidad crítica* del eje, correspondiente a la resonancia ; la rotación del árbol, aunque se resiente siempre de la trepidación debida a la asimetría de la masa giratoria, vuelve a ser bastante tranquila ; pero se repite el fenómeno de la resonancia cuando se alcanzan las *velocidades críticas* correspondientes a las frecuencias propias de los sucesivos armónicos del sistema ADB (§ 260).

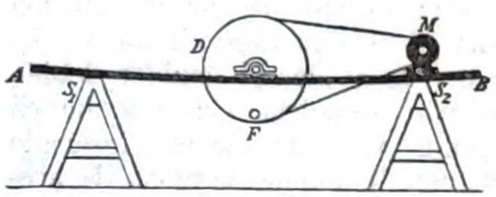


Fig. 284

Análogamente, un disco D (fig. 284) con un agujero asimétrico F, cuyo eje se apoya en el tablero AB, que descansa en los caballetes S_1, S_2, se hace girar mediante el motor M ; al variar la velocidad de rotación de D, si el período de rotación llega a coincidir con el período propio de vibración del tablero, se exalta la trepidación de éste y llega a tener suficiente amplitud para hacerlo saltar de los caballetes.

Los constructores y montadores de máquinas han de extremar las precauciones para evitar que una eventual asimetría de las masas giratorias origine fenómenos de resonancia en los árboles giratorios, en el edificio, etc.

Citemos también un experimento de resonancia (Pohl) apto para comprobar, por lo menos cualitativamente, no sólo los resultados relativos a la amplitud y a la frecuencia de la resonancia, sino también los que se refieren a la fase ε (figura 276).

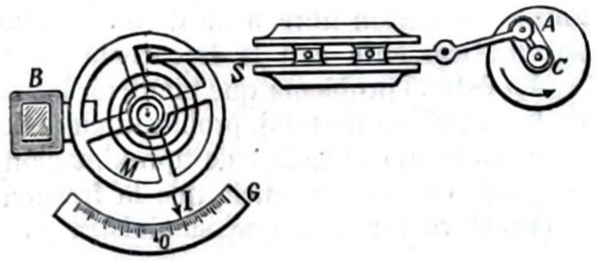


Fig. 285

El aparato de Pohl (figura 285) consta de una especie de balancín de reloj, y el movimiento de vaivén del sistema biela-manivela SAC imprime, a través del resorte M, la fuerza externa sinusoidal $F_0 \cdot \cos \omega_e t$. Variando la longitud del brazo AC, cambia F_0 ; modificando la velocidad del motor, varía ω_e ; con el freno electromagnético B, se modifica el amortiguamiento de las oscilaciones. El resorte M es el que crea la fuerza elástica necesaria para las oscilaciones propias del sistema.

El frecuencímetro de laminillas permite también comprobar, de un modo más elegante, la variación brusca de fase ε que se presenta con la resonancia ; las distintas láminas vibrantes del frecuencímetro, entre las cuales se halla la que presenta la mejor resonancia (frecuencia ν_0), aparecen como en la figura, 282 a causa de la persistencia de las imágenes en la retina.

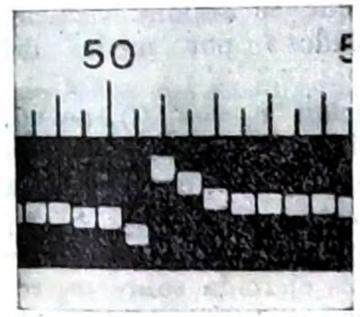


Fig 286

Pero mediante una observación estroboscópica (§ 75), efectuada en fase oportuna, aparecen las láminas como en la figura 286 : mientras la lámina de la derecha de la que tiene frecuencia ν_0 se mueve hacia arriba, la lámina de la izquierda se mueve hacia abajo.

§ 152

§ 152. Oscilaciones entretenidas. En las oscilaciones forzadas, la fuerza externa, sinusoidal, impone a éstas la frecuencia de la oscilación permanente [6], § 149; no son las características mecánicas del sistema (o sea, m, r^2, k^2) las que determinan dicha frecuencia, sino la fuerza externa aplicada. En las oscilaciones *entretenidas* se trata también de suministrar al sistema oscilante la energía necesaria para compensar la que se va disipando poco a poco por los rozamientos; pero ahora se pretende que la frecuencia de oscilación coincida con la de la oscilación libre; en resumen, el suministro de la energía ha de reavivar la amplitud, pero sin perturbar la frecuencia de la oscilación libre.

Por lo común, este suministro se efectúa de una manera periódica, pero con un ritmo autorregulado, es decir, dirigido por la misma oscilación libre, a fin de que el suministro de energía coincida automáticamente con la frecuencia de la oscilación libre.

Es éste el problema que plantean las oscilaciones de los péndulos y de los volantes de reloj, problema cuya solución no es sencilla, porque es elevadísimo el grado de aproximación que se pretende, es decir, el grado de independencia que la frecuencia propia ha de tener respecto al mecanismo que suministra la energía.

§ 153. Acoplamiento de oscilaciones y de osciladores. Otro ejemplo de oscilaciones que se relaciona con el de las oscilaciones forzadas, es el de las *oscilaciones acopladas* que realizan los *osciladores acoplados*.

Consisten éstos en un sistema mecánico capaz de originar, en el caso más sencillo, dos oscilaciones tales que una de ellas influya en la otra; en el caso más general, las oscilaciones podrán ser más de dos.

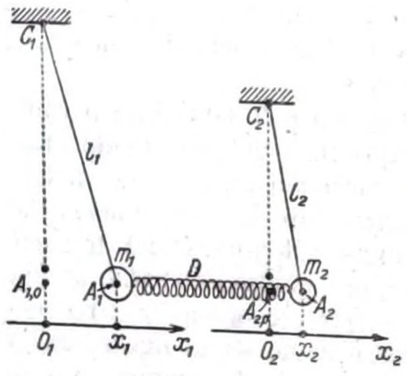


Fig. 287

Así, los dos péndulos C_1A_1, C_2A_2 de la fig. 287, que oscilan en el plano del dibujo, que se supone vertical, están «acoplados» por medio del muelle D.

La oscilación $x_1 = x_1\,(t)$, de m_1, origina tracciones y compresiones del muelle, y, por lo tanto, engendra una fuerza que actúa sobre m_2. Si m_1 oscila con ley sinusoidal de frecuencia ν, la fuerza ejercida sobre m_2 resulta ser también sinusoidal y de frecuencia ν. Pero, al contrario de lo que ocurre con las oscilaciones forzadas del § 149, ahora la «reacción» de m_2 sobre m_1 no es despreciable; influye en la oscilación de m_1 y, por tanto, influye a su vez sobre la fuerza con que m_1 actúa sobre m_2; ya no se puede decir que esta fuerza es una función «dada» del tiempo.

Otros dos elemplos de oscilaciones acopladas los suministran los sistemas de las figs. 288 y 289.

Debajo del péndulo $C_1 m_1$ (fig. 288) está suspendido un segundo péndulo de masa m_2; conviene que sea $m_1 \geqslant m_2$. El péndulo Cm de la fig. 289 tiene como hilo de suspensión un muelle D de masa despreciable respecto a m; el péndulo origina oscilaciones elásticas a lo largo de la vertical Cm, y oscilaciones pendulares de gravedad, por ejemplo, a lo largo de un eje perpendicular a la figura. Las dos oscilaciones están acopladas.

Fig. 288

Daremos indicaciones sobre los *péndulos acoplados* (figura 287, § 154) y las *pesas elásticas* § (155).

Fig. 289

§ 154. Péndulos acoplados. Los dos péndulos A_1, A_2 (fig. 287), de masas m_1, m_2, de distintas longitudes l_1, l_2, están *acoplados* por medio del muelle D; es decir, obran el uno sobre el otro a través del muelle. En la posición de reposo de A_1 y A_2 el muelle D no está ni comprimido ni estirado; la fuerza mutua entre A_1 y A_2 es nula.

Se desprecian los rozamientos.

La elongación x_1 de A_1 se mide sobre el eje x_1; la de A_2 se mide sobre el eje x_2, paralelo a x_1 y del mismo sentido.

Si se traslada A_1 un trayecto x_1 y, a la vez, se traslada A_2 un trayecto x_2, la distancia entre A_1 y A_2 no será la que había en las posiciones de reposo, sino que habrá aumentado en $(x_2 - x_1)$; el resorte D estará sometido a tracción y aplicará las fuerzas

$$+ k_{12}^2\,(x_2 - x_1) \text{ sobre } A_1, \qquad - k_{12}^2\,(x_2 - x_1) \text{ sobre } A_2;$$

en donde k_{12}^2 es la constante de la fuerza elástica del muelle. Además, A_1, separado de la posición de reposo, se encuentra sometido a la fuerza (§ 144, [1]):

$$- k_1^2\,x_1 = - \frac{m_1\,g}{l_1}\,x_1;$$

y, análogamente, A_2 está sometido a la fuerza:

$$- k_2^2\,x_2 = - \frac{m_2\,g}{l_2}\,x_2.$$

Las ecuaciones del movimiento de A_1 y de A_2 son:

$$\left.\begin{aligned} m_1 \frac{d_2 x_1}{dt^2} + k_1^2 x_1 &= k_{12}^2 (x_2 - x_1) \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + k_2^2 x_2 &= -k_{12}^2 (x_2 - x_1) \end{aligned}\right\};$$

o sea:

$$\left.\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + (k_1^2 + k_{12}^2) x_1 &= k_{12}^2 x_2 \\ m_2 \frac{d_2 x_2}{dt^2} + (k_2^2 + k_{12}^2) x_2 &= k_{12}^2 x_1 \end{aligned}\right\}. \qquad [1]$$

La primera de las [1] es una ecuación diferencial según la cual x_1 depende de x_2; así también x_2 depende de x_1; el movimiento de cada uno de los péndulos influye en el movimiento del otro.

Si k_{12}^2 fuese nulo, los segundos miembros de las [1] se anularían, y cada una de las [1] serviría para determinar uno de los dos movimientos; uno y otro serían armónicos, de pulsaciones $\sqrt{\frac{k_1^2}{m_1}}$ y $\sqrt{\frac{k_2^2}{m_2}}$, respectivamente; x_1 y x_2 resultarían independientes entre sí: k_{12}^2 es la *constante de acoplamiento*.

Físicamente, k_{12}^2 depende de la robustez del resorte de acoplamiento. Es, pues, evidente que si x_2 fuese constantemente nulo, esto es, si A_2 se mantuviera fijo en la posición de reposo, las oscilaciones de A_1 estarían gobernadas no solamente por la gravedad, sino por la presencia del resorte; por ello el coeficiente de x_1 en la primera de las [1] no es ya $k_1^2 = m_1 \frac{g}{l_1}$, sino $k_1^2 + k_{12}^2$.

Existen dos casos extremos:

k_{12}^2 muy pequeño respecto a k_1^2 y a k_2^2; el acoplamiento se llama *débil o flojo*;

k_{12}^2 muy grande respecto a k_1^2 y a k_2^2; el acoplamiento se llama *fuerte* o *estrecho*.

En este caso, si k_1^2 y k_2^2 pueden despreciarse respecto a k_{12}^2, las [1] se reducen a:

$$\left.\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + k_{12}^2 \cdot x_1 &= k_{12}^2 \cdot x_2 \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + k_{12}^2 \cdot x_2 &= k_{12}^2 \cdot x_1 \end{aligned}\right\} \qquad [2]$$

y regulan, por ejemplo, las oscilaciones que mutuamente se imprimen

dos esferas, A_1 y A_2, unidas por un resorte y apoyadas sin rozamiento sobre una mesa horizontal (véanse también las *pesas elásticas*, § 155).

En las [1] se suele llamar *factor de acoplamiento* a la expresión:

$$K = \frac{k_{12}^2}{\sqrt{(k_1^2 + k_{12}^2)(k_2^2 + k_{12}^2)}}; \qquad [3]$$

k es positivo y está comprendido entre 0 y 1.

En el caso de las [2], el factor de acoplamiento tiene el valor máximo, o sea 1.

La resolución general de las ecuaciones [1], e incluso la de las [2], es ya muy complicada, y no muy interesante en lo que respecta al problema mecánico.

Se tiene el caso más sencillo para $l_1 = l_2$ y $m_1 = m_2$; los dos péndulos A_1, A_2 son simétricos; en particular tienen el mismo período propio y están en resonancia. Pero aun en este caso, mejor que buscar matemáticamente una solución particular de las [1], es efectuar un sugestivo experimento (fig. 290), que indica las principales características de las oscilaciones acopladas en resonancia.

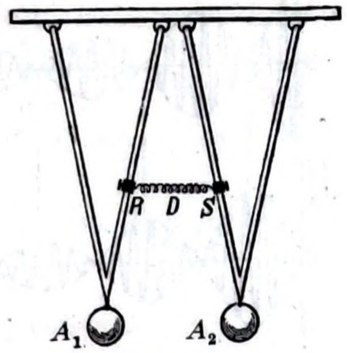


Fig. 290

Los dos péndulos, en lugar de oscilar a lo largo de la recta $A_1 A_2$ como en la figura 287, oscilan perpendicularmente al plano del dibujo, que se supone vertical. El muellecito D, tendido entre R y S, crea el acoplamiento. Se obtienen oscilaciones armónicas en tres casos:

1.º Mantenemos uno de los dos péndulos en la posición de reposo mientras el otro, separado de tal posición, se abandona en libertad; la frecuencia ν de las oscilaciones es un poco superior a la que tendría el péndulo solo, debido a la fuerza de atracción producida por el muelle D.

2.º Los dos péndulos se han trasladado con elongaciones iguales y del mismo sentido, (por ejemplo, hacia el observador), y después se han dejado en libertad de oscilar; la frecuencia de las oscilaciones ν' es la que tendrían los péndulos por sí solos, sin el muelle D; se tiene $\nu' = \nu \cdot \sqrt{1 - \varepsilon}$, menor que ν, porque ahora falta la fuerza de restitución debida al muelle D; resulta: $\varepsilon = \frac{k_{12}^2}{k_1^2 + k_{12}^2} = \frac{k_{12}^2}{k_2^2 + k_{12}^2}$.

3.º Los dos péndulos se han trasladado con elongaciones iguales pero opuestas, y después se han dejado en libertad; la frecuencia

es ahora $\nu'' = \nu \cdot \sqrt{1+\varepsilon}$, mayor que ν, porque la fuerza de restitución del muelle es doble que en el primer caso.

Pero es mucho más interesante el caso siguiente.

Póngase A_1 en oscilación (para lo cual debe suministrársele energía); por ejemplo, estando A_2 quieto en la posición de reposo, se desvía A_1 para que adquiera así energía de posición; después se abandonan simultáneamente A_1 y A_2; A_1 inicia sus oscilaciones, pero transmite gradualmente su energía al otro péndulo A_2; así, después de cierto número de oscilaciones, A_1 se ha parado por haber transmitido toda su energía a A_2. Ahora, A_1 está prácticamente quieto durante medio período, y después se invierte el fenómeno; A_2 restituye su energía a A_1 hasta quedar quieto; luego el fenómeno se repite en el primer sentido, y así sucesivamente.

El gráfico en función del tiempo de las oscilaciones de A_1 y de A_2 se indica en la figura 291; cada una de ellas tiene el carácter de las vibraciones con pulsaciones (§ 72) y es precisamente la resultante de dos oscilaciones de frecuencias $\nu \cdot \sqrt{1-\varepsilon}$ y $\nu \cdot \sqrt{1+\varepsilon}$, respectivamente. Pero a causa de los rozamientos van amortiguándose las oscilaciones de A_1 y de A_2.

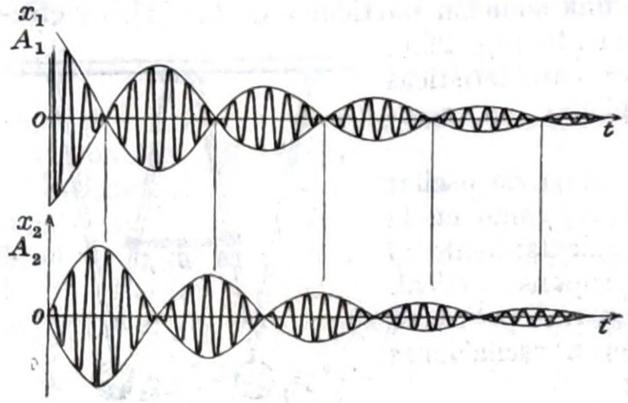


Fig. 291

Levantando o bajando los puntos R y S (fig. 290), se puede estirar más o menos el resorte D, con lo cual varía entre anchos límites el factor de acoplamiento; cuanto mayor es éste, más rápido es el paso de energía de un péndulo a otro. Si los dos péndulos no están bien *acordes*, es decir, si no están en resonancia, el fenómeno es menos sencillo.

§ 155. Las pesas elásticas. El sistema formado por dos masas, m_1 y m_2 (fig. 292), que actúan una sobre otra mediante un muelle D de masa despreciable, constituye las *pesas elásticas* (1); este concepto ha demostrado ser útil, por ejemplo, en el estudio de las vibraciones de una membrana, las cuales se comunican con amplitud no despreciable a los anillos soporte; esto sucede, por ejemplo, en los

(1) Nombre que hace alusión al par de bolas unidas por un mango que emplean los atletas (las *pesas*), pero cuyo mango es un resorte. — *N. del T.*

teléfonos y micrófonos; las vibraciones de las partes tienen frecuencia acústica.

Las leyes del movimiento de las dos masas m_1 y m_2 están expresadas por [2], § 153.

Alejemos las masas A_1, A_2, siguiendo la recta ξ, de las posiciones

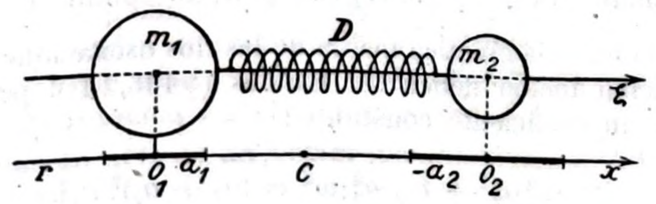


Fig. 292

de reposo O_1 y O_2, siendo a_1 y $-a_2$ los corrimientos (a_1 y a_2 son positivos) tales que: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}$; es decir, de modo que permanezca fijo en la posición C el baricentro del sistema. Después dejemos libres, a la vez, A_1 y A_2. En el instante inicial se tiene:

$$(x_1)_{t=0} = a_1\,; \qquad (x_2)_{t=0} = -a_2\,;$$

$$\left(\frac{dx_1}{dt}\right)_{t=0} = \left(\frac{dx_2}{dt}\right)_{t=0} = 0.$$

Fijadas tales condiciones iniciales, es única la solución $x_1 = x_1(t)$ y $x_2 = x_2(t)$ de las [2]. Pero las funciones

$$x_1 = a_1 \cdot \cos \omega t, \qquad x_2 = -a_2 \cdot \cos\ \omega t, \qquad [1]$$

satisfacen a tales ecuaciones [2] siempre que a_1, a_2, ω, satisfagan a las

$$\left.\begin{aligned} -m_1 \cdot a_1 \cdot \omega^2 + k_{12}^2 \cdot a_1 &= -k_{12}^2 \cdot a_2 \\ m_2 \cdot a_2 \cdot \omega^2 - k_{12}^2 \cdot a_2 &= k_{12}^2 \cdot a_1 \end{aligned}\right\}, \qquad [2]$$

y, por lo tanto, siempre que se cumplan las siguientes condiciones:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}; \qquad \omega^2 = k_{12}^2 \frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2}. \qquad [3]$$

La primera condición es, en último análisis, el teorema de la conservación de la cantidad de movimiento; ésta, junto con la forma [1] de la solución, asegura la inmovilidad del baricentro del sistema durante las oscilaciones de A_1 y de A_2. La segunda de las [3], dadas

las masas y conocida la fuerza elástica de D, y, por tanto, k_{12}^2, determina el período propio de vibración del sistema $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Más simplemente, admitiendo que la solución posible sea una oscilación armónica de A_1 y de A_2 con período común $T = \frac{2\pi}{\omega}$, dado por las [1], la energía cinética media de las dos oscilaciones y la energía de posición media deben ser iguales (§ 146, [4]); por tanto, se tiene, salvo un coeficiente constante :

$$m_1 \cdot a_1^2 \cdot \omega^2 + m_2 \cdot a_2^2 \cdot \omega^2 = (a_1 + a_2)^2 \, k_{12}^2. \qquad [4]$$

Por la conservación de la cantidad de movimiento se ha de tener también :

$$m_1 \cdot a_1 \cdot \omega - m_2 \cdot a_2 \cdot \omega = 0. \qquad [5]$$

De las [4] y [5] se deducen los valores [3] para $\frac{a_1}{a_2}$ y para ω.

E. — DINÁMICA DEL CUERPO RÍGIDO

§ 156. Dinámica del cuerpo rígido. La extensión de la dinámica del punto al caso del cuerpo rígido puede efectuarse por vía puramente lógica, y es objeto de la mecánica racional. Sin embargo, las consideraciones y los experimentos que siguen, limitados al caso de un *cuerpo rígido que gira alrededor de un eje*, son necesarios para que el procedimiento puramente formal no enmascare la visión (tal vez sólo cualitativa, pero más física y esencial) de los fenómenos, que puede obtenerse directamente por medio de la experimentación.

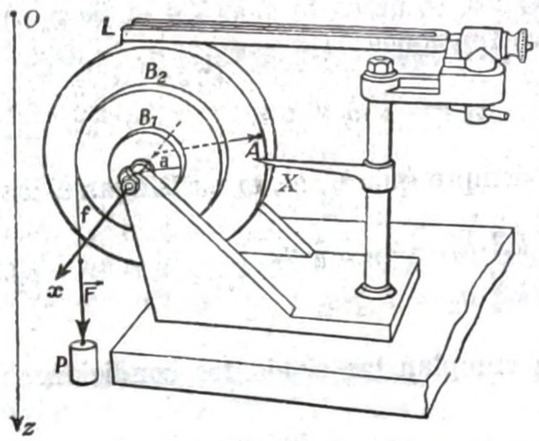


Fig. 293

§ 157. Ley del movimiento. Se tiene una rueda (*rueda de* PERRY, figura 293), que puede girar alrededor de un eje horizontal, y queda en equilibrio indiferente bajo la acción de su propia fuerza peso ; es decir, su centro de gravedad está en el eje x. Puesta la rueda en rotación, continuaría girando con movimiento (circular) uniforme si

los rozamientos de los soportes no frenasen gradualmente el movimiento. Se tiene un *principio de inercia* para las rotaciones, que no es comprobable experimentalmente, porque los rozamientos se pueden disminuir, pero no anular.

Se aplica a la rueda, inicialmente en reposo, una fuerza motriz $\vec{F}$ ($F = P$) en un plano normal al eje x, meduante el cordón f, arrollado sobre el cilindro de radio a (> 0) y el peso P. Sea el plano de la figura 294 el que pasa por f y es normal al eje x ; O es la proyección del eje de rotación x ; el momento $\vec{M}$ de $\vec{F}$ respecto a O es un vector paralelo al eje x :

$$\vec{M} = \vec{a} \wedge \vec{F} = \text{const.},$$

de módulo $|M| = a \cdot |F|$.

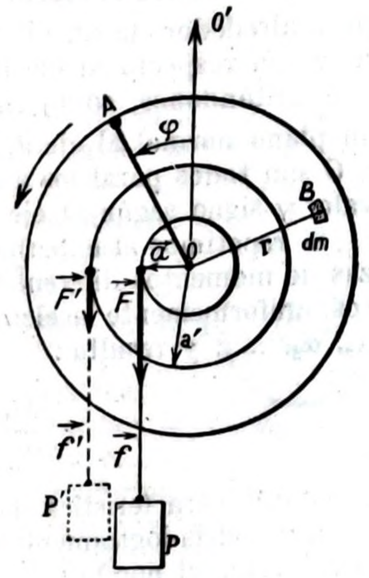


Fig. 294

La rueda se pone en rotación. El índice X (fig. 293) y una señal de referencia A marcada en el borde de la rueda permiten contar el número de vueltas completas ; para mayor refinamiento, una lámina vibrante L traza sobre el borde ahumado del cilindro de la rueda oscilaciones isócronas como en el aparato de LABORDE - C. NEUMANN o de L. FLETCHER (§ 115).

Se puede medir así el ángulo φ (figura 294) descrito por un radio ideal OA (que puede ser cualquiera) a medida que aumenta el tiempo.

Demuestra la experiencia que φ aumenta con el tiempo t empleado en describirlo, según la expresión :

$$\varphi = \frac{1}{2} \alpha \cdot t^2 \; ; \qquad \omega = \frac{d\varphi}{dt} = \alpha \cdot t \; ; \qquad \alpha = \text{const.} \qquad [1]$$

Es decir, el ángulo φ aumenta proporcionalmente al cuadrado del tiempo, y por tanto la velocidad angular ω en el instante t es proporcional al tiempo t contado desde el principio del movimiento. La rueda se mueve con *movimiento circular uniformemente acelerado* ; $\alpha = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ es la *aceleración angular*, constante respecto al tiempo.

φ *se mide en radianes* ; luego, ω se mide en $\frac{\text{rad}}{\text{seg}}$ y α en $\frac{\text{rad}}{\text{seg}^2}$.

Se puede sustituir la fuerza $\vec{F}$ por una fuerza $\vec{F}'$, que actúa con un brazo a' diferente de a, arrollando el hilo f sobre otro de los bordes cilíndricos B_1, B_2 (fig. 293). El experimento reproduce el movimiento uniformemente acelerado [1], y se vuelve a encontrar la *misma* aceleración cuando son iguales las magnitudes de los momentos $a \cdot |F|$ y $a' \cdot |F'|$.

Fuerzas desiguales, inversamente proporcionales a los correspondientes brazos, producen el mismo efecto. Como en la estática, también en dinámica el efecto de una fuerza sobre un cuerpo que puede girar alrededor de un eje viene determinado por el momento $\vec{M}$ de la fuerza respecto al eje de rotación (§ 110, *b*]).

Limitándonos, como en la figura 205, *b*], al caso de fuerzas en un plano normal al eje x, los momentos $\vec{M}$ de las fuerzas respecto a O son todos paralelos a x, y basta considerar la medida de M en valor y signo según el eje x (1).

Si repetimos el experimento haciendo actuar sucesivamente fuerzas de momentos diferentes M_1, M_2, M_3, ..., se obtienen movimientos uniformemente acelerados con las aceleraciones respectivas α_1, α_2, α_3, ..., y resulta :

$$\frac{M_1}{\alpha_1} = \frac{M_2}{\alpha_2} = ... = I, \qquad [2]$$

constante característica de la rueda. I mide la inercia para la rotación, y podría lógicamente llamarse la « masa giratoria » de la rueda, pero recibe el nombre de *momento de inercia* de la rueda.

En general, se tiene :

$$M = I \cdot \alpha\,; \quad \text{vectorialmente :} \quad \vec{M} = I \cdot \vec{\alpha}. \qquad [3]$$

Un momento motor, aplicado a la rueda, le imprime una aceleración angular proporcional a dicho momento. Es ésta una ley análoga a la de acción de las fuerzas sobre un punto, indicada por la expresión.

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}_c.$$

Se pasa de ésta a la [3], sustituyendo la *fuerza* por el *momento de la fuerza*, la *aceleración* por la *aceleración angular*, y la *masa* por el *momento de inercia*.

También ahora el principio de inercia para las rotaciones constituye un caso particular de la [3] : si se tiene $M = 0$, resulta $\alpha = 0$;

(1) En rigor, también el ángulo φ, la velocidad angular ω y la aceleración a son magnitudes vectoriales; pero como todos estos vectores son paralelos al eje x, se puede suprimir la notación vectorial, como en el movimiento rectilíneo de un punto (§ 55).

es decir, si falta el momento motor, la rueda gira con movimiento uniforme (aceleración angular nula) o está en reposo.

Es válido también el principio de la independencia de las acciones simultáneas y es aplicable el concepto de equilibrio dinámico (§ 117).

El valor de I para una rueda dada puede deducirse de la [3] cuando sea conocido el momento motor M y se determine experimentalmente la aceleración α. Se tiene :

$$[I] = \frac{[M]}{[\alpha]} = \frac{[l^2 \cdot m \cdot t^{-2}]}{[t^{-2}]} = [l^2 \cdot m]\,;$$

en el sistema cm, g_m, seg se mide M en dinas·cm.; I en $g_m\ cm^2$. En el sistema m, kg_m, seg se mide en newton·metro ; I en m^2, kg_m.

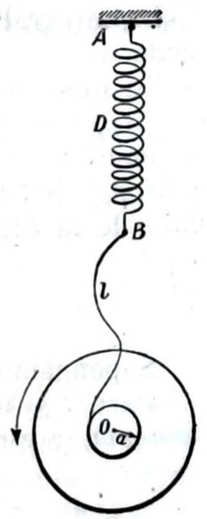


Fig. 295

Debe observarse que el sistema en movimiento está constituído en realidad por la rueda y el peso P, de suerte que el sistema de la figura 293 es ya notablemente complicado (compárese con el caso de la figura 240).

Consideraciones energéticas permiten determinar el valor de I cuando se conozca la forma de la rueda y la masa específica μ del material que la constituye.

Efectivamente, la rueda en movimiento uniforme (velocidad angular ω_0) posee *energía cinética*. Si a lo largo de la garganta de radio a (fig. 295) se ha arrollado un hilo que va al muelle D, fijo en A, apenas el hilo l queda tenso, disminuye la rapidez del movimiento de rotación.

Cuando la rueda se ha parado, ha perdido su energía cinética, pero ha producido el trabajo de alargar el resorte ; a partir de este instante, el muelle, tirando del hilo l pone en rotación retrógrada a la rueda, y ésta recupera (aparte de los rozamientos) la energía cinética inicial cuando el resorte D ha cesado su tracción sobre l. El experimento es análogo al de la figura 250, relativo al movimiento de traslación ; enseña, de acuerdo con el teorema de conservación de la energía, que a igualdad de velocidad inicial ω_0, el alargamiento del muelle es *independiente* del radio a de la garganta.

En general, si ω es la velocidad angular en un cierto instante, la energía cinética $d\mathcal{E}$ de una partícula $dm = \mu \cdot dv$ de rueda (fig. 294), a la distancia r del eje es (1) :

$$d\mathcal{E} = \frac{1}{2}\, dm \cdot u^2 = \frac{1}{2}\, dm \cdot (\omega \cdot r)^2 = \frac{1}{2}\, \omega^2 \cdot dm \cdot r^2\,;$$

(1) En dimensiones, $[\omega] = \frac{[\varphi]}{[t]}$; pero es $[\omega \cdot r] = \frac{[l]}{[t]}$ y no $\frac{[\varphi]}{[l]}$ [*l*]. Véase la nota del § 56.

la energía cinética total $\mathcal{E}$ de la rueda vale :

$$\mathcal{E} = \int_v \frac{1}{2}\omega^2 \cdot dm \cdot r^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \int_v r^2 \cdot dm = \frac{1}{2}\omega^2 \int_v r^2 \cdot \mu \cdot dv. \qquad [4]$$

La integral está extendida a todo el volumen v ocupado por la rueda.

Supongamos la rueda inicialmente en reposo (para $t = 0$ se tiene $\omega = \omega_0 = 0$) y sujeta al momento motor constante $F \cdot a$; la rueda se pone en movimiento, y al cabo del tiempo t habrá girado un ángulo φ y habrá adquirido la velocidad ω; simultáneamente, el trabajo de la fuerza motriz F ha sido :

$$F \cdot a \cdot \varphi = M \cdot \varphi.$$

Supongamos válido el teorema de las fuerzas vivas.

Para $t = 0$ se tiene $\omega = \omega_0 = 0$; por tanto, $\mathcal{E}_0 = 0$, y este teorema se escribe simplemente :

$$\frac{1}{2}\omega^2 \cdot \int_v r^2 dm = M \cdot \varphi \quad \left(\omega = \frac{d\varphi}{dt}\right); \qquad [5]$$

de donde, derivando con respecto a t :

$$M = \left(\int_v r^2\, dm\right) \cdot \alpha.$$

Dada la rueda y dado el momento motor, son constantes M y $\int_v r^2\, dm$; por tanto, α es constante ; el movimiento (giratorio) de la rueda es uniformemente acelerado, con aceleración α. Teniendo en cuenta las condiciones iniciales (para $t = 0$ es $\varphi_{t=0} = 0$; $\omega_{t=0} = 0$), resulta :

$$\varphi = \frac{1}{2}\alpha t^2, \qquad \alpha = \frac{M}{\int_v r^2\, dm}.$$

Según el teorema de las fuerzas vivas, el movimiento de la rueda sometida a un momento constante debe ser (circular) uniformemente

acelerado, de acuerdo con la experiencia ; además, la constante I de la [3] debe ser :

$$I = \int_v r^2 \cdot dm = \int_v r^2 \mu \cdot dv\,; \qquad [6]$$

luego, el momento de inercia se ha de calcular a partir de la forma y de la masa específica μ de la rueda mediante la fórmula [6].

La determinación experimental (más bien grosera, en verdad) de I mediante la [3] y el cálculo de I con la [6], para una rueda dada, conducen a resultados coincidentes.

Por lo tanto, es lícito suponer válido el teorema de las fuerzas vivas, y la [5] se escribe más simplemente :

$$\frac{1}{2} I \cdot \omega^2 = M \cdot \varphi. \qquad [7]$$

Del mismo modo que la [3] es análoga a la [5] del § 115, así también la [7] presenta una analogía formal con la [6] del § 126, relativa al movimiento de un punto : se pasa simplemente de una a otra fórmula sustituyendo la *masa m* por el *momento de inercia I* ; el *espacio s, por el ángulo* φ, y por tanto, $u = \frac{ds}{dt}$ por $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$; en fin, la *fuerza F* se sustituye por el *momento M de la fuerza respecto al eje* (§ 110, *b*) ; y el *trabajo* $F \cdot s$, por el *trabajo* $F \cdot s = F \cdot a \cdot \varphi = M \cdot \varphi$.

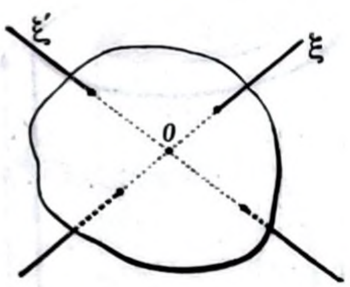


Fig. 296

También se demuestra fácilmente que es válida del mismo modo la análoga de la [3], § 126, que, con nuestras limitaciones, se escribe no vectorialmente :

$$\int_1^2 M \cdot d\varphi = \frac{1}{2} I\, \omega_2^2 - \frac{1}{2} I\, \omega_1^2. \qquad [8]$$

§ 158. **Momentos de inercia de un cuerpo rígido y su cálculo.** Dado un cuerpo (fig. 296) y un eje ξ rígidamente unido al cuerpo, $I = \int_v r^2\, dm$ tiene un valor especial ; es decir, el cuerpo tiene un momento de inercia correspondiente, que varía al cambiar el eje ξ. Se demuestra en mecánica racional que, cualquiera que sea el cuerpo, la ley según la cual varía I al girar ξ alrededor de un punto fijo O,

es aquella según la cual varía el valor recíproco del cuadrado de la longitud del radio vector que va desde el centro de un determinado elipsoide *(elipsoide de inercia)* a un punto cualquiera de su superficie. Se tienen, pues, para todo punto O: un eje ξ_1, al que corresponde el momento de inercia mínimo; otro eje ξ_2, perpendicular a ξ_1, al que corresponde el momento de inercia máximo, y otro ξ_3, normal a los dos primeros, que corresponde al eje intermedio de un elipsoide de tres ejes.

Estos tres ejes ξ_1, ξ_2, ξ_3 se llaman *ejes principales de inercia relativos al punto* O; a ellos corresponden los tres momentos principales de inercia I_1, I_2, I_3 del cuerpo, relativos al punto O. Si O es el baricentro del cuerpo, ξ_1, ξ_2, ξ_3, se llaman *ejes centrales* de inercia, o, más exactamente, *ejes principales del elipsoide central de inercia*; también reciben el nombre de *ejes espontáneos* o *libres* de rotación (§ 166).

Si el cuerpo satisface ciertas condiciones de simetría, serán iguales entre sí dos de los tres momentos I_1, I_2, I_3, o incluso los tres.

Así, por ejemplo, en un sólido homogéneo de revolución, el eje de rotación ξ pasa por el baricentro C y es un eje central de inercia; todos los ejes normales en C al eje ξ son también ejes centrales de inercia; el elipsoide central es de revolución, alrededor del eje ξ.

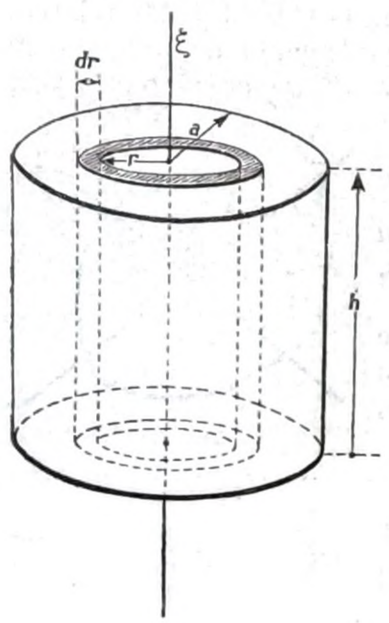


Fig. 297

Dado un cuerpo rígido y un eje ξ unido a él, la [6], § 157, permite calcular el momento de inercia I respecto a dicho eje. El cálculo puede efectuarse si se trata de cuerpos homogéneos de forma geométrica sencilla, y de ejes ξ dispuestos de una manera particularmente simétrica.

Demos algunos ejemplos:

a] **Momento de inercia de un cilindro homogéneo respecto a su eje.** Se divide el cilindro en capas cilíndricas coaxiales, teniendo por eje ξ, de espesor dr (fig. 297) y de radio r, que crece desde cero hasta el radio a del cilindro. Sea h la altura del mismo.

Cada elemento de volumen dv de una de estas capas contribuye a I con el término:

$$dm \cdot r^2 = \mu\, dv \cdot r^2.$$

Pero r es constante para todos los elementos de la capa cilíndrica.

Luego, corresponde a toda la capa el sumando:

$$dI = r^2 \cdot \mu \int_{dr} dv,$$

debiendo extenderse $\int_{dr} dv$ a todos los elementos de la capa; es decir, el volumen de la misma vale:

$$\int_{dr} dv = h \cdot dr \cdot 2\pi r,$$

y se tiene:

$$dI = 2\pi r \cdot dr \cdot h \cdot r^2 \cdot \mu.$$

El momento de inercia de todo el cilindro es, por tanto:

$$I = \int_{r=0}^{r=a} \mu \cdot h \cdot dr \cdot 2\pi r^3 = \frac{1}{2}\pi \mu h \cdot a^4. \qquad [1]$$

Llamando m a toda la masa del cilindro, como $m = \mu h \cdot \pi \cdot a^2$, resulta:

$$I = \frac{1}{2} m a^2. \qquad [2]$$

A igualdad de masa (y, por consiguiente, de peso y de volumen) tiene mayor momento de inercia el cilindro de mayor radio, y, por tanto, de menor altura.

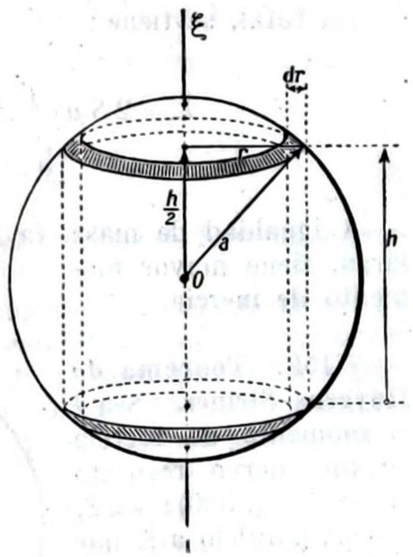


Fig. 298

b] **Momento de inercia de una esfera homogénea respecto a un diámetro** ξ. Divídase la esfera en capas cilíndricas, teniendo por eje ξ, y procédase como en el caso anterior. Se tiene:

$$dI = 2\pi r^3 \cdot dr \cdot h \cdot \mu.$$

Pero ahora h es función de r (fig. 298):

$$\frac{h}{2} = \sqrt{a^2 - r^2}.$$

Luego :

$$I = \int_{r=0}^{r=a} 4\pi \cdot \mu \cdot r^3 \cdot \sqrt{a^2 - r^2} \cdot dr.$$

Se resuelve la integral por sustitución, poniendo $a^2 - r^2 = z$, y se tiene :

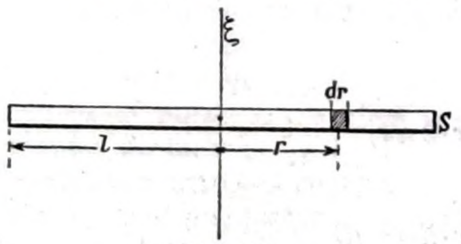


Fig. 299

$$I = \frac{8}{15}\pi \cdot \mu \cdot a^5 = \frac{2}{5} ma^2; \quad [3]$$

en donde $m = \frac{4}{3}\pi a^3 \mu$ es la masa de la esfera.

c] **Momento de inercia de una barra homogénea respecto a un eje ξ normal a la barra en su punto medio.** Sea S la sección de la barra y supongamos que son pequeñas las dimensiones de esta sección respecto a la longitud $2l$ de la barra (fig. 299).

El elemento dr contribuye al momento de inercia en :

$$dI = dr \cdot S \cdot \mu \cdot r^2.$$

En total, se tiene :

$$I = 2S\mu \cdot \int_0 dr \cdot r^2 = \frac{2}{3} S \cdot \mu \cdot l^3 = \frac{1}{3} ml^2. \quad [4]$$

A igualdad de masa, la barra más delgada, y, por tanto, más larga, tiene mayor momento de inercia.

§ 159. Teorema de Huygens-Steiner. Sea I el momento de inercia de un cuerpo respecto al eje ξ (fig. 300) ; sea ξ_0 un eje, paralelo a ξ, que pasa por el baricentro B del cuerpo ; I_0 es el momento de inercia respecto a ξ_0.

Tómense tres ejes cartesianos, x, y, z, de

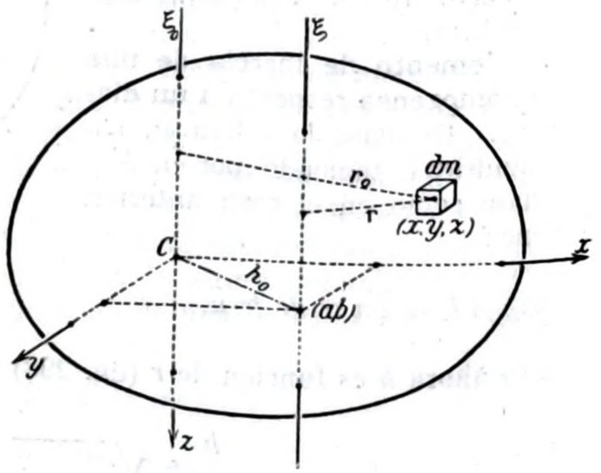


Fig. 300

los cuales el eje z coincide con ξ_0. El eje ξ está determinado por las coordenadas (a, b) de la intersección de ξ con el plano xy. Se tiene :

$$h_0^2 = a^2 + b^2. \quad [1]$$

Cada elemento dm del cuerpo contribuye a I_0 con el término :

$$dI_0 = dm \cdot r_0^2 = dm\,(x^2 + y^2), \quad [2]$$

y contribuye a I con el término :

$$dI = dm \cdot r^2 = dm\,[(x-a)^2 + (y-b)^2] =$$
$$= dm \cdot (x^2 + y^2) + dm\,(a^2 + b^2) - 2\,dm \cdot xa - dm \cdot yb. \quad [3]$$

Se tiene, pues :

$$I = \int (x^2 + y^2)\,dm + \int (a^2 + b^2)\,dm - 2a\int x\,dm - 2b\int y\,dm. \quad [4]$$

Pero llamando m a la masa del cuerpo, $\frac{1}{m}\int x \cdot dm$ y $\frac{1}{m}\int y \cdot dm$ son las dos primeras coordenadas del baricentro B (§ 107, [5]), y por hipótesis son nulas ; por consiguiente, también son nulos $\int x \cdot dm$, $\int y \cdot dm$, y se tiene :

$$I = I_0 + h_0^2 \cdot m > I_0. \quad [5]$$

Esta relación entre I y I_0 constituye el teorema de Huygens-Steiner.

Este teorema tiene un interés fundamental para el cálculo de los momentos de inercia, porque la [5] da I cuando se conoce el momento de inercia I_0, relativo al eje paralelo a ξ, que pasa por el baricentro y la distancia h_0 entre los dos ejes. Conocidos los tres momentos principales de inercia baricéntricos, es decir, relativos al baricentro, se conocen el elipsoide central de inercia (§ 158) y, por tanto, todos los demás momentos de inercia baricéntricos ; en fin, gracias a [5], conocida la masa m, se deduce cualquier otro momento de inercia del cuerpo.

En un haz de ejes paralelos, corresponde el momento de inercia mínimo al ξ_0 que pasa por el baricentro ($h_0 = 0$).

A todos los ejes paralelos entre sí y equidistantes del baricentro, formando un cilindro circular cuyo eje es ξ_0, corresponde igual momento de inercia del cuerpo.

§ **160. Experimentos sobre momentos de inercia.** Una barra que puede girar alrededor del eje x (fig. 301) lleva dos bloques, A_1, A_2, de igual masa m, que pueden fijarse a una distancia r de x, variable. Pero el centro de gravedad cae siempre en x, en virtud de la simetría del aparato. El peso P aplica una fuerza $\vec{F}$, y, por tanto, un momento constante. La punta C, sostenido por la lámina vibrante Z, dibuja sobre el tablero una sinusoide de ondas cada vez más alargadas, como en los dispositivos de C. NEUMANN-LABORDE

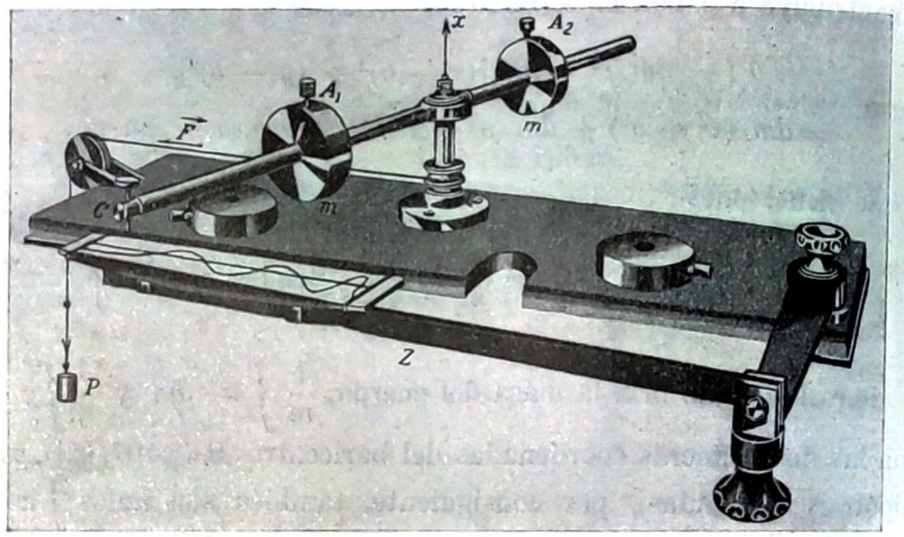


Fig. 301

y de L. FLETCHER (§ 115). Se puede así tener una idea, por lo menos cualitativa, de la aceleración angular.

Se repite el experimento siempre con el mismo momento motor, pero variando la distancia r entre los bloques A_1, A_2, y el eje x. La aceleración angular α varía, indicando las variaciones de I en función de r.

Si el momento de inercia de la barra es despreciable, se tiene $I = 2 \cdot m \cdot r^2$; los experimentos verificados de este modo demuestran que al duplicar r, se reduce la aceleración α a la cuarta parte, aproximadamente.

Un sólido de la forma indicada en la figura 302 puede girar alrededor del eje longitudinal x_1 o del eje transversal x_2. Sirve como fuerza motriz un peso aplicado a un hilo arrollado en B_1, en el primer caso, y en B_2, en el segundo. Los diámetros en B_1 y en B_2 son iguales, por lo cual, con un mismo peso motor P, se obtienen momentos motores iguales.

La aceleración α es mucho menor en el segundo caso, lo que indica que el momento de inercia I_2 respecto a x_2 es mucho mayor que el momento de inercia I_1 respecto a x_1. Esto está conforme con las fórmulas [2] y [4] del § 158.

Estos dos experimentos establecen la diferencia fundamental entre la inercia del movimiento de traslación (masa), que es proporcional al peso, y la inercia del movimiento de rotación (momento de inercia), que no sólo depende del peso del cuerpo que gira, sino también de su forma geométrica respecto al eje de rotación : se obtiene un gran momento de inercia, para una masa dada, disponiendo esta masa a la máxima distancia del eje de rotación *(volantes)*.

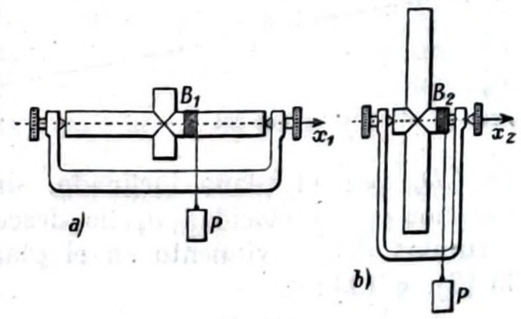


Fig. 302

La existencia de una inercia para la rotación obliga a tratar de nuevo los experimentos descritos en el § 115, porque el carrito utilizado en el plano inclinado y los órganos móviles en la máquina de ATWOOD no están dotados de un movimiento puro de traslación. Las ruedas del carrito contribuyen a la inercia no sólo en virtud de su masa, sino también por su momento de inercia ; la polea de la máquina de ATWOOD contribuye a la inercia del sistema, a causa de su momento de inercia.

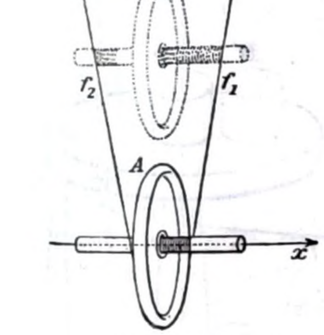


Fig. 303

Análogamente, en los fenómenos de choque entre las bolas del billar, la energía cinética de rotación obliga a modificar la teoría simple de los §§ 140 y 141.

He aquí otros dos experimentos en los cuales se exalta intencionadamente la influencia de la energía cinética de rotación.

La rueda A (fig. 303, *péndulo de* MAXWELL) está suspendida mediante los dos hilos f_1 y f_2, que están arrollados en el mismo sentido sobre el eje x. La rueda A, al quedar en libertad, baja por efecto de su peso, pero se ve obligada a rodar para desovillarse los hilos f_1 y f_2.

La rueda desciende lentamente (pequeña energía cinética de traslación), poniéndose en rotación rápida (gran energía cinética de rotación). Pero al terminar su descenso, ha adquirido en energía cinética el equivalente a la energía de posición, perdida en el campo de gravedad : después que los hilos se han desovillado, continúa girando la rueda, ovillándose de nuevo los hilos sobre su eje y su-

biendo. Si no hubiera rozamientos, la rueda volvería a su nivel primitivo.

El carrito *CD* (fig. 304) desciende por el plano inclinado *ON*, constituído por dos carriles paralelos. El carrito puede descender de dos maneras mediante un juego de cojinetes de bolas y de una púa conveniente:

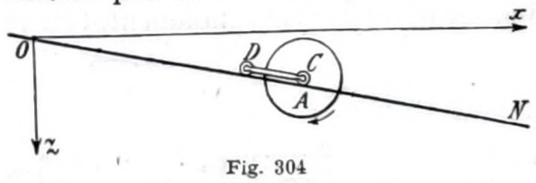


Fig. 304

1.º El disco *A* se desliza (mediante los cojinetes de bolas), transportado por el carrito *CD*, por el plano inclinado, sin adquirir energía cinética de rotación; la velocidad u_1 de descenso se rige por las conocidas fórmulas del movimiento en el plano inclinado, en particular por la [2], § 133:

$$\frac{1}{2} m \cdot u_1^2 = Pz;$$

en donde *P* es el peso del carrito y *z* la altura de caída.

2.º Inmovilizados con una púa los cojinetos de *A*, el eje de la rueda *C* queda rígidamente unido a *A*, y durante el descenso del carrito el disco se ve obligado a ponerse en rotación. La velocidad u_2 de traslación del descenso es muy inferior a la u_1 del caso anterior, y al final del descenso, la energía cinética es en gran parte energía de rotación. Puede aplicarse siempre el teorema de conservación de la energía, expresado ahora de este modo:

$$\frac{1}{2} m u_2^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = Pz;$$

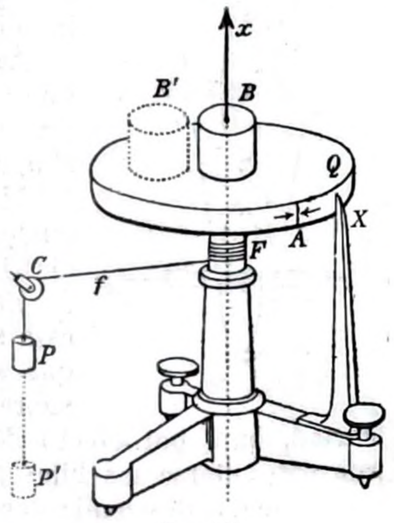


Fig. 305

en donde ω es la velocidad angular de rotación del disco *A*, e *I* su momento de inercia. Cuando el carrito *C* está en reposo en la parte baja del plano inclinado, trátese de lanzarlo en el sentido *NO* con un empuje muscular, a fin de que mediante éste suba por el plano inclinado. Sorprende grandemente la distinta impresión de resistencia al movimiento (inercia) que produce el carrito, según que el disco *A* sea empujado con movimiento de traslación simple (primera manera) o bien obligado a ponerse en rotación (segunda manera).

En fin, el aparato de la figura 305 está constituído por una plataforma horizontal *Q*, ligera, pero rígida, que puede girar con poco rozamiento alrededor del eje vertical *x*. Se produce un movimiento de rotación uniformemente acelerado de *Q* mediante el peso *P*, la polea *C* y el hilo *f*, arrollado en el collar *F*. El aparato puede servir, como el de la figura 293, para comprobar las igualdades [1] y [2] del § 157. Para contar las vueltas de *Q* hay un índice *X* y una señal de referencia *A*. Dejando partir a *P* y *Q* del reposo, determínese con un cuentasegundos el tiempo *t* necesario para que *P* alcance, por ejemplo, el suelo, en *P'*.

En la primera de las [1], § 157, son conocidos φ y *t*, y se busca α. Conocido el radio *a* del collar *F*, se conocerá el momento motor $M = a \cdot P$; la [3], § 157, se escribe:

$$a \cdot P = \alpha I_Q,$$

y permite determinar el momento de inercia I_Q de la plataforma *Q*.

Póngase encima de la plataforma un cuerpo *B*; por ejemplo, una polea coaxial con *Q*. El peso *P* produce un movimiento mucho más lento, porque el momento de inercia de la plataforma ha pasado a ser $I_Q + I_B$; en donde I_B es el momento de inercia de la polea respecto al eje *x*. Para obtener el mismo tiempo *t* en el descenso de *P* hasta *P'* y, por tanto, la misma ley del movimiento, habrá que sustituir el peso *P* por otro peso mayor: $P + P_0$. Se tiene ahora:

$$(I_Q + I_B)\,\alpha = a\,(P + P_0).$$

Luego, es:

$$I_B = \frac{a\,P_0}{\alpha},$$

en cuyo segundo miembro todas las magnitudes son conocidas.

Repítase el ensayo colocando *B* en *B'*; el experimento demuestra que se encuentra ahora para el mismo cuerpo, colocado en la nueva posición *B'*, un momento de inercia mayor: $I'_B > I_B$.

§ 161. Teorema del momento cinético. En el movimiento de la rueda se cumple un teorema análogo al de las cantidades de movimiento (§ 124).

Una partícula $dm = \mu \cdot dv$ de la rueda (fig. 294) tiene un *momento cinético* respecto al eje *x* (fig. 293) que viene dado, por definición, por la expresión:

$$\overrightarrow{d\mathfrak{K}} = \overrightarrow{OB} \wedge (dm \cdot \vec{u}) = \vec{r} \wedge (dm \cdot \vec{u}); \qquad [1]$$

en donde $\overrightarrow{OB} = \vec{r}$ es la distancia desde dm al eje x. Luego, $d\vec{\mathfrak{R}}$ es paralelo al eje x, y su magnitud, en valor y signo, sobre este eje es:

$$d\mathfrak{R} = r \cdot dm \cdot u = \omega \cdot r^2 \cdot dm,$$

porque en el movimiento de rotación del cuerpo rígido, $\vec{u}$ es normal a $\vec{r}$. Todo el cuerpo tiene un momento cinético $\vec{\mathfrak{R}}$ paralelo al eje x, y cuya medida sobre este eje es:

$$\mathfrak{R} = \int_v d\mathfrak{R} = \omega \cdot \int_v dm \cdot r^2 = I \cdot \omega. \qquad [2]$$

Vectorialmente, se tiene:

$$\vec{\mathfrak{R}} = I \cdot \vec{\omega}.$$

Análogamente, el momento del impulso respecto al eje x es:

$$\vec{a} \wedge \vec{F} dt = (\vec{a} \wedge \vec{F})\, dt = \vec{M} \cdot dt, \qquad [3]$$

igual al impulso del momento $\vec{M}$.

Esto sentado, a partir de la [3], § 157, se tiene (es inútil la notación vectorial):

$$M \cdot dt = I \cdot \alpha \cdot dt = I \cdot d\omega = d(I\omega) = d\mathfrak{R}\,; \qquad [4]$$

y en el intervalo de tiempo (t_1, t_2):

$$\int_{t_1}^{t_2} M \cdot dt = I\omega_2 - I\omega_1 = \mathfrak{R}_2 - \mathfrak{R}_1 = \Delta\mathfrak{R}. \qquad [5]$$

Más en general, cuando $\vec{F}$ no sea normal al eje x, debe sustituirse $\vec{a} \wedge \vec{F}$ por el momento de $\vec{F}$ respecto a dicho eje (§ 110 *b*]), y la [5] se enuncia así: *El impulso del momento de la fuerza respecto al eje de rotación es igual a la variación del momento cinético respecto a dicho eje.*

Luego, este teorema se deduce de la ley del movimiento y nada añade a dicha ley.

Por el contrario, el principio de acción y reacción establece (§§ 121 y 124) que las fuerzas internas no son capaces de hacer variar ni la cantidad de movimiento ni el momento cinético del sistema respecto a un punto cualquiera.

Respecto al eje x, no pueden producir variaciones del momento cinético ni las fuerzas internas, ni las externas cuyas rectas de aplicación encuentren al eje x. En particular, las reacciones de la ligadura (supuesta lisa) constituída por cojinetes dentro de los cuales gira el eje x, pasan siempre por este eje (§ 110, final). Luego, no se deben contar las reacciones de la ligadura entre las fuerzas externas capaces de producir un momento cinético *respecto a* x.

Si tenemos un sistema de cuerpos sujetos a la única ligadura constituída por un eje común fijo de rotación, las fuerzas internas entre las varias partes del sistema no producen variación del momento cinético *respecto a dicho eje común de rotación.*

Si se reducen a las que, a través de la ligadura (eje fijo), están aplicadas al sistema, las fuerzas externas tienen momento nulo; por

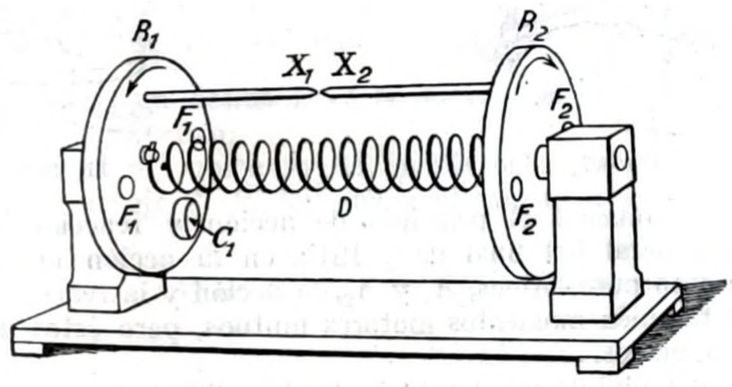


Fig. 306

tanto, el momento del impulso respecto al eje es también nulo.

Esto explica una serie de experimentos de conservación del momento cinético (respecto a un *eje especial:* el de rotación) en sistemas que no están aislados, pero que están sujetos a fuerzas externas constituídas tan sólo por reacciones sobre el eje de rotación, o por fuerzas que pasan por dicho eje.

Dos ruedas coaxiales, R_1, R_2 (fig. 306), están unidas por un resorte D, que está mantenido en tensión y que, al soltarlo, tiende a hacer girar en sentido contrario a R_1 y R_2. Haciendo saltar el muelle, demuestra la experiencia que R_1 y R_2 han adquirido momentos cinéticos, $I_1 \cdot \omega_1$ y $I_2 \cdot \omega_2$, iguales y opuestos; las velocidades angulares de las dos ruedas resultan, efectivamente, de sentido contrario e inversamente proporcionales a sus correspondientes momentos de inercia. Los índices X_1, X_2 (equilibrados, respectivamente, por contrapesos C_1, C_2) permiten comprobar más fácilmente las velocidades angulares adquiridas. Los agujeros F_1, F_1 y F_2, F_2 sirven para empotrar en ellos masas adicionales, con el fin de hacer variar los mo-

mentos de inercia de las ruedas, y especialmente sus proporciones relativas, en los experimentos sucesivos.

Mientras la locomotora de la figura 307 se pone en movimiento en un sentido, gira la plataforma en sentido opuesto.

De los experimentos de las figuras 306 y 307 resulta claro cómo se debe

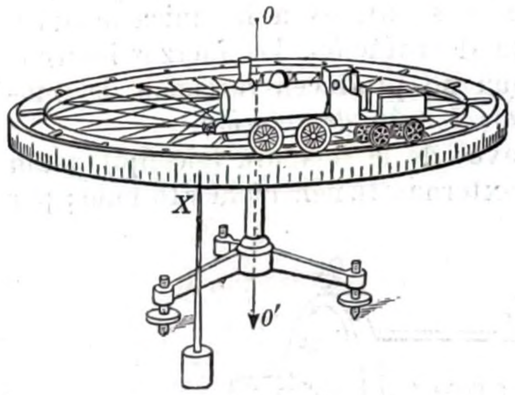


Fig. 307

Fig. 308

aplicar a los mismos el principio de acción y reacción según el enunciado general del final de § 121; en la acción mutua entre dos cuerpos no puntiformes, A_1 y A_2, la acción y la reacción pueden engendrar también momentos motores mutuos, pero éstos deben ser iguales y opuestos.

Sobre una plataforma giratoria Q (fig. 308) se encuentra una persona de pie, con los brazos abiertos, sosteniendo masas de un par de kilogramos en cada mano. Se da un movimiento de rotación a la plataforma; si después la persona aproxima los brazos al cuerpo, aumenta sensiblemente su velocidad de rotación. Se debe esto a que el producto $I\omega$ (momento cinético) debe permanecer constante, y, por tanto, habiendo disminuído I al aproximar los brazos al eje de rotación, tiene que aumentar ω.

Fig. 309

Sobre la misma plataforma, en reposo, se coloca una persona que lleva consigo una gruesa masa en rotación rápida alrededor de un eje vertical x (figura 309). Sirve bien la rueda de PERRY (fig. 293) o una rueda de bicicleta puesta en rotación rápida. La persona frena la rueda con la mano. La rueda se para (respecto a la persona); pero el conjunto rueda - experimentador - plataforma Q se pone en rotación en el sentido en que giraba la rueda. Se ha conservado el momento de la cantidad de movimiento *respecto al eje x*. Como la

masa giratoria ha aumentado mucho, la rotación de la plataforma y de la persona es mucho más lenta que la inicial de la rueda.

§ **162. Péndulo compuesto.** Un péndulo compuesto es un cuerpo rígido que puede girar alrededor de un eje horizontal ζ que no pasa por el centro de gravedad. Sea O (fig. 310) la traza del eje ζ, que supondremos, por ejemplo, dirigido desde O hacia el lector, de modo que en el caso de la figura el ángulo ξ será positivo. Supondremos que el plano de la figura contiene también el centro de gravedad, que coincide con el baricentro G del cuerpo. Sea m la masa del péndulo.

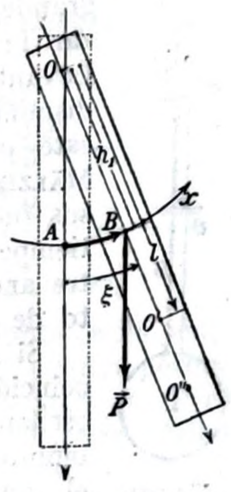


Fig. 310

Éste tiene una posición de equilibrio estable cuando el centro de gravedad se halla en A, de modo que OA sea vertical y dirigido hacia abajo. Cualquier otra posición del péndulo queda determinada cuando se da, en valor y signo, el ángulo $\xi = \widehat{AOB}$; en donde B es la nueva posición del centro de gravedad.

Llamando I al momento de inercia del cuerpo respecto al eje ζ, la ley del movimiento es (§ 157, [3]):

$$M = I\,\frac{d^2\xi}{dt^2}. \qquad [1]$$

Pero en valor y signo es:

$$M = -P\cdot h_1\cdot \operatorname{sen}\xi\,;$$

en donde P es la fuerza peso; h_1, la distancia del centro de gravedad contada desde el eje ζ, y $P\cdot h_1$, el momento estático máximo ($M_{máx}$) que la fuerza peso $P = m\,g$ puede aplicar al péndulo. La [1] se convierte, pues, en:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{M_{máx}}{I}\operatorname{sen}\xi = 0. \qquad [2]$$

Para pequeñas oscilaciones puede ponerse: $\operatorname{sen}\xi = \xi$ (ξ en radianes); $M = -P\cdot h_1\cdot\xi = -k^2\cdot\xi$. Introduciendo la medida x del arco AB según el eje x, se tiene $x = \xi\cdot h_1$, y resulta:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{M_{máx}}{I}\,x = 0, \qquad [3]$$

completamente análoga a la [3] del § 144.

El movimiento del péndulo compuesto es armónico, como el del péndulo simple, y las oscilaciones de pequeña amplitud son insócronas. El período es:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{M_{máx}}} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{m \cdot g \cdot h_1}} \qquad [4]$$

El péndulo de la figura 311 está constituído por una lenteja grande, fija, L, y una varilla B, por la que puede deslizar la masa A; O es la traza del eje de oscilación ξ. Levantando A, se obtiene a la vez el aumento de I y la disminución de h_1 y aumenta el período de oscilación. En este principio se basa el *metrónomo de* MÄLZEL (fig. 312), capaz de marcar, con sus fuertes batidos, intervalos iguales de tiempo, cuya duración puede variarse entre anchos límites mediante el corrimiento de la masa A.

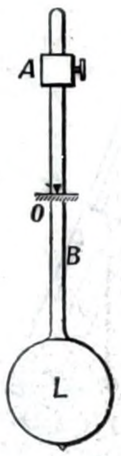


Fig. 311

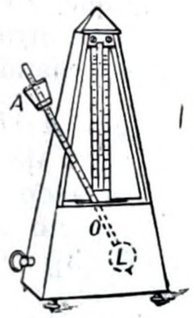


Fig. 312

Si A (fig. 311) se levanta hasta hacer coincidir el centro de gravedad del sistema oscilante con el eje O, se hace nulo h_1, y T, infinito. El sistema ya no oscila, porque el equilibrio es indiferente. Si se levanta A todavía más, el equilibrio se vuelve inestable.

De la [6], § 144, y de la [4], se deduce que la *longitud reducida* l, del péndulo compuesto, es decir, (la longitud del péndulo simple del mismo período) es:

$$l = \frac{I}{mh_1} = \frac{I_0 + mh_1^2}{mh_1}; \qquad [5]$$

en donde I_0 es el momento de inercia respecto a un eje ξ_0, paralelo a ξ y que pasa por el baricentro del cuerpo (§ 159, [5]).

El punto O' (fig. 310) de la recta OB, tal que sea $OO' = l$. es la traza de un eje ξ' paralelo a ξ. El punto O' se llama *centro de oscilación*; ξ', *eje de oscilación*. O es el *centro de suspensión*, y ξ, el *eje de suspensión*. Cualquiera partícula del péndulo compuesto, situada a la distancia r del eje de suspensión, puede imaginarse que está unida a este eje y constituye así un péndulo simple, que oscilaría con período:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Si las partículas situadas a la distancia $l = OO'$ del eje de suspensión oscilaran solas, lo harían tal como oscilan en realidad, por estar unidas rígidamente al resto del péndulo compuesto. Las partículas más próximas al eje de suspensión quedan retardadas por la ligazón rígida que las une con el resto del cuerpo; las partículas más lejanas quedan, por dicha ligazón, aceleradas; las partículas del eje ξ', que pasa por O', oscilan como si estuvieran libres.

La influencia de esta ligazón entre las partículas de un cuerpo rígido, sobre el período de oscilación, se demuestra experimentalmente con el aparato de la figura 313. El robusto estribo SS está provisto de un cuchillo de suspensión O y sirve para sostener una barra larga, rígida, AB, mediante un perno O', bien atornillado y lubricado. Así, AB puede oscilar alrededor de O' como eje; SS puede oscilar alrededor del eje O. Si se fija rígidamente la barra AB al estribo mediante las cuñas CC', el conjunto oscila como un péndulo, compuesto y el período de oscilación es muy largo, porque en la [4] es ahora muy grande I y relativamente pequeño h_1. Pero si quitamos las cuñas $C\,C'$, ahora el sistema puede hacerse oscilar alrededor de O, mientras AB permanece paralelo a sí mismo. El sistema es comparable a un péndulo SS, en el cual toda la masa de AB se ha concentrado en O'; el período de oscilación es mucho menor que en el caso precedente.

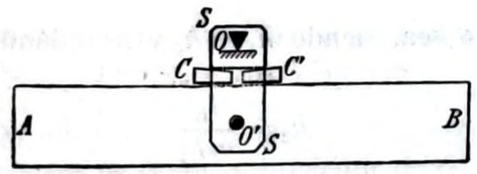


Fig. 313

Volviendo a la [5], puede ésta escribirse así:

$$l = \frac{I_0}{m\,h_1} + h_1 > h_1; \qquad [6]$$

luego, el centro de gravedad G, que coincide con el baricentro B (§ 310), está comprendido entre O y O'.

Cualquier eje paralelo a ξ y situado a la distancia h_1 del baricentro puede imaginarse como nuevo eje de suspensión. Para uno cualquiera de estos ejes, cuyo conjunto constituye un cilindro de eje ξ_0, la longitud reducida del péndulo compuesto viene dada siempre por la [6]; es decir, es constante. El péndulo compuesto oscila con el mismo período alrededor de uno cualquiera de estos ejes.

Vamos a ver si existen otros ejes ξ' (constituyendo otro cilindro de eje ξ_0 y radio $h_2 + h_1$) alrededor de los cuales el péndulo oscile con un período

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + h_2^2 \cdot m}{m\,gh_2}}$$

igual al período

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + h_1^2 \cdot m}{m\, g h_1}}$$

Es preciso que sea:

$$\frac{I_0 + h_2^2 \cdot m}{h_2} = \frac{I_0 + h_1^2 \cdot m}{h_1};$$

esto es:

$$(h_1 - h_2)\, I_0 = h_1 h_2 m\, (h_1 - h_2);$$

o sea, siendo $h_1 \neq h_2$ y recordando la [6]:

$$h_2 = \frac{I_0}{m\, h_1} = l - h_1, \quad \text{o también:} \quad h_1 + h_2 = l. \qquad [7]$$

Por lo tanto, dado un cuerpo rígido (fig. 314) cuyo centro de gravedad es G, fijando un eje ξ_0 en el baricentro (por ejemplo, normal al plano de la figura), existen dos haces de rectas paralelas a ξ_0, constituyendo dos cilindros circulares *(cilindros conjugados)* que tienen ξ_0 como eje común y de radios h_1 y h_2, tales que el cuerpo rígido oscila con el mismo período alrededor de cualesquiera de estas rectas tomada como eje de suspensión. En la figura están dibujadas las circunferencias de intersección con el plano de la figura de dicho par de cilindros conjugados. Practicando agujeros en los dos arcos conjugados, se pueden pasar por ellos los ejes de suspensión y hacer oscilar el cuerpo, comprobando la igualdad de los períodos de oscilación. A cada punto O_1 de uno de estos arcos se puede hacer corresponder el punto O_1' del otro arco, diametralmente opuesto respecto al baricentro G. La distancia $O_1\, O_1' = h_1 + h_2 = l$ es la *longitud reducida* del péndulo compuesto.

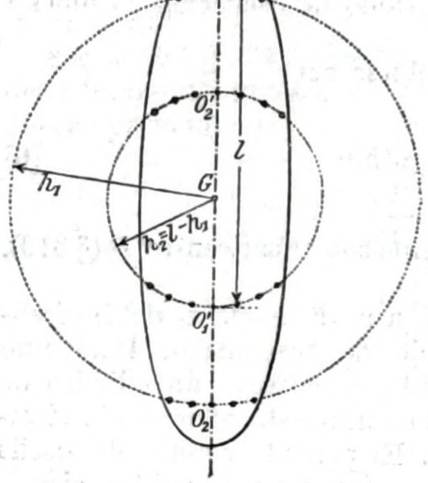


Fig. 314

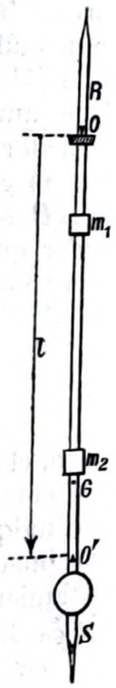


Fig. 315

O_1 y O_1' determinan dos *ejes conjugados*.

Si se hubiese tomado $h_1 = \sqrt{\frac{I_0}{m}}$, habría resultado $h_2 = h_1 = \frac{l}{2}$; los dos cilindros conjugados habrían coincidido. Excluímos este caso particular.

En la figura se tiene $h_1 > h_2$. Se puede decir, *grosso modo*, que el período de oscilación es común para los dos ejes de suspensión O_1' y O_1, porque lo que se gana en rapidez de oscilación a causa del momento motor ($mh_1 > mh_2$), se pierde debido al momento de inercia ($I_0 + mh_1^2 > I_0 + mh_2^2$).

El *péndulo reversible de* KATER (fig. 315) realiza de una manera muy sencilla estas condiciones.

En la varilla rígida RS van montadas dos cuchillas, O y O', que por construcción pertenecen aproximadamente a dos cilindros conjugados. Las dos cuchillas están fijas y se conoce su distancia l. Corriendo las pequeñas masas m_1 y m_2, se procura que el péndulo oscile con el mismo período T, tanto alrededor de O como alrededor de O'; es decir, se hace de manera que los cilindros conjugados vengan a pasar exactamente por O y O', respectivamente.

El centro de gravedad G del sistema, por razón de simetría, se encuentra ciertamente en la recta OO'. Se comprueba que G está dentro del segmento OO', pero *no* equidista de O y de O'. Se tiene así la seguridad de que O y O' constituyen dos ejes conjugados, y que OO' es la longitud reducida l del péndulo.

En conclusión, se conoce el período T, común a los centros de suspensión O y O', y la longitud l del péndulo simple que tendría el mismo período T.

Luego, en la $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ se conocen experimentalmente l y T, y puede deducirse el valor de g.

l y T se miden con gran exactitud; l es, en efecto, la distancia entre las aristas bien definidas de las dos cuchillas paralelas. Y como se experimenta con péndulos de muy pequeño amortiguamiento, se puede medir el tiempo τ necesario para que el péndulo efectúe, por ejemplo, 1000 oscilaciones; el error cometido en la medida de τ resulta dividido por 1000 al calcular $T = \frac{\tau}{1000}$.

Se puede determinar g en $\frac{\text{cm}}{\text{seg}^2}$ hasta la tercera cifra decimal.

§ 163. Cuerpo rígido libre. Nos limitaremos a describir tres experimentos:

a] Un tablero S (fig. 316) está apoyado sobre una mesa horizontal Π mediante algunas bolitas de acero interpuestas. Se logra

obtener una movilidad aceptable para las traslaciones y rotaciones del tablero sobre el plano, en todas direcciones.

Torciendo el cordoncito f, se puede aplicar, mediante la horquilla R y el puentecito L, un par motor en un ángulo del tablero. Éste

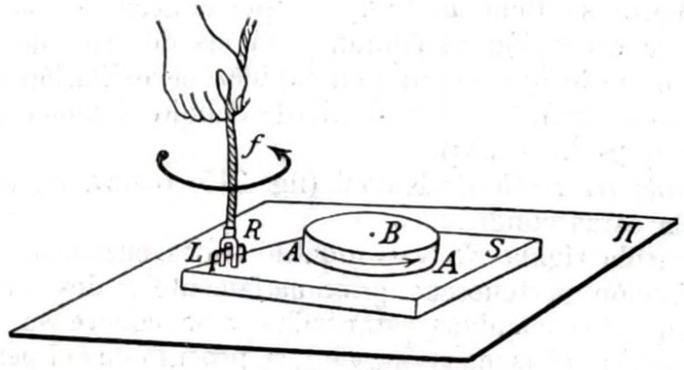


Fig. 316

se pone a girar *alrededor del baricentro* B. Es el mismo experimento de la figura 196.

b] El mismo tablero está sometido a la fuerza motriz $\vec{F}$ (fig. 317) mediante un hilo f que pasa por la garganta de la polea C.

El baricentro B del tablero S se encuentra en la recta determinada por el hilo f. Bajo el efecto de la fuerza motriz $\vec{F}$ se mueve el tablero con movimiento de traslación en el sentido de $\vec{F}$.

c] Se repite el experimento anterior, pero arrollando el hilo f en el borde del disco AA (figura 318); B no se encuentra ya en la recta de acción de $\vec{F}$.

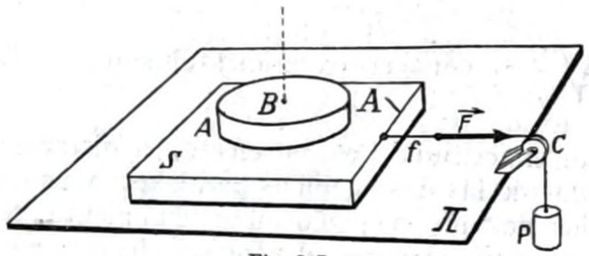


Fig. 317

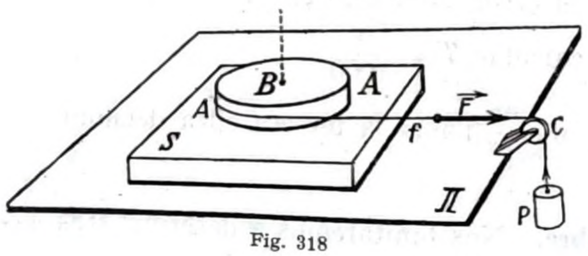


Fig. 318

Ahora se mueve el tablero con un movimiento mucho más complicado. En el caso, particularmente simétrico, en que el baricentro B se halle en el centro de la figura, se mueve el tablero en el sentido de $\vec{F}$, rodando; puede imaginarse que este movimiento está compuesto del movimiento de traslación que produce $\vec{F}$ en el caso *b*] y de un movimiento de rotación alrededor de un eje vertical que pasa por B.

§ 164. Rodadura. Una rueda de radio r (fig. 319) avanza girando por el plano horizontal LN; es decir, la rueda «rueda» por el plano.

Sean m la masa y C la traza del eje ξ_0 de la rueda; sobre este eje se encuentra el centro de gravedad, que coincide con el baricentro.

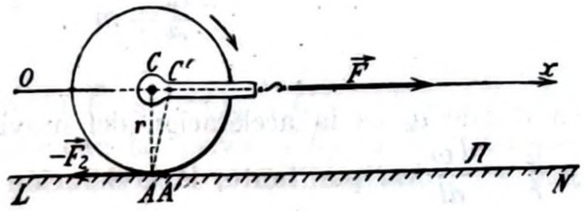


Fig. 319

Llamemos I_0 al momento de inercia de la rueda respecto al eje ξ_0. Supongamos que el rozamiento entre la rueda y el plano sea suficiente para asegurar la rodadura sin que la rueda deslice. Entonces el punto A (1) de la rueda, que en un instante dado se halla en contacto con el plano, estará en reposo en dicho instante: la rueda se apoya en cada momento por el punto de contacto con el plano, y rueda alrededor de este punto. Sea I el momento de inercia de la rueda respecto al eje de rotación ξ que pasa por A, paralelo al eje ξ_0 de la rueda. Se tiene (§ 159, [5]): $I = I_0 + mr^2$. Si en un tiempo dt, C adelanta en $dx = CC'$, el radio AC ha girado en $d\varphi = \widehat{CAC'}$. La rueda tiene un movimiento de rotación, alrededor del punto A, con velocidad angular $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$.

Pero se tiene también $d\varphi = \widehat{A'CA} = \dfrac{dx}{r}$; en donde r es el radio CA de la rueda y A' es el nuevo punto de contacto con el suelo; es decir, que la rodadura *(movimiento cicloidal)* se puede imaginar compuesta de los dos movimientos siguientes:

traslación de C en el sentido del eje x con velocidad

$$\frac{dx}{dt} = r\frac{d\varphi}{dt} = r\cdot\omega;$$

rotación *alrededor de* C con velocidad angular $\dfrac{d\varphi}{dt} = \omega$.

Supongamos que a partir del reposo se aplica la fuerza motriz horizontal $\vec{F}$.

El teorema de la energía (§ 157, [5]) se escribe:

$$F\cdot x = \frac{1}{2} I\,\omega^2, \quad \text{o sea} \quad F\cdot x = \frac{1}{2}\,\frac{I_0 + mr^2}{r^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2; \qquad [1]$$

(1) Más exactamente: la generatriz del cilindro que constituye la superficie lateral de la rueda; A es la traza de dicha generatriz.

e integrando (tal como se ha obtenido la [1] a partir de la [5] en el § 157), se tiene:

$$x = \frac{1}{2}\frac{F}{\frac{I_0}{r^2}+m}t^2 = \frac{1}{2}a_c \cdot t^2; \qquad [2]$$

en donde a_c es la aceleración del movimiento de traslación de C, y $\frac{a_c}{r} = \frac{d\omega}{dt}$ es, por tanto, la aceleración angular de la rotación alrededor de C.

Si la rueda se moviese deslizando (sin rodar), la fuerza $\vec{F}$ habría producido el movimiento:

$$x' = \frac{1}{2}\frac{F}{m}\cdot t^2. \qquad [3]$$

La rotación produce el efecto de aumentar aparentemente la masa m del cuerpo en el término $\frac{I_0}{r^2}$.

Se había ya indicado esto en el § 160 (fig. 304).

Obsérvese que la energía cinética de la rueda:

$$\frac{1}{2}(I_0 + mr^2)\cdot\omega^2$$

puede imaginarse como suma de dos partes:

$$\frac{1}{2}I_0\omega^2 + \frac{1}{2}mr^2\omega^2 = \frac{1}{2}I_0\omega^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2;$$

siendo una la energía cinética de rotación *alrededor del baricentro C*, y la otra, la energía cinética de traslación, de acuerdo con la descomposición indicada anteriormente del movimiento cicloidal.

Puede imaginarse, pues, que la magnitud F de la fuerza $\vec{F}$ se divide en dos partes $F_1 + F_2 = F$; una fuerza F_1 que produce el movimiento de traslación:

$$F_1 = a_c m = \frac{F}{m + \frac{I_0}{r^2}}\cdot m = F\cdot\frac{mr^2}{mr^2 + I_0};$$

y otra:

$$F_2 = \frac{F}{m + \frac{I_0}{r^2}}\cdot\frac{I_0}{r^2} = F\cdot\frac{I_0}{mr^2 + I_0} = F\cdot\frac{I^0}{I},$$

que es la magnitud de una fuerza $\vec{F}_2$ aplicada a C en el sentido del eje x, la cual constituye, junto con la fuerza $-\vec{F}_2$ en A, originada por el rozamiento necesario para impedir el deslizamiento, un par de momento

$$M = F_2\cdot r = F\cdot\frac{I_0}{mr^2 + I_0}\cdot r,$$

capaz de hacer girar la rueda *alrededor del baricentro* C, con la aceleración angular:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{M}{I_0} = \frac{F\cdot r}{mr^2 + I_0} = \frac{a_c}{r}.$$

Si se quiere evitar el deslizamiento, la magnitud del rozamiento en A debe ser mayor, o por lo menos igual, a $|F_2|$.

Si la rueda estuviera apoyada sobre un plano inclinado, F sería, como de costumbre, la componente $m\cdot g\cdot\operatorname{sen}\alpha$ del peso mg de la rueda; la fuerza de rozamiento sería (§ 134):

$$f\cdot mg\cdot\cos\alpha,$$

y la condición de rodadura sin deslizamiento sería:

$$f\cdot mg\cdot\cos\alpha \geq mg\cdot\operatorname{sen}\alpha\cdot\frac{I_0}{mr^2 + I_0} = mg\cdot\operatorname{sen}\alpha\cdot\frac{I_0}{I}.$$

§ **165. Rozamiento de rodadura.** Coloquemos una rueda sobre un plano inclinado.

Sean $\vec{P}$ la fuerza peso aplicada en C (fig. 320) y A el pie de la perpendicular bajada desde C al plano inclinado.

La experiencia demuestra que, después de un empuje inicial, la rueda baja rodando con movimiento uniforme y con cierta velocidad de traslación u del baricentro C, siempre que la inclinación α del plano tenga un valor especial φ.

En tales condiciones de equilibrio dinámico, el movimiento uniforme consta de giros infinitesimales sucesivos alrededor del punto

de la rueda que va tomando sucesivamente la posición A (centro instantáneo de rotación, o, de un modo más preciso, traza del eje instantáneo de rotación).

Como se tiene equilibrio dinámico, la resultante de las fuerzas aplicadas existe y es nula ; el cuerpo está sometido a la fuerza peso $\vec{P}$ y a un sistema de presiones en la superficie de contacto con el plano subyacente ; la resultante $\vec{R}$ de estas presiones es la reacción de ligadura del plano y, por tanto, es igual y contraria a $\vec{P}$ y tiene la misma recta de acción BC.

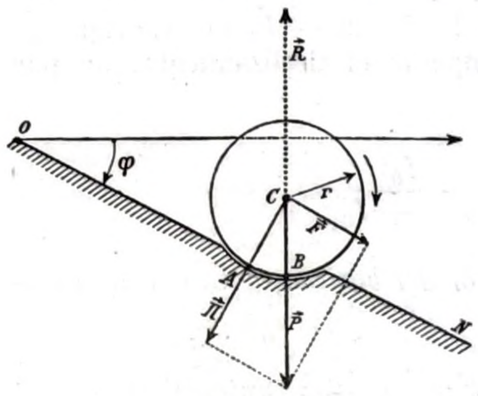


Fig. 320

La rueda está en equilibrio dinámico bajo la acción simultánea del momento motor $\vec{M}_m$ respecto a A de la fuerza peso $M_m = P \cdot r \cdot \operatorname{sen} \varphi$ y del *momento resistente* M_r debido a $\vec{R}$.

Las asperezas y el aplastamiento no perfectamente elástico de los dos cuerpos en contacto son la causa esencial de la existencia del rozamiento de rodadura y se han de suponer siempre muy pequeños respecto al radio de la rueda.

Esta forma de rozamiento, en cuanto se reconduce a la deformabilidad de los cuerpos, es también un fenómeno molecular. Se puede imaginar la razón física del momento resistente M_r pensando que el cilindro aplasta inelásticamente al plano de apoyo (por ejemplo, una rueda de bicicleta sobre la arena). Esta inelasticidad crea una asimetría entre las dos partes a un lado y otro del punto A (exagerada en la figura), por cuyo motivo la resultante $\vec{R}$ tiene, respecto al centro instantáneo de rotación A, un momento no nulo *(momento resistente)*.

Repítase la experiencia con el cilindro hueco, simétricamente lastrado en su interior con un lastre más o menos pesado ; φ resulta independiente del peso P, y, por lo tanto, de la presión total $\Pi = P \cdot \cos \varphi$ (compárese con el § 134).

Luego,

$$M_r = P \cdot r \cdot \operatorname{sen} \varphi = \Pi \cdot r \cdot \operatorname{tg} \varphi = \Pi \cdot \varrho ;$$

en donde $\varrho = r \cdot \operatorname{tg} \varphi$ tiene las dimensiones de una longitud y es independiente de Π.

ϱ es el *coeficiente de rozamiento de rodadura*, independiente de la presión Π y de la velocidad u entre anchos límites, dependiendo de la naturaleza y de la perfección de las superficies en contacto ;

ϱ no depende mucho de la adherencia, siendo poco sensible a la presencia de los lubricantes ; en este caso tiene menor importancia el fenómeno de resistencia al arranque.

A igualdad de las demás condiciones, al variar el radio r de la rueda, varía el ángulo de rozamiento φ ; con buena aproximación, $r \cdot \operatorname{tg} \varphi$, *esto es,* ϱ, *es independientr del radio* r.

Esto se comprende : una rueda de gran radio produce un aplastamiento menor en el contacto A, porque la presión Π se distribuye sobre una superficie de contacto mayor.

El ángulo φ es siempre muy pequeño y difícil de medir ; es más frecuente efectuar el experimento (Coulomb) en un plano horizontal (fig. 321), sobre el cual la rueda es estirada por una fuerza $\vec{F}$ aplicada al estribo S y, por tanto, al eje C de la rueda. Debe reducirse al mínimo el rozamiento entre la guarnición de la rueda y el eje C. Se determina la fuerza $\vec{F}$ capaz de mantener un movimiento uniforme de la rueda. En igualdad de las demás circunstancias, $\vec{F}$ resulta inversamente proporcional a r. Por tanto, el momento motor $M_m = F \cdot r$, igual y opuesto al momento resistente M_r, es independiente de r.

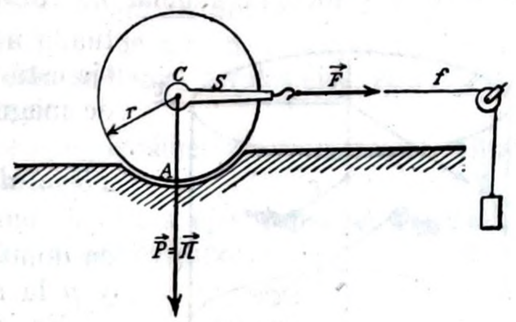


Fig. 321

Por ejemplo, para acero sobre acero, se tiene $\varrho = 0{,}005$ cm ; un rulo de acero de 60 cm de radio, que rueda sobre un plano horizontal, debe someterse a una fuerza $\vec{F}$ (fig. 321) igual a $\frac{0{,}005}{60}$ de su peso. Esta fuerza $\vec{F}$, para los valores corrientes de r en los vehículos, y para carreteras incluso pésimas (si bien no sobre la nieve, por ejemplo), es siempre mucho menor que la que se necesitaría para vencer el rozamiento de deslizamiento, esto es, para arrastrar la rueda. En este sentido se dice que el rozamiento de rozadura es muy inferior al de deslizamiento, y de aquí la eficacia de los frenos, por un lado, y de los cojinetes de rodamiento (cojinetes de bolas, de cilindros), por el otro.

Se comprende que el rozamiento del estribo S en el cojinete del eje de la rueda en C pueda ocultar completamente el efecto del rozamiento de rodadura. Las ruedas de los vehículos presentan a la vez el rozamiento de rodadura sobre el pavimento y el rozamiento de los cojinetes. Se dan a continuación, para el conjunto de estos rozamientos y sólo como órdenes de magnitud, los coeficientes correspondientes a ruedas de radio ordinario :

$\chi = 0{,}005$ para automóviles sobre asfalto,
$\chi = 0{,}03$ para carruajes corrientes sobre adoquinado,
$\chi = 0{,}003$ para vagones de ferrocarril ;

lo cual quiere decir, por ejemplo, que un vagón de tren adelanta con movimiento uniforme si se tira de él con una fuerza igual a 0,003 veces su peso.

§ **166. Campo de las fuerzas centrífugas en una rueda. Ejes libres.** Un cuerpo que gira alrededor de un eje z, por ejemplo, vertical (fig. 322), es asiento de un *campo de fuerzas centrífugas* (§ 123). Sea ω la velocidad angular de rotación. Cualquier elemento dm situado a la distancia $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ del eje está sometido a una fuerza centrífuga de magnitud :

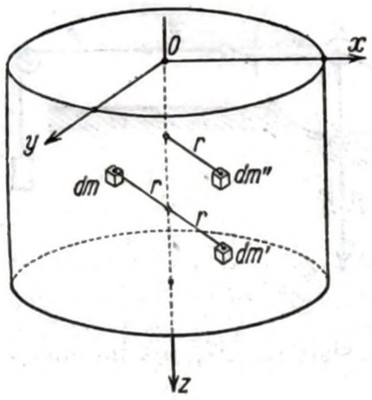


Fig. 322

$$dF_c = \omega^2 r dm = \omega^2 r \mu dv ;$$

en donde dv es el elemento de volumen, y μ la masa específica.

En general, las diferentes partes de un cuerpo que gira alrededor de un eje ejercen sobre éste fuerzas centrífugas cuya resultante no es nula ; el eje, los cojinetes y los soportes deben disponerse de modo que puedan reaccionar contra dicha fuerza de inercia, aplicando en cada instante la fuerza centrípeta equivalente.

Si en el cuerpo rígido existe también la masa $dm' = dm$, simétrica de la antes citada respecto al eje z, las dos fuerzas centrífugas se equilibran entre sí y no se produce en el eje ninguna reacción de ligadura. Una masa igual puesta en dm'', en lugar de la dm', originaría una fuerza centrífuga $d\vec{F}''_c = \omega^2 \vec{r} dm$, que formaría par con $d\vec{F}_c$. El eje z y sus soportes deben reaccionar contra este par creando otro de momento igual y contrario.

Se obtiene el *equilibrio de las masas giratorias* cuando hay una distribución de masas para la cual existe y es nula la resultante de todas las fuerzas centrífugas (§ 109) ; dicho de otro modo, cuando el conjunto de las fuerzas centrífugas constituye un sistema equilibrado. En particular, se obtiene este equilibrio siempre que z sea eje de simetría de la rueda ; porque en este caso existe (§ 109) y es nula la resultante de las fuerzas centrífugas en cada plano normal al eje z.

Todo cuerpo tiene, por lo menos, tres ejes (los ejes centrales de inercia, § 158) para los cuales existe y es nula la resultante de dichas fuerzas de inercia (§ 109).

Haciendo girar un cuerpo alrededor de uno de dichos ejes, sólo actúa sobre los soportes por la acción debida a su peso, que, para rotaciones un poco rápidas, es despreciable en comparación con las fuerzas centrífugas que se manifiestan.

En las máquinas, todos los órganos giratorios deben realizar esta condición en cuanto sea posible, pues de lo contrario quedan rápidamente fuera de uso los cojinetes y los soportes. Éste es el problema del *equilibrado de las masas giratorias*, fundamental en la construcción de las máquinas que giran a grandes velocidades.

Si se pudiera prescindir del peso, podrían abolirse los cojinetes y los soportes, y la rotación alrededor de uno de los ejes centrales proseguiría sin perturbarse ; por esto se llama, a tales ejes, *ejes libres, espontáneos* o *permanentes* de rotación.

Si un cuerpo homogéneo posee ejes de simetría geométrica, estos ejes son también ejes libres de rotación.

La rotación alrededor de uno de estos ejes prosigue también sin perturbación cuando faltan los soportes (aparte de la necesidad de equilibrar el peso del cuerpo) ; pero el movimiento giratorio presenta, según sea uno u otro de los ejes, caracteres de estabilidad o de inestabilidad : es estable la rotación alrededor del eje al que corresponde el momento de inercia máximo.

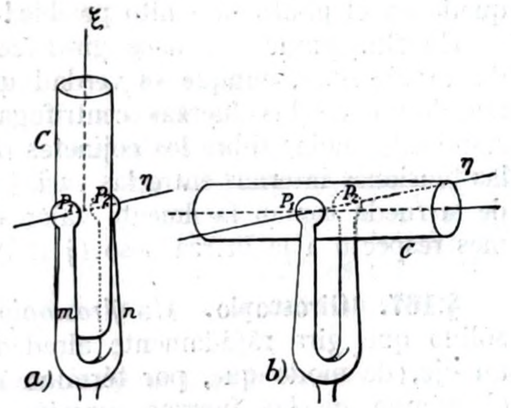


Fig. 323

He aquí algunos experimentos :

a] La horquilla *mn* de la figura 323, *a*), puede hacerse girar rápidamente alrededor del eje ξ, y arrastra consigo al cilindro C, montado sobre el eje η, normal a ξ, que materializan las dos puntas P_1 y P_2.

El cilindro puede tener su eje vertical y, por tanto, coincidiendo con ξ, como en la figura 323, *a*), u horizontal, como en la figura 323, *b*). En los dos casos el cilindro gira alrededor de un eje libre.

Pero si la altura del cilindro es mayor que $r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = r \cdot 0{,}866$, en donde r es el radio del cilindro, la primera posición corresponde a un equilibrio inestable del eje de rotación : el cilindro, inicialmente

vertical, inclinado ligeramente durante la rotación alrededor del eje ξ, se abate bruscamente para tomar la posición de la figura 323, *b*), para la cual el eje de rotación vertical es un eje libre estable.

b] Se hacen girar alrededor de un eje vertical: un disco (I), un cono (II), una cadena en forma de anillo (III), una barrita (IV), ... suspendidos por un hilo (figura 324).

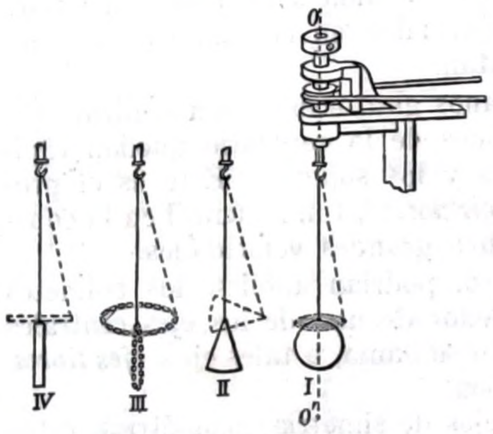


Fig. 324

La configuración estable, correspondiente al eje libre de estabilidad, es la señalada en la figura por líneas de puntos.

c] Un campo magnético giratorio producido por el estator *S* (figura 325) de un motor FERRARIS, de campo giratorio, arrastra en su rotación un huevo metálico apoyado sobre el disco de vidrio *V* (corrientes de FOUCAULT, tomo II); ¡la rotación de régimen constante que toma el huevo se efectúa alrededor de su eje mayor y de modo que el centro de gravedad *G* quede en el punto más alto posible!

En fin, cuando se hace girar con rapidez una rueda alrededor de un eje libre, aunque es verdad que las reacciones de las fuerzas centrífugas dan resultantes nulas sobre los cojinetes del eje, las tensiones internas entre las varias partes de la rueda toman fácilmente valores enormes respecto a la fuerza peso (§ 123).

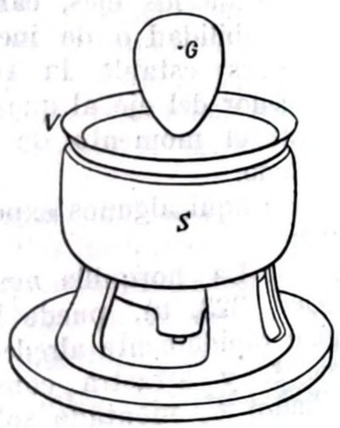


Fig. 325

§ 167. Giroscopio. Un *giroscopio* es un sólido que gira rápidamente alrededor de un eje, de modo que, por término medio, el campo de las fuerzas centrífugas sea grande respecto al campo de la gravedad.

Nos limitaremos al giroscopio simétrico, girando alrededor del eje libre de máxima estabilidad, que coincide con un eje de simetría geométrica.

Un buen trompo se encuentra aproximadamente en estas condiciones.

Se experimenta mejor con el giroscopio de la figura 326. La teoría del giroscopio es asunto de la mecánica racional. Nos limitaremos a describir los experimentos más característicos y sus aplicaciones.

El giroscopio tiene tres grados de libertad, correspondientes a la posibilidad de rotación con pequeñísimo rozamiento alrededor de los ejes *x*, *y*, *z*, respectivamente.

a] Cuando el giroscopio está en reposo, un pequeño empujón modifica a voluntad del experimentador la orientación del eje *x*; un golpecito hacia abajo en *A* pone fácilmente el aparato en rotación alrededor del eje *y*; un peso pequeño $\vec{P}$, aplicado en el gancho *G*, forma par con la reacción que se manifiesta en los soportes del eje *y*, y *G* baja, girando el giroscopio alrededor del eje *y*.

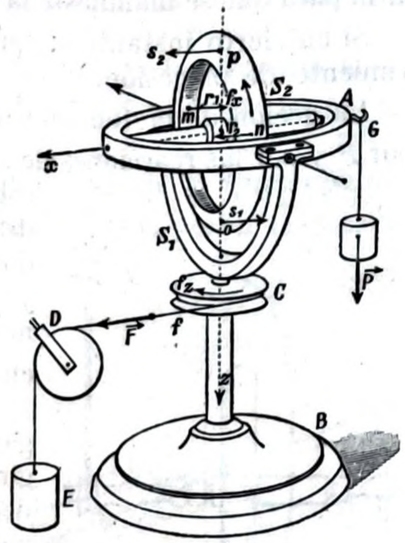


Fig. 326

Haciendo girar la base *B*, el pequeño rozamiento en el pivote de la horquilla S_1, adosado en la varilla que tiene por base *B*, es suficiente para arrastrar todo el giroscopio en la rotación alrededor del eje *z*.

b] Se hace girar rápidamente el giroscopio alrededor del eje *x*. La rotación de la base *B*, un empujón fuerte en uno cualquiera de los anillos-soporte S_1, S_2 del giroscopio, o un golpe enérgico en *A*, no producen ninguna acción sensible sobre la orientación del eje de rotación *x*, que manifiesta, por tanto, una estabilidad muy grande.

c] Mejor definida y más instructiva es la acción de un peso $\vec{P}$ aplicado en *G*, es decir, la acción de un momento $\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{P}$, en donde $\vec{r}$ es la distancia desde el eje *y* al punto *G*; $\vec{M}$ es un vector paralelo al eje *y*, de modo que en la figura está dirigido en el sentido positivo de las *y*.

Bajo la acción de $\vec{P}$, el giroscopio se pone a girar lenta y uniformemente *alrededor del eje z* (movimiento de *precesión*). Supongamos, por ejemplo, que el giroscopio gire en sentido positivo respecto al eje *x*, es decir, en el sentido de la flecha f_x de la figura, y, por tanto, que su velocidad angular ω sea un vector paralelo al eje *x* y de su mismo sentido. El momento $\vec{M}$, orientado como el eje *y*, produce un movimiento de precesión en el sentido de la flecha f_z, es decir, positivo respecto al eje *z*.

La precesión tiende a hacer coincidir el vector ω con el vector $\vec{M}$. Si no sucede esto, es debido a que el peso $\vec{P}$ es arrastrado por el movimiento de precesión, originando constantemente un momento $\vec{M}$ normal a $\vec{\omega}$.

Si, parando la rotación alrededor del eje z, se impide el movimiento de precesión, se inclina bruscamente el eje x del giroscopio por la acción de la fuerza peso $\vec{P}$, como si el giroscopio estuviese en reposo.

La posibilidad del movimiento de precesión es condición necesaria para que se manifieste la estabilidad característica del giroscopio.

Si en cierto instante se quita el peso $\vec{P}$, cesa bruscamente el movimiento de precesión.

La acción de la fuerza $\vec{P}$ (más exactamente, del par constituído por $\vec{P}$ y por las reacciones de los soportes del eje y) es *(aparentemente)* contraria a las leyes del § 157, que impondrían una rotación del giroscopio alrededor del eje y con movimiento acelerado, y la continuación de la rotación con movimiento uniforme desde el momento en que se quitara el peso $\vec{P}$.

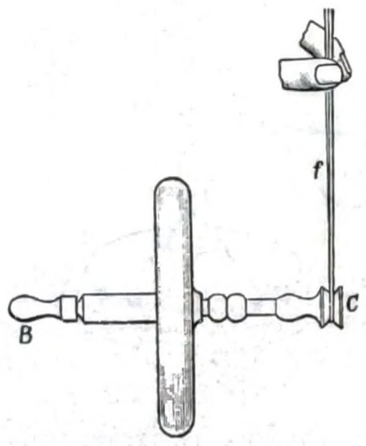


Fig. 327

El mismo experimento se efectúa colgando horizontalmente en C el sencillo giroscopio de la figura 327. El peso propio del mismo y la reacción del hilo de suspensión en C constituyen el par generador del movimiento de precesión.

El *lento movimiento cónico* que presenta el eje de un trompo alrededor de la vertical, es el movimiento de precesión que impide que caiga el trompo bajo la acción de su fuerza peso.

Si se impide el movimiento de precesión, cae bruscamente el trompo.

Si es vertical el eje de rotación del trompo, falta la precesión, porque no existe el momento motor debido a la fuerza peso.

d] Tómese de nuevo el giroscopio de la figura 326 sin el peso $\vec{P}$, y mediante la polea C (rígidamente unida a S_1), la polea D y el peso E, aplíquese una fuerza $\vec{F}$ que tienda a poner en rotación al giroscopio alrededor del eje z, en sentido positivo (indicado por la flecha f_z).

Si el giroscopio está en reposo, una pequeña fuerza $\vec{F}$ lo pone en rotación uniformemente acelerada alrededor del eje z.

Pero supóngase que el giroscopio está en rápida rotación $\vec{\omega}$ alrededor del eje x, por ejemplo, en sentido positivo, indicado por f_x, por lo que $\vec{\omega}$ es un vector paralelo a x y de su mismo sentido ; y supóngase que inicialmente x es horizontal. La fuerza $\vec{F}$ tiene un efecto muy distinto que en el caso precedente : se inicia muy lentamente una rotación de la horquilla S_1 alrededor del eje z en el sentido positivo ;

pero al mismo tiempo el eje x, primitivamente horizontal, se levanta ; es decir, el giroscopio rueda alrededor del eje y, y en el caso de la figura se levanta precisamente por el lado A ; el movimiento de S_1 se acelera a medida que x se aproxima a la posición vertical; el eje x, una vez alcanzada la posición vertical, la rebasa ; oscila alrededor de la posición vertical efectuando algunas oscilaciones que se amortiguan rápidamente por el rozamiento de los pernos del eje y, y solamente entonces prosigue la horquilla S_1 su movimiento acelerado, bajo la acción de la fuerza $\vec{F}$, debida al peso E, según las leyes del § 157.

En conclusión, también ahora ha girado el eje x *(precesión* que ahora, sin embargo, *no es uniforme)*, para llevar el vector $\vec{\omega}$ a coincidir en dirección y sentido con el momento motor $\vec{M}$, debido a la fuerza $\vec{F}$.

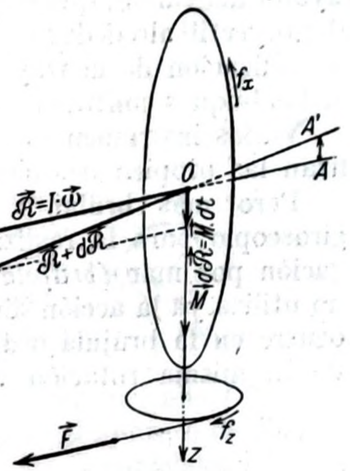


Fig. 328

Y esta vez se ha tenido éxito.

Naturalmente, sólo es aparente la contradicción entre estas acciones de los momentos motores que actúan sobre el giroscopio y las leyes del § 157. En un intervalo de tiempo dt el impulso del momento motor es $\vec{M}\cdot dt$ (fig. 328) y produce en todos los casos una variación equivalente $d\vec{\mathfrak{R}}$ del momento cinético $\vec{\mathfrak{R}} = I\cdot\vec{\omega}$ (§ 161). Esta variación se compone con el momento cinético $\vec{\mathfrak{R}} = I\cdot\vec{\omega}$, que posee el giroscopio gracias a su velocidad inicial de rotación alrededor del eje x ; el momento cinético final es $\vec{\mathfrak{R}} + d\vec{\mathfrak{R}}$.

Después de la acción de la fuerza externa que tendía a hacer girar el giroscopio en el sentido f_z, se encuentra que el giroscopio está dotado del momento cinético $\vec{\mathfrak{R}} + d\vec{\mathfrak{R}}$, es decir, gira alrededor del nuevo eje x. ¡El eje de rotación del giroscopio se ha desviado perpendicularmente a la fuerza motriz!

Los anteriores experimentos, por ejemplo, los *c*] y *d*], pueden explicarse elementalmente a base de la intervención de las fuerzas centrífugas.

En la figura 326, en el primer instante, bajo la acción del peso $\vec{P}$, el punto A cae efectivamente ; los puntos en m y n cambian la dirección de su velocidad, naciendo fuerzas centrífugas dirigidas como r_1 y r_2, constituyendo un par que hace trasladar bruscamente al

punto A, en su movimiento de caída, perpendicularmente al plano del dibujo y contra el observador. Esto modifica entonces la dirección de las velocidades de los puntos en o y en p, creando en éstos fuerzas centrífugas dirigidas según s_1 y s_2, constituyendo un par que levanta de nuevo el extremo A del eje.

En el experimento d], el momento motor producido por $\vec{F}$ (figura 326) produce una pequeña rotación alrededor del eje z. Los puntos altos p y bajos o del giroscopio experimentan una variación de dirección de sus velocidades, engendrándose dos fuerzas centrífugas dirigidas como s_1, s_2. El eje x se levanta en A.

Las propiedades mecánicas del giroscopio encuentran cada día mayor número de aplicaciones.

Del perfeccionamiento del tiro de las armas de fuego mediante el rayado del cañón, que imprime una grandísima velocidad de rotación al proyectil alrededor de su propio eje de figura, se ha pasado a la estabilización de la trayectoria de los torpedos, y a la estabilización de los buques contra el balanceo y el cabeceo debidos a la mar gruesa.

Varios instrumentos indispensables para la navegación aérea utilizan las propiedades del giroscopio.

Pero más brillante que todas las demás es la aplicación del giroscopio para la realización de una brújula destinada a la navegación por mar *(brújula giroscópica*, § 177, c]), que, para funcionar no utiliza ya la acción directriz del campo magnético terrestre, como ocurre en la brújula ordinaria *(brújula magnética)*, sino que se vale de la misma rotación terrestre.

CAPÍTULO VI

Gravitación universal

§ 168. Atracción newtoniana. Los experimentos de CAVENDISH constituyen la comprobación directa de la hipótesis de NEWTON; cuerpos A_1, A_2, prácticamente puntiformes, se atraen en razón directa de sus masas inertes, m_1, m_2, y en razón inversa del cuadrado de su distancia, r.

Si $\vec{F}$ es la fuerza que m_1 ejerce sobre m_2, dicha fuerza está dirigida según la recta de unión $A_1 A_2$, en el sentido $A_2 \longrightarrow A_1$; de acuerdo con el principio de acción y reacción, m_2 aplica a m_1 la fuerza $-\vec{F}$.

Tomando como referencia el eje $A_1 \longrightarrow A_2$, la magnitud F de $\vec{F}$ es, en valor y signo (§ 96, b]):

$$F = -k\frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (\textit{ley de } \text{NEWTON}); \qquad [1]$$

en donde k (>0) es la *constante de gravitación (universal)*; su valor se determina precisamente mediante el experimento de CAVENDISH.

El método de la balanza de torsión, que utilizó CAVENDISH, es, todavía hoy, el mejor de cuantos se han imaginado y realizado para comprobar la [1] y, por tanto, para la medida de k. Sólo ha mejorado la técnica experimental.

Así, por ejemplo, BOYS utilizó una balanza de torsión (fig. 329) en la que la suspensión f es de hilo de cuarzo, y el equipo $H_1 H_2$ es el mismo espejo, rectangular, que permite emplear el método de POGGENDORFF (§ 36). De las extremidades del equipo $H_1 H_2$ penden las bolitas A_1, A_2, de masas m_1, m_2, de oro, de unos 4 g_m cada una, colocadas en niveles notablemente distintos. Todo el equipo $O_1 O_2 A_1 A_2$ está en una vitrina dorada, en la que se puede efectuar el vacío para evitar las perturbaciones producidas por las corrientes de aire.

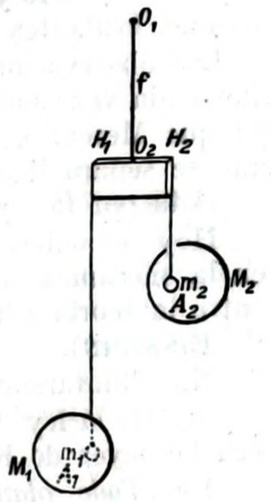


Fig. 329

Las masas actuantes M_1 y M_2 son dos esferas de plomo de unos 7 kg_m cada una, colocadas como se indica en la figura. Gracias al fuerte desnivel entre m_1 y m_2, pueden suponerse despreciables las acciones de M_1 sobre m_2 y de M_2 sobre m_1; quedan las atracciones de M_1 sobre m_1 y de M_2 sobre m_2, constituyendo un par, que se mide mediante la balanza de torsión.

Conocidas las características elásticas de torsión del hilo f (§ 189), conocido el brazo $H_1 H_2$ del par (unos 23 mm en el aparato de BOYS), conocidas las distancias entre m_1 y M_1, m_2 y M_2, y conocidas las masas m_1, m_2, M_1, M_2, se deduce el valor de k. En el sistema cm, g_m, seg, (F, en dinas; r, en cm; m_1, m_2, en g_m) es:

$$\left.\begin{aligned} k &= (6{,}67 \pm 0{,}005)\cdot 10^{-8}\ \frac{\text{dinas}\cdot\text{cm}^2}{g_m^2} = (6{,}67 \pm 0{,}005)\cdot 10^{-8}\ \frac{\text{cm}^3\cdot\text{seg}^{-2}}{g_m}; \\ &\text{en el sistema m, } kg_m\text{, seg, es:} \\ k &= (6{,}67 \pm 0{,}005)\cdot 10^{-11}\ \frac{\text{m}^3\cdot\text{seg}^{-2}}{kg_m} \end{aligned}\right\} [2]$$

Como no se conoce hasta hoy ninguna pantalla eficaz para la acción de la gravedad, no se puede determinar experimentalmente si existe una velocidad finita de propagación de la atracción newtoniana, mientras se sabe bien que las acciones eléctricas y magnéticas se propagan con la velocidad de la luz. Tampoco existe motivo para suponer que k dependa de la naturaleza de las masas m_1, m_2, y de sus condiciones físicas, del lugar que ocupan, de las velocidades, etc.

Se admite, por tanto, que todos los cuerpos, en particular la Tierra, la Luna, los planetas, el Sol, etc., obedecen a la *ley de Newton* [1] con el valor de k dado por la [2]; la [1] es la *ley de la gravitación (universal)*. La legitimidad de esta hipótesis ha recibido una serie innumerable de confirmaciones en la mecánica celeste: se prevén los movimientos de los planetas, satélites y cometas (y en particular los eclipses) con una precisión sorprendente, suponiendo que los cuerpos celestes obedecen a la ley de NEWTON. El descubrimiento del planeta Neptuno en 1846 y el del planeta transneptuniano Plutón (1930) son los más brillantes testimonios del valor de la ley de NEWTON.

Las observaciones astronómicas seculares, conducidas con medios cada vez más perfeccionados, han demostrado desde hace tiempo que Mercurio, el planeta más próximo al Sol, sigue una órbita que se separa ligerísimamente, aunque de un modo sensible, de la prevista por la ley newtoniana.

Hoy se sabe que debe efectuarse una pequeñísima corrección en la mecánica newtoniana para obtener una concordancia mejor entre la teoría y las observaciones astronómicas (mecánica relativista de EINSTEIN).

Nos limitaremos aquí a recordar dos cosas:

a] De la ley de NEWTON y de las leyes de la Dinámica se deducen las leyes de KEPLER:

1.ª *Todo planeta describe una órbita elíptica, ocupando el Sol uno de los focos de la elipse.*

2.ª *El radio vector*, que une idealmente el planeta con el Sol, *describe áreas proporcionales a los tiempos empleados en recorrerlas.*

3.ª *Los cuadrados de los tiempos de revolución alrededor del Sol de los varios planetas, son proporcionales a los cubos de los ejes mayores de sus órbitas respectivas.*

Éstas no son más que leyes aproximadas; las leyes de KEPLER son válidas en el supuesto que el movimiento de cada planeta no esté perturbado por los otros planetas, y que, además, sea despreciable la masa del planeta respecto a la del Sol.

Recíprocamente, de las leyes de KEPLER y de las leyes de la Dinámica se deduce la ley de NEWTON. Por lo tanto, esta ley es condición necesaria y suficiente para que se verifiquen las leyes de KEPLER. Esto se demuestra en Mecánica racional.

b] De la ley de NEWTON se deduce el valor de las masas de los cuerpos celestes. Por ejemplo, las masas del Sol y de la Tierra se deducen del siguiente modo: Un planeta, girando alrededor del Sol, según una elipse, que se puede confundir en primera aproximación con una circunferencia, está en cada instante sujeto a la acción newtoniana centrípeta: $k\frac{m\cdot M}{R^2}$; en donde M es la masa del Sol, m la

del planeta, R la distancia planeta - Sol, y k la constante de gravitación. Se tiene, pues (§ 122):

$$k\frac{m\cdot M}{R^2} = m\cdot\text{aceleración}\cdot\text{centrípeta} = m\cdot\frac{4\pi^2}{T^2}R;$$

en donde T es el año sidéreo, o sea el período de revolución del planeta alrededor del Sol.

Luego,

$$M = \frac{4\pi^2\cdot R^3}{k\cdot T^2}$$

Para la Tierra es, aproximadamente: $T = 31\,560\,000$ seg; $R = 1{,}495\cdot10^{13}$ cm; luego, $M = 1{,}98\cdot10^{33}$ g_m.

El razonamiento es satisfactorio, porque la masa del Sol es muy grande en comparación con la de un planeta. En realidad habría que considerar ejes de referencia con origen en el baricentro del sistema Tierra - Sol; alrededor de tal baricentro giran la Tierra y el Sol con radios de órbitas, supuestas circulares, inversamente proporcionales a las masas; véase § 155.

Cálculos más aproximados dan:

$$M = 1{,}994\cdot10^{33}\ g_m.$$

La masa terrestre m se deduce más simplemente de la [1]: Suponiendo que toda esta masa está concentrada en el centro de la Tierra (§ 172), la [1] da para la aceleración de la gravitación newtoniana g_N, esto es, para la fuerza F sobre la unidad de masa ($m_2 = 1$) y debida a la acción newtoniana de la masa de la Tierra ($m_1 = m$):

$$g_N = k\frac{m}{r^2}. \qquad [3]$$

Ahora bien, el radio medio de la Tierra (considerado como valor medio de los tres semiejes del elipsoide geodésico de rotación, § 174) es $r = 6{,}371\cdot10^8$ cm; a 45° de latitud, la aceleración aparente vale $980{,}6\ \frac{\text{cm}}{\text{seg}^2}$; pero teniendo en cuenta la aceleración centrífuga debida a la rotación terrestre (§ 174), la aceleración de la gravitación newtoniana es $g_N = 982{,}3$. Resulta entonces, $m = 5{,}98\cdot10^{27}$ g_m.

La incertidumbre mayor se debe al error de k.

Conocido r y, por tanto, el volumen v de la Tierra, su masa específica media es:

$$\mu = \frac{m}{v} \approx 5{,}52 \frac{g_m}{cm^3},$$

y el mismo valor 5,52 tiene su densidad (§ 45, *b*]), sin dimensiones.

Como la masa específica media de la corteza terrestre vale solamente 2,5 $\frac{g_m}{cm^3}$, el interior de la Tierra ha de estar constituído por material muy denso.

§ 169. La ley de Newton como ecuación de definición de la masa. Las siguientes consideraciones sólo tienen interés por el hecho de que ayudan en gran manera a la comprensión de cuanto se dirá sobre los sistemas de medida del electromagnetismo (véase tomo II).

En [1], § 168, se reconoce en k la característica de «constante universal», de manera que (§ 6, 3º), fijando para esta constante un valor numérico exacto y dándole el rango de factor numérico, la [1], § 168, puede pasar a la categoría de ecuación de definición.

Poniendo $k = 1$ y dividiendo ambos miembros de la [1], § 168, por m_2, se tiene:

$$a_{cm_2} = \frac{m_1}{r_2}; \qquad [1]$$

en donde $a_{cm_2} = \frac{F}{m_2}$ es la aceleración que adquiere m_2 por la acción newtoniana de m_1, a la distancia r.

En general, de la [1] se tiene:

$$m = r^2 \cdot a_c, \qquad [2]$$

ecuación de definición que se ha de añadir a la [1], § 7, y es apta para definir, por ejemplo, la masa inerte m en función de r y de a_c. En particular, se tiene la unidad coherente

$$[m]_{k=1} = [l^3 \cdot t^{-2}], \qquad [3]$$

y la unidad $[m]_{k=1}$ es la masa que a la distancia unidad imprime, por acción newtoniana, la aceleración unidad a otra unidad de masa, que, por lo demás, puede ser cualquiera.

Resulta:

$$[m]_{k=1} = \frac{1}{6{,}67} \cdot 10^8 \, g_m, \quad \text{si es } [l] = \text{cm y } [t] = \text{seg}.$$

Si se pusiera $k = 6{,}67 \cdot 10^{-8}$ exacto y con el rango de factor numérico, y se usasen las unidades $[l] = \text{cm}$ y $[t] = \text{seg}$ para la longitud y el tiempo, respectivamente, se encontraría una unidad $[m]_{k=6{,}67\cdot10^{-8}}$ prácticamente coincidente con el g_m, pero derivada del cm y del seg, también según la ecuación dimensional [3].

En ambos casos quedarían en la Mecánica sólo dos magnitudes fundamentales.

§ 170. Campo gravitatorio. Una masa m, prácticamente puntiforme, concentrada en un punto A, en presencia de masas materiales, se encuentra, pues, sometida a un campo de gravitación, resultante de la acción newtoniana de cada una de las masas presentes, según la [1], § 168. Como cada una de estas acciones es proporcional a m, la fuerza $\vec{F}$ del campo resulta proporcional a m:

$$\vec{F} = \vec{H} \cdot m; \qquad [1]$$

$\vec{H}$ es la intensidad del campo, y valen para ella todas las consideraciones de los §§ 79 ÷ 99.

Puesto que m es la masa inerte del cuerpo (§ 176),

$$\vec{H} = \frac{\vec{F}}{m}$$

es la aceleración de m por efecto del campo gravitatorio.

La determinación de la fuerza que actúa sobre una masa m en un punto A, puede, por tanto, dividirse en dos partes: primero, determinar

$$\vec{H}\,(H_x, H_y, H_z) = k \int \left(\frac{\overrightarrow{dm}}{r}\right) \qquad [2]$$

o, lo que es más fácil, el potencial $\mathfrak{V}\,(x, y, z) = -k \int \frac{dm}{r}$ en cada punto del campo, del cual por derivación se obtienen las componentes de $\vec{H}$; después, hallar mediante la [1] los valores $\vec{F}$ a partir de $\vec{H}$, lo que es muy fácil.

Este procedimiento matemático, consistente en calcular primero el campo en el punto A y después imaginar allí la masa m sujeta al campo *preexistente* $\vec{H}$, contiene una de las ideas más discutidas de la Física.

Según Newton, solamente podemos hablar de acción entre dos masas m_1, m_2, cuando éstas están dadas y existen en dos puntos

A_1, A_2, del espacio : la acción entre las masas es una *acción a distancia*.

Con el concepto de campo de fuerzas se imagina el espacio como perturbado por la presencia de las dos masas actuantes ; en verdad, no podemos advertir experimentalmente esta perturbación más que poniendo en un punto del campo la masa m, capaz de «sentir» el campo a consecuencia de la acción mutua entre el campo de las masas actuantes y el campo gravitatorio que corresponde a la misma masa m.

La masa m no siente el campo producido por sí misma, porque la perturbación imaginada es simétrica respecto a m ; así, puede decirse que la superposición de las perturbaciones creadas por las masas actuantes y por la masa m es causa de la disimetría que se manifiesta bajo forma de fuerza $\vec{F}$ sobre la masa m y que, por tanto, da origen a la energía de posición mutua entre m y las masas actuantes (§ 99, 1.º, 2.º).

Es el concepto de la *acción de contacto*, que induce directamente a preguntar con qué velocidad se produce la perturbación que constituye el establecimiento del campo.

Se ha indicado ya que ninguna prueba experimental puede sugerir una respuesta a esta pregunta para el campo de gravitación. Hoy se tiende a admitir (por razones completamente teóricas) que esta velocidad de propagación de la gravitación puede ser la misma velocidad de la luz.

La modificación física que constituye la creación del campo se efectúa a través de cualquier cuerpo, porque ya se ha dicho que no existen pantallas eficaces para la gravitación ; se produce asimismo en el vacío. Durante un siglo se había considerado inconcebible una modificación física, como lo es el campo, en el vacío, y se imaginó que éste estaba lleno de *éter (cósmico)* ; pero los físicos ya no son ahora tan materialistas.

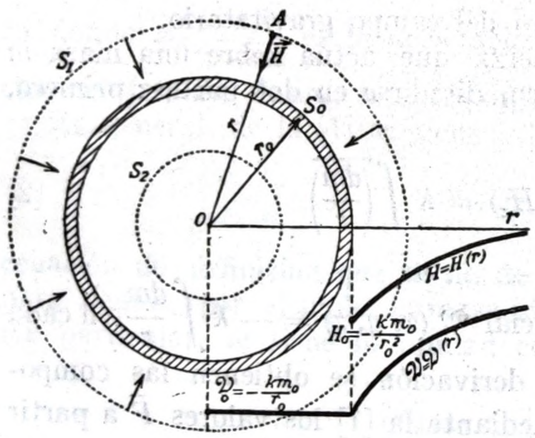


Fig. 330

§ 171. Campo gravitatorio de una capa esférica homogénea. Capa esférica, o estrato esférico, es el espacio comprendido entre dos esferas concéntricas muy próximas, de modo que el espesor de la capa resulte pequeño respecto al radio de las esferas. Sea S_0 (fig. 330) una capa esférica de radio r_0. Se entenderá que esa capa es homogénea cuando está llena de substancia con una masa específica μ constante. Por simetría, las líneas de fuerza no pueden ser más que semirrectas convergentes en el centro O de la capa esférica S_0, y la magnitud H del campo en un punto A solamente es función de r ; es decir, H es constante en todos los puntos de una superficie esférica cualquiera, S_1, S_2....., con centro en O. Vale en este caso el teorema de GAUSS (§ 98), que se aplica a una cualquiera de estas superficies esféricas. Si S_1 es exterior a la capa esférica, se tiene para el flujo Φ del vector $\vec{H}$ saliente de S_1 :

$$\Phi_H = \int_{S_1} H \cdot dS \cdot \cos\varphi = -4\pi \cdot km. \qquad [1]$$

También es $\Phi_H = 4\pi r^2 \cdot H_e$. Luego, se tiene :

$$H_e = -\frac{km}{r^2}\,; \qquad [2]$$

en donde m es la masa de la capa esférica ($H_e < 0$; es decir, campo atractivo). Para una superficie esférica S_2 interior a la capa, el teorema de GAUSS da un flujo saliente nulo :

$$\int_{S_2} H \cdot dS \cdot \cos\varphi = 4\pi r^2 \cdot H_i = 0\,;$$

es decir :

$$H_i = 0. \qquad [3]$$

Luego, en los puntos interiores a la capa esférica homogénea, el campo es nulo ; por la [2], en los puntos exteriores, el campo es igual al que produciría la masa m de la capa si estuviese toda concentrada en el centro O.

El potencial, nulo en el infinito por convenio, es $\mathfrak{V} = -\frac{km}{r}$ en el exterior de la capa, y $\mathfrak{V}_0 = -\frac{km}{r_0}$ en la capa misma y en todos los puntos interiores a ella.

§ 172. Campo gravitatorio de una esfera. Sea ahora una esfera material de radio r_0, constituída por capas esféricas homogéneas, cuya masa específica μ sólo es función de la distancia e del centro O ; como caso particular, sea μ constante en todas partes (esfera homogénea).

Razonando como en el § 171, se deduce que, para los puntos exteriores a la esfera material, el campo $\vec{H}_e$ es igual al que produciría

la masa total m de la esfera si estuviese concentrada en su centro:

$$H_e = -\frac{km}{r^2}; \qquad \mathcal{V}_0 = -\frac{km}{r^2}. \qquad [1]$$

Se justifica, por ejemplo, el empleo de gruesas esferas homogéneas en los experimentos de CAVENDISH y de BOYS (§ 168): funcionan éstas como masas puntiformes concentradas en el centro de las correspondientes esferas.

En la superficie de la esfera se tiene:

$$H_0 = -\frac{km}{r_0^2}; \qquad \mathcal{V}_0 = -\frac{km}{r_0}. \qquad [2]$$

En cada superficie esférica Σ de centro O y radio r, dentro de la esfera material, $\vec{H}$ es constante en magnitud, se dirige hacia el centro O, y su magnitud, con los convenios acostumbrados respecto al signo, es:

$$H_i = -\frac{km_\Sigma}{r^2}; \qquad [3]$$

en donde m_Σ es la masa contenida en el interior de Σ.

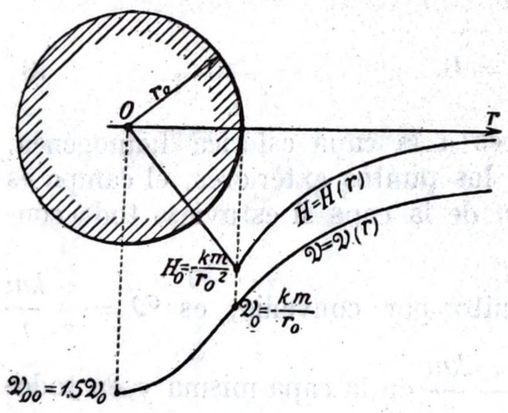


Fig. 331

Para una esfera material homogénea, de masa específica μ, se tiene:

$$m = \frac{4}{3}\pi r_0^3 \cdot \mu; \qquad [4]$$

$$m_\Sigma = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \mu. \qquad [5]$$

Luego:

$$H_i = -\frac{4}{3}\pi \cdot \mu \cdot k \cdot r. \qquad [6]$$

Por lo tanto, el campo es máximo en la superficie de la esfera material, en donde tiene el valor

$$H_0 = -\frac{km}{r_0^2} = -\frac{4}{3}\pi \cdot \mu \cdot k \cdot r_0, \qquad [7]$$

y disminuye linealmente hasta cero al acercarse al centro (fig. 331).

El potencial interior es:

$$\mathcal{V}_i = \frac{2}{3}\pi \mu k r^2 + C_1, \qquad [8]$$

y si se quiere que $\mathcal{V}$ sea continuo en la superficie de la esfera, recordando la segunda de las [2] y la [4], se tiene:

$$\mathcal{V}_i = \frac{2}{3}\pi \mu k r^2 - \frac{6}{3}\pi \mu k r_0^2. \qquad [9]$$

§ 173. Energía de gravitación de una esfera homogénea. Calor solar. Es el problema del § 99, 3.º. Teniendo en cuenta que el campo es newtoniano, se tiene:

$$\mathcal{W} = -\frac{1}{2} k \sum_s \sum_t \frac{m_s m_t}{r_{st}};$$

$\mathcal{W}$ es < 0; es preciso efectuar trabajo para destruir el campo, es decir, alejar las masas a una distancia mutua prácticamente infinita.

Si las masas presentes en el campo constituyen una esfera homogénea de volumen v y de masa específica μ, se tiene:

$$\mathcal{W} = -\frac{1}{2} k \int_v dm_s \int_v \frac{dm_t}{r_{st}}$$

Pero $-k\int_v \frac{dm_t}{r_{st}}$ es el potencial en el sitio A ocupado por la masa dm_s, debido a *todo el resto* de la esfera, y se demuestra que es igual al potencial creado en dicho punto por *toda* la esfera. Luego, es (§ 172, [9]):

$$-k\int_v \frac{dm_t}{r_{st}} = \mathcal{V}_A = -2\pi\mu k\left(r_0^2 - \frac{1}{3}r^2\right);$$

en donde r es la distancia desde el centro O de la esfera al punto A, y r_0 es el radio de la esfera.

Luego:

$$\mathcal{W} = -\pi \mu k \int_v \left(r_0^2 - \frac{1}{3}r^2\right) dm_s.$$

La integración extendida al volumen v se efectúa dividiendo la esfera en capas esféricas concéntricas de espesor dr; es:

$$dm_s = \mu \cdot dv = 4\pi\mu r^2 \cdot dr.$$

Luego:

$$\mathcal{W} = -4\pi^2\mu^2 k \int_{r=0}^{r=r_0} \left(r_0^2 - \frac{1}{3}r^2\right) r^2\, dr = -\frac{16}{15}\pi^2\mu^2 k r_0^5 = -\frac{3\,km^2}{5r_0}; \quad [1]$$

en donde m es la masa total de la esfera.

En el caso del Sol se tiene:

$$m = 1{,}995\cdot 10^{33}\ g_m,$$
$$r_0 = 6{,}95\cdot 10^{10}\ cm,$$
$$k = 6{,}67\cdot 10^{-8}\ cm^3\cdot seg^{-2}\cdot g_m^{-1};$$

por lo tanto:

$$\mathcal{W} = -2{,}28\cdot 10^{48}\ erg.$$

Ésta es la energía de gravitación perdida por el Sol durante su formación hasta el volumen actual, por contracción de una nebulosa hipotética enormemente voluminosa y, por tanto, enormemente enrarecida, y a la cual correspondía, según nuestros convenios, una energía mutua de posición nula entre las varias partículas de materia que la constituían.

Ante una energía de gravitación tan enorme, HELMHOLTZ se ha preguntado si el calor solar puede originarse por una contracción continua del volumen del Sol.

La *constante solar* es de unas $2\ \frac{cal}{cm^2\cdot min}$; es decir, una superficie expuesta en la Tierra perpendicularmente a los rayos solares, en el límite de la atmósfera, para que la absorción de ésta no intercepte parte de la energía solar que llega, recibe 2 calorías pequeñas por centímetro cuadrado cada minuto, bajo forma de energía «radiante» electromagnética, procedente del Sol.

La distancia media Tierra-Sol es $a = 1{,}495\cdot 10^{12}$ cm; luego, el Sol emite en todo el espacio:

$$2\cdot 4\,a^2 \frac{cal}{min} \approx 8\pi\cdot 2{,}2\cdot 10^{26}\ \frac{cal}{min};$$

y por tanto (§ 326, [3]):

$$2{,}94\cdot 10^{33}\ \frac{cal}{año} \approx 1{,}2\cdot 10^{41}\ \frac{erg}{año}.$$

Si ésta es energía de gravitación, la variación anual dr_{anual} del radio r_0 del Sol debe satisfacer a la ecuación:

$$d\,\mathcal{W} = -1{,}2\cdot 10^{41}\ \frac{erg}{año};$$

o sea, según la [1]:

$$\frac{3}{5}\frac{km^2}{r_0^2}\, dr_{anual} = -1{,}2\cdot 10^{41}\ \frac{erg}{año};$$

y, por fin:

$$dr_{anual} = -37\ \frac{m}{año}.$$

La contracción anual del radio solar se reduciría a 37 metros.

Con el régimen de emisión actual $\left(\text{constante solar} = 2\ \frac{cal}{cm^2\cdot min}\right)$ la vida del Sol, desde el momento de su formación a partir de la nebulosa primitiva, sería de unos 18 millones de años.

Varios datos geológicos no están de acuerdo con una vida tan breve: exigen éstos que la vida de la Tierra se cuente ya por miles de millones de años. La cuestión del origen del calor solar está todavía en discusión; la explicación más probable es que en el Sol se producen reacciones nucleares muy lentas que dejan en libertad cantidades muy grandes de energía.

§ 174. Campo de la gravedad. Por definición, *el campo de la gravedad* es aquel cuya intensidad viene dada en todos los puntos por el vector $\vec{g}$, *aceleración de la gravedad*, que tiene el significado físico de «fuerza-peso» ejercida, en el vacío, sobre la unidad de masa inerte.

Para determinar experimentalmente el campo de la gravedad es preciso determinar en cada punto este vector $\vec{g}$. En todos los lugares, la vertical da la dirección y sentido de este vector.

Las medidas absolutas del módulo del vector $\vec{g}$, es decir, del valor de aceleración de la gravedad $\vec{g}$, se efectúan con el péndulo reversible (§ 162).

Así queda $\vec{g}$ completamente conocido.

Los valores de g a 0°, 45° y 90° de latitud y al nivel del mar son, aproximadamente:

$$\left.\begin{aligned} g_0 &= 978{,}0 \\ g_{45} &= 980{,}6 \\ g_{90} &= 983{,}2 \end{aligned}\right\} \frac{cm}{seg^2} \text{ o gal}; \quad [1]$$

g varía con la altitud h.

La variación de g con la altura se ha determinado con la balanza de JOLLY (fig. 332). Se equilibra el peso P con lastre Z cuando P está en A, y se transporta P desde el platillo superior al platillo inferior B. Se altera el equilibrio.

Un peso de 5 kg_p ($\approx$ 49 newton), sometido a un descenso de 21 m, aumentó en 31,7 mg_p ($\approx$ 31 dinas). Para puntos sobre el suelo y, por lo tanto, en la atmósfera es suficientemente aproximada la fórmula :

$$g_h = g_0\,(1 - 0{,}000\,000\,003\,09 \cdot h)\ \text{cm, } g_m\text{, seg ;}\quad \text{h es la medida de } h \text{ en cm } h, \qquad [2]$$

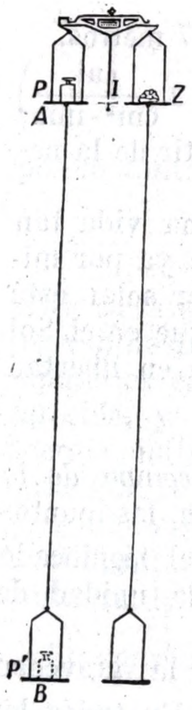


Fig. 332

sea en el Ecuador, sea, con aproximación satisfactoria, en un lugar cualquiera.

Un hombre de 70 kg_p de peso, cuando sube a lo alto de la torre de EIFFEL ($h = 300$ m), pesa 7 g_p menos que cuando se encuentra en la base de dicha torre.

Se han construído balanzas capaces de apreciar 0,01 mg_p con una carga de 1 kg_p. ¡ Son capaces de indicar la variación de g para un desnivel de 3 cm !

Esta variación de g con la altura confirma la idea de que la gravedad ha de ser esencialmente debida a la atracción newtoniana por parte de la Tierra. Y, en efecto, para una esfera de radio $r_0 = 6{,}37 \cdot 10^8$ cm (radio medio de la Tierra), la primera de las [1], § 172, da en la superficie de la Tierra ($r = r_0$) y, por ejemplo a 45° de latitud :

$$dH_e = 2\,\frac{k \cdot m}{r_0^3}\,dr = |H_0|\,\frac{2}{r_0}\,dr = 2\,\frac{980{,}6}{6{,}37 \cdot 10^8} \cdot dr,$$

o sea :

$$\frac{dH_e}{dr} = 980{,}6 \cdot 0{,}000\,000\,003\,14\ \frac{\text{cm}}{\text{seg}^2}\ \text{por cm},$$

que concuerda bien con la [2].

La [2] no puede servir para reducir al nivel del mar un valor de g determinado experimentalmente al nivel del suelo, porque es preciso tener en cuenta la acción newtoniana de la capa de terreno interpuesto entre el lugar de la determinación y el nivel del mar subyacente. En este caso, el coeficiente de h en la [2] es tanto menor cuanto mayor sea la densidad media de la capa de terreno interpuesto. Admitiendo como densidad media el valor 2,5 y, por tanto, la masa específica 2,5 $\frac{g_m}{cm^3}$, el coeficiente de h en la [2] se reduce aproximadamente a 0,000 000 002 00 ; luego, es :

$$g_h = g_0\,(1 - 0{,}000\,000\,002\,00, \text{h}) ;\quad \text{h es la medida de } h \text{ en cm.} \qquad [2\text{ bis}]$$

La superficie media de los mares es una superficie equipotencial del campo de la gravedad. Si se la prolonga también por debajo de los continentes, constituye una superficie de nivel, a la que se da el nombre de *geoide*.

Las medidas astronómicas y geodésicas han permitido establecer la forma y las dimensiones del geoide ; en primera aproximación, que muchas veces es suficiente, tiene la forma de un elipsoide de revolución, aplastado por los polos ; los valores más probables de sus semiejes son :

Semieje polar..... $c = (6\,356\,909 \pm 108)$ m,
Semieje ecuatorial..... $a = (6\,378\,388 \pm 53)$ m.

Por lo tanto, el aplastamiento α es :

$$\alpha = \frac{a - c}{c} = \frac{1}{(297 \pm 1{,}2)}.$$

Se ha convenido en tomar como geoide un elipsoide de revolución *(elipsoide geodésico)*, cuyas propiedades geométricas y gravitatorias se aproximen lo más posible a las del geoide real. Para dicho elipsoide geodésico se ha tomado [del *elipsoide geodésico* de HAYFORD, de referencia internacional 1924 (1)] :

$$a = 6\,378\,388\ \text{m}, \quad \alpha = \frac{a - c}{c} = \frac{1}{297} ;\ \text{por tanto, } c = 6\,356\,912\ \text{m}; \qquad [3]$$

y para la gravedad $g_{0;0}$ en el ecuador y al nivel del mar :

$$g_{0;0} = 978{,}049\,0\ \frac{\text{cm}}{\text{seg}^2}\ \text{o gal.} \qquad [4]$$

Estos tres elementos son suficientes para determinar el campo de la gravedad en la superficie de nivel constituída por el elipsoide geodésico y en el exterior de la misma.

La forma de elipsoide aplastado que presenta el geoide es una de las pruebas de la rotación de la Tierra. Esto viene confirmado

(1) En este elipsoide el meridiano tiene una longitud de $4 \cdot 10\,002\,288$ m = 40 009 152 m ; por lo tanto, el metro es 228,8 μm más corto que el de la definición originaria.

cuantitativamente por el siguiente hecho: el cálculo (con la hipótesis simplificadora de una densidad terrestre constante y cuando se supone para el polo el valor $g_{90} = 983{,}2 \frac{cm}{seg^2}$) da, para la atracción newtoniana del elipsoide terrestre aplastado, un valor de g en el ecuador:

$$g_0 = 981{,}4 \frac{cm}{seg^2}. \qquad [5]$$

Para obtener el valor experimental $g_0 = 978{,}0 \frac{cm}{seg^2}$ es preciso tener en cuenta la fuerza centrífuga originada por la rotación terrestre, la cual crea un campo de intensidad (§ 123):

$$H_2 = \omega^2 r; \qquad [6]$$

en donde ω, velocidad de la rotación de la Tierra, es:

$$\omega = \frac{\text{una vuelta}}{\text{día sidéreo}} = \frac{2\pi}{86\,164} \frac{rad}{seg}.$$

En particular, en el ecuador: $H_2 = 3{,}4 \frac{cm}{seg^2}$.

El valor experimental de la aceleración de la gravedad es la diferencia entre la acción puramente newtoniana [5] y la acción centrífuga [6]. Luego, debe ser:

$$g_0 = (981{,}4 - 3{,}4) \frac{cm}{seg^2} = 978{,}0 \frac{cm}{seg^2} \text{ o gal},$$

conforme con la experiencia.

El aplastamiento terrestre y la variación de g con la latitud demuestran la rotación diurna de la Tierra.

La *fuerza de la gravedad*, o *peso*, a que un cuerpo está sometido, es la resultante de la fuerza de gravitación newtoniana y de la fuerza centrífuga.

El *campo de la gravedad* $\vec{g}$ es resultante de dos campos (newtoniano y de aceleración centrífuga), cada uno de los cuales admite potencial. Las líneas de fuerza de este campo resultante son las *verticales* en cada lugar, las cuales sólo son rectas en primera aproximación. Una plomada determina en cada punto la dirección de la vertical.

Las superficies equipotenciales o de nivel son las superficies *horizontales*. La superficie libre y suficientemente extensa de un líquido en reposo determina en cada punto un elemento de superficie de nivel, horizontal.

Como se ha dicho, el valor de g se determina con gran precisión mediante el péndulo reversible. Se trata de medidas largas y engorrosas, por lo que se ha decidido establecer, como para otras magnitudes fundamentales, un valor convencional, que se llama *valor normal* de la aceleración de la gravedad, que es:

$$g_n = 980{,}665 \frac{cm}{seg^2} \text{ o gal}, \qquad [7]$$

que se toma (1901) como valor medio de la aceleración de la gravedad a 45° de latitud y al nivel del mar; pero hoy se sabe que es más exacto el valor:

$$g_{45;0} = (980{,}616 \pm 0{,}010) \frac{cm}{seg^2} \text{ o gal}. \qquad [8]$$

El valor [7] es el que sirve, por ejemplo, para la definición del gramo - peso: 1 gramo - masa pesa 1 gramo - peso en todos los puntos de la Tierra en donde la aceleración de la gravedad tiene el valor normal [7].

g varía con la latitud φ.

Se tiene, aproximadamente, al nivel del mar:

$$g = g_{45;0}(1 - 0{,}002\,648 \cos 2\varphi). \qquad [9]$$

Adoptado el elipsoide geodésico convèncional, se acepta como aceleración convencional de referencia la del ecuador y al nivel del mar, atribuyéndole el valor:

$$g_{0;0} = 978{,}049\,0 \frac{cm}{seg^2} \text{ o gal};$$

y como *gravedad normal* sobre el geoide, en función de la latitud φ, se toma la que se obtiene con la fórmula siguiente (Somigliana y Silva, Estocolmo, 1930):

$$g_0 = 978{,}049\,0 \cdot (1 + 0{,}005\,288\,4 \cdot \operatorname{sen}^2\varphi - 0{,}000\,005\,9 \cdot \operatorname{sen}^2 2\varphi) \frac{cm}{seg^2}. \qquad [10]$$

A partir de la [10] resulta como valor de $g_{45;0}$:

$$g_{45;0} = 980{,}639\,5 \frac{cm}{seg^2} \text{ o gal}, \qquad [11]$$

que no coincide con ninguno de los valores anteriores [7] y [8].

§ 175. Anomalías de la gravedad. Al mejorar los procedimientos de medición, se ha encontrado que el vector $\vec{g}$ es una función extremadamente complicada del lugar y del tiempo.

En un lugar dado y en cierto instante, sea g_h el valor de la aceleración de la gravedad. Si se le reduce al nivel del mar (§ 174), esta reducción está subordinada al conocimiento o a una hipótesis particular sobre la masa específica de la Tierra en una capa subyacente al lugar de observación y cuyo espesor es la altura h de este lugar sobre el nivel del mar. El valor de g_h así reducido al nivel del mar sea g_0. Por otro lado, sea g_0' el valor de la gravedad que corresponde a los puntos del elipsoide geodésico que tienen la misma latitud que el lugar de observación: g_0' se calcula mediante la [10] del § 174.

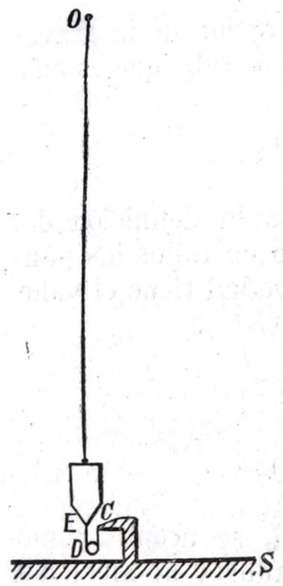


Fig. 333

La diferencia $g_0 - g_0'$ se llama *anomalía de la gravedad* (de FAYE).

En un lugar dado, las variaciones de orientación de $\vec{g}$ con el tiempo son las variaciones de la vertical; una plomada (fig. 333), suspendida de un punto fijo O, no indica siempre por el extremo E el mismo punto del suelo.

Los corrimientos se amplifican mediante el conocido dispositivo de la palanca óptica (§ 36); se observan, por ejemplo, las desviaciones de un rayo luminoso reflejado en el espejo D, suspendido de dos hilos, uno fijado en E y el otro en C, unido rígidamente al suelo; C y E están en el mismo nivel; y el dispositivo es capaz de indicar los corrimientos de E en la dirección perpendicular al plano de la figura.

Se han podido observar desviaciones debidas a la atracción de la Luna cuando ésta se halla en el horizonte (desviación angular de la plomada del orden de 0,01″) o del Sol, también en el horizonte (desviación angular del orden de 0,005″). Estas desviaciones son menores $\left(\text{unos } \frac{2}{3}\right)$ que las calculables basándose en la ley de NEWTON, y se atribuyen las diferencias a la existencia de mareas en la corteza sólida de la Tierra.

De un lugar a otro ha de variar la orientación de $\vec{g}$ por ser normal en todos los puntos a la superficie de nivel, es decir, a una superficie que tiene aproximadamente la forma de elipsoide. Pero medidas astronómicas de orientación de la vertical han permitido establecer la existencia de desviaciones de la vertical verdadera respecto a la vertical geodésica, es decir, respecto a la vertical del elipsoide geodésico convencional de referencia. Por ejemplo, en la proximidad de una montaña, la atracción newtoniana de ésta desvía la vertical hacia ella.

Esta desviación fué ya observada en 1750 por BOUGUER en el

Chimborazo, y se ha utilizado para determinar, aunque sólo sea de un modo aproximado, el valor medio de la masa específica de la montaña.

Las variaciones de la intensidad de $\vec{g}$ con el tiempo y de un lugar a otro, se determinan a partir de un valor conocido de g, con el péndulo (*péndulo de* STERNECK); las variaciones de g producen variaciones del período de oscilación, y pueden calcularse a partir de éstas.

Se deduce de la [4], § 162:

$$g = \frac{4\pi^2 I}{M \cdot h_1 \cdot T^2}; \text{ de donde } dg = -2\frac{4\pi^2 I}{M \cdot h_1 \cdot T^3} dT = -2g\frac{dT}{T}. \quad [1]$$

Se determina dg, a partir de un valor inicial de g, de la medida del período T y de su variación dT.

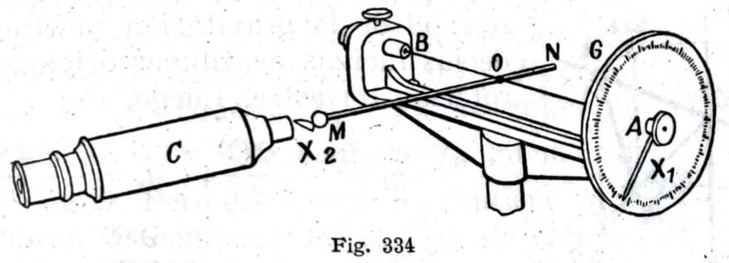


Fig. 334

Sirve para el mismo objeto el elegante y sencillo aparato de THRELLFALL y POLLOCK (fig. 334).

Una pequeña palanca MN, de unas 20 dinas de peso ($\approx 30\ mg_p$), está soldada asimétricamente al hilo de cuarzo AB; la parte M pesa más que la N. Torciendo el hilo entre A y B (se puede llegar a ≈ 3 vueltas completas), se equilibra el momento del peso M y se puede mantener horizontal MN. Un microscopio C, dirigido hacia el índice X_2, sirve para este objeto. Un aumento de g produce un aumento de peso, bajando M; se lleva de nuevo a la posición horizontal torciendo el extremo A.

En el círculo graduado G, que da los 10″, se lee el ángulo de torsión necesario para compensar la variación de g. En un lugar dado, puede llegar a observarse una variación relativa de g del orden de 10^{-6}. La medida de las variaciones de g de un lugar a otro se efectúa rápidamente, pero con una precisión relativa un poco inferior: $\approx 2 \div 3 \cdot 10^{-6}$.

Pero ni la variación de g ni la variación de la vertical son suficientes por sí solas para individualizar la variación del campo de la gravedad alrededor de un punto O. En efecto, este campo está determinado por el *vector* $\vec{g}$. Si con origen en O se fijan tres ejes [x, y,

en un plano horizontal, y z vertical (fig. 335)], $\vec{g}$ viene determinado por sus componentes g_x, g_y, g_z, respecto a estos ejes, las cuales son, en general, funciones de x, y, z. En O se tiene $g_x = g_y = 0$; $g_z = g$. Alrededor de O, las componentes g_x, g_y, son todavía infinitesimales por razón de continuidad ; pero, en general, ya no son nulas. La variación de $\vec{g}$, es decir, de g_x, g_y, g_z, alrededor del valor $\vec{g_0}$ (0, 0, g), correspondiente al punto O, está determinada por los valores de las nueve derivadas :

$$\frac{\partial g_x}{\partial x},\ \frac{\partial g_x}{\partial y},\ \frac{\partial g_x}{\partial z};\quad \frac{\partial g_y}{\partial x},\ \frac{\partial g_y}{\partial y},\ \frac{\partial g_y}{\partial z};\quad \frac{\partial g_z}{\partial x},\ \frac{\partial g_z}{\partial y},\ \frac{\partial g_z}{\partial z}. \qquad [2]$$

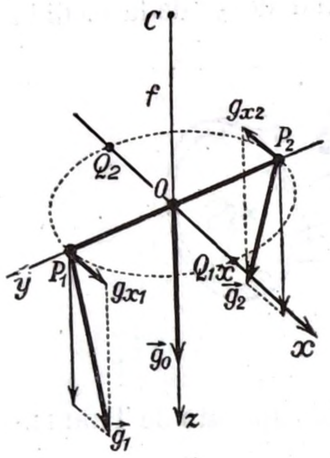


Fig. 335

Pero (§ 174) el campo de la gravedad admite potencial $\mathfrak{V}$, porque resulta de la superposición de dos campos que lo admiten : el de la gravitación newtoniana y el de las fuerzas centífugas originadas por la rotación terrestre. Luego, es :

$$g_x = -\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x},\quad g_y = -\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y},$$

$$g_z = -\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z},$$

y las nueve derivadas [2] son derivadas segundas del potencial $\mathfrak{V}$; se reducen, pues, a sólo seis diferentes :

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial x^2} &= \frac{\partial g_x}{\partial x},\ -\frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial y^2} = \frac{\partial g_y}{\partial y},\ -\frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial z^2} = \frac{\partial g_z}{\partial z};\\ -\frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial x\,\partial y} &= \frac{\partial g_x}{\partial y} = \frac{\partial g_y}{\partial x};\quad -\frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial x\,\partial z} = \frac{\partial g_x}{\partial z} = \frac{\partial g_z}{\partial x};\\ -\frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial y\,\partial z} &= \frac{\partial g_y}{\partial z} = \frac{\partial g_z}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \qquad [3]$$

La *balanza de* Eötvös permite determinar algunas de estas segundas derivadas.

Es una balanza de torsión, bien protegida por una vitrina de varias paredes. El equipo P_1OP_2 (figs. 335 y 336) es una barrita horizontal, sostenida por un fino hilo de torsión f, y terminada por dos masas iguales. Sean P_1 y P_2 los centros de gravedad (se desprecia la masa de la varilla) ; P_1, P_2 y f están en un mismo plano.

Cualquier rotación del equipo alrededor del hilo vertical f, respecto a la vitrina AA (fig. 336, vista desde arriba), se reconoce por el corrimiento del índice X sobre la escala G ; en realidad, se emplea, como de costumbre, el método de la palanca óptica.

Si el campo $\vec{g}$ es uniforme en O, y a su alrededor, hasta P_1 y P_2, resulta siempre $g_x = g_y = 0$, $g_z = g_0 = \text{const.}$; se tiene el equilibrio cuando es vertical el plano $P_1\,P_2\,f$; ninguna torsión de f es originada por la gravedad; X indica, en G, el acimut de torsión nula del hilo. Al girar el sistema balanza-vitrina alrededor del eje vertical z, coincidente con f, es decir, al variar el ángulo φ, queda invariable la posición del índice X sobre la escala G.

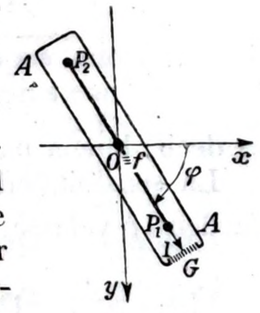


Fig. 336

Pero supongamos que no sea uniforme el campo del vector $\vec{g}$, y, para tener un caso completamente esquemático, supongamos que alrededor del punto O solamente g_x sea diferente de cero. Se tiene todavía una configuración de equilibrio, por ejemplo, la de la figura 335, en la cual P_1OP_2 coincide con el eje y. Todavía $P_1\,P_2\,f$ determina un plano vertical en O, y éste contiene $\vec{g_0}$, intensidad del campo $\vec{g}$ en O. Pero este plano no contiene ya los vectores $\vec{g_1}$, $\vec{g_2}$; en el equilibrio, las componentes g_{x1}, g_{x2} de estos vectores son necesariamente iguales y opuestas ; el momento de rotación alrededor de Of, que así resulta, está equilibrado por otro momento igual y opuesto, de naturaleza elástica, debido a la torsión de f. Además, gracias a la regularidad del vector $\vec{g}$, la componente g_x debe también anularse en puntos $Q_1\,Q_2$ de la circunferencia $P_1\,P_2\,Q_1\,Q_2$, que se encuentran en el eje x (salvo un infinitésimo de orden superior).

Al girar media vuelta alrededor del eje z el sistema balanza-vitrina, el índice X efectúa sobre G una oscilación entera, porque el momento de torsión debido a g_{x1}, g_{x2} pasa de su valor máximo (figura 335) a cero (P_1 y P_2 sobre el eje x) para volver a ser máximo (P_1 y P_2 se han permutado).

Se comprende que se puede calcular $|g_{x1}| = |g_{x2}|$, a partir de la amplitud de la oscilación de X, cuando se conocen el coeficiente de elasticidad de torsión del hilo f (la k^2 de la [4], § 189) y la distancia $2l = P_1P_2$.

Ahora bien, $\frac{|g_{x1}|}{l} = \frac{|g_{x2}|}{l}$ da, con muy buena aproximación:

$$\frac{\partial g_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial x\,\partial y}.$$

Las cosas se complican, en realidad, por la presencia simultánea de las componentes g_{y1}, g_{y2}, que hemos supuesto nulas.

El equipo de la balanza de Eötvös tiene una de las formas indicadas en la figura 337; $P_1 P_2$ mide unos unos 40 cm; las masas en P_1 y P_2 tienen unos 25 g_m cada una; el hilo f tiene una longitud de 50 cm.

El movimiento del índice X sobre la escala G en función del ángulo φ, para una vuelta entera del sistema balanza-vitrina, con el equipo de la forma II, o con el de la forma III, que reduce la altura del aparato, permite deducir:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial z}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y\, \partial z}; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \qquad [4]$$

es decir, buena parte de las variaciones de g_x, g_y, g_z alrededor de O.

La sensibilidad de estas medidas alcanza límites insospechados: pueden revelarse variaciones de las componentes de $\vec{g}$ de sólo 10^{-9} cm. seg^{-2} entre dos puntos situados a la distancia de 1 cm. En realidad, dichas variaciones llegan a ser hasta de $150 \cdot 10^{-9}$ cm·seg^{-2} por centímetro, y resultan, por tanto, bien medibles.

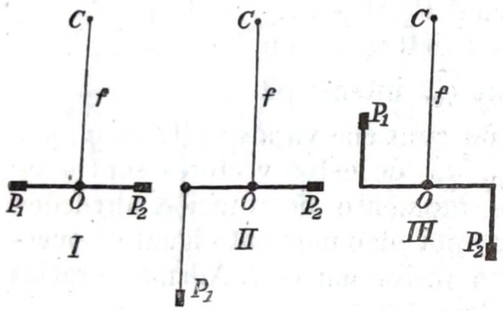


Fig. 337

Eötvös ha probado que la configuración del campo gravitatorio, es decir, la curvatura de las superficies equipotenciales y de las líneas verticales, se expresan en función de las [4].

La utilidad de un estudio cuidadoso de las anomalías de la gravedad es conocida desde hace tiempo, porque las *nivelaciones* de alta precisión no pueden efectuarse lógicamente sin estudiar a la vez las anomalías de la gravedad. Además, teorías muy discutidas, pero muy apreciadas, respecto a los orígenes de las irregularidades de la corteza terrestre (montañas, océanos, etc.), se basan en los resultados de las mediciones de las anomalías de la gravedad.

En fin, desde hace algunos años, gracias a la perfeccionada técnica experimental basada en el uso de la balanza de Eötvös, se intenta utilizar los resultados de las precisas mediciones de las anomalías de la gravedad en una región, para obtener informes sobre la naturaleza del subsuelo *(prospección gravimétrica* del suelo).

Los varios resultados positivos, obtenidos en la investigación de yacimientos de sales minerales, de carbón y de petróleo, han dado ocasión a que estos estudios se emprendan también en los medios puramente técnicos.

§ 176. Masa inerte y masa gravitatoria. La balanza de Eötvös ha permitido también responder con mucha precisión a una pregunta que tiene mucho interés conceptual. La masa inerte $m = \frac{\vec{F}}{\vec{a}_c}$ es el coeficiente de inercia (§ 115) que corresponde a cada cuerpo para el movimiento de traslación.

Los experimentos de Cavendish y de Boys, confirmando la ley de Newton, establecen que la atracción newtoniana es proporcional a la *masa inerte m* de cada cuerpo.

¿Hasta qué punto es esto exacto?

En otros términos: En un mismo lugar, cuerpos que tengan la misma masa inerte, ¿deben necesariamente ser atraídos con igual fuerza por la Tierra y, por tanto, deben tener igual peso? Es decir: en un mismo lugar, ¿es constante $\vec{g}$ para todos los cuerpos?

La independencia del período de oscilación de un péndulo simple respecto a su naturaleza y a su peso, permite responder afirmativamente (con aproximación de $1^0/_{00}$, Newton; de $\frac{1}{60\,000}$, Bessel).

La fuerza de gravedad de un cuerpo A (fig. 338) es la suma (vectorial) de dos términos: $\vec{F}_1 = m_{gA}\, \vec{g}_N$, debido a la atracción newtoniana de la Tierra, y $\vec{F}_2 = m_{iA}\, \omega^2 \vec{r}$, debido a la fuerza centrífuga. En el primer término aparece la masa gravitatoria m_{gA} de A, y en el segundo, la masa inerte m_{iA}. Solamente si coinciden estas dos masas es constante $\frac{F_1}{F_2}$ para todos los cuerpos.

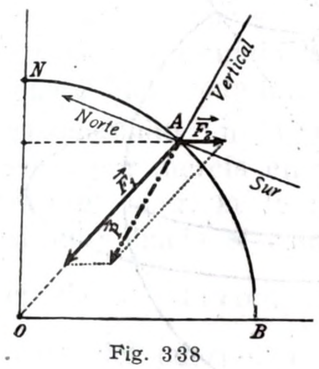


Fig. 338

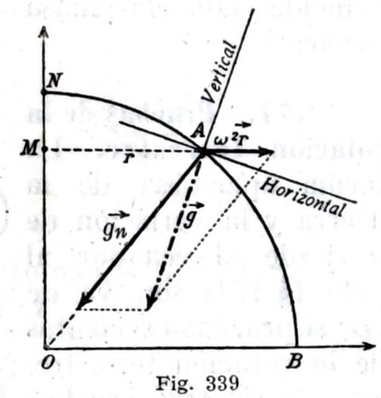


Fig. 339

También $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ tienen direcciones constantes para todos los cuerpos.

Luego, $\vec{g}$ (fig. 339) y, por tanto, la vertical, tendrá una orientación, la de $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$, común para todos los cuerpos, solamente si coinciden m_{gA} y m_{iA}.

Esto es precisamente lo que demuestra la experiencia: la vertical que indica una plomada no varía con la naturaleza del «peso».

Con la balanza de Eötvös se ha establecido la identidad entre la masa inerte y la gravitatoria con una aproximación de $5 \cdot 10^{-9}$.

Se emplea un equipo de la forma de la figura 337, I. Sin em-

bargo, ahora las masas de P_1 y P_2 (fig. 340) son de igual peso, pero de materia distinta. Orientando la vitrina en el sentido Este-Oeste (el plano de la figura es el plano horizontal) y torciendo el hilo de suspensión, se puede conseguir que el índice X coincida con el cero de la escala G.

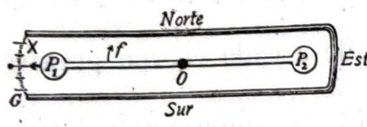


Fig. 340

Pero si la fuerza centrífuga fuese, por ejemplo, mayor para P_1 que para P_2, se originaría en el hemisferio norte un momento de torsión del hilo de suspensión del equipo en el sentido de la flecha f, que equilibraría la mayor componente horizontal (dirigida hacia el sur) de la fuerza centrífuga sobre P_1.

Se gira en bloque la vitrina un ángulo de 180º. Ahora la torsión dada al hilo de suspensión y la mayor fuerza centrífuga de P_1 no se equilibran ; al contrario, se suman ; X no debería encontrarse ya en correspondencia con el cero de G.

El experimento da resultado negativo : cuerpos de igual peso $\vec{P}$ (fig. 338) experimentan igual fuerza centrífuga $\vec{F}_2$; luego, experimentan también la misma acción newtoniana $\vec{F}_1$.

La masa gravitatoria coincide con la masa inerte.

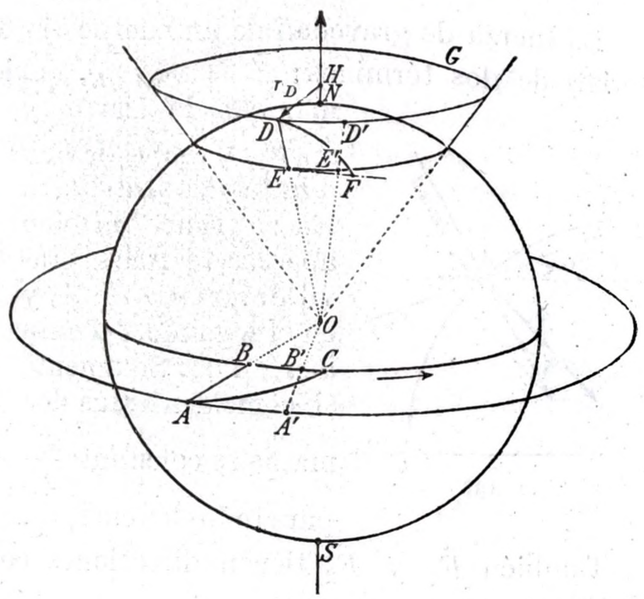


Fig. 341

§ 177. Pruebas de la rotación terrestre. La forma aplastada de la Tierra y la variación de g desde el ecuador al polo (§ 174) son ya de por sí pruebas excelentes de la rotación terrestre. Se tienen otras pruebas de carácter cualitativo, o menos directo, en la dirección de los vientos alisios y en la rotación de todos los otros planetas en los que se ha podido efectuar la observación.

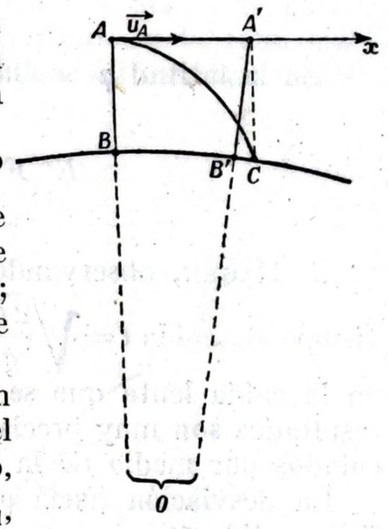
Pruebas muy convincentes de la rotación de la Tierra son la *caída de los graves hacia Oriente* (Galileo), *la rotación del plano de oscilación del péndulo* (Foucault), y la *brújula giroscópica* (Lord Kelvin).

a] **Caída de los graves hacia Oriente.** Un grave puesto en libertad no cae exactamente según la vertical, sino desviado hacia

Oriente, y también algo hacia el ecuador. Por ejemplo, a una latitud de $\approx 50^o$ se obtiene, en la caída libre en el aire desde una altura de 85,1 m, una desviación hacia Oriente de 11 mm (Benzenberg, 1804), y desde una altura de 158,5 m, una desviación de 28 mm (Reich, 1832).

Supóngase, en primera aproximación, que la Tierra es esférica y homogénea. El grave que se deja caer desde lo alto D de una torre (figura 341) es, respecto a la Tierra, como un planeta de velocidad inicial $u_D = r_D \cdot \omega$, en donde ω es la velocidad de la rotación de la Tierra, y $\vec{u}_D$ es tangente al paralelo que pasa por D.

Según las leyes de Kepler, la trayectoria de este planeta es una elipse, descrita en el plano que pasa por D y contiene al vector $\vec{u}_D$ y al centro de la Tierra, es decir, en el plano tangente al cono ODG. Sean F el punto en donde esta elipse corta al suelo, $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ el tiempo de caída y h la altura de la misma. Se ve fácilmente que el punto F se ha de hallar más hacia el ecuador que el punto E ; esta desviación hacia el ecuador solamente deja de existir en el ecuador mismo.



F²g. 342

Para mayor sencillez, consideremos un grave abandonado en A (fig. 342), en el plano del ecuador. Mientras el cuerpo, abandonado en A con la velocidad $\vec{u}_A$, corre por inercia en el plano ecuatorial, en el sentido x, la fuerza atractiva, dirigida siempre hacia el centro O de la Tierra, va tomando a lo largo del eje de las x la componente $-m\frac{x}{r}g \approx -\frac{mu_A t}{r}g$; en donde m es la masa del cuerpo, r el radio de la Tierra y $u_A = \omega \cdot r$ la velocidad de A.

Por consiguiente, la aceleración según el eje x es :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{x}{r}g \approx -\frac{u_A t}{r}g = -\frac{r\omega}{r}gt.$$

Por tanto, x crece con el tiempo según la expresión :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega gt\,;\quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = u_A = r_A\omega.$$

O sea, integrando :

$$BC = x = \omega r_A t - \frac{1}{6}\omega g t^3 = \omega r_A t - \frac{1}{3}\omega h t \quad \left(\frac{1}{2}gt^2 = h = r_A - r_B = AB\right).$$

En el mismo tiempo t, la vertical AB ha pasado a $A'B'$; es decir, el pie B de la vertical ha recorrido el arco BB' aproximadamente igual a $u_B \cdot t = \omega r_B \cdot t$, en donde $u_B = r_B \cdot \omega$.

Luego, aproximadamente, la desviación hacia Oriente es :

$$B'C = BC - BB' = \omega r_A t - \frac{1}{3}\omega h t - \omega r_B t = \frac{2}{3}\omega h t = \frac{2}{3}\omega h \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

En la latitud φ se encontraría una desviación $E'F$ (fig. 341) :

$$E'F = \frac{2}{3} \cdot \cos\varphi \cdot \omega h \sqrt{\frac{2h}{g}}. \qquad [1]$$

J. Hagen, observando que la desviación [1] es proporcional al tiempo de caída $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, ha medido la desviación hacia Oriente en la caída lenta que se obtiene con la máquina de Atwood. Sus resultados son muy precisos y coinciden con los valores teóricos calculados por medio de la [1], dentro de una aproximación del 1 %.

La desviación hacia el ecuador es demasiado pequeña y de difícil medida.

b] **Péndulo de Foucault.** Se separa un péndulo simple de su posición de reposo y se *deja* libre para que se ponga en oscilación. Según las leyes del movimiento del péndulo (§ 144), deben efectuarse las oscilaciones en un plano invariable. Por el contrario, demuestra la experiencia que el plano de oscilación gira muy lentamente (respecto al suelo) con una velocidad de rotación que depende de la latitud. En nuestro hemisferio, la rotación se realiza en el sentido de las agujas de un reloj para un observador que mire el péndulo desde arriba.

Esto se explica fácilmente si se admite la rotación terrestre.

En el polo (fig. 343), el fenómeno es particularmente sencillo: El plano de oscilación OAB del péndulo permanece efectivamente invariable «respecto a las estrellas fijas». La Tierra, y con ésta el observador, giran alrededor de la vertical dando una vuelta en 24 horas : 15 grados por hora. En el polo Norte N, la rotación aparente del plano de oscilación se verifica en sentido horario respecto a un observador que mira el péndulo desde lo alto.

En un punto P de latitud φ (fig. 344), el fenómeno es un poco más complicado. Al girar la Tierra, en el tiempo dt, P se traslada a P'. Se tiene : $PP' = r \cdot d\alpha' = r \cdot \omega \cdot dt$; en donde $r = CP$ es el radio del paralelo, y ω es la velocidad angular de la Tierra. También se tiene :

$$PP' = DP \cdot d\alpha \qquad DP = \frac{r}{\operatorname{sen}\varphi}.$$

Luego :

$$r \cdot \omega \cdot dt = DP \cdot d\alpha; \qquad \frac{d\alpha}{dt} = \frac{r \cdot \omega}{r} \operatorname{sen}\varphi = \omega \cdot \operatorname{sen}\varphi.$$

La rotación aparente $\widehat{DP'E} = \widehat{P'DP} = d\alpha$ del plano de oscilación alrededor de la vertical se debe, efectivamente, a la rotación, alrededor de la vertical y respecto a las estrellas, del meridiano que pasa por P. La velocidad aparente de rotación del plano de oscilación es :

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega \cdot \operatorname{sen}\varphi.$$

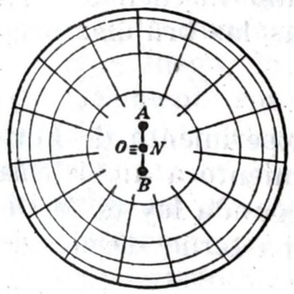


Fig. 343

A la latitud de 45º el péndulo de Foucault sólo gira 254º por día.

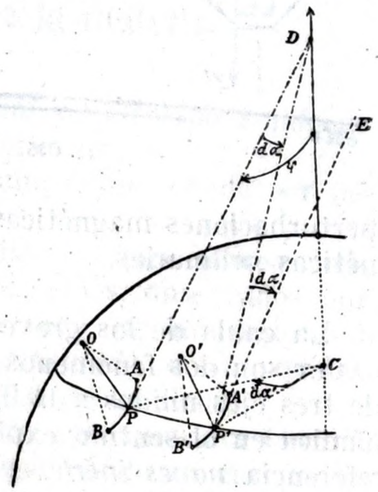


Fig. 344

c] **Brújula giroscópica.** Está constituída por un péndulo giroscópico P (figura 345), o sea, por un péndulo que contiene un giroscopio A con el eje x horizontal, mantenido en rápida e incesante rotación por ser el rotor de un motorcito eléctrico.

El péndulo está suspendido por un *punto* O, y no mediante cuchilla, sino que puede girar en torno al eje z. Sea G el centro de gravedad del sistema ; se tiene equilibrio cuando G se encuentra sobre la vertical Oz.

Supóngase que O está fijo a la Tierra, que el plano de la figura es el plano del ecuador y que el péndulo se halla inicialmente en la situación P ; G está sobre la vertical Oz, x se dirige hacia el Este ; la velocidad $\vec{\omega}$ de rotación del giroscopio es paralela a x y del mismo sentido.

A causa de la rotación de la Tierra el péndulo pasa de la situación P a la P' ; pero el eje x tiende a permanecer paralelo a sí mismo

(§ 167), de modo que G' no está ya sobre la vertical $O'z'$. La fuerza peso aplica al péndulo, y por tanto al giroscopio, un momento $\vec{M}$, que tiende a llevar G' a G'_0; $\vec{M}$ es perpendicular a la figura y, por consiguiente, se encuentra en el plano meridiano y se dirige hacia el Norte. El momento $\vec{M}$ engendra un movimiento de precesión que tiende a que $\vec{\omega}$ se coloque paralelo a $\vec{M}$ (§ 167, *d*]); el eje x gira lentamente hasta disponerse en el plano meridiano dirigido hacia el norte; la rotación de la Tierra y del giroscopio son entonces concordantes. En un punto de latitud φ, el efecto de la rotación terrestre se reduce proporcionalmente a cos φ.

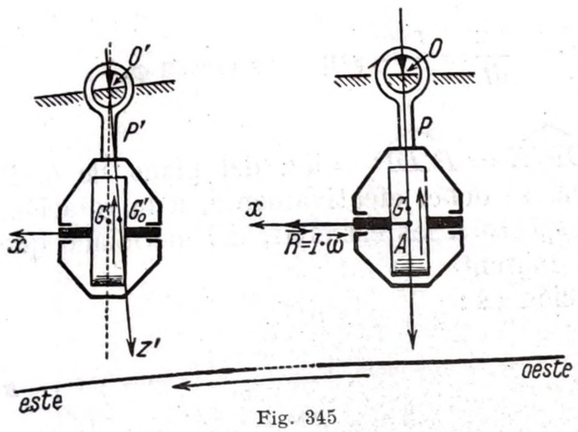


Fig. 345

El aparato revela la rotación de la Tierra y se emplea como brújula, resultando insensible a las perturbaciones magnéticas a que están sometidas las brújulas magnéticas ordinarias.

La caída de los graves hacia Oriente y el experimento de Foucault son dos fenómenos que, al referir el movimiento a un sistema de tres ejes unidos a la Tierra, contradicen la segunda ley de la Dinámica en el sentido explicado en el § 116; dicha terna de ejes de referencia *no es inerte*.

Admitiendo la rotación terrestre, y refiriendo los movimientos a un sistema de tres ejes fijos respecto a las estrellas (ejes de Galileo), los dos fenómenos indicados aparecen también regulados por la segunda ley de la Dinámica.

Se ha dicho ya (§ 116) que este nuevo sistema de ejes constituye un sistema de referencia inerte para todos los fenómenos conocidos hasta hoy.

SEGUNDA PARTE

Mecánica de los cuerpos deformables

CAPÍTULO I

Idea sobre la constitución de la materia

§ 178. **Cuerpos reales.** El *punto material* y el *cuerpo rígido* de los capítulos anteriores son puras abstracciones.

Todos los cuerpos reales tienen un volumen que puede ser pequeño, pero nunca nulo.

Desde luego, la Naturaleza nos presenta cuerpos *sólidos*, pero éstos solamente son *rígidos*, es decir, indeformables, observados burdamente; la deformación elástica *(elasticidad)* de un resorte de acero y la deformación permanente *(plasticidad)* de un pedazo de plomo martillado, constituyen una prueba de lo dicho.

Únicamente pueden admitirse en primera aproximación las definiciones elementales de los estados de agregación de un cuerpo, que damos a continuación:

sólido, cuerpo que tiene volumen y forma invariables;
líquido, cuerpo que tiene volumen invariable, pero forma indeterminada;
gas, cuerpo que tiene volumen y forma indeterminados.

Recordemos, además, que un cuerpo puede cambiar de estado de agregación.

La elasticidad, la plasticidad de los sólidos y los cambios de estado de agregación (fusión, solidificación, evaporación, licuefacción, etcétera), son los fenómenos más corrientes que conducen al estudio de la constitución de la materia.

Se llaman *fenómenos moleculares* los que pueden atribuirse más directamente a una estructura molecular de la materia. Generalmente, se consideran como tales la cohesión, adherencia, elasticidad, dureza, disolución, absorción y difusión, pero no es posible dar una lista completa y bien delimitada de los mismos. Los fenómenos más impensados resultan moleculares cuando se averigua su íntima na-

turaleza ; tales son el rozamiento interno, los fenómenos térmicos (por ejemplo, la conducción del calor), la expansión y la difusión de un gas, la propagación del sonido, etc.

§ 179. Divisibilidad. Moléculas. Átomos. El hecho vulgar de que cualquier cuerpo pueda dividirse en partes *(divisibilidad)* contiene el germen de uno de los problemas más interesantes sobre la constitución de la materia.

¿Es ilimitada la divisibilidad de los cuerpos?

La homogeneidad, todavía perfecta bajo el más potente examen microscópico, de una solución diluída de fucsina (p. ej., $\frac{1}{25}$ mg_m en 25 dm^3 de agua !), el poder odorífico de ciertas substancias ($2 \cdot 10^{-14}$ mm^3 de mercaptán diluídos en 1 dm^3 de aire dan un olor todavía sensible), el mínimo espesor de las láminas líquidas (hasta $6 \cdot 10^{-6}$ mm) y de las películas superficiales que forman ciertas grasas al extenderse por encima del agua (hasta $2 \cdot 10^{-6}$ mm), demuestran que si existe un límite en la divisibilidad de los cuerpos, debe estar determinado por valores bien pequeños de las dimensiones de las últimas partículas de la materia.

Se encuentran las primeras bases experimentales seguras de la hipótesis de una estructura granular de la materia, o sea, de una limitada divisibilidad de los cuerpos, en las leyes que regulan los fenómenos químicos, y más especialmente, en la ley de las proporciones constantes : todo cuerpo puro, es decir, químicamente definido, está formado de *moléculas* que son iguales entre sí. A su vez, la molécula está formada por *átomos*, que son todos iguales entre sí en las moléculas de los cuerpos simples, y no todos iguales en las moléculas de los cuerpos compuestos. Como caso particular, una molécula de cuerpo simple puede ser *monoatómica ;* pero, en general, las moléculas son *poliatómicas (bi-, tri- ..... atómicas)*.

La imagen que asimila una molécula monoatómica a una esferita elástica, y una molécula poliatómica a un aglomerado de esferitas elásticas rígidamente unidas entre sí, aunque grosera, es suficiente en una primera y discreta aproximación para explicar la teoría cinética de los gases (§ 367). Así, en la interpretación cinética molecular de algunos fenómenos se determina un *radio molecular ;* el duplo de este radio mide la mínima distancia a que pueden hallarse los baricentros de dos moléculas iguales cuando se aproximan a causa del movimiento de agitación térmico ; para las moléculas monoatómicas, este radio resulta del orden del ångström (10^{-8} cm), y para las moléculas poliatómicas compuestas de pocos átomos, se obtiene un radio del orden de varios ångström.

Los gránulos más pequeños, cuya existencia puede conocerse por medio del ultramicroscopio, todavía contienen algunos centenares de moléculas.

En los gases y en los líquidos, las moléculas están en continuo movimiento. La prueba más directa de este movimiento de agitación

molecular la constituye el movimiento browniano (§ 227) ; a esta continua agitación molecular se atribuyen todos los fenómenos térmicos, al rozamiento interno de los flúidos, la difusión, etc.

Actualmente, las pruebas más directas y convincentes de la estructura discontinua de la materia son el movimiento browniano, el espesor variable con discontinuidades de las láminas líquidas, el centelleo y la niebla producidos por los rayos α (tomo II), y los fenómenos del contador de Geiger (tomo II).

Pero la mejor prueba de la existencia de las moléculas es la siguiente : suponiendo que existan, se puede calcular su número a partir del espesor de las láminas delgadas (§ 219, *a*]), de la viscosidad de los gases, del movimiento browniano, del color del cielo, de la luz emitida por un cuerpo negro que está incandescente gracias a una temperatura suficientemente elevada, de la electrólisis, de la conducción eléctrica en los gases, de la radiactividad, de la difracción de los rayos X, ... Pues bien : todos estos métodos conducen a un número N de moléculas contenidas en una molécula-gramo de un cuerpo puro cualquiera, químicamente definido *(número de Avogadro-Loschmidt)*, comprendido entre

$$50 \cdot 10^{22} \text{ y } 75 \cdot 10^{22} ;$$

y los mejores métodos, entre los cuales se cuenta ciertamente el de la difracción de los rayos X (tomo II), dan para N el valor $N = 60{,}2_2 \cdot 10^{22}$ con un error inferior a $1\,{}^0/_{00}$; éste es el número de moléculas contenido en una molécula-gramo.

Por lo tanto,

$$N = 60{,}2_2 \cdot 10^{22} \frac{\text{número de moléculas}}{\text{mol-gramo}}$$

y dimensionalmente,

$$[N] = (\text{mol-gramo})^{-1} = g_m{}^{-1}.$$

Nosotros escribiremos generalmente :

$$N = 60{,}2_2 \cdot 10^{22} \ (\text{mol-gramo})^{-1}.$$

Según MILLIKAN, hoy en día se conoce este número con menor error relativo que la población de una ciudad como Nueva York en un momento dado.

Entre las moléculas se hallan los espacios intermoleculares ; se toma como distancia intermolecular la distancia entre los baricentros de moléculas contiguas. La compresibilidad y la dilatabilidad térmicas se reconducen a variaciones de dichos espacios intermo-

turaleza ; tales son el rozamiento interno, los fenómenos térmicos (por ejemplo, la conducción del calor), la expansión y la difusión de un gas, la propagación del sonido, etc.

§ 179. Divisibilidad. Moléculas. Átomos. El hecho vulgar de que cualquier cuerpo pueda dividirse en partes *(divisibilidad)* contiene el germen de uno de los problemas más interesantes sobre la constitución de la materia.

¿Es ilimitada la divisibilidad de los cuerpos?

La homogeneidad, todavía perfecta bajo el más potente examen microscópico, de una solución diluída de fucsina (p. ej., $\frac{1}{25}$ mg_m en 25 dm^3 de agua !), el poder odorífico de ciertas substancias ($2 \cdot 10^{-14}$ mm^3 de mercaptán diluídos en 1 dm^3 de aire dan un olor todavía sensible), el mínimo espesor de las láminas líquidas (hasta $6 \cdot 10^{-6}$ mm) y de las películas superficiales que forman ciertas grasas al extenderse por encima del agua (hasta $2 \cdot 10^{-6}$ mm), demuestran que si existe un límite en la divisibilidad de los cuerpos, debe estar determinado por valores bien pequeños de las dimensiones de las últimas partículas de la materia.

Se encuentran las primeras bases experimentales seguras de la hipótesis de una estructura granular de la materia, o sea, de una limitada divisibilidad de los cuerpos, en las leyes que regulan los fenómenos químicos, y más especialmente, en la ley de las proporciones constantes : todo cuerpo puro, es decir, químicamente definido, está formado de *moléculas* que son iguales entre sí. A su vez, la molécula está formada por *átomos*, que son todos iguales entre sí en las moléculas de los cuerpos simples, y no todos iguales en las moléculas de los cuerpos compuestos. Como caso particular, una molécula de cuerpo simple puede ser *monoatómica ;* pero, en general, las moléculas son *poliatómicas (bi-, tri- ..... atómicas)*.

La imagen que asimila una molécula monoatómica a una esferita elástica, y una molécula poliatómica a un aglomerado de esferitas elásticas rígidamente unidas entre sí, aunque grosera, es suficiente en una primera y discreta aproximación para explicar la teoría cinética de los gases (§ 367). Así, en la interpretación cinética molecular de algunos fenómenos se determina un *radio molecular ;* el duplo de este radio mide la mínima distancia a que pueden hallarse los baricentros de dos moléculas iguales cuando se aproximan a causa del movimiento de agitación térmico ; para las moléculas monoatómicas, este radio resulta del orden del ångström (10^{-8} cm), y para las moléculas poliatómicas compuestas de pocos átomos, se obtiene un radio del orden de varios ångström.

Los gránulos más pequeños, cuya existencia puede conocerse por medio del ultramicroscopio, todavía contienen algunos centenares de moléculas.

En los gases y en los líquidos, las moléculas están en continuo movimiento. La prueba más directa de este movimiento de agitación

molecular la constituye el movimiento browniano (§ 227) ; a esta continua agitación molecular se atribuyen todos los fenómenos térmicos, al rozamiento interno de los flúidos, la difusión, etc.

Actualmente, las pruebas más directas y convincentes de la estructura discontinua de la materia son el movimiento browniano, el espesor variable con discontinuidades de las láminas líquidas, el centelleo y la niebla producidos por los rayos α (tomo II), y los fenómenos del contador de Geiger (tomo II).

Pero la mejor prueba de la existencia de las moléculas es la siguiente : suponiendo que existan, se puede calcular su número a partir del espesor de las láminas delgadas (§ 219, *a*]), de la viscosidad de los gases, del movimiento browniano, del color del cielo, de la luz emitida por un cuerpo negro que está incandescente gracias a una temperatura suficientemente elevada, de la electrólisis, de la conducción eléctrica en los gases, de la radiactividad, de la difracción de los rayos X, ... Pues bien : todos estos métodos conducen a un número N de moléculas contenidas en una molécula-gramo de un cuerpo puro cualquiera, químicamente definido *(número de Avogadro-Loschmidt)*, comprendido entre

$$50 \cdot 10^{22} \text{ y } 75 \cdot 10^{22} ;$$

y los mejores métodos, entre los cuales se cuenta ciertamente el de la difracción de los rayos X (tomo II), dan para N el valor $N = 60{,}2_2 \cdot 10^{22}$ con un error inferior a $1\,{}^0/_{00}$; éste es el número de moléculas contenido en una molécula-gramo.

Por lo tanto,

$$N = 60{,}2_2 \cdot 10^{22} \frac{\text{número de moléculas}}{\text{mol-gramo}}$$

y dimensionalmente,

$$[N] = (\text{mol-gramo})^{-1} = g_m{}^{-1}.$$

Nosotros escribiremos generalmente :

$$N = 60{,}2_2 \cdot 10^{22} \ (\text{mol-gramo})^{-1}.$$

Según MILLIKAN, hoy en día se conoce este número con menor error relativo que la población de una ciudad como Nueva York en un momento dado.

Entre las moléculas se hallan los espacios intermoleculares ; se toma como distancia intermolecular la distancia entre los baricentros de moléculas contiguas. La compresibilidad y la dilatabilidad térmicas se reconducen a variaciones de dichos espacios intermo-

leculares. En los líquidos, las distancias intermoleculares son del mismo orden de magnitud que el radio molecular; en los gases prácticamente perfectos, en condiciones normales, las distancias intermoleculares son mucho mayores que el radio molecular, por ejemplo, muchas decenas de veces mayores que dicho radio.

Para tener una idea de lo grande que es el número de AVOGADRO, he aquí tres comparaciones (ASTON):

1.º Una lamparita eléctrica corriente, bien vaciada, tiene un agujerito en sus paredes de modo que pueda penetrar el aire a razón de un millón de moléculas por segundo. Solamente al cabo de cien millones de años la presión del aire, dentro de la lamparita, llegaría a ser igual a media atmósfera.

Este agujerito no produciría ninguna perturbación en el funcionamiento de dicha lámpara durante su vida normal, que es de mil a dos mil horas.

2.º Vertiendo en el mar un vaso de agua (unos 300 cm^3), si suponemos que sus moléculas se distribuyen uniformemente por toda el agua del mar, se encontrarían 2000 de dichas moléculas en un vaso de agua que después se sacase del mar. En otros términos, el número de moléculas contenidas en un vaso de agua ($\approx 10^{25}$) es igual a 2000 veces el número de vasos de agua contenidos en el mar ($\approx 5 \cdot 10^{21}$).

3.º La distancia de las estrellas, aun las más próximas, no se mide en kilómetros, ni en millones de kilómetros, sino en *años de luz*, porque dicha distancia es inmensa. Pero el número de AVOGADRO da, aproximadamente, la distancia entre la Tierra y Sirio (que no es la estrella más próxima), no en años de luz, ni en kilómetros, ni en metros, sino en ¡*milésimas de milímetro*!

Por esto puede considerarse continua la estructura de la materia en el estudio, aunque sea muy preciso, de numerosos fenómenos físicos de hidrodinámica, elasticidad, propagación del calor, etc.

En el caso de los cristales se han obtenido modificaciones substanciales del antiguo concepto de molécula (§ 182).

También ha cambiado radicalmente la antigua concepción del átomo.

Todo un grupo de fenómenos eléctricos (radiactividad, rayos catódicos, fotoelectrónica, termoelectrónica, etc.) ha obligado a los físicos a abandonar la idea primera del átomo indivisible, y a sustituirla por la hipótesis de que los átomos son, a su vez, edificios complejos. Se puede aceptar provisionalmente un modelo de átomo que lo supone análogo al sistema solar; un átomo está constituído de *electrones* (cargas eléctricas negativas elementales) todos iguales, y que gravitan alrededor de un *núcleo atómico* cargado positivamente (teoría de la *constitución eléctrica de la materia*). Esta *carga nuclear* positiva es un múltiplo de una carga elemental cuyo valor absoluto es igual al de la carga electrónica.

Es probable que los *protones* y los *neutrones* (IVANENKO) sean los únicos constituyentes del núcleo atómico; cada una de estas partículas tiene una masa igual a la del átomo de hidrógeno con muchísima aproximación; el neutrón es eléctricamente neutro, mientras que el protón tiene una carga elemental positiva. El número de cargas elementales positivas que constituyen la carga nuclear, se llama *número atómico* (VAN DEN BROEK) del elemento considerado y mide simplemente el número de protones existentes en el núcleo atómico.

Aunque los datos siguientes sólo tienen significado después que se haya definido lo que se entiende por diámetro de las partículas en discusión, diremos como información que se puede atribuir a los electrones un diámetro del orden de 10^{-13} cm; el núcleo atómico, aun el de los elementos de peso atómico muy elevado, tiene un diámetro del orden de 10^{-12} cm. La acción mutua entre electrones, entre núcleos, y entre electrones y núcleos, se puede suponer sensible hasta una distancia del orden de $10^{-8} \div 10^{-7}$ cm. La acción de un neutrón sobre un núcleo atómico, sólo debe suponerse sensible a una distancia del orden de 10^{-13} cm.

No puede todavía considerarse como definitivamente conocida la naturaleza de las acciones entre protones y neutrones capaz de garantizar la estabilidad del edificio nuclear, y, con más generalidad, capaz de dar razón de los fenómenos del núcleo (radiactividad, desintegración de los elementos). Ni siquiera puede considerarse definitivamente conocida la constitución del núcleo atómico.

Un átomo eléctricamente *neutro* es un sistema que contiene entre el núcleo y la atmósfera (de electrones) que lo envuelve, igual número de cargas positivas y negativas.

El átomo puede estar *ionizado* de una manera simple, doble, triple, ... es decir, pueden faltarle 1, 2, 3, ... electrones periféricos, con lo que el átomo constituye un *ion positivo*, o puede tener un exceso de electrones periféricos y constituir así un *ion negativo*.

El proceso de ionización es diferente en los dos casos: en el primero, la ionización es consecuencia de un trabajo de extracción de los electrones efectuado desde fuera del átomo; se puede decir que esta ionización es endotérmica en cuanto necesita que se suministre energía desde el exterior; por ejemplo, energía calorífica (pero más a menudo de otra naturaleza).

La formación de iones negativos puede imaginarse como resultado de la afinidad entre electrones y átomos neutros; es decir, algo análogo a una reacción química con liberación de energía mutua de posición, y, por tanto, a una reacción química exotérmica.

Los átomos de los metales se convierten fácilmente en iones positivos; los de los metaloides, en iones negativos.

El átomo de hidrógeno, que es el más sencillo, tiene por núcleo un protón; alrededor de este núcleo gira un electrón. Así resulta un átomo eléctricamente neutro.

La posibilidad de concebir el edificio atómico de un modo tan concreto mediante protones, neutrones y electrones, las leyes del

movimiento (es decir, la mecánica) a que deben obedecer estas partículas y el núcleo, la naturaleza de las fuerzas que actúan entre estos elementos, han constituído y constituyen motivos fundamentales de estudio. Pero los resultados alcanzados salen fuera del cuadro de este libro, y el modelo concreto que se ha expuesto antes, por lo general, resultará suficiente para nosotros.

Una molécula poliatómica, por ejemplo biatómica, es un edificio complejo cuya estabilidad se debe a las acciones que se ejercen entre los electrones y los núcleos de los átomos que la constituyen. Se hablará de distancias interatómicas, tomando como tales las distancias entre los núcleos de átomos contiguos; estas distancias son del mismo orden de magnitud que las distancias entre el núcleo y los electrones periféricos del átomo, es decir, que el radio del átomo.

La molécula puede también ionizarse positiva o negativamente; sirven en este caso consideraciones análogas a las expuestas sobre la ionización del átomo.

§ 180. **Isotopos. Isobaros.** Según la anterior teoría de la constitución eléctrica de la materia, la trasmutación de los elementos es un fenómeno posible, y son ya numerosos los casos en que se ha podido producir y observar; se realiza en cantidades macroscópicas en las instalaciones construídas para la producción del «explosivo» destinado a las llamadas bombas «atómicas».

Otra notable modificación que la teoría moderna de la materia ha aportado al antiguo concepto de elemento químico, consiste en la introducción del concepto de *isotopos* y de *isobaros*.

Se ha demostrado (análisis mediante el *espectrógrafo de masas*, tomo II) que muchos de los elementos químicamente definidos, como el cloro son una mezcla de elementos de distinta masa atómica, pero que tienen idénticas propiedades químicas.

Por ejemplo, el *cloro* químicamente puro es una mezcla de átomos ^{35}Cl de masa atómica 35, y de átomos ^{37}Cl de masa atómica 37. La masa atómica determinada por los químicos, 35,45, es una masa intermedia que resulta de la proporción en que los dos *isotopos* ^{35}Cl y ^{37}Cl se encuentran presentes en la mezcla.

He aquí cómo interpreta esto la teoría de la constitución eléctrica de la materia.

El ^{35}Cl tiene un núcleo constituído por 17 protones y 18 neutrones; la carga nuclear es de 17 cargas elementales positivas; 17 es el número atómico del cloro ^{35}Cl. Se indicará este átomo de cloro por el símbolo $^{35}_{17}Cl$

El ^{37}Cl tiene un núcleo constituído por 17 protones y 20 neutrones; la carga nuclear, y, por tanto, el número atómico, no han cambiado; este nuevo átomo se indicará por el símbolo $^{37}_{17}Cl$.

A los efectos de la configuración periférica presentada por los 17 electrones que deben rodear a los átomos $^{35}_{17}Cl$ o $^{37}_{17}Cl$ para que presenten el estado neutro, los núcleos $^{35}_{17}Cl$ y $^{37}_{7}Cl$ son equivalentes en

primera y óptima aproximación. Todas las propiedades que dependen de esta configuración periférica no pueden servir para diferenciar los dos cloros entre sí. Figuran entre éstas las propiedades químicas, que sólo dependen de los electrones más externos de la atmósfera electrónica del elemento.

Se ha encontrado que algunos elementos químicos (hierro, bismuto) son realmente simples, es decir, no presentan más que un isotopo; pero, generalmente, todos los elementos químicos son el resultado de una mezcla de dos o más isotopos.

El *estaño* de los químicos (masa atómica 118,70) ha resultado ser una mezcla de 11 isotopos, todos de número atómico 50, pero de masas atómicas 112, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122 y 124.

Un mismo número atómico corresponde, en general, a un grupo de elementos *físicamente* distintos *(isotopos)*, constituyendo una *pléyade;* los elementos de una pléyade son todos los equivalentes *químicamente;* por tanto, constituyen un elemento único desde el punto de vista químico.

Inversamente, una misma masa atómica puede corresponder a átomos químicamente distintos: por ejemplo, los dos átomos $^{64}_{28}Ni$ y $^{64}_{30}Zn$, de números atómicos 28 y 30, respectivamente, son químicamente distintos; uno es níquel, otro cinc; pero tienen la misma masa atómica 64 (28 protones y 36 neutrones en el núcleo del primero, y 30 protones y 34 neutrones en el núcleo del segundo). Tales elementos se llaman *isobaros*.

El descubrimiento de los isotopos y de los isobaros, a la vez que constituye un poderoso apoyo de la teoría eléctrica de la materia, la ha simplificado mucho.

a] **Números atómicos.** Sólo son químicamente diferentes los elementos químicos a los que corresponde distinto número atómico, o, según la terminología más reciente, distinto *número de carga*. Los elementos químicos con números atómicos 1, 2, 3, 4, ... pueden considerarse todos conocidos hasta el elemento de número atómico 92 (uranio); no está, pues, permitido esperar el descubrimiento de nuevos elementos *químicos* que no sean ultrauránicos. Pero incluso esta esperanza es bastante remota, pues no parece posible que los núcleos de número atómico superior a 92 sean estables.

b] **Masas atómicas.** En química se da la siguiente definición de masa atómica: masa atómica m_{at} es la relación entre la masa del átomo considerado y la masa del átomo del oxígeno ordinario, supuesta ésta = 16; de ello resulta que la masa atómica del hidrógeno, que habría tenido que ser = 1, resulta 1,008. La masa atómica, de acuerdo con la terminología más reciente, se denomina también *número de masa*. Pero sigue llamándose a menudo «peso atómico».

Análoga definición se tiene para la masa molecular, denominada todavía frecuentemente «peso molecular».

En física, a consecuencia del descubrimiento de los isotopos, las masas atómica y molecular han sido ulteriormente precisadas.

Por ejemplo, la masa atómica de un isotopo dado es la relación entre la masa del átomo del isotopo considerado y la masa del isotopo más abundante del oxígeno, supuesta = 16.

Ahora bien, la materia tiene como únicos constituyentes, electrones, protones y neutrones ; por consiguiente la masa atómica de cada uno de los isotopos de cualquier elemento tiene que ser siempre un múltiplo de la masa atómica del hidrógeno ${}_0^1H$, cuyo átomo (neutro) está constituído por un solo protón (que se identifica con el núcleo) y un solo electrón.

Es lo que confirma el espectrógrafo de masas, con excelente aproximación y para cada isotopo ; así puede enunciarse de nuevo para los elementos físicos, es decir, para todos los isotopos de todos los elementos químicos, la ley que PROUT había enunciado poco después de la introducción de las masas atómicas y que, aplicada a los elementos químicos, tenía un carácter de regularidad, aunque con varias excepciones como la del cloro.

Las ligeras desviaciones de la ley de PROUT todavía observables se atribuyen a un fenómeno energético, sobre el que no insistimos, aunque tiene fundamental importancia en física nuclear.

§ 181. Fuerzas moleculares. Son las que actúan entre las moléculas, siendo solamente sensibles a distancias intermoleculares que no sean grandes respecto al radio molecular ; se cree que estas fuerzas son de naturaleza eléctrica, y consecuencia de la constitución eléctrica de los átomos.

Se atribuyen a las fuerzas moleculares los fenómenos de *cohesión* y de *adherencia*.

La resistencia de un sólido a la rotura es una prueba de la existencia de la *cohesión*, que es la fuerza que actúa entre las varias partículas de un mismo cuerpo sólido.

La resistencia a la separación de dos piezas soldadas o de una hoja de platino y otra de oro que se han hecho pasar juntas por el laminador, es una prueba de la existencia de la *adherencia* entre partículas de cuerpos sólidos químicamente diferentes.

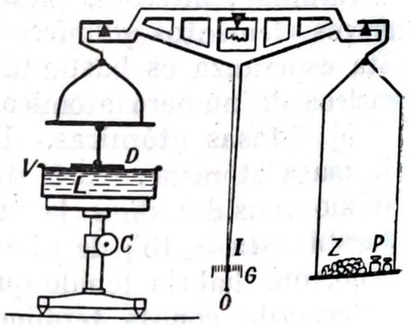


Fig. 346

El dispositivo de la figura 346 muestra la cohesión en el agua : se equilibra el disco de vidrio D, se levanta la vasija V hasta que el agua L se adhiera a D. Bajando ahora V, el agua arrastra consigo el disco. Si el disco tiene 4 cm de diámetro, para separar D de L se necesita un aumento de peso Z de 0,1 newton ($\approx 10\ g_p$). Después de la separación, el disco D está mojado, lo que prueba la existencia de cohesión en el agua y de una adherencia más fuerte entre vidrio y agua. Repitiendo el experimento con mercurio, en lugar de agua, se prueba la existencia de una adherencia entre vidrio y mercurio, menor que la cohesión en el mercurio, ya que éste no moja al vidrio.

En este caso, si están bien pulidos y secos el vidrio y el mercurio, quedan electrizados enérgicamente con signos opuestos después de la separación : no está todavía bien claro si estos fenómenos de electrización tienen relación con la adherencia.

Se demuestra también la existencia de cohesión en el agua con el *martillo de agua* (fig. 347) : un tubo de vidrio que contiene agua se vacia de aire con mucho cuidado. Inclinando el tubo (fig. 347, *b*]) y levantándolo después (fig. 347, *c*]), el agua sigue llenando el tubo, contra el principio de los vasos comunicantes ; la columna h se mantiene levantada a causa de la cohesión.

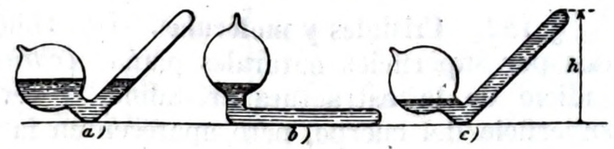


Fig. 347

Los fenómenos de capilaridad y de tensión superficial (§§ 216 ÷ 220) son también consecuencia de la existencia de fuerzas de cohesión y adherencia en los líquidos y en los sólidos.

Veremos en termodinámica las razones que inducen a suponer que la cohesión de los gases poco comprimidos, alejados del punto de licuefacción es sensiblemente nula.

La caracteristica de las fuerzas de cohesión es que son sensibles únicamente a pequeñísima distancia : una vez roto un sólido, si se intenta unir los pedazos, por mucho que se aproximen, se verá cuán poca cosa es la cohesión.

El *radio de la esfera de acción molecular*, esto es, la distancia a que todavía son sensibles las fuerzas moleculares, es inferior a 10^{-6} centímetros, y en muchos problemas sólo se tienen en cuenta en primera aproximación las fuerzas de cohesión que actúan a una distancia poco superior a 10^{-8} cm (p. ej., en la teoría eléctrica de la cohesión en los cristales, según BORN).

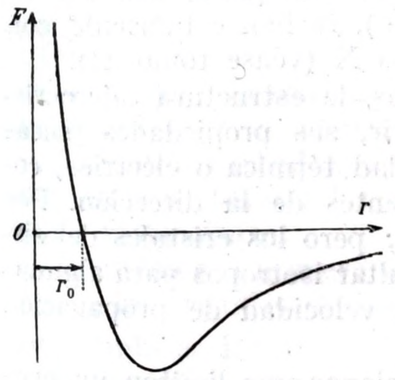


Fig. 348

En los gases en condiciones normales, las fuerzas de cohesión y adherencia son mínimas, porque la distancia media entre las moléculas es muy superior al radio de su esfera de acción.

Los sólidos y los líquidos no solamente resisten a las fuerzas que tienden a separarlos en partes, sino que reaccionan también contra las fuerzas que tienden a aproximar sus partes. Constituye esto la *incompresibilidad* de los sólidos y de los líquidos.

Como se ha indicado, las fuerzas moleculares son la resultante de acciones eléctricas entre electrones y núcleos de átomos o moléculas contiguas ; del juego de estas acciones se llega a obtener, por

ejemplo, para las fuerzas que actúan entre dos moléculas, en función de la distancia r entre sus baricentros, un gráfico como el de la figura 348; la fuerza $\vec{F}$ es primero atractiva ($F < 0$) y aumenta al disminuir la distancia r; se anula después, y luego se convierte en repulsiva ($F > 0$) para las distancias más pequeñas. Por consiguiente, las moléculas de los cuerpos tienen posiciones de equilibrio mutuo; a mayor distancia se atraen y a menor distancia se repelen.

§ 182. Cristales y moléculas. Los sólidos a menudo están limitados por superficies naturales planas *(caras cristalinas)*. Estas caras, indicio de la estructura cristalina, a veces no se reconocen en la superficie del cuerpo, pero aparecen en la superficie reciente de fractura, como, por ejemplo, en un pedazo de yeso, constituyendo las caras llamadas de exfoliación.

Se llama *cristal* un sólido terminado por caras planas naturales.

Los cristales se obtienen por evaporación del disolvente de una solución saturada, por solidificación y por sublimación.

Los cuerpos sólidos no cristalinos se llaman *amorfos;* ejemplo, el vidrio. Se admite generalmente que todos los cuerpos puros al estado sólido tienen estructura cristalina, y que los cuerpos amorfos, como el vidrio, aunque deben considerarse como sólidos para todos los efectos prácticos, son realmente líquidos sobrefundidos con coeficiente de rozamiento interno elevadísimo.

Los individuos cristalinos pueden tener dimensiones muy variadas, desde *monocristales* de cuarzo de muchas decenas de kg_m a microcristales cuyas caras sólo son visibles al microscopio, como en algunos mármoles y en la calcedonia. Así, la estructura cristalina de algunas substancias (por ejemplo, el negro de humo), la simetría cristalina de algunas otras de las cuales ya se sabía que se hallaban en el estado cristalino (por ejemplo el grafito), se han establecido con seguridad gracias al análisis con los rayos X (véase tomo II).

Los cuerpos líquidos, los amorfos y los de estructura microcristalina desordenada son *isotropos*, es decir, sus propiedades físicas macroscópicas (dilatabilidad, conductibilidad térmica o eléctrica, cohesión, refringencia, etc.), son independientes de la dirección. Por el contrario, un monocristal es *anisotropo;* pero los cristales del sistema regular o cúbico pueden todavía resultar isotropos para algunas propiedades físicas (por ejemplo, para la velocidad de propagación de la luz).

Se ve inmediatamente que las caras planas que limitan un cristal están dispuestas con cierta simetría, lo que se atribuye a una particular regularidad en la disposición de los elementos materiales que constituyen el sólido.

Se debe a LAUE la idea de determinar la constitución de los cristales mediante la difracción de los rayos X (tomo II). Los resultados de este análisis han sido muy provechosos.

Un cristal está formado de elementos constitutivos iguales entre sí e igualmente orientados, de modo que una traslación elemental y constante $\vec{T}_0$ (del orden de 10^{-8} cm) es capaz de hacer superponer cada elemento con el sucesivo.

El caso más sencillo es el de los cristales de algunos cuerpos simples en que el elemento constitutivo es el átomo. En realidad, según la teoría cinética, se supone (§ 183) que ni siquiera en los cristales están fijos los átomos, sino dotados de un movimiento de agitación térmica que los hace vibrar alrededor de sus posiciones de equilibrio.

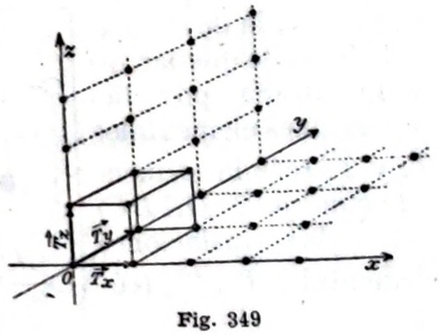


Fig. 349

Se toma entonces un vector $\vec{T}_0$, que es la traslación que el baricentro de un átomo (en su posición de equilibrio) tiene que experimentar para ir a coincidir con el baricentro de un átomo contiguo (también éste en su posición de equilibrio). Es cómodo razonar sobre un modelo constituído por una red de puntos; cada uno de éstos representa el baricentro de un átomo en su posición de equilibrio.

El vector $\vec{T}_0$ no está unívocamente determinado; así, en la red de puntos de la figura 349, la indicada superposición puede obtenerse mediante una cualquiera de las tres traslaciones elementales, independientes entre sí, $\vec{T}_x$, $\vec{T}_y$, $\vec{T}_z$; toda otra traslación $\vec{T}$ capaz de llevar un punto de la red en coincidencia con otro (aunque no se trate del inmediato) se puede expresar en función de los vectores $\vec{T}_x$, $\vec{T}_y$ y $\vec{T}_z$:

$$\vec{T} = k \cdot \vec{T}_x + l \cdot \vec{T}_y + m \cdot \vec{T}_z \qquad [1]$$

en donde k, l, m son números enteros. Al variar k, l y m, un punto de la red va a coincidir sucesivamente con *todos* los demás.

Cuando así sucede, se dice que los átomos del cristal constituyen una *red espacial simple;* el cristal se llamará *monoatómico* o *de molécula monoatómica.*

Limitémonos primero a este caso.

En los cristales de los sistemas regular (o cúbico), cuadrático y ortorrómbico, las traslaciones elementales $\vec{T}_x$, $\vec{T}_y$ y $\vec{T}_z$ de una red simple pueden escogerse perpendiculares entre sí; los ejes x, y, z de la figura 349 constituyen un triedro trirrectángulo. En todos los demás casos esto no es posible; los ejes x, y, z no pueden escogerse perpendiculares entre sí.

Con origen en un punto de la red construyamos el paralelepípedo de aristas $\vec{T}_x$, $\vec{T}_y$, $\vec{T}_z$, llamado *célula elemental* o *célula de* BRAVAIS de la red espacial. Lo característico de esta célula es que tiene la forma

de paralelepípedo y contiene un átomo en cada uno de sus ocho vértices, y ninguno sobre las aristas ni sobre las caras, ni en el interior de la célula.

Dada la red, resultan aún muy arbitrarias las traslaciones elementales y la célula elemental. En efecto, limitándonos para mayor sencillez a una red plana de puntos, la de la figura 350 puede quedar individualizada por las traslaciones elementales $\vec{T}_x$ y $\vec{T}_y$ (célula elemental cuadrada $OABC$) o por las traslaciones elementales $\vec{T}_\xi$, $\vec{T}_\eta$ (célula elemental paralelográmica $OBDE$).

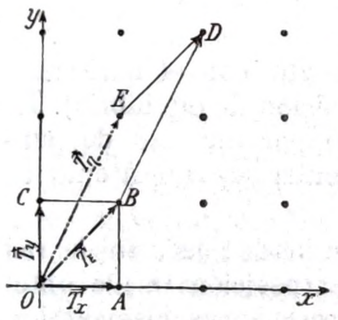


Fig. 350

Entre todas las células elementales posibles se da preferencia a la más sencilla y simétrica; en la figura 350 preferiremos, evidentemente, la célula cuadrada.

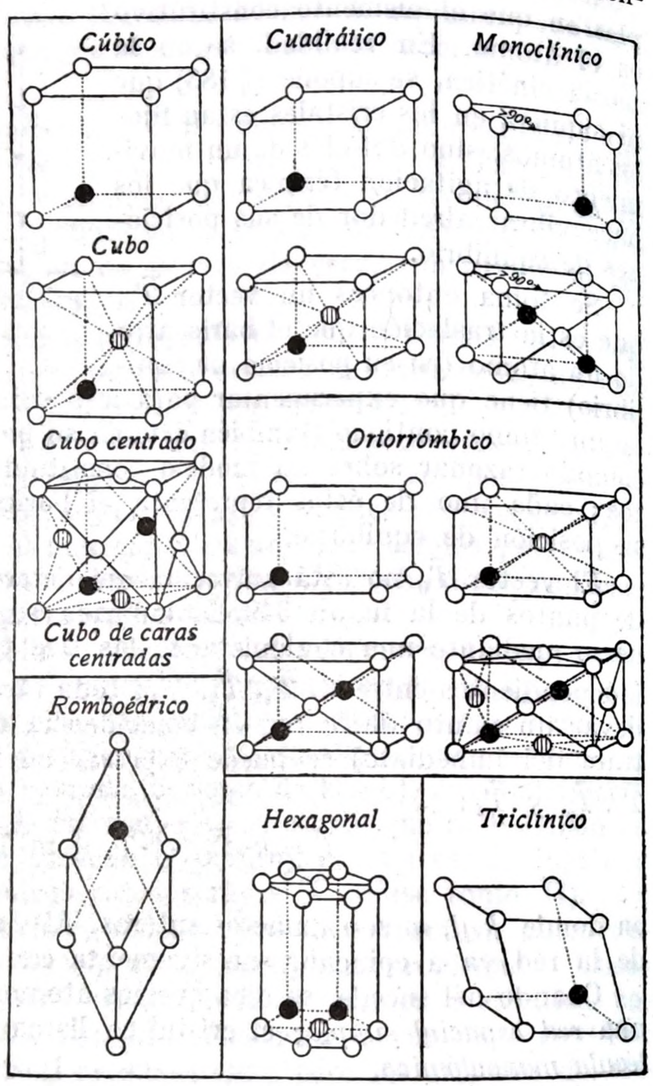


Fig. 351

Una red espacial se debe imaginar ilimitada en todas las direcciones, y su característica esencial es la de «llenar» con sus células elementales todo el espacio.

Consideraciones generales de simetría geométrica conducen a establecer como posibles solamente 14 tipos de células elementales, y con éstas se ha de imaginar que están constituídos todos los cristales existentes en la Naturaleza.

Las 14 células elementales suelen recordarse mediante los esquemas de la figura 351, en muchos de los cuales, sin embargo, no

se ha dibujado la célula elemental, sino más bien un poliedro en el que los elementos de simetría cristalina son más evidentes. Así, el segundo esquema de la figura 351 *(cubo centrado)* recuerda convencionalmente una célula elemental que es, por ejemplo, la de la figura 352, en la que se tiene:

$$T_x = T_y,\ T_z = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot T_x;\qquad \widehat{\vec{T}_x\vec{T}_y} = 90^\circ,\quad \widehat{\vec{T}_x\vec{T}_z} = \widehat{\vec{T}_y\vec{T}_z} = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{2}.$$

Pero es preferible indicar como malla constitutiva de la red la célula cúbica con un átomo en el centro, para que resalte mejor la simetría cúbica de la red.

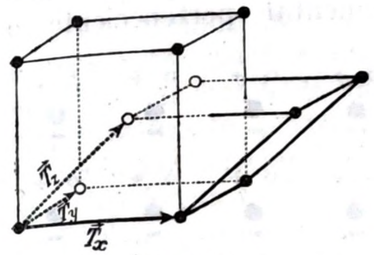


Fig. 352

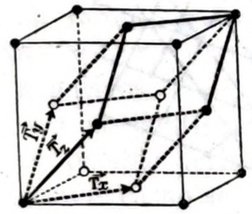


Fig. 353

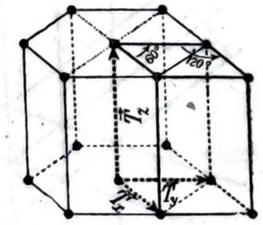


Fig. 354

Análogamente, el tercer esquema de la figura 351 *(cubo de caras centradas)* representa convencionalmente la célula elemental $\vec{T}_x$, $\vec{T}_y$, $\vec{T}_z$ de la figura 353, en la cual se tiene:

$$T_x = T_y = T_z;\qquad \widehat{\vec{T}_x\vec{T}_y} = \widehat{\vec{T}_y\vec{T}_z} = \widehat{\vec{T}_z\vec{T}_x} = 60^\circ.$$

Del mismo modo, el esquema del sistema hexagonal recuerda convencionalmente, y con gran ventaja por la evidencia de la simetría, la célula elemental de la figura 354, en donde es:

$$T_x = T_y,\ \ T_z \text{ cualquiera}:\quad \widehat{\vec{T}_z\vec{T}_y} = \widehat{\vec{T}_y\vec{T}_z} = 90^\circ,\quad \widehat{\vec{T}_x\vec{T}_y} = 60^\circ.$$

Los planos que contienen mayor densidad superficial de puntos se llaman *planos reticulares* y determinan las caras cristalinas posibles del cristal, en el sentido que, para cada cara cristalina, existe en la red una familia de planos reticulares paralelos equidistantes que pasan por los puntos del retículo; en general, la distancia entre dos de estos planos sucesivos es diferente si se pasa de una familia de planos a otra distinta. Esto se ve bien en la red plana de la figura 355; las rectas sucesivas r paralelas entre sí, que pasan por los puntos del retículo, tienen la equidistancia a; estas rectas se corresponden, en el plano, con una familia de planos reticulares, en el espacio, que

determinan una cara cristalina. Las rectas sucesivas r_1, de equidistancia a_1, corresponden a otra cara cristalina, y así sucesivamente para r_2, r_3, ... Pero en las rectas r_3 la «densidad» de puntos de la red es menor, por ejemplo, que en las rectas r.

En los cristales de todos los cuerpos compuestos, y también en los de muchos cuerpos simples, la red espacial es *compuesta;* ésta puede imaginarse constituída por las sucesivas traslaciones elementales de una célula elemental perteneciente a

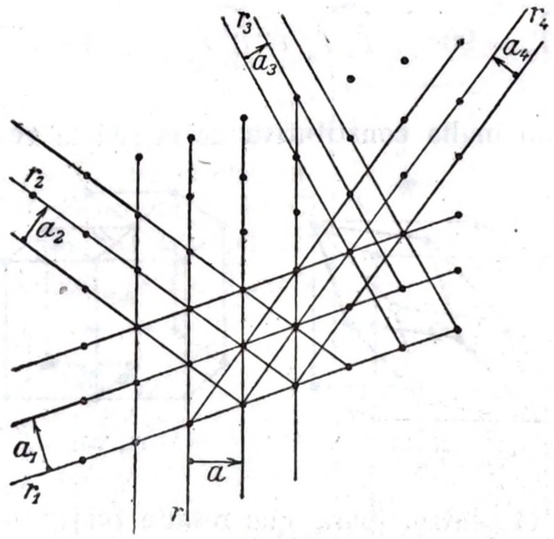


Fig. 355

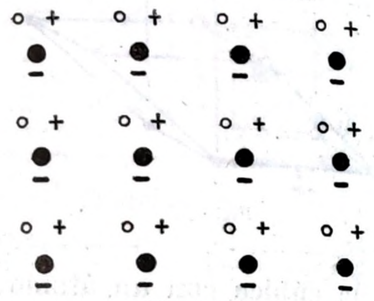


Fig. 356

uno de los 14 tipos antes mencionados; pero esta célula ya no es simple. Además de los átomos iguales situados en los vértices de la célula, ésta presenta otros átomos, colocados sobre las aristas, sobre las caras o en el interior de la célula, dispuestos de un modo homólogo en las distintas células. Estos átomos serán iguales a los de los vértices en los cuerpos simples, y diferentes, por lo menos en parte, en los cuerpos compuestos.

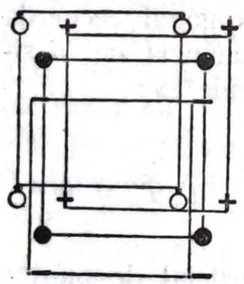


Fig. 357

Así, la red plana de la figura 356 es una red compuesta, incluso si los puntos, guiones, circulitos y crucecitas representan átomos iguales entre sí.

Cualquier red compuesta puede suponerse constituída por redes simples iguales entre sí y superpuestas, pero de modo que estén corridas unas respecto a otras. Así, la red plana de la figura 356 es la superposición de cuatro redes simples cuyas células elementales, iguales y cuadradas, se indican en la figura 357.

Análogamente, el retículo plano de la figura 358, en el que los puntos y crucecitas indican átomos diferentes, es una red compuesta de dos redes simples de células cuadradas $A_1B_1C_1D_1$ y $A_2B_2C_2D_2$ (C_2 está en el centro del cuadrado $A_1B_1C_1D_1$), mientras que si los puntos y crucecitas indicaran átomos iguales, la red sería simple y su célula elemental, cuadrada, sería $A_0B_0C_0D_0$.

El análisis cristalino basado en la difracción que sufren los rayos X en el cristal, permite determinar la célula elemental, esto es, los vectores $\vec{T}_x$, $\vec{T}_y$, $\vec{T}_z$, y, en particular, las «dimensiones» de la célula. El mismo método de investigación permite también, a menudo, determinar en los retículos compuestos el número y la posición relativa de las redes simples componentes o, si se quiere, la «constitución» de la célula elemental, ya no simple. Así, en la figura 359 está representada la red espacial del cloruro sódico (NaCl, cúbico); alternan los átomos de cloro con los de sodio; más exactamente, éstos se encuentran en forma de iones Na^+ y Cl^-, respectivamente positivos y negativos.

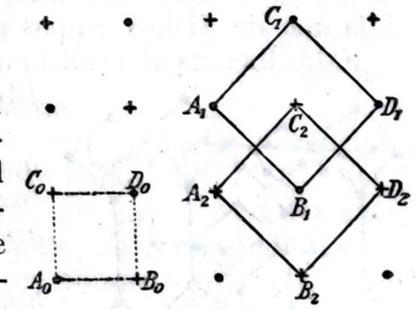


Fig. 358

Cada ion de cloro tiene seis iones contiguos de sodio. ¿Con cuál de éstos forma molécula? No es posible decirlo.

El concepto químico de molécula ya no se puede sostener en esta estructura cristalina. Puesto que, en conjunto, un cristal de cloruro sódico contiene el mismo número de átomos de las dos especies, se podrá todavía expresar esto por la fórmula NaCl, pero el carácter de molécula se refiere más bien al edificio cristalino completo.

El que toda red compuesta sea la superposición de cierto número de redes simples, permite análogamente una definición de *cristal poliatómico* y de *molécula poliatómica* en el cristal: ésta está constituída por un grupo de átomos, uno para cada una de las redes simples componentes, grupo escogido de tal modo que los átomos resulten tan próximos como sea posible. La red de la figura 359 es la superposición de dos retículos cúbicos de caras centradas, uno de iones Na^+ y otro de iones Cl^-. La molécula del cloruro sódico se llamarán *biatómicos.*

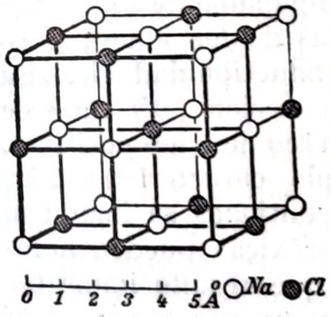


Fig. 359

La estructura plana de la figura 358 es biatómica, y la de la figura 356 es tetraatómica.

En el primer caso, la elección de los átomos destinados a constituir una «molécula» no queda univocamente determinada. En el caso de la figura 356, esta elección puede efectuarse de una sola manera del modo más natural, y entonces resulta muy convincente esta nueva definición de molécula en el cristal, aunque a menudo son mayores las distancias entre los átomos extremos de una «molécula» que las distancias entre los átomos de moléculas contiguas.

Por ejemplo, en la figura 360 se indica la estructura (de cubo centrado) de los cristales de hexametilenotetramina $C_6H_{12}N_4$; falta la posición de los átomos H porque, a causa de su pequeña masa,

el análisis con los rayos X no ha podido determinar su posición. Es bien evidente la estructura a grupos C_6N_4. En estructuras de esta naturaleza en que existen grupos atómicos bien individualizados, las fuerzas reticulares que mantienen en orden la estructura cristalina son menos enérgicas que las fuerzas que unen los átomos de cada uno de dichos grupos entre sí.

Estas fuerzas son substancialmente fuerzas eléctricas entre los constituyentes eléctricos de átomos contiguos.

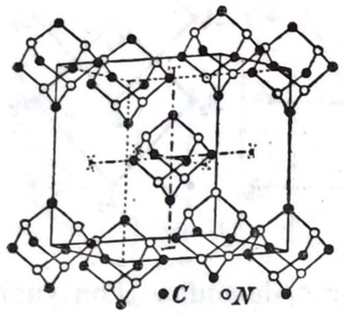


Fig. 360

Se suelen distinguir tres tipos de uniones interatómicas que se corresponden con tres tipos de cristales: *iónica*, *metálica* y *homopolar*.

En los cristales polares o de unión *heteropolar* o *iónica*, los iones son los elementos constitutivos de cada red simple. Es característico el caso del cloruro sódico, o, en general, de las sales. En una primera aproximación puede imaginarse cada ion como un edificio rígido, formado por un número determinado de cargas eléctricas elementales, destacado del edificio de cada uno de los iones contiguos y cuya estructura es independiente de la acción de estos últimos. Las fuerzas que mantienen unida la estructura cristalina son fuerzas eléctricas entre los iones contiguos.

En los *cristales metálicos* (cristales de metales y de aleaciones de carácter metálico), el elemento constitutivo de la red es el ion metálico (positivo) y se imagina la red como empapada de electrones en número suficiente para neutralizar las cargas de los iones; a estos electrones, a quienes se debe la elevada conductibilidad eléctrica de los cristales metálicos, se debe también la acción (eléctrica) de ligazón necesaria para mantener el conjunto de la red de iones positivos.

En los cristales de unión *homopolar* (ejemplo característico: los cristales de diamante), los edificios atómicos contiguos se imaginan sensiblemente compenetrados; las órbitas electrónicas pueden abrazar varios núcleos atómicos, hasta el punto de que resulte imposible establecer si estos electrones pertenecen a un átomo o a otro; como consecuencia de esta configuración, cada átomo de la red está influído fuertemente por la presencia de los átomos vecinos.

Para la molécula de un líquido o de un gas, se hace una distinción análoga: se tienen moléculas polares o de unión heteropolar (ejemplo: HCl), y moléculas homopolares o de unión homopolar (ejemplos: N_2 y O_2).

§ 183. Sólidos, líquidos y gases ideales. Llamaremos *sólido ideal* a un *monocristal*, es decir, a un individuo cristalino único de un cuerpo puro.

Son muchos los fenómenos que, al ser estudiados en los monocristales, han proporcionado resultados sencillos e insospechados.

El estudio de la resistencia a la tracción de los hilos metálicos, la imantación de una barra de hierro, la pequeña conductibilidad eléctrica de los aislantes reales, la conductibilidad eléctrica de los metales, etc., han dado desde hace tiempo resultados técnicamente útiles; pero solamente cuando se ha pasado del estudio en agregados microcristalinos o en sólidos amorfos (vidrio) al estudio de estos fenómenos en los monocristales, se han podido encontrar las leyes elementales y simples que los gobiernan.

Son conocidos los métodos para obtener cristales. Por disolución o por fusión se obtienen fácilmente cristales bellísimos.

Desde hace algunos años se han podido obtener por varios métodos monocristales de casi todos los metales (hasta de algunos centímetros cúbicos). Por ejemplo: se pone en contacto una cara cristalina de un germen único cristalino con la superficie del metal fundido a su temperatura de fusión, y se levanta lentamente, con la velocidad del crecimiento regular de la cara cristalina, que puede determinarse experimentalmente.

También se obtienen monocristales por *recristalización*. Después del estirado de una lámina, por ejemplo, de aluminio, ésta se recuece durante seis horas a 550 °C., se estira aproximadamente un 2 %, y después se mantiene algunos días a temperaturas crecientes desde 450 °C. hasta unos 600 °C. Los viejos gérmenes cristalinos, orientados durante el estirado, se funden y se engrosan; se puede llegar a transformar toda la lámina en un monocristal.

Es análogo el fenómeno de recristalización que permite obtener monocristales de tungsteno a partir del polvo comprimido y trefilado, calentando durante mucho tiempo a una temperatura poco inferior a la de fusión.

El fenómeno de recristalización conduce a pensar que ni aun en los sólidos ideales pueden imaginarse en reposo los átomos (o las moléculas); cada uno de ellos se halla en movimiento continuo (vibratorio) en torno a una posición de equilibrio estable. Las moléculas superficiales podrán eventualmente separarse del edificio cristalino; es la evaporación del sólido *(sublimación)*.

Llamaremos *líquidos ideales* o *perfectos* a los líquidos incompresibles, no dilatables y desprovistos de rozamiento interno (§ 78, 1.º; § 187, *b*]). En ellos, las fuerzas exteriores se hallan en las mejores condiciones para producir un corrimiento relativo de las diversas capas de líquido, unas sobre otras, porque ninguna fuerza se opone a ello. Las moléculas se encuentran en continuo movimiento, y son capaces de correr de un punto a otro del líquido, y también de huir del mismo *(evaporación)*.

La definición de *gas ideal* o *perfecto* se dará en el § 185, *c*], y se volverá sobre ella en termodinámica (§§ 295 y 317).

CAPÍTULO II

Estática de los cuerpos deformables. Elasticidad

§ 184. Elasticidad. Elastostática. Un muelle de acero templado M (fig. 361) sujeto en A a un soporte unido al suelo ; bajo el efecto de su peso y del peso del platillo D toma una posición, y una forma de equilibrio AB_0.

Aplíquese un peso tensor $\vec{P}$ sobre el platillo D, de una manera gradual para que no se originen oscilaciones del platillo. El muelle M se alarga y toma una nueva configuración AB de equilibrio ; se tiene una *deformación*. Al aumentar $\vec{P}$, el extremo B_0 desciende sucesivamente a B_1, B_2, ... ; aumenta la longitud AB, se tiene una *deformación*. Si $\vec{P}$ fuese demasiado grande, el muelle podría romperse ; faltaría la correspondiente configuración de equilibrio.

Suprimiendo el peso $\vec{P}$, también gradualmente para evitar oscilaciones, el muelle vuelve a adquirir la longitud AB_0. La longitud AB, el alargamiento $AB - AB_0 = B_0B$ son funciones unívocas del peso tensor $\vec{P}$. La deformación experimentada por M es *elástica ;* el fenómeno se llama *elasticidad.*

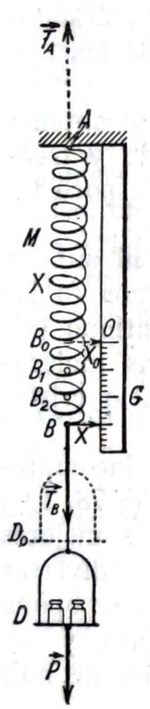


Fig. 361

Con la deformación se han manifestado en el muelle reacciones que tienden a hacerle tomar la configuración primitiva. Estas reacciones tienen el carácter de fuerzas de superficie (§ 77,2]) y se llaman también *fuerzas elásticas ;* en último análisis, éstas tienen su origen en las *fuerzas de cohesión.*

Y con todo rigor : en la figura 361, supóngase una sección ideal del muelle, por ejemplo en X ; si el trozo XB no cae bajo la acción de su propio peso, de $\vec{P}$ y del peso del platillo, ello significa que en X la parte superior del muelle ejerce sobre la parte interior del mismo el sistema de las fuerzas equilibrantes. En X, lo mismo que en cualquier otra sección, el muelle es sede de tensiones internas (§ 195). Suprimido $\vec{P}$, como éstas tensiones ya no están equilibradas por $\vec{P}$, el muelle recobra la configuración primitiva ; si $\vec{P}$ se suprime bruscamente, son estas tensiones las que producen oscilaciones *(oscilaciones elásticas).*

En general se tiene un cuerpo inicialmente en equilibrio, sometido, por lo tanto, a un sistema de fuerzas equilibradas que en particular puede ser nulo ; el cuerpo se halla en el estado «libre». Apliquemos al cuerpo un sistema de fuerzas exteriores *(solicitaciones exteriores)* equilibradas. Esto se obtiene mediante fuerzas externas aplicadas a nuestro arbitrio, llamadas frecuentemente *cargas* (porque suelen estar realizadas por medio de pesas) y mediante eventuales *reacciones vinculares.* El empleo de éstas últimas es sumamente cómodo para realizar experimentalmente un sistema de solicitaciones equilibrado.

Así, en la figura 361 existen fuerzas exteriores que obran sobre el muelle : el propio peso $\vec{P}_M$ del muelle, la tracción $\vec{T}_B$ en B, debida al peso del platillo y a las pesas $\vec{P}$ colocadas en D, la presión atmosférica y, en fin, la reacción de ligadura $\vec{T}_A$ del punto fijo A. El peso propio P_M es una *fuerza de volumen* porque obra sobre cualquier elemento de volumen del muelle en razón de la masa en él contenida. Las tracciones $\vec{T}_A$, $\vec{T}_B$ son *fuerzas de superficie* distribuídas sobre el área de la sección del muelle en A y B, respectivamente.

La presión atmosférica es también una fuerza de superficie ; en nuestro caso tiene una acción despreciable, pero no ocurrirá así en el caso de la figura 362, o de la figura 429. Supuesto el muelle inicialmente en equilibrio, el conjunto de las fuerzas exteriores antes indicadas constituye un sistema de fuerzas equilibrado. Al modificarlo, por ejemplo cambiando el peso que está sobre el platillo, se modifica el sistema de solicitaciones exteriores, y si el cuerpo toma una nueva configuración de equilibrio, el nuevo sistema de solicitaciones exteriores se halla de nuevo equilibrado.

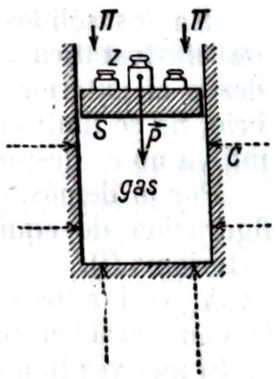


Fig. 362

Si la configuración de equilibrio es función unívoca del sistema de solicitaciones, se tiene *elasticidad ;* es decir, las deformaciones observadas son elásticas. El cuerpo es sede de tensiones internas (§ 195).

Aquí nos limitaremos a dar algunas ideas sobre *elastostática*, esto es, sobre el estudio de las relaciones existentes entre los *esfuerzos* y las *deformaciones* de los cuerpos elásticos en el caso de equilibrio. Se excluyen, pues, las oscilaciones elásticas ; por esto es necesario suponer que los esfuerzos son constantes, o por lo menos que varían muy lentamente con el tiempo.

El cuerpo en estudio puede ser gaseoso, líquido o sólido.

Los gases y los líquidos no tienen *elasticidad de forma ;* esto es, en ellos no se manifiestan fuerzas que se opongan a las variaciones de forma ; no poseen forma propia ; tienen tan sólo *elasticidad de volumen.*

Así, el gas del cilindro C (fig. 362) toma una configuración, es decir, un volumen, de equilibrio bajo los esfuerzos exteriores siguientes :

La «carga», constituída por el peso del émbolo y del lastre Z y por la presión atmosférica Π (si se experimenta en el aire, como de ordinario).

Las reacciones de ligadura que el cilindro Z y su fondo ejercen contra el gas.

El peso propio del gas, que generalmente es despreciable (pero que no lo es, por ejemplo, en el § 203).

Por el principio de PASCAL (§ 202, *a*]), las solicitaciones externas impuestas al gas en las condiciones de equilibrio no pueden estar constituídas más que por una *presión uniforme:* todo elemento dS de superficie de S o de C, en contacto con el gas, ejerce sobre éste una fuerza $\overrightarrow{dF} = (\overrightarrow{p \cdot dS})$, normal a dS, y la *presión específica* $p = \frac{dF}{dS}$ es constante en todas partes.

Supongamos que p se hace variar lentamente con el tiempo, por ejemplo aumentando el lastre Z; en consecuencia, el volumen V del gas disminuye. Pero si, a temperatura constante, p vuelve a tomar el valor inicial, el gas adopta de nuevo la configuración (esto es: el volumen) inicial.

El volumen del gas es función unívoca de la presión p, a temperatura constante.

En los líquidos ocurre lo mismo, aparte de la ligerísima variación de volumen con la presión p, que manifiestan tales flúidos.

En los sólidos, aun limitándonos a los *isotropos*, los fenómenos de elastostática son mucho más complejos: las fuerzas aplicables desde el exterior a la superficie del sólido, en condiciones de equilibrio, no se limitan a una presión uniforme, y el peso del cuerpo mismo ya no es despreciable respecto a las otras solicitaciones exteriores.

Por lo demás, el sólido tiene una *forma propia;* esto es, una configuración de equilibrio estable, incluso en ausencia de esfuerzos exteriores (1).

Al variar los esfuerzos externos aplicados al sólido, se modifica la configuración (forma y volumen) del mismo; hay deformación.

Si una vez han cesado los esfuerzos, el cuerpo vuelve exactamente a la configuración inicial; más exactamente, *si la forma y el volumen del sólido son funciones unívocas del sistema de esfuerzos, el cuerpo se*

(1) Dos observaciones:

a] En realidad, un líquido tiene también una forma estable en ausencia de fuerzas exteriores. Esta forma es esférica y viene impuesta por las fuerzas de tensión superficial, es decir, por la cohesión. Poniendo una gota de aceite en suspensión en una disolución de alcohol en agua cuya concentración sea la apropiada para que la densidad de la solución sea igual a la del aceite, la gota toma forma esférica (§ 217).

Pero las pequeñas fuerzas que bastan para deformar esta gota son de un orden de magnitud muy inferior al de las fuerzas necesarias para deformar un sólido.

b] Obsérvese que no hemos afirmado que en una configuración de aquilibrio, obtenida en ausencia de fuerzas exteriores, sean necesariamente nulas las fuerzas interiores que actúan mutuamente entre las distintas partes del cuerpo: para comprender esto, basta pensar en las deformaciones elásticas y, por tanto, en fuerzas interiores existentes en una barrita de goma elástica que doblamos en forma de anillo hasta soldar los extremos que ponemos un contacto; considérense los vidrios templados, sede de tensiones internas muy notables, incluso en ausencia de solicitaciones exteriores.

llama elástico; la deformación es elástica. Si esto no sucede, el cuerpo y la deformación son inelásticos.

Entre todas las deformaciones de un sólido cabe distinguir dos modalidades típicas:

1.º Deformación en la cual varía el volumen del sólido, mientras que la forma permanece semejante a sí misma; varían las distancias, pero no los ángulos; la deformación se llama *contracción* o *compresión uniforme* porque el experimento se efectúa casi exclusivamente de manera que el cuerpo experimente una disminución del volumen; pero se consigue también aplicar a un sólido una *tracción uniforme* (presión negativa; § 185, *b*]) y la deformación que se consigue es una *expansión uniforme.*

2.º Deformación en la cual no cambian ni el volumen del cuerpo ni el volumen de una cualquiera de sus partes, pero varía la forma del sólido. Esta deformación se llama *deslizamiento.*

En un sólido isotropo, la compresión uniforme se produce por una presión uniforme que se aplica al sólido utilizando el principio de PASCAL, mediante el *piezómetro* (§ 185, *a*]): el sólido en estudio se coloca completamente sumergido en un líquido; al ejercer una presión sobre el líquido, ésta resulta también uniformemente aplicada al sólido sumergido.

El esfuerzo más esquemático capaz de producir una deformación de deslizamiento se verá en el § 187.

§ 185. Compresión uniforme.

Conforme se ha dicho, es la deformación producida en los cuerpos isotropos por una presión uniforme.

a] **Sólidos isotropos.** Al aumentar la presión, el sólido experimenta una pequeña contracción de su volumen, pero permanece semejante a sí mismo, y en este sentido se dirá que *el sólido varía de volumen, pero no de forma;* cambian las distancias en una razón constante y no se alteran los ángulos. Esto es consecuencia necesaria de la isotropía supuesta del sólido y de la naturaleza del esfuerzo aplicado.

La contracción experimentada es *completamente elástica* cualquiera que sea el sólido (por ejemplo, incluso en el plomo) y cualquiera que sea la presión ejercida.

Naturalmente, es necesario que el sólido esté bien exento de cavidades, pues, de lo contrario, la disminución de volumen observada se debería esencialmente al aplastamiento de estas cavidades y la compresión ya no sería ni uniforme ni elástica.

Para presiones dp no muy grandes, el volumen v del cuerpo y la contracción producida dv están ligados a dp con suficiente aproximación por la fórmula:

$$dv = -c \cdot v \cdot dp = -\frac{1}{\varepsilon} \cdot v \cdot dp \qquad \left(c = \frac{1}{\varepsilon} > 0\right). \qquad [1]$$

El coeficiente de proporcionalidad

$$-c = -\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{v}\frac{dv}{dp} \qquad [2]$$

expresa la variación de volumen por unidad de volumen y por unidad de presión aplicada dp. La constante positiva c se llama *coeficiente de compresión* (uniforme) del sólido en estudio e indica su «compresibilidad». Al aumentar la presión ($dp > 0$), el cuerpo se comprime tanto más enérgicamente cuanto mayor es c.

Si, por el contrario, la presión disminuye ($dp < 0$), se tiene $dv > 0$, ya hay *expansión*, por lo que c también es el *coeficiente de expansión* (uniforme) del sólido. El valor recíproco de c, o sea $\varepsilon = \frac{1}{c}$, se denomina *módulo de compresión* (o de expansión) (uniforme). Tenemos:

$$[\varepsilon] = [p] = [l^{-1} \cdot m \cdot t^{-2}].$$

No debe maravillarnos el que valga para todas las substancias una fórmula como la [1]: dv es ante todo proporcional a v, porque cada unidad del volumen v se comprime por cuenta propia; y todas las funciones $v = v\,(p)$ cuyas diferenciales son proporcionales a v, dan origen con suficiente aproximación, dentro de límites suficientemente restringidos de las variaciones dp de la presión p, a la expresión [1], que es en substancia el desarrollo de la función $v = v\,(p)$ en serie de Taylor interrumpida en los términos de primer orden.

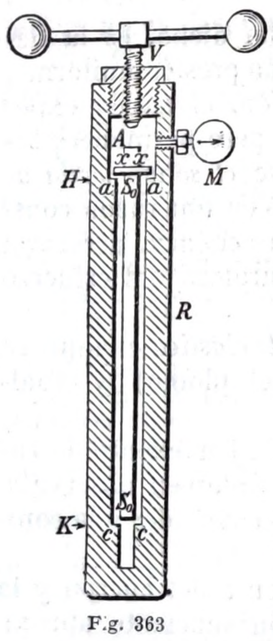


Fig. 363

Lo mismo que para las dilataciones cúbicas y lineales debidas al calentamiento de los cuerpos isotropos, se tiene también aquí un coeficiente de compresión lineal, que es $\frac{c}{3}$; para las variaciones dl de las dimensiones lineales l de un sólido sometido a presión uniforme se tiene:

$$dl = -\frac{c}{3} \cdot l \cdot dp. \qquad [3]$$

Las determinaciones más directas del coeficiente de compresión c se han conseguido midiendo la contracción lineal de una barra del sólido.

El *piezómetro* que sirve para este objeto es un robusto recipiente cilíndrico de acero R (fig. 363), completamente lleno del líquido A destinado a distribuir uniformemente la presión. Un tornillo V, que se introduce en el líquido A, funciona como émbolo compresor; la presión dp en A viene medida por el manómetro M. La barra en estudio $S_0 S_0$ — por ejemplo, de vidrio — se apoya en el fondo de R; un anillo xx, metido con rozamiento suave en el extremo de $S_0 S_0$, puede ser puesto en contacto con el saliente aa.

En la pared exterior del piezómetro se han señalado dos rayas H y K, a una distancia igual a la longitud $l = ac$.

Cerrado el piezómetro, se procede al aumento Δp de presión. El alargamiento que se consigue en la distancia $HK = l$ y la contracción Δl de $S_0 S_0$ en el pedazo ac contribuyen a que, al quitar la presión, resulte levantado el anillo xx con respecto a su posición anterior, siendo fácilmente medible su corrimiento. Luego se conoce Δl, diferencia entre este levantamiento y el alargamiento de HK. La [3] da entonces el coeficiente de compresión c de la barra $S_0 S_0$.

Además de este dispositivo (Bridgman), se han propuesto muchos otros, para superar la dificultad que supone la medición de la contracción de una barra que debe estar completamente encerrada en el interior de un recipiente de paredes muy robustas.

Se pueden obtener determinaciones indirectas del módulo ε y simultáneamente del módulo de deslizamiento G (§ 187) gracias a la medida del coeficiente de alargamiento y del factor de Poisson, mediante las fórmulas [4] y [5] del § 190, o mediante la medida del coeficiente de alargamiento y del coeficiente de torsión por medio de las fórmulas [4], § 190, y [3], § 189.

Si durante el experimento se mantiene el sólido a temperatura constante, los valores de c y de ε caracterizan la compresibilidad *isotérmica*. El experimento debe efectuarse en un termostato, y después de efectuar la compresión es preciso dar tiempo al sólido para que tome de nuevo la temperatura ambiente; en efecto, los sólidos y los líquidos, como los gases (v. experimento de la figura 366), se calientan a consecuencia de la compresión.

Pero si se efectúa una compresión *adiabática*, es decir, de modo que no haya intercambio de calor entre el sólido y el líquido que lo envuelve, es preciso efectuar el experimento lo más rápidamente posible. El valor $c_{adi} = \frac{1}{\varepsilon_{adi}}$ resulta ligeramente menor que el valor $c_{iso} = \frac{1}{\varepsilon_{iso}}$ relativo al experimento isotérmino (§ 351). Ordinariamente suele considerarse la compresión isotérmica.

El coeficiente de compresión es siempre muy pequeño, disminuye al aumentar p, y aumenta sensiblemente con la temperatura.

A la temperatura ordinaria y hasta un millar de newton por centímetro cuadrado ($\approx$ 100 kg_p por cm^2) se tiene:

cobre	$c = 0{,}8 \cdot 10^{-7}$	$\varepsilon = 13\,000\,000$	
hierro	$c = 0{,}64 \cdot 10^{-7}$	$\varepsilon = 16\,000\,000$	
latón	$c = 1 \cdot 10^{-7}$	$\varepsilon = 10\,000\,000$	
vidrio	$c = 2 \cdot 10^{-7}$	$\varepsilon = 5\,000\,000$	

$\left.\begin{matrix}\\\\\\\\\end{matrix}\right\}$ $\frac{cm^2}{newton}$; $\left.\begin{matrix}\\\\\\\\\end{matrix}\right\}$ $\frac{newton}{por\ cm^2}$.

Esto significa, por ejemplo, que el volumen del latón se reduce aproximadamente en una diezmillonésima ($0{,}8 \cdot 10^{-7}$) bajo un aumento de presión de un newton por centímetro cuadrado. ¡Una disminución igual de volumen se produce con un enfriamiento de unos 0,002 °C!

El módulo de compresión es:

$$\varepsilon = \frac{1}{c} = -v\,\frac{dp}{dv}; \qquad [4]$$

y para $dv = -v$ resulta:

$$\varepsilon = dp_{\,dv=-v};$$

es decir, que ε mediría la presión necesaria dp para anular (!) el volumen del sólido. Esto no sucede, en realidad, ni en primera aproximación; para presiones mucho más pequeñas deja ya de ser válida la [1]. Por otro lado, las presiones más elevadas que hasta ahora se han alcanzado (BRIDGMAN) llegan apenas al orden de magnitud de 10^6 newton por centímetro cuadrado ($\approx 100\,000$ kg_p por cm^2).

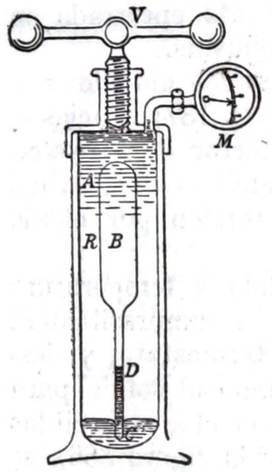


Fig. 364

b] **Líquidos.** Sirve todavía un piezómetro, que se utiliza ahora según el esquema de la figura 364. El líquido en estudio B llena una especie de picnómetro R invertido que tiene su cuello introducido en el mercurio C; se conoce el volumen de R; el capilar D está graduado, por ejemplo, en milímetros cúbicos. La presión que se ejerce con el tornillo V en el líquido piezométrico A se mide con el manómetro M. El recipiente R (por ejemplo, de vidrio) se contrae bajo la presión uniforme a que está sometido por fuera y por dentro como se contraería si estuviese lleno de vidrio. Se observa en D la contracción aparente del líquido B. Se obtiene la contracción verdadera añadiéndole la contracción del recipiente que debe suponerse conocida (caso *a*]).

También en los líquidos es perfectamente elástica la contracción, aunque la presión sea muy grande; hasta presiones de algunos centenares de newton por centímetro cuadrado (algunas decenas de kg_p por centímetro cuadrado) vale, análogamente a la 1 [1], la relación:

$$dv = -c \cdot v \cdot dp = -\frac{1}{\varepsilon} \cdot v \cdot dp \qquad (c > 0); \qquad [5]$$

es decir, la variación de volumen dv es proporcional a la variación de presión dp que la ha producido y al volumen v del líquido.

Como en la [1], la constante negativa $-c$ recuerda que un aumento de presión ($dp > 0$) produce una contracción de volumen ($dv < 0$).

El coeficiente c es el coeficiente de compresión; el valor recíproco de c es el módulo de compresión; también en los líquidos es preciso distinguir entre compresibilidad isotérmica y compresibilidad adiabática (§ 351). Generalmente se habla de la compresibilidad isotérmica.

Aunque en los líquidos el coeficiente c es tan pequeño que puede decirse en primera y buena aproximación que los líquidos reales son incompresibles, conviene saber que c es diferente de un líquido a otro, que disminuye al aumentar p, y que aumenta con la temperatura hasta alcanzar valores notables en la proximidad del punto crítico (§ 309).

He aquí, como ejemplo, algunos valores del coeficiente de compresión isotérmica para varios líquidos, a la temperatura ordinaria y para presiones hasta de algunas decenas de newton por centímetro cuadrado (varios kg_p por cm^2):

agua	$c = 0{,}000\,004\,6$	$\varepsilon =$	220 000
mercurio	$c = 0{,}000\,000\,35$	$\varepsilon =$	3 000 000
alcohol etílico	$c = 0{,}000\,008\,8$	$\varepsilon =$	110 000
éter elítico	$c = 0{,}000\,013\,7$	$\varepsilon =$	70 000

$\left.\begin{matrix}\\\\\\\\\end{matrix}\right\}\ \frac{cm^2}{newton}$; $\left.\begin{matrix}\\\\\\\\\end{matrix}\right\}\ \frac{newton}{cm^2}$

Un litro de mercurio disminuye en 0,35 mm^3 bajo una presión de un newton por centímetro cuadrado; ¡la misma contracción de volumen se produce con un enfriamiento de 0,002 °C!

Observemos que en un líquido también se puede obtener una presión uniforme negativa: se cierra herméticamente un tubo de vidrio completamente lleno de agua caliente y se deja enfriar; el agua no se separa de las paredes en ningún punto, aunque con el enfriamiento tienda a disminuir de volumen más que el recipiente; se ha podido obtener de este modo una «tracción» uniforme de $\approx$ 150 newton por centímetro cuadrado ($\approx$ 15 kg_p por cm^2).

El experimento solamente tiene éxito si el agua y el tubo están perfectamente privados de aire; compárese con § 181, figura 347.

En fin, el piezómetro de la figura 364 permite la determinación del coeficiente de compresión c de un sólido. Se procede así: conocido c para el vidrio de R, el piezómetro da, como se ha visto, el valor de c para el líquido R. Si después se colocan en dicho líquido, dentro de R, algunos pedazos del sólido en estudio, se observa en el capilar D una contracción diferente de la observada cuando R estaba completamente lleno de líquido, a pesar de ser idéntica la presión efectuada con V; se puede deducir el coeficiente de compresión del sólido sumergido. En estos experimentos sirve un recipiente R análogo a un picnómetro para sólidos (fig. 85, *a*]).

c] **Gases.** Se introduce por la llave D (fig. 365) en el recipiente graduado A el gas en estudio, en cantidad suficiente para lograr que en una posición particular del tubo C el mercurio alcance en BB el

mismo nivel horizontal L_0M_0 en los dos vasos comunicantes A y C.

Así, el gas contenido en A ocupa un volumen inicial v_0 y se encuentra a la presión atmosférica p_0, que se determina con el barómetro (§ 210), y se mide, por ejemplo, en centímetros de mercurio (cm_{Hg}, § 210).

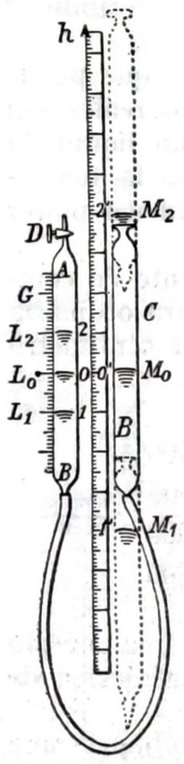


Fig. 365

Cerrado D y levantando o bajando C, la experiencia indica que la masa de gas considerada puede tomar un volumen sensiblemente menor o mayor que el volumen inicial v_0. Pero, en correspondencia, se observa un desnivel h entre los niveles M y L que puede medirse en centímetros, en valor y signo, según el eje vertical h dirigido, por ejemplo, hacia arriba. El aparato es un manómetro de aire libre (§ 207), capaz de indicar para cada posición C, C', C'', ... del tubo móvil, la diferencia entre la presión p del gas y la presión atmosférica.

La presión p del gas es, en valor y signo, expresada en cm_{Hg},

$$p = p_0 + h.$$

El volumen correspondiente v del gas en estudio se lee en la graduación G unida a A.

Para todos los gases que estén lejos del punto de licuefacción y, para compresiones no demasiado fuertes, se tiene *a temperatura constante* y con buena aproximación :

$$pv = p_0v_0 = \text{const} \qquad (\textit{Ley de } \text{Boyle}). \quad [6]$$

En los experimentos es cómodo utilizar la unidad «cm_{Hg}», pero [6] es válida cualquiera que sea la unidad de presión elegida.

Llamaremos *gas perfecto* a un gas que obedezca a esta ley ; luego los gases reales pueden considerarse en la práctica como perfectos cuando estén alejados del punto de licuefacción y no estén muy comprimidos.

Para el aire a la temperatura ordinaria, pv es constante con error inferior a un 2 % hasta presiones de ≈ 50 atm $= 50 \cdot 76$ cm_{Hg} ; es decir, de

$$\approx 50 \frac{kg_p}{cm^2} \approx 500 \frac{\text{newton}}{cm^2}.$$

Si se imagina que la masa de gas considerada es la unidad, los volúmenes v que aparecen en la [6] son los *volúmenes específicos*, es decir, los valores recíprocos de las masas específicas : $v = \dfrac{1}{\mu}$, y la [6] se escribe :

$$\frac{p}{\mu} = \frac{p_0}{\mu_0} = \text{const.} \quad [7]$$

El experimento del eslabón neumático demuestra que un gas se calienta a consecuencia de la compresión ; el pedacito de fósforo A (figura 366) se enciende cuando el aire del cilindro se comprime vivamente mediante el émbolo S.

Un termómetro, suficientemente rápido en sus indicaciones, colocado debajo de una campana neumática en la que se produce un rápido enrarecimiento con una potente máquina neumática, indica un enfriamiento sensible.

Luego en los gases, más que en los sólidos y en los líquidos, hay que distinguir entre compresiones isotérmicas y adiabáticas.

Fig. 366

Para que la compresión sea isotérmica con seguridad, debe ser suficientemente lenta para que pueda admitirse que el gas permanece a la temperatura ambiente, o, más en general, a la temperatura del termóstato dentro del cual debe hallarse todo el aparato durante el experimento.

De la [6] se tiene :

$$v = \frac{p_0v_0}{p}; \qquad dv = -\frac{p_0v_0}{p^2}\,dp = -\frac{1}{p}\,v \cdot dp. \quad [8]$$

El coeficiente de compresión definido por la [1] sirve también para los gases en la compresión isotérmica :

$$c_{iso} = -\frac{1}{v}\frac{dv}{dp} = \frac{1}{p}, \quad [9]$$

función de la presión, y común para todos los gases perfectos.

El *módulo de compresión isotérmica* ε_{iso} es

$$\varepsilon_{iso} = \frac{1}{c_{iso}} = p. \quad [10]$$

Si la compresión es adiabática, es decir, si no se verifican intercambios de calor entre el gas y el exterior, y ni siquiera entre el gas y el recipiente que lo contiene, la presión p y el volumen v en una masa de gas perfecto resultan relacionados por la expresión :

$$pv^\gamma = p_0v_0^\gamma = \text{const}, \quad [11]$$

en donde γ es una constante característica del gas, siempre > 1.

Para todos los gases monoatómicos se tiene $\gamma = 1{,}66$; para los biatómicos es $\gamma = 1{,}41$. Veremos en termodinámica (§ 334) la deducción de la [11] y el significado físico de la constante γ.

Diferenciando la [11] y despejando $\frac{1}{v}\cdot\frac{dv}{dp}$ se obtiene el *coeficiente de compresión adiabática* :

$$c_{adi} = \frac{1}{\gamma \cdot p}$$

y el módulo correspondiente :

$$\varepsilon_{adi} = \gamma \cdot p. \qquad [12]$$

Luego :

$$\frac{\varepsilon_{adi}}{\varepsilon_{iso}} = \gamma > 1. \qquad [13]$$

§ **186. Volumenómetro.** Con este aparato (fig. 367), fundado en la ley de BOYLE, se puede determinar el volumen de un sólido (en general, pulverulento) que no convenga sumergir en ningún liquido. P_1 y P_2 son dos balones que se comunican mediante el tubito T. Dos señales A_1 y A_2 limitan en el aparato el volumen de P_2 que llamaremos v_2, y sea v_1 el volumen de P_1 hasta la señal A_1.

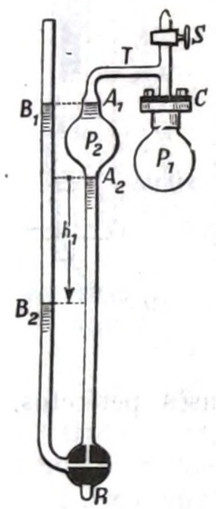


Fig. 367

La pieza C proporciona un cierre hermético y sirve para permitir la introducción en el matraz P_1 del cuerpo en estudio : se ignora el volumen x de este cuerpo. A_2RB_2 es un manómetro de mercurio de aire libre (§ 207).

Al principio, gracias a las llaves R y S, añadiendo mercurio en B_1B_2, se hace de modo que el mercurio del tubo A_1RB_1 alcance el mismo nivel $A_1\,B_1$ en las dos ramas, mientras el cuerpo en estudio *no se halla* en P_1 y la pieza C está bien cerrada.

El aire que llena P_1 y T tiene el volumen v_1 y se encuentra a la presión atmosférica p_0 cm_{Hg} (§ 210). Con la llave de tres vías R se quita mercurio del tubo A_1RB_1 de modo que quede el aparato vacío hasta A_2 ; entonces el mercurio de la rama B llega hasta B_2. Se mide el desnivel $A_2B_2 = h_1$, que también ha de medirse en centímetros.

El aire de dentro del aparato se ha expansionado hasta el volumen $v_1 + v_2$, encontrándose a la presión $(p_0 - h_1)$ cm_{Hg}. Por la ley de BOYLE se tiene :

$$(p_0 - h_1)\cdot(v_1 + v_2) = p_0 \cdot v_1 \,; \quad \text{o sea :} \quad p_0 \cdot v_2 = h_1\,(v_1 + v_2). \qquad [1]$$

Se vuelve a introducir el mercurio quitado, que alcanzará, por tanto, el nivel A_1B_1, se abre C, se introduce el cuerpo de volumen x

en P_1, y se repite el experimento. Quitando mercurio del tubo A_1RB_1 para que el menisco descienda de A_1 a A_2, esto es, para que el volumen de aire $v_1 - x$ se transforme en $(v_1 + v_2 - x)$, se obtiene un desnivel entre las dos ramas $h_2 > h_1$.

Se tiene :

$$p_0\cdot(v_1 - x) = (p_0 - h_2)\cdot(v_1 + v_2 - x)\,;$$

o sea :

$$p_0 \cdot v_2 = h_2\cdot(v_1 + v_2 - x). \qquad [2]$$

De las [1] y [2] se deduce :

$$x = \frac{(h_2 - h_1)}{h_2}\cdot(v_1 + v_2), \qquad [3]$$

siendo $v_1 + v_2$ una constante del aparato que se conocerá una vez para todas ; a partir de la medida de h_1 y de h_2 se determina x.

Si v_1 y v_2 se conocen separadamente y se dispone de un barómetro que dé p_0 basta la [2], es decir, una sola determinación, para obtener x.

Como los cuerpos pulverulentos absorben en general una cantidad de aire importante y variable con la presión, el aparato no puede dar resultados muy exactos ; por otra parte, en los tipos corrientes de volumenómetro, los desniveles h_1, h_2 se miden con una precisión mediocre.

§ **187. Elasticidad de deslizamiento. Rozamiento interno.**

a] **Sólidos isotropos.** Se quiere ahora efectuar una *variación de forma del sólido, a volumen constante.* Un paralelepípedo trirrectángulo, una de cuyas caras es $ABCD$ (figura 368), tiene un espesor s en dirección normal al plano de la figura ; las bases (caras izquierda y derecha) tienen una superficie $S = l\cdot s$, y sus trazas en la figura son AB y CD, respectivamente. La base AB está soldada al muro MM vertical, rígido e indeformable. La base CD está a su vez soldada a una lámina rígida NN. Aplíquese la fuerza $\vec{F}_1$ proporcional a S y situada en el plano CD. Si $\vec{\tau}_1$ es la fuerza por unidad de superficie S, se tiene $\vec{F}_1 = \vec{\tau}_1 \cdot S$.

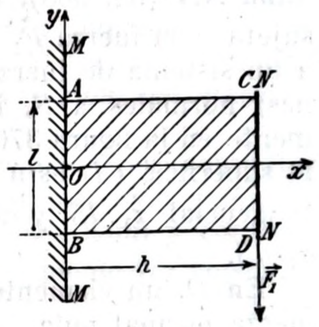


Fig. 368

El paralelepípedo se flexiona como se ha indicado exageradamente en la figura 369 ; la cara CD ya no es paralela a AB ; las capas BD quedan comprimidas, y las AC resultan alargadas.

Ni siquiera las caras anterior y posterior del paralelepípedo quedan exactamente planas. El problema no es *plano*.

El fenómeno elástico que se estudia es *plano* cuando los esfuerzos y las deformaciones se encuentran en el plano de la figura, de modo que sólo son funciones de x, y (fig. 368), coordenadas que fijan un punto del plano de la figura, y no dependen de la tercera coordenada z relativa a un eje normal a este plano; en suma, en todos los puntos de cualquier recta paralela al eje z se tienen las mismas deformaciones y los mismos esfuerzos.

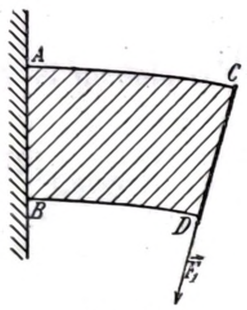


Fig. 369

Para que el problema en estudio sea «plano», los esfuerzos aplicados al cuerpo, desde el exterior, deben ser planos; además, el espesor s debe ser grande respecto a h, y las deformaciones deben estudiarse en una porción del cuerpo limitada por dos planos paralelos al plano xy de la figura, lejos de las caras extremas del paralelepípedo y a una distancia s, siendo s el «espesor» de la porción de paralelepípedo considerado; teóricamente, este paralelepípedo debería ser un prisma indefinido en la dirección normal al plano de la figura.

Para que el paralelepípedo se deforme como indica la figura 370, es decir, para que la cara CD venga a ocupar la posición $C'D'$ corriendo simplemente sobre sí misma, es preciso que la cara CD, en virtud de la lámina NN (fig. 368), además de encontrarse sujeta a la fuerza $\vec{F}_1 = \vec{\tau}_1 \cdot S$, esté sometida a un sistema de fuerzas (presiones o tracciones) normales a S, indicadas esquemáticamente en la figura 370. Cada elemento dS de la superficie CD está sometido a una fuerza tangencial $\vec{\tau}_1 . dS$ y a una fuerza normal $\vec{\sigma}_1 \cdot dS$.

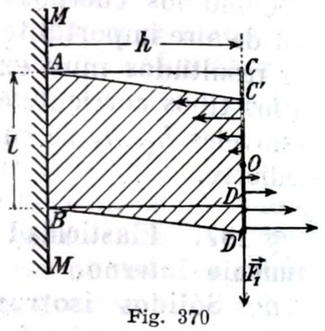


Fig. 370

En O, un elemento central de la cara CD está sometido a una fuerza normal nula.

Si CC' es muy pequeño respecto a h, la resultante de estas fuerzas normales es sensiblemente nula; pero la resultante de sus momentos (tomados, por ejemplo, respecto al punto O) no es nula.

El sistema de las fuerzas aplicadas al paralelepípedo, comprendiendo las reacciones de ligadura engendradas en la pared MM, se indica en la figura 371. El paralelepípedo está en equilibrio bajo la acción del momento del par

$$\vec{F}_1 = \vec{\tau}_1 \cdot S, \qquad \vec{F}_2 = \vec{\tau}_2 \cdot S \qquad (\text{es} : \tau_1 = \tau_2)$$

y del momento del par equivalente a las infinitas fuerzas $\vec{\sigma}_1 \cdot dS, \vec{\sigma}_2 \cdot dS$.

Al aumentar el lado l (fig. 370), manteniendo constante la tensión tangencial unitaria τ_1, el momento del par resultante de las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ aumenta proporcionalmente a l; en la misma proporción debe aumentar el momento del par resultante de las presiones normales σ_1 y σ_2. Pero el brazo de este par resultante aumenta como l; luego al aumentar l permanecen inalteradas las presiones normales extremas σ_1 y σ_2 que actúan en los puntos C, D, A y B. Si la substancia en estudio estuviese formada por una lámina de caras planas, paralelas muy extensas, se podrían suponer sensiblemente nulas las presiones σ_1 y σ_2 en la región central de la lámina, alejada de las caras AC y BD.

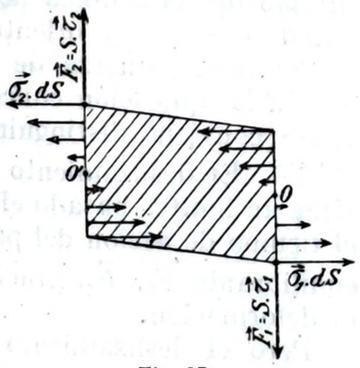


Fig. 371

Sea ahora $ABCD$ (fig. 372) un paralelepípedo que idealmente imaginamos separado de dicha porción central de la lámina extensísima; sean h la altura, l la longitud y s el grueso. Sean también $S = l \cdot s$ el área de las caras AB, CD, y $S' = h \cdot s$, el área de las caras AC, BD.

La cara AB está fija en la pared MM; la cara CD, fija en la pared NN, se traslada hasta $C'D'$, mientras permanece invariable la distancia h entre MM y NN, y, por tanto, tampoco cambia el volumen $v = S \cdot h$. $CC' = DD'$ mide el *deslizamiento* experimentado por el paralelepípedo. Éste es engendrado por el par $\vec{F}_1 = \vec{\tau}_1 \cdot S$, $\vec{F}_2 = \vec{\tau}_2 \cdot S$ (se tiene : $\tau_1 = \tau_2$), de momento $\vec{M}_1$, teniendo por módulo $M_1 = \tau_1 \cdot S \cdot h = \tau_1 \cdot v$, en donde v es el volumen del paralelepípedo $ABCD$.

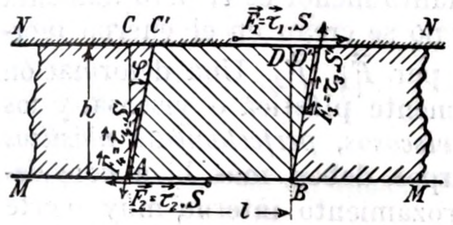


Fig. 372

Si éste se halla en equilibrio, debe estarle aplicado un momento de magnitud $\vec{M}_2$, igual y contrario a $\vec{M}_1$; éste no puede ser engendrado más que por el contacto de las caras AC y BD con el resto de la substancia; en las caras AC y BD aplica ésta dos fuerzas $\vec{F}_3 = \vec{\tau}_3 \cdot S'$ y $\vec{F}_4 = \vec{\tau}_4 \cdot S'$ (se tiene $\tau_3 = \tau_4$) formando un par de momento $\vec{M}_2$ y módulo :

$$M_2 = \tau_3 \cdot S' \cdot l \cdot \cos \varphi = \tau_3 \cdot v$$

en donde φ es el ángulo CAC'.

Y puesto que para el equilibrio se debe tener $\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = 0$. resulta :

$$\tau_1 = \tau_3 .$$

En las cuatro caras del paralelepípedo AB, CD, AC y BD se tienen *esfuerzos de cortadura unitarios* o *tensiones tangenciales* (unitarias) $\vec{\tau}_1$, $\vec{\tau}_2$, $\vec{\tau}_3$, y $\vec{\tau}_4$ de igual intensidad τ.

La deformación del paralelepípedo *(deslizamiento* o *cizalladura)* se efectúa a *volumen constante;* el esfuerzo que la engendra está constituído por el sistema de los cuatro *esfuerzos de cortadura* de intensidad constante y orientados como se indica en la figura 372.

Se tiene esfuerzo de cortadura puro y deslizamiento puro.

En la aplicación concreta de estas consideraciones a los cuerpos reales conviene distinguir dos casos:

1.º El deslizamiento CC' engendrado por un par dado $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ tiene un límite, pasado el cual no aumenta más, aunque se prolongue el tiempo de acción del par; el cuerpo ha sido capaz de crear el par equilibrante $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$, gracias a las fuerzas elásticas engendradas por la deformación.

Pero el deslizamiento CC' así producido solamente es elástico mientras τ, y por lo tanto φ, no superen cierto valor máximo.

Ningún cuerpo es ilimitadamente elástico si se le somete a la prueba de esta deformación. Rebasado el límite de elasticidad, o se tiene inmediatamente la rotura *(cuerpos frágiles)*, o una deformación parcialmente permanente *(cuerpos plásticos, cuerpos elásticos por endurecimiento,* § 196).

2.º Se presenta el segundo caso en algunos cuerpos llamados ordinariamente sólidos; es característico el plomo puro, y mejor todavía la aleación Pb-Sn de punto de fusión mínimo (183 ºC, *punto eutéctico:* 37 % de plomo y 63 % de estaño); el deslizamiento CC' (fig. 372) se realiza con lentitud tanto mayor cuanto menor es τ, pero aumenta continuamente con el tiempo, porque no se crean en el cuerpo fuerzas elásticas capaces de equilibrar el par $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$. Una deformación de esta naturaleza se llama perfectamente plástica o viscosa, y los cuerpos que la presentan se llaman *viscosos, perfectamente plásticos* o *perfectamente inelásticos.* Estos cuerpos deben más bien considerarse como líquidos que tienen un rozamiento interno muy fuerte (véase *b*]); y, en efecto, se puede pasar de una manera continua de los cuerpos llamados sólidos de esta naturaleza a cuerpos mucho más plásticos, hasta entrar en la categoría de los cuerpos llamados corrientemente líquidos: plomo, pez, miel, glicerina, etc.

Los cuerpos sólidos a quienes se da corrientemente el calificativo de «elásticos» son aquellos en que la deformación de deslizamiento es elástica.

En los cuerpos frágiles y en los cuerpos elásticos por endurecimiento se tiene, dentro del límite de elasticidad y para valores de φ (fig. 372) suficientemente pequeños,

$$\varphi = \frac{1}{G}\cdot\tau \qquad [1]$$

con G constante característica de cada sólido, independiente de las dimensiones del paralelepípedo.

$\frac{1}{G}$ se llama *coeficiente de deslizamiento; G* es el *módulo de deslizamiento,* o, más corrientemente *módulo de elasticidad por cortadura, módulo de rigidez, módulo de cizalladura* o *módulo de elasticidad transversal* (1).

Se tiene:

$$[G] = [\tau] = [l^{-1}\cdot m\cdot t^{-2}].$$

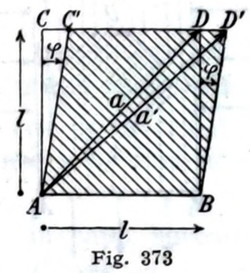


Fig. 373

Por ejemplo:

cobre	$G = 4\,600\,000$	$\frac{\text{newton}}{\text{cm}^2\,\text{rad}}$
hierro	$G = 8\,000\,000$	
caucho	$G = 300$	

Observemos que de las dos diagonales AD y CB una se alarga y otra se contrae en virtud del deslizamiento.

Supongamos, en particular, que el paralelepípedo tenga la sección cuadrada $ABCD$ (fig. 373); según las diagonales, se tienen dos *dilataciones* mecánicas fundamentales iguales y de signo contrario; el coeficiente de dilatación negativo corresponde a la diagonal BC, que experimenta una *contracción.*

Se tiene, en efecto, con muy buena aproximación, mientras φ sea muy pequeño:

$$\left.\begin{aligned} a' &= \sqrt{l^2 + l^2 + 2\cdot l^2\cdot \operatorname{sen}\varphi} = l\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\operatorname{sen}\varphi} \\ &= a\cdot\left(1+\frac{1}{2}\varphi\right) = a\cdot\left(1+\frac{1}{2G}\tau\right) \end{aligned}\right\}. \qquad [2]$$

El *coeficiente de dilatación (mecánica)* de la diagonal AD es, por tanto, $\frac{1}{2G}$. Análogamente, para la diagonal BC se encuentra el coeficiente de dilatación $-\frac{1}{2G}$.

Se llega por otro conducto a la deformación de deslizamiento a volumen constante. Sea un prisma $M_1M_2N_1N_2$ de sección rectangular (fig. 374); aíslese idealmente, dentro del mismo, el prisma de sección cuadrada $ABCD$, cuyas caras, normales al plano del dibujo, están inclinadas 45º respecto a las caras M_1M_2 y N_1N_2. Se ejerce desde el exterior una presión uniforme sobre las caras M_1M_2 y N_1N_2,

(1) En el original no se emplean todas estas expresiones, pero hemos creído convenientes citarlas para el conocimiento del lector y para que pueda comparar con otros libros. — *N. del T.*

siendo σ la presión por unidad de superficie; en cambio, se ejerce una tracción uniforme de la misma intensidad σ sobre las caras M_1N_1 y M_2N_2.

La resultante de las acciones combinadas de compresión y tracción origina sobre las caras de $ABCD$ tensiones tangenciales de intensidad $\tau = \sigma$, dirigidas como se indica en la figura. El prisma $ABCD$ se encuentra solicitado por los cuatro esfuerzos de cortadura característicos que engendran la deformación de deslizamiento a volumen constante: la diagonal AD se dilata, y la diagonal CB se contrae en la misma cantidad.

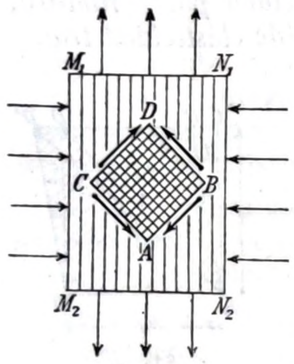


Fig. 374

b] **Líquidos.** El experimento análogo al de la figura 372 se efectúa fácilmente en los líquidos. Una lámina L_1L_2 de superficie ΔS (figura 375) descansa sobre la superficie MN del líquido que se estudia, el cual alcanza una altura constante h en un recipiente cuyo fondo CD es plano y horizontal.

Una fuerza constante $\vec{F}$, paralela a la superficie MN, da origen a un movimiento uniforme de L_1L_2 en el sentido de $\vec{F}$; en estas condiciones, la fuerza motriz $\vec{F}$ está equilibrada por una fuerza igual y opuesta $\Delta\vec{A}$ de *rozamiento interno;* estas fuerzas tienen la característica de los esfuerzos cortantes, esto es, de hallarse en la superficie ΔS sobre la cual actúan.

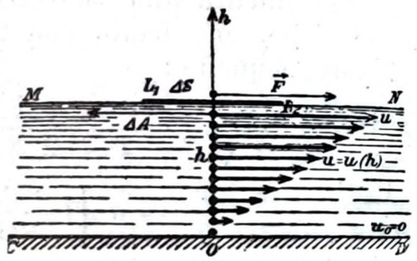


Fig. 375

El fenómeno es completamente semejante al que presentan los sólidos perfectamente viscosos. También ahora conviene suponer, para eliminar la acción perturbadora de los bordes, que L_1L_2 es infinitamente extensa. $\Delta\vec{A}$ es la fuerza de rozamiento que actúa sobre una porción ΔS de superficie de la lámina.

Esta fuerza de rozamiento $\Delta\vec{A}$ tiene dirección opuesta al movimiento, siendo, por tanto, paralela a ΔS; en el caso en que las varias capas de líquido que deslizan una sobre otra estén dotadas de un simple movimiento de traslación no turbulento, la experiencia da:

$$\Delta A = \eta \cdot \Delta S \cdot \frac{\partial u}{\partial h} \qquad [3]$$

en donde $\frac{\partial u}{\partial h}$ es la rapidez con que varía la velocidad u a lo largo de los puntos de la normal h a la capa de líquido considerada.

El valor de $\frac{\partial u}{\partial h}$ se determina cuando se conoce la velocidad de régimen constante u de la lámina L_1L_2.

En efecto, los puntos del líquido adheridos a ΔS, gracias a la adherencia entre superficie y líquido, constituyen una capa de velocidad u_1; esto sucede ciertamente cuando el líquido moja la superficie, y, probablemente, también cuando no la moja (por ejemplo: mercurio y vidrio).

Análogamente, la capa líquida adherida a CD tiene una velocidad $u = u_0 = 0$. Cada capa de líquido, comprendida entre MN y CD, actúa sobre la capa superpuesta para aplicarle la fuerza $\Delta\vec{A}$ y se apoya, por decirlo así, en la capa subyacente a la cual debe aplicar como reacción una fuerza $\vec{F} = -\Delta\vec{A}$.

Cada capa desliza, pues, de igual modo sobre la capa sucesiva para dar origen a esta forma de rozamiento. De donde:

$$\frac{\partial u}{\partial h} = \text{const.} = \frac{u_1}{h} \qquad [4]$$

La velocidad u varía de una capa a otra según una ley lineal, como se indica por las flechas en la figura 325; en cada capa, la velocidad u es constante respecto al tiempo, y cada capa está sometida a dos fuerzas iguales y contrarias, $\vec{F}$ y $\Delta\vec{A}$, por parte de las dos capas contiguas. Se tiene un movimiento del flúido de régimen estacionario (§ 228).

Manteniendo constante u_1 y variando el espesor h, se puede hacer variar $\frac{\partial u}{\partial h}$ y, por tanto, la fuerza de rozamiento $\Delta\vec{A}$ entre anchísimos límites.

La constante η, característica de cada substancia, se llama *coeficiente de rozamiento interno* o *de viscosidad.*

La [3] también es válida para los sólidos perfectamente plásticos, cada uno de los cuales tiene un coeficiente de rozamiento interno o de viscosidad característico. La misma fórmula sirve también para los gases.

La medida de η se efectúa con los *viscosímetros,* algunos de los cuales se prestan a medidas absolutas de η, mientras otros sólo determinan la relación entre los valores de η relativos a dos líquidos, es decir, dan una medida relativa de la viscosidad.

Entre los viscosímetros absolutos, el que se aproxima más a las condiciones teóricas de la figura 375 está indicado esquemáticamente en la figura 376 en la forma detallada por SEARLE. Está constituído por un recipiente cilíndrico C_1 contenido en el recipiente cilíndrico coaxial C_2; sean r_1 y r_2 sus radios respectivos. Mediante los pesos P_1 y P_2 se aplican a la polea de eje vertical y radio a_0 dos fuerzas $\vec{F}, \vec{F}$, para que C_1 esté sometido a un momento motor $M = 2 \cdot a_0 \cdot F$.

Al comenzar, el líquido del que se quiere determinar η alcanza el nivel h_1; las fuerzas motrices tienen por valor F_1. Bajo la acción del momento $M_1 = 2 \cdot a_0 \cdot F_1$ y de las resistencias de rozamiento, el cilindro C_1 toma una velocidad angular de régimen constante ω_0, que puede medirse con un contador de revoluciones y un cuentasegundos.

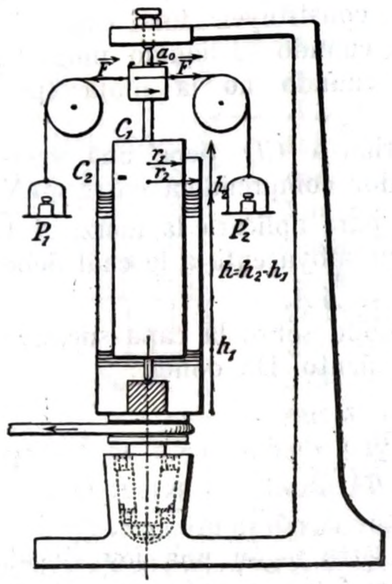


Fig. 376

Se añade el líquido en examen hasta el nuevo nivel h_2. Es necesario un momento mayor $M_2 = 2 \cdot a_0 \cdot F_2$ para obtener la misma velocidad angular constante ω_0.

En aparatos más cómodos, pero más caros, el cilindro C_2 se hace girar por medio de un motorcito eléctrico en sentido contrario a aquel en que gira C_1 en la figura 376 por efecto del momento motor $2 a_0 F_1$ ó $2 a_0 F_2$; se regula la velocidad de C_2 de modo que C_1 quede en equilibrio por la acción opuesta del arrastre debido al rozamiento interno y del momento motor aplicado.

Puesto que lo que cuenta es el movimiento relativo de C_1 respecto a C_2, [de este modo se determina muy cómodamente el valor de ω_0 correspondiente a un momento motor dado:

$$M_2 - M_1 = 2 \cdot a_0 \, (F_2 - F_1) \qquad [5]$$

es el momento de la fuerza exterior, equilibrado por el momento de la fuerza $\Delta \vec{A}$ de rozamiento interno entre dos capas cilíndricas contiguas cualesquiera coaxiales con C_1 y C_2, de altura $h = h_2 - h_1$.

Ahora, el deslizamiento de una capa cilíndrica respecto a la inmediata se debe a la variación de velocidad *angular* ω de una capa a la otra: si todas las capas tuviesen la misma velocidad angular, el líquido giraría en bloque como si fuese un cuerpo rígido.

Si $d\omega$ es la variación de velocidad angular desde la capa cilíndrica de radio r a la de radio $r + dr$, la parte de la variación de velocidad tangencial $r \cdot \omega$, que hace deslizar una capa sobre otra, es $r \cdot d\omega$; todavía es válida la [3] con tal que se sustituya $\frac{\partial u}{\partial h}$ por $\frac{r \cdot d\omega}{dr}$; por tanto, se tiene:

$$\Delta A = \eta \cdot 2 \pi \cdot r \cdot h \, \frac{r \cdot d\omega}{dr}$$

En las condiciones de régimen estacionario, el momento de la

fuerza de rozamiento $r \cdot \Delta A$ es constante para cualquier capa cilíndrica y es igual y opuesto al momento [5]:

$$-\eta \cdot 2 \pi r \cdot h \cdot r \, \frac{d\omega}{dr} \cdot r = M_2 - M_1.$$

De donde, resolviendo e integrando, se tiene la ley de variación de la velocidad angular ω de una capa a otra:

$$\omega = \frac{M_2 - M_1}{4 \pi \eta \cdot h \cdot r^2} + K \, .$$

Puesto que el cilindro exterior de radio r_2 está fijo, se debe tener $\omega = 0$ para $r = r_2$; por tanto:

$$K = -\frac{M_2 - M_1}{4 \pi \eta \cdot h \cdot r_2^2}$$

por fin, para $r = r_1$ se tiene $\omega = \omega_0$; esto es:

$$\omega_0 = \frac{M_2 - M_1}{4 \pi \eta \cdot h} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right).$$

En esta fórmula, todas las magnitudes son fácilmente medibles, salvo η; se tiene, pues:

$$\eta = \frac{(M_2 - M_1)(r_2^2 - r_1^2)}{4 \pi h \cdot \omega_0 \cdot r_1^2 \cdot r_2^2}$$

Recuérdese que el trabajo del momento motor $2 \cdot a_0 \cdot F$ se transforma en calor, de modo que el líquido tiende a calentarse durante la experiencia.

Resulta de la [3] que η es la fuerza que se ha de aplicar paralelamente a la superficie unidad ($\Delta S = 1$) para que se mueva con la velocidad unidad ($u_1 = 1$) a la distancia unidad ($h = 1$) de una superficie fija y paralela a ΔS. Se obtiene así el significado físico de la constante de proporcionalidad η.

En el sistema cm, g_m, seg, η es, pues, el número de dinas por centímetro cuadrado que producen el movimiento uniforme de ΔS con un gradiente de velocidad $\frac{\partial u}{\partial h}$ de 1 $\frac{\text{cm}}{\text{seg}}$ por cada cm.

En dimensiones:

$$[\eta] = \frac{[\Delta A]}{[\Delta S] \left[\frac{\partial u}{\partial h}\right]} = \frac{[l \cdot m \cdot t^{-2}] \cdot [l]}{[l^2] \, [l \cdot t^{-1}]} = [m \cdot l^{-1} \cdot t^{-1}];$$

luego en el sistema cm, g_m, seg es $[\eta] = \text{cm}^{-1} \cdot g_m \cdot \text{seg}^{-1}$.

He aquí algunos valores de η en esta unidad:

$\eta =$	∞	en los sólidos perfectamente elásticos como el acero templado		
$\eta =$	$10^{17} \div 10^{19}$	en el cobre recocido		
$\eta =$	$10^{14} \div 10^{16}$	en el plomo		
$\eta =$	$10^{12} \div 10^{13}$	en un vidrio	a 550 °C	semiflúidos
$\eta =$	10^{10}	en el mismo vidrio	a 700 °C	
$\eta =$	$2 \cdot 10^{9}$	en una pez negra	a 6-7 °C	
$\eta =$	$2{,}6 \cdot 10^{8}$	en la misma pez negra	a 12 °C	
$\eta =$	42,2	en la glicerina	a 2,8 °C	líquidos viscosos
$\eta =$	7,8	en la glicerina	a 20 °C	
$\eta =$	0,018	en el agua	a 0 °C	líquidos movibles
$\eta =$	0,010	en el agua	a 20 °C	

En los líquidos ideales, η se supone nulo.

En los líquidos reales, η disminuye rápidamente al aumentar la temperatura. En la mayor parte de los líquidos (pero no en el agua) η aumenta con la presión; así, en el éter etílico bajo la presión de 20 000 newton por centímetro cuadrado ($\approx$ 2000 kg_p por centímetro cuadrado) tiene aproximadamente un valor doble que el correspondiente a la presión normal.

Los cuerpos químicamente definidos, que presentan la llamada *fusión brusca*, pasan del estado sólido ($\eta > 10^{18}$ $cm^{-1} \cdot g_m \cdot seg^{-1}$) al estado de líquido relativamente movible ($\eta = 1$ $cm^{-1} \cdot g_m \cdot seg^{-1}$, p. ej.), a una determinada temperatura θ *(temperatura de fusión)*. Puede, pues, ésta definirse como la abscisa del punto de discontinuidad de la función $\eta = \eta(\theta)$ en el plano cartesiano θ, η.

El dispositivo de COULOMB (§ 148, fig. 274), en el cual las oscilaciones de torsión de un disco AB se amortiguan por rozamiento interno del líquido circundante, permite también determinar η.

También es válida la [3] para cada elemento de la superficie del disco; puede deducirse el valor de η a partir del amortiguamiento de las oscilaciones (1).

c] **Gases.** El mismo experimento de COULOMB se puede repetir substituyendo el líquido por un gas. Es seguro que las capas de gas adheridas al disco oscilante AB y al disco en reposo D están fijas con respecto a estas superficies.

Las oscilaciones de torsión del disco son ligeramente amortiguadas. Este amortiguamiento no se debe a falta de elasticidad del hilo de suspensión. Efectivamente, como ya se ha indicado para el caso de un líquido, disminuyendo la distancia h y, por tanto, aumentando $\frac{u}{h} = \frac{\partial u}{\partial h}$, aumenta el amortiguamiento de las oscilaciones. También es válida la [3] para cada elemento de la superficie del disco oscilante, y puede obtenerse el coeficiente de viscosidad η mediante el amortiguamiento de las oscilaciones.

(1) Véase W. WATSON, página 169, de la obra *Prácticas de Física*, Editorial Labor, S. A., 1926. — *N. del T.*

El valor de η depende del gas; *aumenta* con la temperatura, y es *independiente de la presión* entre límites muy amplios, incluso, por ejemplo, si la presión pasa de una atmósfera ($\approx$ 10 newton por centímetro cuadrado) a 1 mm_{Hg} ($\approx$ 0,014 newton por centímetro cuadrado), cuando la distancia h entre el disco fijo y el disco oscilante sea por lo menos de 1 mm (§ 370).

Por ejemplo, en el aire a 20 °C, con un método parecido al de la figura 376, se ha obtenido (BEARDEN, 1939):

$$\eta_{20{,}00\ ^\circ C} = (1819{,}20 \pm 0{,}06) \cdot 10^{-7}\ cm^{-1} \cdot g_m \cdot seg^{-1}.$$

Este valor ha sido determinado con todo cuidado porque tiene especial importancia en la medida de la carga elemental del electrón por el método de EHRENHAFT - MILLIKAN (tomo II).

§ **188. Casos prácticos elementales de elasticidad.** Consideramos exclusivamente la elasticidad de los sólidos. Las propiedades elásticas de un sólido dependen sólo de los valores de los módulos ε y G. A causa de la poca constancia de las propiedades elásticas, aun en patrones del mismo material aparentemente idénticos, se aconseja efectuar las dos determinaciones con la misma muestra.

Pero es muy difícil la determinación directa de estos módulos, especialmente de ε, según los esquemas teóricos de los §§ 185 y 187.

Las determinaciones más cómodas son las del módulo de torsión (§ 189), el módulo de alargamiento (§ 190) y el módulo de flexión (§ 192).

Estos módulos se introducen al considerar los tres casos de elasticidad de los sólidos, los cuales, por la simetría y simplicidad de los dispositivos experimentales con que se realizan, se prestan comodísimamente a la determinación de la dependencia entre el esfuerzo exterior y las deformaciones que éste produce.

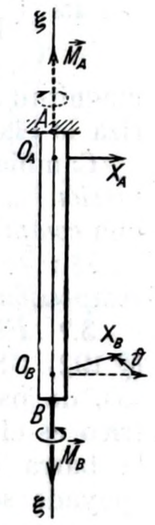


Fig. 377

Los tres casos prácticos elementales de elasticidad son los siguientes:

1.º *Elasticidad de torsión* (§ 189). La barra cilíndrica AB (figura 377), de eje $\xi\xi$, está fija en A y sometida en B a una *torsión*, es decir, a un *par torsor* cuyo momento es $\vec{M}_B$ *(momento de torsión)*.

Los esfuerzos exteriores, en condiciones de equilibrio, son: el par torsor ejercido en B y la reacción de ligadura que actúa en A, que tiene que constar, por lo tanto, de un par de torsor de momento $\vec{M}_A$, igual y opuesto a $\vec{M}_B$.

Fijados los dos índices X_A, X_B en los puntos O_A, O_B en la proximidad de los extremos de la barra, la deformación *(torsión)* relativa al trayecto O_A, O_B de la barra está caracterizada por la variación ϑ

del ángulo diedro entre los dos planos $X_A\ \xi\xi$, $X_B\ \xi\xi$ debida a la aplicación del momento torsor. El peso propio de la barra y la presión atmosférica no influyen sobre la torsión.

Si un cuerpo es elástico, ϑ es función unívoca de la magnitud M común a los dos momentos $\vec{M}_A$, $\vec{M}_B$; esta función caracteriza la elasticidad de torsión de la barra AB.

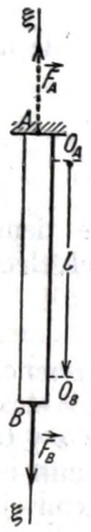


Fig. 378

2.º *Elasticidad de alargamiento* (§§ 190 - 191). La barra cilíndrica AB (fig. 378) está fija en A y sometida a una *tracción* $\vec{F}_B$ en B, tracción que es axial, es decir, paralela al eje de la barra.

En condiciones de equilibrio, los esfuerzos exteriores son:

la tracción $\vec{F}_B$ en B;

la reacción vincular $\vec{F}_A$ en A; despreciando el peso de la barra y la acción, verdaderamente insignificante, de la presión atmosférica, se tiene, por lo tanto, $\vec{F}_A = -\vec{F}_B$.

Una vez fijadas dos señales de referencia O_A, O_B, próximas, respectivamente, a A y B, la deformación *(alargamiento)* relativa al trayecto $O_A\,O_B$ de la barra está caracterizada por la variación Δl de la distancia $l = O_A\,O_B$ debida a la aplicación de la tracción $\vec{F}$.

Si el cuerpo es elástico, Δl es función unívoca de la magnitud F común a las dos fuerzas $\vec{F}_A$, $\vec{F}_B$; esta función caracteriza la elasticidad de alargamiento.

Cambiando el signo de F, es decir, convirtiendo la tracción en una *presión axial* a lo largo de $\xi\xi$, el alargamiento se transforma en una *compresión axial* a lo largo de $\xi\xi$; se tiene *elasticidad de compresión axial.*

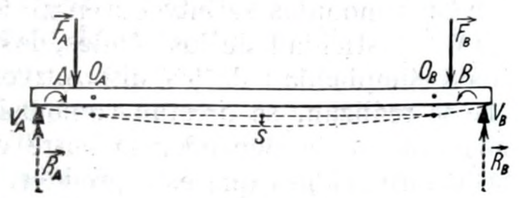


Fig. 379

3.º *Elasticidad de flexión* (§ 192). Se tienen varios casos, de los cuales el más simétrico es el siguiente (fig. 379): la barra cilíndrica AB está apoyada sobre dos soportes $V_A\ V_B$ que actúan como ligaduras; se aplican a la barra, simétricamente, las dos fuerzas iguales $\vec{F}_A\ \vec{F}_B$.

Para mayor simplicidad supondremos despreciable el peso de la barra; la presión atmosférica carece de influencia sensible.

Los esfuerzos exteriores, en condiciones de equilibrio, están constituídas por los dos *pares flexores* $\vec{F}_A$, $\vec{R}_A$; $\vec{F}_B\,\vec{R}_B$, en donde $\vec{R}_A$, $\vec{R}_B$ son las reacciones de las ligaduras; luego sus momentos *(momentos flexores)* son iguales y opuestos; sea M su módulo común.

Fijadas las dos señales de referencia O_A, O_B cerca de $\vec{F}_A$ y $\vec{F}_B$, respectivamente, la deformación *(flexión)*, relativa al trayecto $O_A\ O_B$ de la barra, está caracterizada por la flecha s. Si el cuerpo es elástico,

s es función unívoca de M; esta función caracteriza la *elasticidad* de flexión.

La torsión implica puro deslizamiento; el alargamiento, la compresión axial y la flexión implican deslizamiento y compresión uniforme.

Como quiera que el deslizamiento interviene siempre, en todos los casos prácticos elementales los sólidos presentan siempre un límite de elasticidad.

En todos los casos, *las deformaciones*, con tal que sean *elásticas* y *suficientemente pequeñas*, *son proporcionales a la fuerza deformante*, y, por tanto, a la fuerza elástica que la equilibra.

Ésta es la *ley de* HOOKE.

En los casos 1.º y 3.º resulta más conveniente considerar el par deformante que las fuerzas deformantes.

En la técnica se conviene a menudo en tomar precisamente la validez de la ley de HOOKE como definición del campo de elasticidad de un cuerpo.

La ley de HOOKE es también verdadera para los dos casos teóricos de la presión uniforme y del esfuerzo de cortadura en el campo de validez de las [1], § 185 y [1], § 187, respectivamente.

En el campo de validez de la ley de HOOKE, si se quita instantáneamente la fuerza deformante, el cuerpo efectúa oscilaciones isócronas por efecto de las fuerzas elásticas; efectivamente, nos hallamos en las condiciones del § 145.

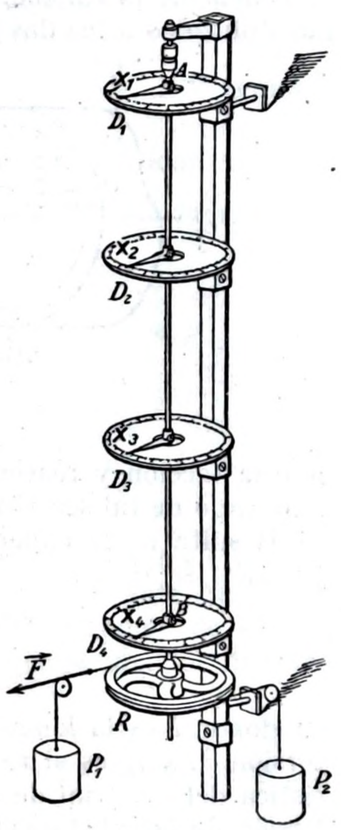


Fig. 380

§ **189. Elasticidad de torsión.** El experimento correspondiente al esquema de la figura 377 se realiza con el aparato de la figura 380. La barra cilíndrica de sección circular (gracias a los pesos iguales P_1, P_2, las oportunas poleas, y la rueda R, de radio a_0) queda sometida a un par torsor, cuyo momento M, de módulo $\vec{M} = (P_1 + P_2)\cdot a_0$, es el momento torsor.

El extremo A está fijo, y el extremo B gira por efecto del momento torsor M.

Varios círculos graduados D_1, D_2, D_3 y D_4 permiten determinar el ángulo de *torsión* ϑ en correspondencia con trayectos de diferentes longitudes de la barra AB. Si ésta es de una substancia de las llamadas «elásticas», bajo la acción del momento torsor $\vec{M}$ adquiere una configuración de equilibrio en la cual el extremo B queda girado en un

ángulo ϑ en el sentido determinado por dicho momento $\vec{M}$. La barra está en equilibrio bajo la acción de $\vec{M}$ y de un momento torsor igual y contrario a $\vec{M}$, debido a la reacción de la ligadura constituída por el extremo fijo A.

Como ocurría en cada sección X del resorte de la figura 361, cualquier sección de la barra, normal a AB, está en equilibrio bajo la acción de los momentos torsores iguales y contrarios $+\vec{M}$ y $-\vec{M}$, debidos a las fuerzas elásticas engendradas en la barra como consecuencia de la torsión. Estos momentos opuestos se han de imaginar aplicados a las dos caras de la sección, y son debidos a la acción

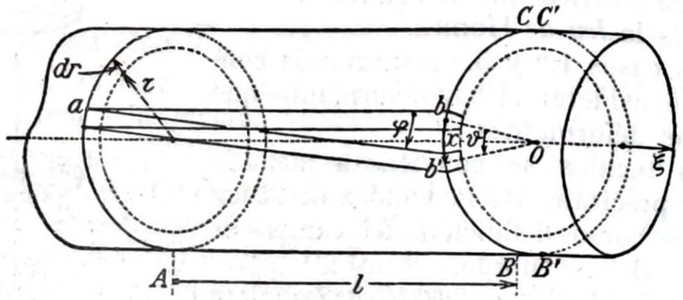


Fig. 381

mutua (acción y reacción) entre las porciones de barra en contacto a lo largo de tal sección.

Resulta de la experiencia que, para valores de ϑ no demasiado grandes, se tiene:

$$\vartheta = \frac{1}{K}\frac{M \cdot l}{r_0^4} \qquad [1]$$

en donde l es la longitud de la barra correspondiente al ángulo de torsión ϑ, y r_0 es el radio de la misma; K es una constante característica del material de que está hecha la barra y se llama *módulo de torsión* de la substancia. Como en los módulos de elasticidad ya definidos (§§ 185 y 187), K debería medir el momento torsor capaz de torcer en un ángulo ϑ unidad φ una barrita de radio r_0 unidad y longitud l unidad; se tiene $[K] = [l^{-1} \cdot m \cdot t^{-2}]$. En un buen acero corriente, K vale aproximadamente $12\,000\,000 \dfrac{\text{newton}}{\text{cm}^2 \cdot \text{rad}}$.

Los experimentos de torsión dan ϑ, y midiendo l, r_0 y M se obtiene fácilmente el valor de K.

El ángulo ϑ es proporcional al momento torsor; es la ley de HOOKE. Además, la proporcionalidad $\vartheta = k \cdot M \cdot l$ entre ϑ y la longitud de la barra y entre θ y el momento torsor, es válida para todas las barras cilíndricas, cualquiera que sea la forma de su sección, es decir, aunque ésta no sea circular.

Supongamos que la barra tenga sección circular. Durante la torsión, cada rodaja $BB'CC'$ (fig. 381) de la barra gira respecto a la anterior, deslizando sobre ella.

La elasticidad de torsión es un fenómeno puro de elasticidad de deslizamiento.

Divídase idealmente la barra en capas cilíndricas cuyo eje coincida con el ξ de la misma, y de radio creciente desde $r = 0$ a $r = r_0$. Una de estas capas (p. ej. la más externa, dibujada en la figura) tiene un radio r y un espesor dr. La torsión ϑ del pedazo $AB = l$ de la barra deforma cada uno de los filetes ab de la capa cilíndrica; esta capa se encuentra sometida a un deslizamiento cuyo valor angular es φ. Pero se tiene $\varphi = \dfrac{x}{l}$ y $x = r \cdot \vartheta$; luego, $\varphi = r \cdot \dfrac{\vartheta}{l}$. Ello requiere una fuerza (§ 187): $\tau = G \cdot \varphi = G \cdot r \cdot \dfrac{\vartheta}{l}$ para cada unidad de área de la base anular de la capa cilíndrica y, por tanto, una fuerza efectiva para toda la capa:

$$dF = 2\pi r \cdot dr \cdot G \cdot r \cdot \frac{\vartheta}{l},$$

y un momento dM respecto al eje de la barra:

$$dM = 2\pi r \cdot dr \cdot G \cdot r \cdot \frac{\vartheta}{l} r.$$

Si las dos barras extremas de la barra, correspondientes a las secciones rectas de la misma en A y en B respectivamente (fig. 381), se comportan como rígidas durante la torsión, el ángulo de torsión ϑ es común a todos los filetes ab paralelos en que se imagina dividida la barra.

El momento total $\vec{M}$ capaz de torcer según un ángulo ϑ todas las capas cilíndricas coaxiales que forman la barra, tiene, pues, por módulo:

$$M = \int_{r=0}^{r=r_0} dM = \int_{r=0}^{r=r_0} 2\pi r^3 \cdot G \cdot \frac{\vartheta}{l} \cdot dr = G \cdot \frac{\vartheta}{l} \cdot 2\pi \cdot \frac{r_0^4}{4} = G \cdot \frac{\pi}{2}\frac{\vartheta \cdot r_0^4}{l}. \qquad [2]$$

Comparando las expresiones [2] y [1] se deduce que el módulo de torsión K para una barra circular y el módulo de deslizamiento G están ligados por la igualdad

$$K = \frac{\pi}{2} \cdot G; \qquad [3]$$

es decir, la torsión supone un fenómeno puro de deslizamiento y la

determinación experimental de K, fácil de obtener con la expresión [1], permite deducir mediante [3] el valor del módulo de deslizamiento G del material de la barra.

Una conclusión tan sencilla sólo sirve para barras cilíndricas de sección circular, gracias al hecho de poder dividir la barra en capas cilíndricas coaxiales (fig. 381), cada una de las cuales puede imaginarse como una lámina de espesor constante e infinitesimal cuyos bordes $m\,n$ (fig. 382) están unidos entre sí; por tanto, la lámina misma se comporta como la capa indefinida de la figura 372, exenta de las perturbaciones en los bordes de que se resiente el paralelepípedo de la figura 368, que tiene longitud finita l.

Fig. 382

Con el aparato de la figura 383 se estudia fácilmente la torsión en los hilos; pero conviene que éstos se mantengan en tensión mediante un peso Q que funciona a la vez como rueda R (fig. 380) de radio a_0 para la aplicación del momento torsor.

El extremo B se tuerce bajo el efecto del momento $2Pa_0$; se lee el ángulo de torsión en el círculo graduado D.

Producida la torsión, se cortan bruscamente los hilos f_1 y f_2. El sistema ABQ queda libre para girar alrededor de la vertical AB por efecto del momento $M_e = -M$ de las fuerzas elásticas de torsión.

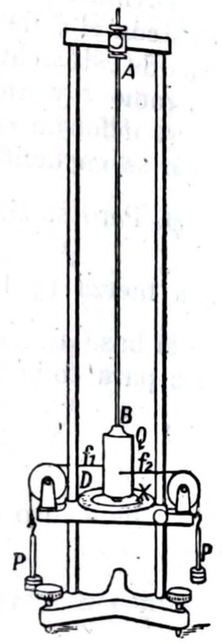


Fig. 383

Con los convenios acostumbrados sobre los signos de M_e y de ϑ, se tiene:

$$M_e = -\frac{\pi}{2} G \frac{r_0^4}{l} \vartheta = -k^2 \cdot \vartheta. \qquad [4]$$

El movimiento de ABQ viene regulado por un momento M_e proporcional al ángulo de giro ϑ y opuesto a ϑ. El caso es idéntico al del péndulo compuesto (§ 162). Q efectúa oscilaciones armónicas, de modo que ϑ es función sinusoidal del tiempo, y las oscilaciones son isócronas, de período:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k^2}} \qquad [5]$$

en donde I es el momento de inercia de Q (se supone despreciable el momento de inercia del hilo).

T se determina experimentalmente, y el momento de inercia I se calcula con facilidad si Q tiene una forma geométrica sencilla; la [5] permite, pues, obtener el valor de k^2, esto es, de $\frac{\pi}{2} G \cdot \frac{r_0^4}{l} = K \frac{r_0^4}{l}$,

y, por fin, el valor de K o de G, porque también se pueden medir fácilmente r_0 y l.

Este método dinámico de medida de K no coincide conceptualmente con el método estático basado en la [2]: el experimento estático es isotérmico, siendo constante la temperatura del hilo e igual a la temperatura ambiente; el experimento dinámico es tanto menos isotérmico cuanto mayor sea la frecuencia $\frac{1}{T}$ de las oscilaciones de torsión. Experimentado con hilos, la frecuencia nunca es muy elevada y coinciden prácticamente los resultados numéricos de los métodos dinámico y estático.

Viceversa, conocido k^2, puede repetirse el experimento substituyendo Q por un cuerpo de momento de inercia desconocido I; mediante la [5], midiendo T, se deduce I. Este método se emplea frecuentemente para la determinación experimental de I.

Incluso se ha utilizado la [5] para la determinación del radio r_0 de un fino hilo elástico fabricado con una substancia cuyo módulo G sea suficientemente conocido. Se tiene, en efecto (cuando se conocen I, G y l y se determina T), a partir de las [4] y [5]:

$$r_0 = \sqrt[4]{\frac{8\pi \cdot I \cdot l}{G \cdot T^2}}. \qquad [6]$$

Finalmente, he aquí una elegante aplicación de la dependencia entre la torsión y la cuarta potencia del radio para obtener microcorrimientos conocidos con una elevadísima precisión (ROHMANN). AB (fig. 384) es una barra cilíndrica de acero, empotrada rígidamente en NN' y constituída de dos partes coaxiales, ambas de sección circular, de radios respectivos r_1 y r_2 y de longitudes l_1 y l_2.

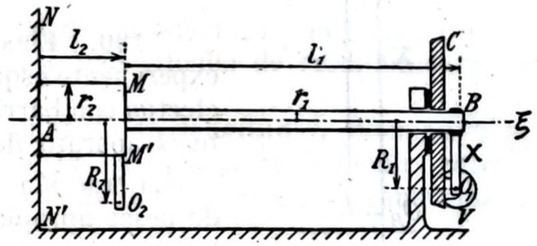


Fig. 384

El extremo B de la barra gira dentro del soporte C, en cuyo borde puede haber un círculo graduado de eje ξ. Se produce un corrimiento Δx_1 del punto O_1, por ejemplo hacia el observador, mediante el tornillo micrométrico V que tiene su eje normal al plano de la figura. O_1 está en el extremo de la alidada X fijada en B a la barra cilíndrica AB; sea R_1 la distancia entre O_1 y el eje ξ. En la lengüeta $M'O_2$, fijada en el borde MM' de la parte más gruesa de la barra, está señalado el punto O_2, a la distancia R_2 de ξ. El corrimiento Δx_1 de O_1 engendra una torsión ϑ de la barra:

$$\vartheta = \frac{\Delta x_1}{R_1}.$$

Se origina así un momento torsor M y, por tanto, las partes l_1 y l_2 experimentan las torsiones ϑ_1 y ϑ_2 dadas por la [2]:

$$\vartheta_1 = \frac{2}{\pi G}\cdot\frac{M l_1}{r_1^4}, \qquad \vartheta_2 = \frac{2}{\pi G}\cdot\frac{M l_2}{r_2^4}; \qquad \vartheta_2 + \vartheta_1 = \vartheta.$$

Luego:

$$\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} = \frac{l_1}{l_2}\cdot\frac{r_2^4}{r_1^4}.$$

Por ejemplo: $l_1 = 10\cdot l_2$, $r_2 = 5\cdot r_1$; por tanto: $\vartheta_1 = 6250\cdot\vartheta_2$; $\vartheta \approx \vartheta_1$.

Por consiguiente, el punto O_2 se traslada hacia el observador según un trayecto

$$\Delta x_2 = \vartheta_2\cdot R_2 = \vartheta_1\cdot\frac{l_2}{l_1}\cdot\frac{r_1^4}{r_2^4}\cdot R_2 = \frac{l_2}{l_1}\cdot\frac{r_1^4}{r_2^4}\cdot\frac{R_2}{R_1}\cdot\Delta x_1. \qquad [7]$$

Para $R_1 = R_2$ (p. ej. $= 5$ cm), $l_1 = 10\cdot l_2$ y $r_2 = 5\cdot r_1$, un corrimiento $\Delta x_1 = 0{,}01$ mm de O_1, fácil de medir con el tornillo micrométrico V, engendra un corrimiento de O_2 ¡de sólo $\approx 2\cdot 10^{-6}$ mm!

Se tiene así un medio de producir microcorrimientos de O_2 conocidos y graduables con la aproximación de $\approx 10^{-6}$ mm.

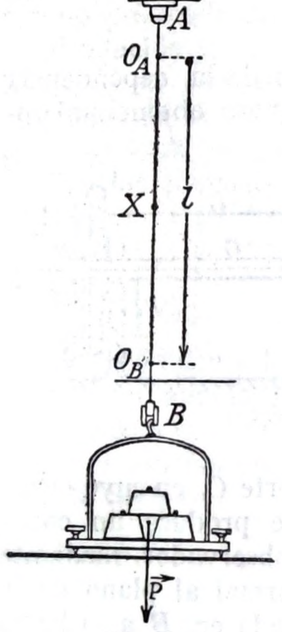


Fig. 385

§ 190. Elasticidad de alargamiento. El experimento esquematizado en la figura 378, se efectúa con barritas de hilos delgados, mediante el aparato de la figura 385.

La tracción axial $\vec{P}$ se consigue por medio de pesos apropiados; cualquier sección X del hilo queda sometido a dicha tracción.

Para evitar las perturbaciones debidas a las mordazas A y B se observa el alargamiento del pedazo l del hilo o de la barrita limitado entre dos señales horizontales finas O_A y O_B; para ello sirve muy bien el catetómetro.

Conviene un catetómetro provisto de dos microscopios de lectura, con los cuales se apuntan simultáneamente las señales O_A y O_B, respectivamente.

Es muy cómodo, simple, y notablemente preciso, el aparato de la figura 386 *(extensómetro)*. Un hilo de acero mantenido tenso por medio de un peso constante, sirve de longitud de referencia; el hilo en estudio se encuentra también tenso verticalmente y paralelo al

hilo de acero. El alargamiento, o «extensión», del hilo en estudio, sometido a cargas sucesivamente crecientes, inclina el nivel L; se restablece la horizontabilidad del nivel mediante el tornillo micrométrico V; de este modo se mide el alargamiento buscado.

Para hilos de substancias llamadas «elásticas» el alargamiento es elástico entre ciertos límites, y los resultados experimentales están contenidos en la fórmula:

$$\Delta l = \frac{1}{E}\cdot\frac{P\cdot l}{S} \qquad [1]$$

Fig. 386

en la cual l es la longitud; S, la sección de la barra; Δl, el alargamiento, y P, la fuerza de tracción.

$\frac{1}{E}$ es el *coeficiente de alargamiento*, o de «extensión», y E se llama *módulo de alargamiento o módulo de* Young; pretende representar la fuerza P capaz de duplicar la longitud l de un hilo de sección unidad. Se tiene:

$$[E] = \left[\frac{P\cdot l}{\Delta l\cdot S}\right] = \left[\frac{P}{S}\right] = [l^{-1}\cdot m\cdot t^{-2}].$$

E se determina fácilmente con la [1]; por ejemplo, en el acero es $E = 22\,000\,000\ \frac{\text{newton}}{\text{cm}^2}$.

En la [1] son proporcionales la deformación Δl y la fuerza P para una barra determinada. Es el caso más sencillo de cumplimiento de la ley de Hooke.

Con la tracción, mientras aumenta la longitud l, disminuye la sección S; esta contracción, que no es siempre fácil medir, corresponde a una disminución Δr de cada dimensión lineal transversal r de la barra; se tiene:

$$\Delta r = -\frac{1}{B}\cdot r\cdot\frac{P}{S}; \qquad [2]$$

B (> 0) es el *módulo de contracción transversal*; $\frac{1}{B}$ es el coeficiente de contracción. Se tiene también: $[B] = [l^{-1}\cdot m\cdot t^{-2}]$.

Se llama *coeficiente* o *relación de* Poisson la razón ν de los dos coeficientes de contracción transversal y de alargamiento:

$$\nu = \frac{\frac{1}{B}}{\frac{1}{E}} = \frac{\frac{\Delta r}{r}}{\frac{\Delta l}{l}}, \quad [\nu] = [l^0\cdot m^0\cdot t^0] \qquad [3]$$

Se ve fácilmente que si se tiene $\nu < \frac{1}{2}$, ha aumentado por la tracción el volumen de la barra, lo que constituye el caso más frecuente. Poisson dedujo teóricamente el valor $\nu = \frac{1}{4}$ para todos los cuerpos isótropos, mientras que la experiencia da valores comprendidos entre 0 y $\frac{1}{2}$; por ejemplo, en el azúcar, σ es sensiblemente nulo; en el acero, $\sigma = 0{,}3$, y en el caucho, $\nu = 0{,}48 \div 0{,}50$.

La elasticidad de alargamiento resulta de la acción simultánea de presiones normales y de esfuerzos cortantes, puesto que E está ligado con los dos módulos ε y G de los §§ 185 y 187. Se demuestra que:

$$E = \frac{9 \cdot \varepsilon \cdot G}{3\varepsilon + G}. \qquad [4]$$

Tampoco ν es un nuevo coeficiente elástico, porque se demuestra que:

$$\nu = \frac{3\varepsilon - 2G}{2(3\varepsilon + G)}.$$

Por tanto, la medida de E y de ν permite la determinación de ε y G mediante las [4] y [5].

Pero es más cómodo valerse de la [3], § 189, y de la [4], calculándose los valores de E y de K a partir de las medidas experimentales de ε y G.

§ **191. Elasticidad de compresión axial.** La compresión que se observa a causa de una presión ejercida según el eje de una barra de suficiente sección para que no existan fenómenos secundarios de flexión, puede considerarse en primera aproximación, en general suficiente, como el fenómeno inverso del alargamiento.

Basta cambiar el signo de P, de Δl y de Δr en las [1] y [2] del § 190. Entonces, E se llama *módulo de compresión axial.*

§ **192. Elasticidad de flexión.** Este caso de elasticidad es más complicado que los anteriores, porque la flexión de una barra, que supondremos homogénea e isótropa, puede obtenerse con los extremos empotrados [fig. 387, *a*)], con los extremos apoyados [*b*)], con un extremo empotrado y otro apoyado [*c*)], o con un extremo empotrado y otro libre [*d*)]. La *carga* flectora $\vec{P}$ que engendra los momentos flexores, podrá estar concentrada en un punto de la barra o distribuída por toda ella, y podrá ser normal a la barra o no serlo.

El caso más corriente es que la barra sea horizontal y la carga, constituída por pesos, sea vertical. El caso más *simétrico* es el de la flexión plana circular, y corresponde a la figura 379.

Haremos una breve indicación sobre los dos casos de flexión «plana» [§ 187, *a*)] llamados *flexión plana circular* y *flexión plana normal.*

Corresponden, respectivamente:

al caso más simétrico y sencillo de flexión, que es el de la figura 379, considerado en un trayecto $O_A O_B$ lo bastante alejado de los puntos de aplicación de las cargas, para evitar las perturbaciones locales que las cargas producen;

al caso de flexión más vistoso, y experimentalmente más esquemático, que es el de las figuras 387, *d*) y 388.

En este caso se supone que la barra sea de sección rectangular, cuyos lados,

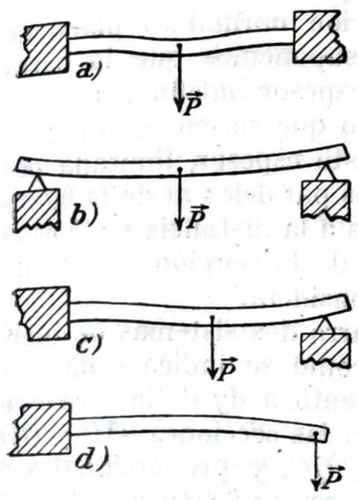


Fig. 387

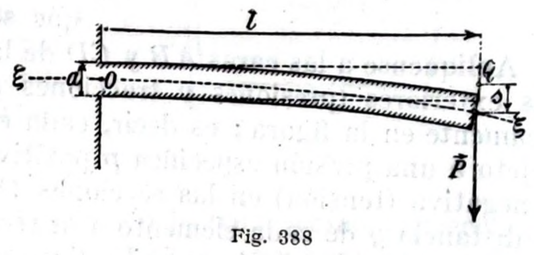


Fig. 388

en ausencia de carga, son respectivamente horizontales y verticales; un extremo O está empotrado y el otro Q está libre; la carga vertical $\vec{P}$ está concentrada en el extremo libre Q. Sean l la longitud de la barra, a la «altura» (dimensión de la sección rectangular paralela a $\vec{P}$) y b el «ancho» de la barra (dimensión de la sección rectangular normal a la figura). Sea s la *flecha* que caracteriza la deformación por flexión; s se define como el descenso en dirección vertical del extremo libre Q de la barra.

Para barras de substancias «elásticas», la flexión es elástica dentro de ciertos límites; para valores bastante pequeños de la flecha s, la experiencia da, de acuerdo con la ley de Hooke:

$$s = \frac{1}{J} \cdot \frac{P \cdot l^3}{b \cdot a^3} \qquad [1]$$

Para que la flexión sea pequeña, es necesario que la barra no sea muy larga y que sea grande su altura a; en efecto, l y a aparecen en la fórmula [1] elevadas a la tercera potencia.

J es el módulo de flexión relativo al material considerado, y *relativo al caso particular de flexión que hemos considerado.* Las dimensiones de J son también

$$[J] = [l^{-1} \cdot m \cdot t^{-2}].$$

También este módulo es función de G y de ε, y está ligado de modo simple con el módulo de YOUNG E.

Esto se ve fácilmente en los dos casos sencillos siguientes de flexión «plana» ya mencionados.

1.º **Flexión plana circular.** La barra $ABCD$ (fig. 389) tiene inicialmente la forma de paralelepípedo trirrectángulo; sean l la longitud y a la altura. El eje x coincide con el eje del rectángulo $ABCD$. En dirección normal al plano de la figura suponemos que la barra tiene un espesor indefinido; consideremos lo que sucede en una porción de este espesor, limitada por dos planos paralelos al de la figura y situados a la distancia b; b es el «ancho» de la porción de lámina que se considera.

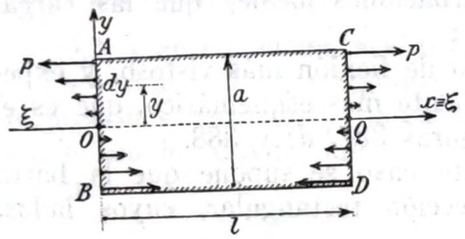


Fig. 389

Aplíquense a las caras AB y CD de la barra dos sistemas de fuerzas exteriores (presiones y tracciones p) como se indica esquemáticamente en la figura; es decir, cada elemento $b \cdot dy$ de la cara está sujeto a una presión específica p positiva en las secciones OB y QD y negativa (tensión) en las secciones OA y QC, y proporcionales a la distancia y de cada elemento a la *sección neutra* ξ; en la figura ξ, que coincide con el eje x, es la *línea neutra*, mientras que y es sencillamente la ordenada de dy.

Esto se obtiene experimentalmente en las condiciones de la figura 379, con tal de que se considere una porción $O_A O_B$ de la barra, lo bastante alejada de los puntos A, B en los cuales está aplicada la carga.

Luego se supone, en valor y signo:

$$p = -k \cdot y.$$

La fuerza $d\vec{F}$ que actúa sobre el elemento $b \cdot dy$ es, pues:

$$dF = -k \cdot b \cdot y \cdot dy. \qquad [2]$$

En la cara AB, este sistema de fuerzas forma un sistema de infinitos pares que constituye un esfuerzo de flexión *pura*. El momento resultante $\vec{M}$ se calcula fácilmente porque coincide con el momento resultante de todas las fuerzas $d\vec{F}$ respecto al eje que pasa por O y es normal al plano de la figura. El módulo M de $\vec{M}$ es:

$$M = 2\int_{y=0}^{y=\frac{a}{2}} k \cdot b \cdot y^2 \cdot dy = k \cdot \frac{b \cdot a^3}{12}. \qquad [3]$$

Desde el exterior actúa un momento igual y contrario sobre la cara CD.

En los cuerpos elásticos se obtiene una configuración de equilibrio en la cual los filetes AC resultan tensos y alargados, mientras los BD resultan apretados y acortados. Toda sección transversal plana, como por ejemplo cada una de las caras AB, CD, permanece plana gracias a la ley de HOOKE, pero la barra se dobla; la fibra o línea neutra ξ toma la forma de arco de circunferencia (fig. 390). Se tiene una flexión pura, o mejor, *circular, plana*. Cada sección infinitesimal $N_1 N_1'$, $N_2 N_2'$ de la barra está en equilibrio bajo la acción de los momentos flexores iguales y opuestos, de módulo M, distribuídos respectivamente sobre las caras $N_1 N_1'$, $N_2 N_2'$ según una ley igual a la que es válida para las presiones y tensiones aplicadas desde el exterior sobre las caras extremas AB y CD de la barra. Estos momentos flexores se deben a las fuerzas elásticas que se manifiestan en la barra como consecuencia de la deformación. Supongamos que ésta es muy pequeña, es decir, que sea grande el radio de curvatura de la barra respecto a a, para poder aplicar la [1] del § 190.

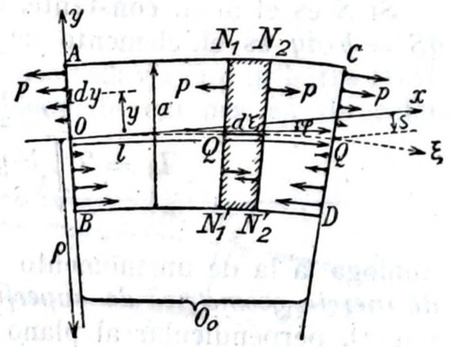


Fig. 390

La capa de sección $b \cdot dy$ que dista y de ξ, está sometida a la tracción $k \cdot y \cdot b \cdot dy$ y, por tanto, se alarga en:

$$\Delta l = \frac{1}{E} \cdot \frac{k \cdot y \cdot b \cdot dy \cdot l}{b \cdot dy} = \frac{1}{E} \cdot k \cdot y \cdot l.$$

La capa extrema AC se alarga en:

$$\Delta l_0 = \frac{1}{E} \cdot k \cdot \frac{a}{2} \cdot l,$$

y la capa extrema BD se acorta una longitud igual.

AB y CD convergen en un punto O_0 (centro de la curvatura de ξ) tal que:

$$O_0 O : OA = l : \Delta l_0.$$

Por tanto, el radio de curvatura de la barra $\varrho = O_0 O$ es:

$$\varrho = O_0 O = \frac{l \cdot \frac{a}{2}}{\Delta l_0} = \frac{E}{k} \qquad [4]$$

Eliminando k entre ésta y la [3], se tiene:

$$\varrho = \frac{E \cdot b \cdot a^3}{12 \cdot M} \qquad [5]$$

que relaciona, en la flexión plana circular, el radio de curvatura de la barra, inicialmente rectilínea, con el valor M del momento flexor, con las dimensiones a y b de la barra y con el módulo de YOUNG E.

Si S es el área, constante, de la sección transversal de la barra, $dS = b \cdot dy$ es el elemento de dicha área, y la expresión

$$I_S = 2 \int_{y=0}^{y=\frac{a}{2}} b \cdot y^2 \cdot dy = \int_S y^2 \cdot dS, \qquad [6]$$

análoga a la de un momento de inercia (§ 157), se llama *momento de inercia geométrico de superficie* relativo a S y al eje que pasa por O, perpendicular al plano de la figura 389.

Si S fuese una lámina material con una «masa específica superficial» 1, es decir, con una masa igual a la unidad por cada unidad de superficie (p. ej. 1 kg_m por m^2), la [6] daría el valor de su momento de inercia.

Introduciendo I_S, la [5] se escribe:

$$p = \frac{E}{M} \cdot I_S, \qquad [7]$$

válida no solamente, como la [5], para barras rectangulares, sino para barras cilíndricas de sección transversal cualquiera, con tal de localizar oportunamente en cada caso la línea neutra y, por lo tanto, el punto O.

De la [7] resulta que *para un material dado y un momento flexor dado, se dobla menos la barra que tenga mayor momento de inercia de superficie.* Una tal barra se comporta como barra «rígida» mejor que cualquier otra. De aquí las innumerables aplicaciones de las barras perfiladas (hierros en T, en U, en I, tubos, ...) en la construcción.

Calculemos la flecha s. Se tiene:

$$s = \int_{\xi=0}^{\xi=l} \operatorname{sen}\ \varphi \cdot d\xi.$$

Para flexiones pequeñas es: $\operatorname{sen}\ \varphi \approx \varphi$ y resulta:

$$\varphi = \frac{\text{arco } OP}{O_0 O} = \frac{\xi}{\varrho}.$$

Por tanto, recordando la [5]:

$$s = \int_{\xi=0}^{\xi=l} \frac{\xi}{\varrho} \cdot d\xi = \frac{6}{E} \frac{M\,l^2}{b \cdot a^3}. \qquad [8]$$

Comparando con la [1] se deduce que el *módulo de flexión plana circular* está ligado con el módulo de YOUNG E y vale, precisamente, $\frac{E}{6}$.

2.º **Flexión plana normal.** Sigamos todavía con la barra rectilínea de sección rectangular, indefinidamente extensa en dirección normal a la figura, de la que se considera una porción de ancho b. Pero ahora las fuerzas exteriores aplicadas son las ya indicadas en la figura 388: la fuerza $\vec{P}$ en el extremo de la barra y normal a ella, y la reacción de la ligadura constituída por el empotramiento rígido en AB (figura 391).

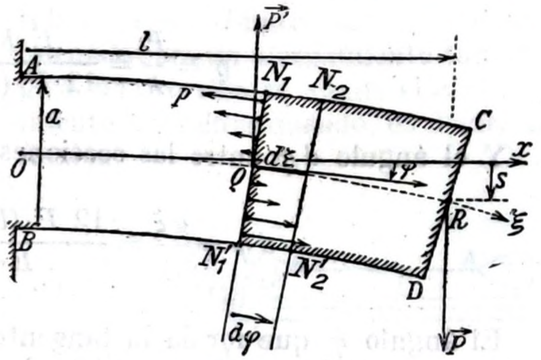


Fig. 391

En las condiciones de equilibrio (§ 109), esta reacción ha de equivaler en su conjunto a una fuerza $\vec{P}'$, igual y opuesta a $\vec{P}$, formando, pues, un par con $\vec{P}$, y a un par de momento igual y opuesto al del par $\vec{P}\vec{P}'$.

La barra elástica se flexiona. Supondremos que la flecha s es muy pequeña respecto a la longitud l. La porción de la barra N_1N_1', DC está en equilibrio bajo la acción de $\vec{P}$ y de fuerzas actuantes sobre la cara N_2N_2' por parte del resto de la barra. Tienen que ser también nulas tanto la resultante de los momentos como la de las fuerzas.

Admitamos que en la sección N_1N_1', el resto de la barra origine un sistema de tracciones y presiones perpendiculares a la cara N_1N_1' y análogas a las de las figuras 389 y 390. Su resultante es nula, y por tanto, para el equilibrio el resto de la barra debe aplicar también sobre N_1N_1' una fuerza $\vec{P}'$ igual y contraria a $\vec{P}$. Puede suponerse en primera aproximación que $\vec{P}'_1$ se encuentra en el plano N_1N_1', porque la flexión es pequeña. Debe imaginarse que $\vec{P}'$ es una fuerza distribuída sobre la cara N_1N_1' y constituye un esfuerzo de cortadura de intensidad $\tau = \frac{P'}{b \cdot a}$. Esta vez no se tiene esfuerzo de flexión pura, sino una flexión combinada con un esfuerzo de cortadura.

Eliminando k entre ésta y la [3], se tiene:

$$\varrho = \frac{E \cdot b \cdot a^3}{12 \cdot M} \qquad [5]$$

que relaciona, en la flexión plana circular, el radio de curvatura de la barra, inicialmente rectilínea, con el valor M del momento flexor, con las dimensiones a y b de la barra y con el módulo de YOUNG E.

Si S es el área, constante, de la sección transversal de la barra, $dS = b \cdot dy$ es el elemento de dicha área, y la expresión

$$I_S = 2 \int_{y=0}^{y=\frac{a}{2}} b \cdot y^2 \cdot dy = \int_S y^2 \cdot dS, \qquad [6]$$

análoga a la de un momento de inercia (§ 157), se llama *momento de inercia geométrico de superficie* relativo a S y al eje que pasa por O, perpendicular al plano de la figura 389.

Si S fuese una lámina material con una «masa específica superficial» 1, es decir, con una masa igual a la unidad por cada unidad de superficie (p. ej. 1 kg_m por m^2), la [6] daría el valor de su momento de inercia.

Introduciendo I_S, la [5] se escribe:

$$p = \frac{E}{M} \cdot I_S, \qquad [7]$$

válida no solamente, como la [5], para barras rectangulares, sino para barras cilíndricas de sección transversal cualquiera, con tal de localizar oportunamente en cada caso la línea neutra y, por lo tanto, el punto O.

De la [7] resulta que *para un material dado y un momento flexor dado, se dobla menos la barra que tenga mayor momento de inercia de superficie.* Una tal barra se comporta como barra «rígida» mejor que cualquier otra. De aquí las innumerables aplicaciones de las barras perfiladas (hierros en T, en U, en I, tubos, ...) en la construcción.

Calculemos la flecha s. Se tiene:

$$s = \int_{\xi=0}^{\xi=l} \operatorname{sen}\ \varphi \cdot d\xi.$$

Para flexiones pequeñas es: $\operatorname{sen} \varphi \approx \varphi$ y resulta:

$$\varphi = \frac{\text{arco } OP}{O_0 O} = \frac{\xi}{\varrho}.$$

Por tanto, recordando la [5]:

$$s = \int_{\xi=0}^{\xi=l} \frac{\xi}{\varrho} \cdot d\xi = \frac{6}{E} \frac{M\, l^2}{b \cdot a^3}. \qquad [8]$$

Comparando con la [1] se deduce que el *módulo de flexión plana circular* está ligado con el módulo de YOUNG E y vale, precisamente, $\frac{E}{6}$.

2.º **Flexión plana normal.** Sigamos todavía con la barra rectilínea de sección rectangular, indefinidamente extensa en dirección normal a la figura, de la que se considera una porción de ancho b. Pero ahora las fuerzas exteriores aplicadas son las ya indicadas en la figura 388: la fuerza $\vec{P}$ en el extremo de la barra y normal a ella, y la reacción de la ligadura constituída por el empotramiento rígido en AB (figura 391).

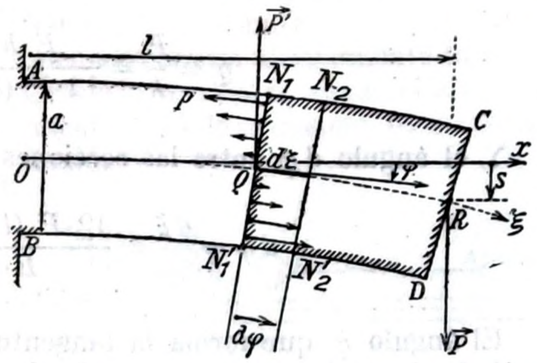


Fig. 391

En las condiciones de equilibrio (§ 109), esta reacción ha de equivaler en su conjunto a una fuerza $\vec{P}'$, igual y opuesta a $\vec{P}$, formando, pues, un par con $\vec{P}$, y a un par de momento igual y opuesto al del par $\vec{P}\vec{P}'$.

La barra elástica se flexiona. Supondremos que la flecha s es muy pequeña respecto a la longitud l. La porción de la barra N_1N_1', DC está en equilibrio bajo la acción de $\vec{P}$ y de fuerzas actuantes sobre la cara N_2N_2' por parte del resto de la barra. Tienen que ser también nulas tanto la resultante de los momentos como la de las fuerzas.

Admitamos que en la sección N_1N_1', el resto de la barra origine un sistema de tracciones y presiones perpendiculares a la cara N_1N_1' y análogas a las de las figuras 389 y 390. Su resultante es nula, y por tanto, para el equilibrio el resto de la barra debe aplicar también sobre N_1N_1' una fuerza $\vec{P}'$ igual y contraria a $\vec{P}$. Puede suponerse en primera aproximación que $\vec{P}'_1$ se encuentra en el plano N_1N_1', porque la flexión es pequeña. Debe imaginarse que $\vec{P}'$ es una fuerza distribuída sobre la cara N_1N_1' y constituye un esfuerzo de cortadura de intensidad $\tau = \frac{P'}{b \cdot a}$. Esta vez no se tiene esfuerzo de flexión pura, sino una flexión combinada con un esfuerzo de cortadura.

$\vec{P}$ y $\vec{P}'$ constituyen un par de momento $P\cdot(l-OQ)=P\cdot(l-\xi)$. Para el equilibrio, recordando la [3], el momento resultante de todas las fuerzas existentes en N_1N_1' debe ser:

$$M=\frac{k\cdot b\cdot a^3}{12}=P\cdot(l-\xi). \qquad [9]$$

Para un elemento $d\xi$ de la barra, puede considerarse que la flexión es circular con la misma aproximación con que N_1N_1' se puede suponer todavía plana y normal a la línea neutra ξ, y un arco $d\xi$ de esta línea puede confundirse con un arco de circunferencia. Recordando las [4], [5] y [9], el radio de curvatura ϱ es:

$$\varrho=\frac{E}{k}=\frac{E\cdot b\cdot a^3}{12\cdot P\cdot(l-\xi)}$$

Y el ángulo $d\varphi$ entre las secciones N_1N_1', y N_2N_2' es:

$$d\varphi=\frac{d\xi}{\varrho}=\frac{12\cdot P\cdot(l-\xi)\cdot d\xi}{E\cdot b\cdot a^3}$$

El ángulo φ que forma la tangente en Q a la línea neutra ξ con el eje horizontal x, tangente en O a la misma línea ξ, es:

$$\varphi=\int_{\xi=0}^{\xi=\xi}d\varphi=\frac{12\cdot P}{E\cdot b\cdot a^3}\int_{\xi=0}^{\xi=\xi}(l-\xi)\cdot d\xi=\frac{6P}{E\cdot b\cdot a^3}\cdot(2l\xi-\xi^2).$$

El elemento $d\xi$ de barra, a la distancia ξ de O, contribuye a la flecha del extremo R de la barra con el sumando:

$$ds=\operatorname{sen}\varphi\cdot d\xi\approx\varphi\cdot d\xi.$$

Por tanto, la flecha s es:

$$s=\int_{\xi=0}^{\xi=l}ds=\int_{\xi=0}^{\xi=l}\frac{6P}{E\cdot b\cdot a^3}\cdot(2l\xi-\xi^2)\cdot d\xi=\frac{6P}{E\cdot b\cdot a^3}\left[l^3-\frac{1}{3}l^3\right]=\frac{4}{E}\cdot\frac{Pl^3}{b\cdot a^3} \qquad [10]$$

Comparando con la [1], se deduce que el *módulo de flexión plana normal* está ligado con el módulo de YOUNG E y vale, precisamente, $\frac{E}{4}$.

Estas demostraciones elementales, relativas a casos sencillos de elasticidad, solamente son aproximadas, y requieren la admisión de las numerosas hipótesis que hemos ido señalando. Se encuentran y desarrollan de un modo más acabado en los tratados de elasticidad.

§ **193. Resorte en hélice.** Es muy instructivo analizar cómo funciona un resorte corriente en forma de hélice (fig. 392), de radio R, y de espiras muy próximas entre sí.

Este resorte puede ser solicitado por tracción o por presión según el eje MN, o por un momento torsor alrededor de este eje.

La tracción según MN produce esencialmente *torsión* del hilo que forma el muelle. Una espira AB, cuando se estira hasta ponerse recta (A'' B''), queda torcida en una vuelta entera; obsérvese, sin embargo, que si el diámetro del hilo no es pequeñísimo respecto a R, mucho antes de llegar a la recta se ha rebasado el límite de elasticidad; además, para un alargamiento tan enérgico, a la torsión se añade el enderezamiento del hilo arqueado, es decir, una flexión.

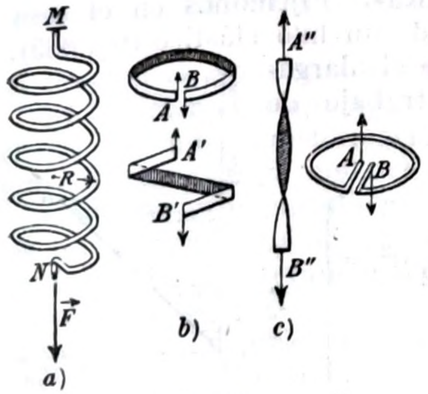


Fig. 392

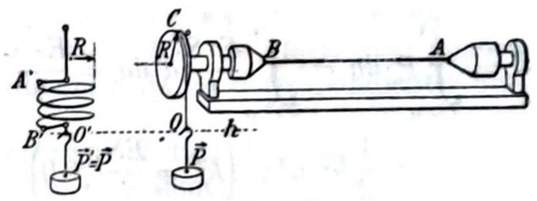


Fig. 393

La fuerza $\vec{F}$ de tracción origina efectivamente un momento $F\cdot R$ de torsión. Esto se confirma mediante el siguiente experimento. Se tienen dos hilos de la misma longitud y del mismo acero, uno rectilíneo, que está sometido a un momento torsor mediante el peso $\vec{P}$ (figura 393) y la polea C de radio R, y otro, arrollado en hélice de radio R, que se estira con un peso $\vec{P}'=\vec{P}$. Si los puntos de aplicación O y O' de las fuerzas $\vec{P}$ y $\vec{P}'$ se hallan inicialmente ($\vec{P}=\vec{P}'=0$) en el mismo nivel h, estos puntos de aplicación descienden al aumentar $\vec{P}=\vec{P}'$, quedando aún en el mismo nivel.

Aparte de la flexión citada, el peso $\vec{P}'$ capaz de deshacer completamente las n espiras de la hélice, alarga la hélice en $2\pi Rn$, y debe ser igual al peso $\vec{P}$ que produce una torsión de n vueltas completas. Conviene limitar el experimento a alargamientos y torsiones mucho menores.

Cuando el muelle en hélice MN (fig. 394) está sometido a un momento torsor alrededor del eje MN, se produce efectivamente una flexión del hilo elástico de que está formada la hélice, flexión que viene a sumarse o a restarse, según el sentido del momento torsor,

a la flexión permanente que ha tenido que sufrir el hilo, primero rectilíneo, durante la fabricación del muelle en forma de hélice.

Hágase oscilar la esfera S en dirección vertical : sus oscilaciones son elásticas de torsión y son isócronas armónicas en el campo de validez de la ley de HOOKE. Si se hace oscilar la esfera S alrededor del eje MN, las oscilaciones, aparentemente de torsión, son oscilaciones elásticas de flexión, también armónicas e isócronas en el campo de validez de la ley de HOOKE.

Fig. 394

Después de esta explicación es evidente que es poco acertado el nombre de balanza « de torsión » que se da a la balanza de HARTMANN y BRAUN (§ 42).

§ 194. Energía y oscilaciones elásticas. Fijémonos en el caso del alargamiento por tracción $\Delta l = a$ de un hilo elástico (fig. 385).

Al aumentar el peso tensor P, crece el alargamiento a según la [1], § 190, y el trabajo de alargamiento es :

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{L} = \int_{a=0}^{a=a} P\cdot da = \int_{a=0}^{a=a} \frac{E\cdot S}{l}\, a\cdot da = \frac{E\cdot S}{l}\,\frac{1}{2}\,a^2 = \\ = \frac{1}{2}\,k^2\cdot a^2\,;\quad \left(k^2 = \frac{ES}{l} > 0\right) \end{aligned}\right\} \quad [1]$$

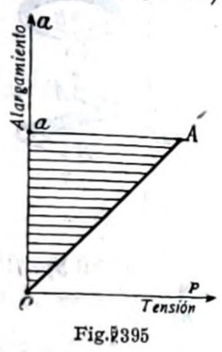


Fig. 395

proporcional al cuadrado del alargamiento y representado gráficamente por el área OAa (fig. 395).

Y como $\frac{ES}{l}\,a = P$ es el peso tensor que produce el alargamiento a, la [1] se escribe :

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2}\,a\cdot P, \qquad [2]$$

semiproducto del alargamiento a por el peso tensor P que lo engendra.

A menudo se encuentra el trabajo como *energía elástica* $\mathfrak{W} = \mathfrak{L}$, interna, de posición entre las moléculas del hilo, y no es sensible la parte que se pierde transformada en calor.

Descargando gradualmente el hilo tenso, se recupera la energía elástica en forma de levantamiento gradual de los pesos tensores restantes.

Se obtienen expresiones análogas a las [1] y [2] para los otros tipos de deformaciones elásticas ; mientras es válida la ley de HOOKE, se encuentra siempre un *trabajo de deformación* y, por consiguiente, una energía elástica $\mathfrak{W} = \mathfrak{L}$ proporcional al cuadrado de la deformación.

Por el contrario, en los gases se puede suponer que el trabajo de compresión es rápida y completamente recuperado bajo forma de calor, que hay que quitar al gas para que se conserve isotermo durante la compresión : el gas es elástico, es decir, se expansiona al disminuir la presión externa ; pero el trabajo de expansión así obtenido no es la recuperación del mismo trabajo de la compresión. Éste se obtiene a expensas de la energía térmica del gas, que se enfría durante la expansión con trabajo externo ; o, si se prefiere, es el equivalente del calor que debe darse al gas durante la expansión a fin de que se conserve isotermo.

Las oscilaciones elásticas producidas por una variación brusca de las cargas, citadas ya varias veces, son armónicas e isócronas mientras es válida la ley de HOOKE ; corresponden a una continua transformación de energía potencial elástica en energía cinética de oscilación, y viceversa.

Permanece constante la suma de las dos energías.

El fenómeno es análogo al que se produce en el péndulo, en el que hay una transformación continua de energía potencial de la gravedad en energía cinética, y viceversa.

Como se ha explicado para las oscilaciones de torsión, también las oscilaciones debidas a las otras formas de elasticidad pueden servir para una determinación dinámica de los correspondientes módulos elásticos.

Se puede imaginar que la energía elástica de un cuerpo deformado se halla distribuída por todo el volumen del cuerpo.

La *densidad de energía elástica* w en un hilo estirado, de volumen $v = l\cdot S$, es :

$$\left.\begin{aligned} w = \frac{\mathfrak{W}}{v} = \frac{\mathfrak{L}}{v} = \frac{1}{2}\,\frac{P\cdot a}{v} = \frac{1}{2}\,P^2\,\frac{l}{E\cdot S\cdot v} = \frac{1}{2}\left(\frac{P}{S}\right)^2\frac{l}{E\cdot l} \\ \text{o sea :} \\ w = \frac{1}{2}\,\frac{\sigma^2}{E} \end{aligned}\right\} \quad [3]$$

en donde σ es la tracción específica, esto es, la tracción por unidad de sección del hilo tenso. Puesto que es $\frac{1}{2}\,\frac{Pa}{v} = \frac{1}{2}\,\frac{P}{S}\cdot\frac{a}{l}$, w es también el semiproducto del alargamiento por unidad de longitud, $\frac{a}{l}$ multiplicado por la presión específica $\frac{P}{S} = \sigma$.

Análogamente, se encuentra para el deslizamiento (§ 187) una densidad de energía elástica :

$$w = \frac{1}{2}\,\frac{\tau^2}{G}\,. \qquad [4]$$

En efecto, si en la cara CD (fig. 372), de superficie S, actúa la fuerza $\tau \cdot S$, el espacio $CC' = da$ viene dado por $h \cdot d\varphi$; luego el trabajo de deformación es:

$$\mathfrak{L} = \int_{\varphi=0}^{\varphi=\varphi} \tau \cdot S \cdot h \cdot d\varphi,$$

y, por tanto, en virtud de la [1], § 187, se tiene la expresión:

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{L} = \frac{\tau^2}{2G} S \cdot h,$$

que, dividiendo por el volumen $v = S \cdot h$, da la [4].

Análogamente para la compresión uniforme.

El sólido, de volumen v (fig. 396), está sometido a la presión uniforme p sobre la superficie S.

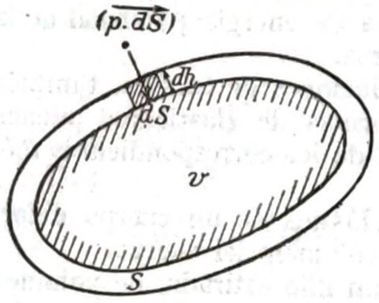


Fig. 396

Cada elemento dS está sujeto a la fuerza $p \cdot dS$, y si dh es el corrimiento, el trabajo de compresión es $p \cdot dS \cdot dh$.

El trabajo de compresión para toda la superficie realizado por la presión exterior es:

$$d\mathfrak{L} = p \cdot \int_S dS \cdot dh = -p \cdot dv,$$

en donde dv es la variación del volumen v ($dv > 0$ es un aumento de volumen), cumpliéndose dicha igualdad siempre que pueda considerarse constante p. Pero se tiene (§ 185, [1]):

$$dv = -\frac{1}{\varepsilon} v \cdot dp\,;$$

luego (salvo un término que es despreciable siempre que $\frac{dv}{v}$ sea pequeño):

$$\mathfrak{L} = \int_{p=0}^{p=p} \frac{1}{\varepsilon} v \cdot p \cdot dp = \frac{1}{2\varepsilon} v \cdot p^2,$$

y la densidad de energía elástica de compresión tiene todavía la forma cuadrática:

$$w = \frac{\mathfrak{L}}{v} = \frac{1}{2} \frac{p^2}{\varepsilon}. \qquad [5]$$

En todos los casos, lo mismo que para el alargamiento, la densidad de energía puede expresarse también como el semiproducto de la deformación relativa por el esfuerzo específico.

§ 195. **Esfuerzos internos en los cuerpos deformados.** Al considerar las distintas secciones X del resorte de la figura 361, y las secciones de la barra doblada, alargada o sometida a flexión, se ha visto ya que cuando un cuerpo C (fig. 397) está en equilibrio bajo la acción de un sistema de fuerzas exteriores, por ej., $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$, toda sección, toda porción del cuerpo, salvo en casos particulares, resultan a su vez sometidos a fuerzas o esfuerzos.

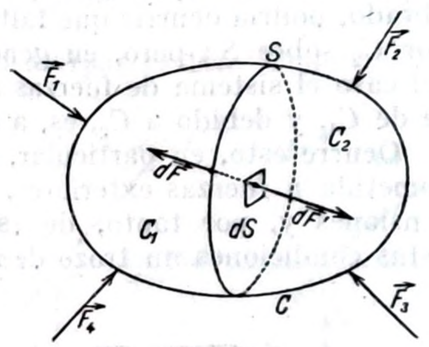


Fig. 397

Cabe distinguir los dos casos elementales siguientes:

1.º **Esfuerzo del elemento de superficie.** Córtese idealmente el cuerpo C por medio de la superficie S en dos partes C_1, C_2. Si se quitase C_2, la parte C_1 ya no podría permanecer en equilibrio, puesto que $\vec{F}_1$, $\vec{F}_4$ por sí solas no constituyen un sistema de fuerzas equilibrado. Luego C_2 ejerce sobre S, imaginada como superficie limitante C_1, un sistema de fuerzas de superficie que equilibra el sistema $\vec{F}_1$ $\vec{F}_4$, es decir, que unido a las fuerzas exteriores $\vec{F}_1$ $\vec{F}_4$ constituye un sistema equilibrado.

Análogamente, C_1 ejerce sobre S, imaginada como superficie limitante C_2, un sistema de fuerzas de superficie que equilibra a $\vec{F}_2$ $\vec{F}_3$.

Se dice, brevemente, que sobre las dos caras de S obran dos sistemas de fuerzas de superficie que se equilibran mutuamente, iguales y opuestos, que han de imaginarse como la acción de C_2 sobre C_1 y la reacción de C_1 sobre C_2.

En el caso del piezómetro (§ 185), el esfuerzo exterior constituído por una presión uniforme origina, sobre cualquier superficie S trazada en el cuerpo comprimido, un esfuerzo interior que es también una presión uniforme.

En el caso de las figuras 377 ÷ 379, la simetría de la barra y de las fuerzas exteriores aplicadas origina esfuerzos interiores constantes, en cada uno de los tres casos, para cualquier sección transversal S de la barra, con tal que ésta se encuentre lo bastante lejos de los puntos de aplicación de las fuerzas exteriores. Se tiene así un esfuerzo interior de torsión engendrado por los pares torsores externos en el caso de la figura 377, un esfuerzo interior de tracción engendrado por las fuerzas externas de tracción en el caso de la figura 378, y un esfuerzo interior de flexión simple ocasionado por los pares flexores externos en el caso de la figura 379.

El equilibrio entre las fuerzas aplicadas a las dos caras de S, vale también para cada uno de los elementos dS de S: sobre las dos caras de dS se tienen dos fuerzas superficiales $\overrightarrow{dF}$, $\overrightarrow{dF'}$ iguales y opuestas. Físicamente: una capa muy delgada de sólido que coincide con dS está en equilibrio cuando C lo está; por lo tanto, las fuerzas actuantes sobre tal capa delgada dS, que son precisamente $\overrightarrow{dF}$, $\overrightarrow{dF'}$, son iguales y opuestas.

Si, como caso particular, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_4$, es decir, las fuerzas exteriores actuantes sobre C_1, constituyesen ya por su cuenta un sistema equilibrado, podría ocurrir que faltasen los esfuerzos interiores aplicados por C_2 sobre S; pero, en general, solamente puede decirse que en tal caso el sistema de fuerzas actuantes sobre S, superficie limitante de C_1, y debido a C_2, es, a su vez, un sistema equilibrado.

Ocurre esto, en particular, en el caso de un sólido C que no está sometido a fuerzas exteriores, pero que, sin embargo, es asiento de tensiones y, por tanto, de esfuerzos internos. Se encuentran en estas condiciones un trozo de acero bruscamente templado, o un pedazo de vidrio enfriado bruscamente; por ejemplo, las gotas de vidrio llamadas «lágrimas de Batavia» (1) y los vidrios «de seguridad» obtenidos mediante el temple.

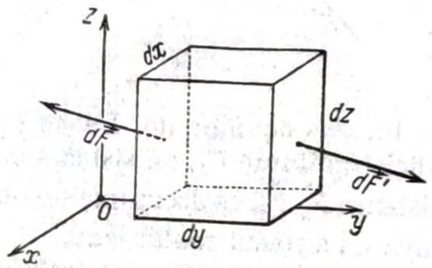


Fig. 398

2.º **Esfuerzo del elemento de volumen.** Aíslese idealmente en el cuerpo C un elemento de volumen infinitésimo dv. Fijado un sistema de tres ejes cartesianos, conviene imaginar que dv es un pequeño cubo con las aristas paralelas a los ejes (fig. 398). Sobre el mismo actúa una fuerza de volumen (por ejemplo, el peso), y seis fuerzas superficiales sobre las seis caras del cubo.

Pero, mientras las tensiones específicas $p = \dfrac{dF}{dS}$ y el peso específico $\dfrac{dP}{dv}$ son finitos, las fuerzas de superficie son infinitesimales como dS, y, por tanto, son de segundo orden respecto a dx o dy o dz, y las fuerzas de volumen son infinitesimales como dv, y, por tanto, de tercer orden, de manera que puede prescindirse de ellas con tal que dv sea suficientemente pequeño.

Si el cuerpo C está en equilibrio, dv también lo está; las seis fuerzas de superficie constituyen un sistema equilibrado. Nótese que sobre cada uno de los tres pares de caras opuestas del cubo elemental, por razones de continuidad, se tienen fuerzas como $\overrightarrow{dF}$, $\overrightarrow{dF'}$, *casi*

(1) Se obtienen dejando caer en agua las gotas de vidrio fundido. Basta romper la punta para que estallen reducidas a polvo. — *N. del T.*

iguales y opuestas; pero con ello no se afirma que $\overrightarrow{dF}$, $\overrightarrow{dF'}$ tengan que ser perpendiculares a las caras sobre las que actúan.

Cuando varían las fuerzas exteriores aplicadas a C, se modifican los esfuerzos internos; por lo tanto, varían las seis fuerzas de superficie mencionadas que actúan sobre dv.

Por consiguiente, el cubo elemental se deforma; los casos de compresión uniforme y de deslizamiento (§§ 185 y 187) son los que engendran deformaciones más simples. Pero, en general, éstas más bien complejas; su estudio constituye la base de la teoría de la elasticidad y rebasa los límites de la presente obra.

§ **196. Anomalías elásticas de los cuerpos reales.** Todo lo que antecede es verdadero dentro del campo de validez de la ley de Hooke. Los cuerpos sólidos reales obedecen a esta ley en primera aproximación y dentro de un campo de deformaciones limitado. Fuera de este campo, la relación entre los esfuerzos y las deformaciones se complica de un modo inextricable. Puede decirse que cada cuerpo presenta sus características elásticas particulares, y, lo que es peor, que éstas dependen de la historia precedente del sólido.

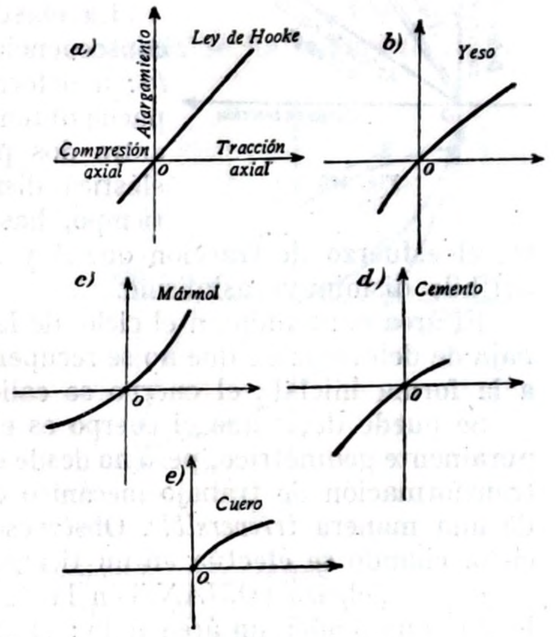


Fig. 399

Se puede admitir la siguiente clasificación esquemática de los fenómenos:

1.º **Deformaciones completamente elásticas:**

a] La relación entre esfuerzo y deformación no es de simple proporcionalidad.

Así, para la elasticidad de tracción, la curva tracción - alargamiento no es una recta.

En la figura 399 se representan los resultados relativos a algunos materiales de uso técnico. La recta que pasa por el origen (fig. 399, *a*)] representa la relación que tendría que haber, según la ley de Hooke, entre la tracción o presión axial por un lado y el alargamiento o acortamiento por el otro.

b] La mayor parte de la deformación elástica se produce instantáneamente, pero después sigue creciendo con el tiempo de aplicación del esfuerzo hasta alcanzar asintóticamente, según una ley excepcional, un valor definitivo. El valor asintótico se alcanza prác-

ticamente en un tiempo finito, pero que a veces es de muchas horas.

Viceversa, al cesar el esfuerzo, buena parte de la deformación elástica desaparece de golpe, y el resto desaparece con ley exponencial en un tiempo que puede también ser de muchas horas. El fenómeno se llama *elasticidad subsiguiente*.

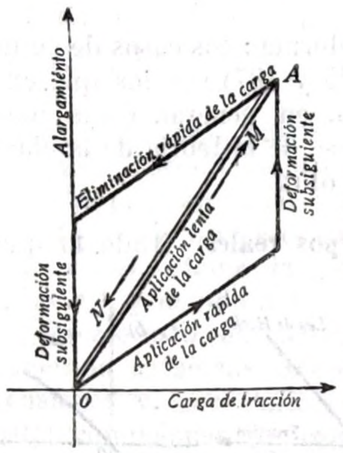


Fig. 400

La forma esquemática de un ciclo elástico con elasticidad subsiguiente se indica en la figura 400.

Mientras que en los aceros comunes no tiene importancia sensible la elasticidad subsiguiente, en algunos aceros especiales es notable y perfecta (COLONNETTI y ZOIA).

La elasticidad subsiguiente trae como consecuencia el fenómeno del *relajamiento:* a deformación constante, como la que puede obtenerse tendiendo un hilo de goma entre dos puntos fijos A y B, la tensión elástica disminuye asintóticamente con el tiempo, hasta un valor límite, y, por tanto, el esfuerzo de tracción que A y B deben aplicar a los extremos del hilo disminuye asimismo.

El área contenida en el ciclo de la figura 400 representa un trabajo de deformación que no se recupera durante el retorno del cuerpo a la forma inicial; el cuerpo se calienta durante el ciclo.

Se puede decir que el cuerpo es elástico desde el punto de vista puramente geométrico, pero no desde el punto de vista energético: hay transformación de trabajo mecánico en calor, de una manera *irreversible*. Obsérvese que el ciclo, cuando se efectúa en un tiempo larguísimo, se adelgaza (*OMANO* en la figura 400) hasta comprender un área nula: el fenómeno tiene la apariencia de elasticidad perfecta.

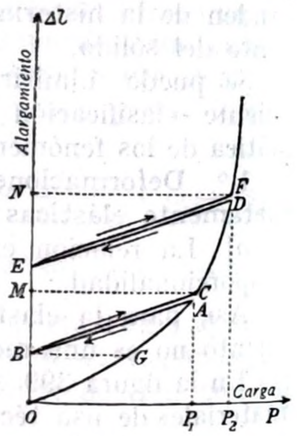


Fig. 401

2.º **Deformaciones no completamente elásticas.**

Se ha dicho ya que los cuerpos reales que presentan deformaciones permanentes no son completamente plásticos. Estos cuerpos presentan dos fenómenos típicos:

a] *Endurecimiento.* Un esfuerzo, como por ejemplo la tracción de un hilo, origina una deformación *inelástica* finita; ésta alcanza un valor máximo finito, a veces en un tiempo muy largo, pero no aumenta indefinidamente con el tiempo, como sucede en el caso de la plasticidad perfecta.

Al aumentar la carga, crece esta deformación límite; por ejemplo, según la curva *OGA* (fig. 401). Una parte *BM* de la deformación, a

veces pequeñísima, es elástica; el resto de la deformación es permanente.

Si aumenta lentísimamente la fuerza de tracción desde 0 hasta el valor P_1, para volver a 0, toma después el valor P_1 y lo rebasa hasta P_2, vuelve a 0 y luego aumenta todavía, la curva tracción-alargamiento tiene el aspecto *OGABCDEF*..... El área *ODE* da el trabajo de tracción no recuperable cuando la tracción queda anulada.

Pero los alargamientos *BM* y *EN* son elásticos. Si, alcanzando el valor P_1, disminuye la tracción hasta 0 y después varía, sea como fuere, en el intervalo de 0 a P_1, el hilo es ahora ya *elástico* hasta dicha carga máxima, y la curva $AB = BC$ representa la relación entre el alargamiento y la tracción en todas las pruebas sucesivas de tracción.

El hilo se ha *endurecido*.

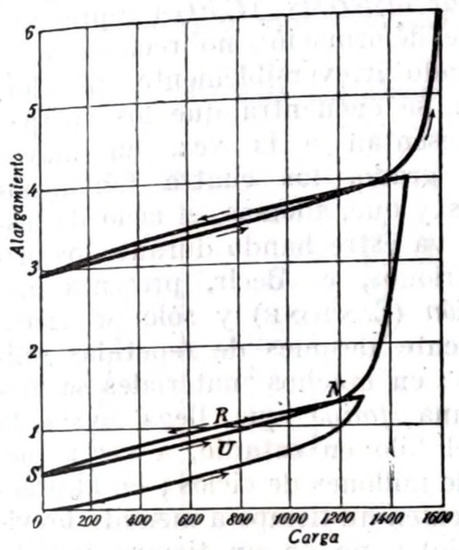


Fig. 402

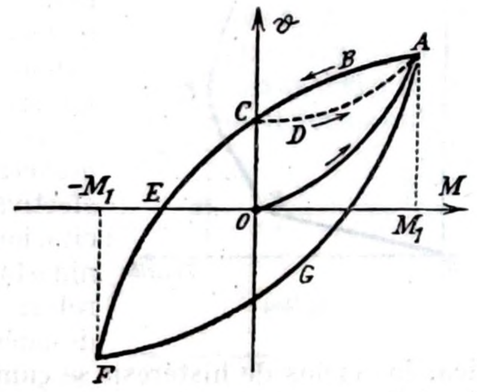


Fig. 403

Este endurecimiento es bien conocido por todos aquellos que hayan pasado metales por la hilera o por el laminador. Desaparece generalmente con un *recocido* conveniente del material, lo que permite obtener de nuevo la *curva virgen OACD*.

La figura 402 da una curva experimental (1). Resulta así bien claro cuán esquemática es la representación de la figura 401.

Aparecen los ciclos de histéresis NRSUN.

b] *Histéresis elástica.* El modo más simétrico de obtener un ciclo de histéresis se realiza experimentalmente con la torsión mejor que con el alargamiento.

Se parte de un hilo de material recocido.

Hágase variar el momento de torsión entre dos valores extremos $+ M_1$ y $- M_1$.

Experiméntese a velocidad nula, es decir, de modo que el momento torsor varíe tan lentamente con el tiempo que a cada instan-

(1) Carga en 0,01 newton ($\approx$1 g_p), alargamiento en milímetros; hilo de cobre trefilado, de longitud 1,75 m y sección 0,2 mm².

te pueda suponerse nula la velocidad de cualquier punto del hilo que se está deformando, y llegando a una deformación definitiva, límite, que comprenda también una eventual elasticidad subsiguiente.

La curva que da la deformación en función del momento torsor tiene la forma de la figura 403.

El primer trazo OA es la *curva virgen, y el ciclo de histéresis* $ABCDA$ es el *ciclo de histéresis* elástica (CANTONE) en el campo OM_1, en el que se llega al endurecimiento. Pero si el momento torsor, además de disminuir hasta 0, cambia de signo y toma valores hasta $-M_1$, el trazo ABC prosigue según EF y la línea FGA corresponde al retorno del momento desde $-M_1$ a $+M_1$.

El área comprendida por el *ciclo de histéresis* $ACFGA$ representa trabajo de deformación no recuperado y transformado irreversiblemente en calor.

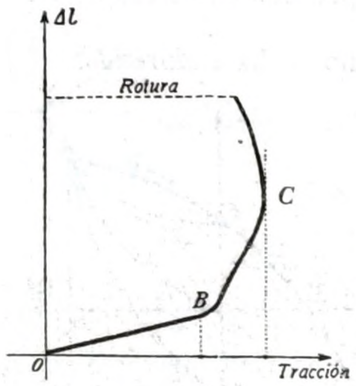


Fig. 404

En fin, se encuentra que los cuerpos reales presentan a la vez, en mayor o menor grado, los cuatro fenómenos explicados y que, además, el ciclo de histéresis se va estrechando durante los primeros períodos, es decir, presenta una *acomodación* (CANTONE) y sólo se cierra efectivamente después de repetidas solicitaciones ; en muchos materiales se manifiesta una *fatiga* que llega hasta la rotura del hilo en estudio, a veces sólo después de millones de ciclos ; en la práctica, los ciclos de histéresis se cumplen en un tiempo a menudo brevísimo (hasta en fracciones de segundo) y no en un tiempo infinito como se ha supuesto, por todo lo cual se comprende que el fenómeno de la elasticidad en los cuerpos reales es complejo e imposible de someter a leyes generales.

No han alcanzado mucho éxito los intentos para interpretar molecularmente todos estos fenómenos.

Para los efectos prácticos, se efectúan los ensayos de alargamiento por tracción sobre hilos o barritas de forma y dimensiones sistematizadas, y se prosigue hasta llegar a la rotura.

Se obtiene así una curva tracción-alargamiento que, en los cuerpos plásticos, tiene la forma de la figura 404 ; en B se ha llegado al límite de elasticidad, y en C hay rotura. En los cuerpos frágiles queda limitada a la rama OB: el límite de elasticidad coincide con la rotura.

§ 197. Elasticidad en los cristales. En los cuerpos isotropos se han definido dos módulos ε y G, que determinan completamente las propiedades elásticas del sólido.

En un cristal, las propiedades elásticas dependen en general de la orientación ; una presión uniforme no deja inalterada la forma del cristal, y el módulo de YOUNG es función del eje de tracción del cristal.

En un cristal del sistema regular vienen definidas las propiedades elásticas mediante un módulo de compresión uniforme y dos módulos de deslizamiento. En los cristales hexagonales y en los tetragonales se tienen dos módulos de compresión y dos módulos de deslizamiento ; en los cristales de los otros sistemas existen tres módulos de compresión y tres módulos de deslizamiento independientes entre sí.

Limitémonos al caso del ensayo a la tracción.

También presentan los cristales, fuera del campo de la elasticidad (dentro del cual es válida la ley de HOOKE), los dos fenómenos de la fragilidad y de la plasticidad. Pero es preciso distinguir entre monocristales metálicos (ejemplo típico : los monocristales de cinc y de bismuto) y monocristales no metálicos (ejemplo típico : la calcita).

Los monocristales metálicos son frágiles por tracción cuando se aplica ésta en determinadas orientaciones, y entonces se rompen según caras cristalinas *(exfoliación)*, mientras que en otras orientaciones presentan una deformabilidad sorprendente.

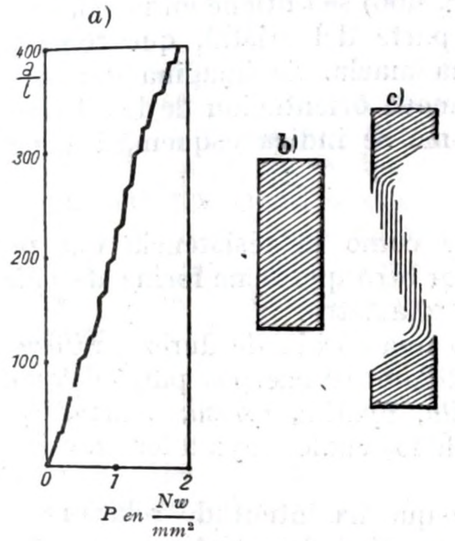


Fig. 405

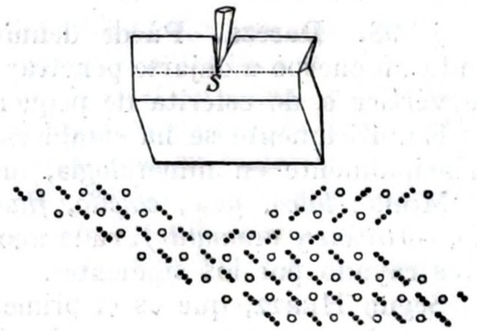


Fig. 406

Bajo una leve tracción, un monocristal de cinc (fig. 405) puede alargarse más del 400 % de su longitud inicial $\left(\frac{a}{l} = 400\right)$ bajo una carga de ≈ 2 newton por mm² $\left(\approx 200\ \frac{g_p}{mm^2}\right)$.

El alargamiento es permanente, finito y aproximadamente proporcional a la tracción [fig. 405, *a*)] ; no se trata, pues, de una plasticidad perfecta (§ 187).

La forma que toma un monocristal, inicialmente cilíndrico, y el aspecto de su superficie, demuestran que se ha efectuado un deslizamiento según un yacimiento determinado *(plano de deslizamiento* o *escurrimiento)* de las diversas capas cristalinas, a lo largo de una *dirección de deslizamiento* contenida en el plano de deslizamiento (figuras 405, *b*) y *c*)]. Esta dirección coincide, en general, con un eje

cristalográfico, y el plano de deslizamiento coincide con una cara cristalina posible.

Este alargamiento tan notable se produce cuando toma un valor suficiente la componente de la tracción en la dirección de deslizamiento ; y se presenta la rotura *(exfoliación)* cuando la componente de la tracción perpendicular al plano de deslizamiento alcanza un valor suficiente.

No está bien claro el origen del endurecimiento que acompaña al alargamiento permanente.

En los cristales no metálicos, como la calcita, el fenómeno más común es la fragilidad *(exfoliación)*, pero también es posible obtener deformaciones plásticas. En algunos casos (sal gema), éstas pueden alcanzar cualquier valor (dentro de ciertos límites), mientras en otros casos sólo pueden alcanzar un valor determinado. Así, mediante la acción de cortadura de la cuña S (fig. 406) se obtiene en la calcita un deslizamiento determinado en una parte del cristal, que toma así los caracteres cristalográficos de una macla. Se imagina que se ha producido un deslizamiento y una nueva orientación de los diversos elementos que forman el cristal, como se indica esquemáticamente en la figura.

§ 198. Dureza. Puede definirse como la resistencia que presenta un cuerpo a dejarse penetrar por otro que tiene forma de cuña, de vértice o de esferita de pequeño diámetro.

Empíricamente se ha establecido una escala de dureza, utilizada principalmente en mineralogía, mediante 10 cuerpos patrón *(escala de* MOHS : *talco, yeso, calcita, fluorita, apatita, ortosa, cuarzo, topacio, corindón* y *diamante)*, cada uno de los cuales raya a los anteriores y es rayado por los siguientes.

Según HERTZ, que es el primero que ha intentado relacionar la dureza de un cuerpo con las demás propiedades elásticas, la dureza debería medirse por la presión específica (es decir, referida a la unidad de superficie) necesaria para producir una deformación permanente (plástica en los cuerpos plásticos, hendidura en los cuerpos frágiles) cuando se aprieta una pequeña superficie de referencia contra la superficie plana del cuerpo en estudio.

Se basan en esta definición de «dureza» diversos aparatos muy empleados en la técnica para su medida en los metales. Entre los más conocidos está el aparato de Brinell: una esferita de acero templado se comprime contra la superficie plana del cuerpo que se examina, mediante una fuerza conocida. Generalmente, el radio de la esferita tiene 5 mm ; la fuerza que la aprieta es de 3000 kg_p [1].

[1] En este apartado no expresamos las fuerzas en newton porque están en circulación muchísimas medidas técnicas «normalizadas» de dureza en «números Brinell» o en «números Vickers», etc. Con suficiente aproximación pueden también igualarse 1 kg_p a 10 newton; el valor de δ resulta sencillamente multiplicado por 10.

La dureza δ es la relación

$$\delta = \frac{P}{S} \qquad [1]$$

entre la fuerza presionante P, y el área S de la huella permanente. En el caso de materiales muy duros $\left(\text{por ej., } \delta > 600 \ \frac{kg_p}{mm^2}\right)$, la esferita se aplasta durante el ensayo y el valor experimental de δ resulta menor que el verdadero.

Tal inconveniente no se presenta en el aparato de Vickers. Su parte esencial es una pequeña pirámide de diamante A (fig. 407) de base cuadrada, con ángulo muy obtuso ($\varphi = 136°$) entre las caras laterales opuestas de la pirámide. Se aprieta el vértice de ésta contra el pedazo B del cuerpo cuya dureza se quiere hallar, y se determina el área de la huella permanente producida en B. La [1] da la dureza δ. La fuerza P puede ahora variarse a voluntad (por ejemplo, desde 1 a 120 kg_p). Las huellas, piramidales y de contorno cuadrado, tienen dimensiones a que raramente superan a algunos centenares de micras. Por tanto, para determinar el área S de la huella se necesita emplear un buen microscópico micrométrico. En compensación, las medidas de dureza que se obtienen son muy atendibles y pueden efectuarse sin deteriorar de modo visible la superficie que se estudia, dando la dureza superficial exacta incluso en aquellos aceros, como los nitrurados, que presentan una capa superficial durísima pero cuyo espesor es solamente de algunas decenas de micra.

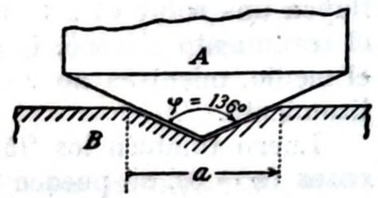


Fig. 407

CAPÍTULO III

Estática de los flúidos

§ 199. Consideraciones fundamentales. Se definió en el § 183 como *líquido perfecto* un cuerpo que no opone resistencia a las deformaciones a volumen constante, porque sus partes deslizan sin rozamiento unas sobre otras. El coeficiente de rozamiento interno η es nulo.

En un líquido perfecto, las deformaciones *a volumen constante* no exigen trabajo.

En los líquidos reales, el coeficiente de rozamiento interno η puede ser muy pequeño (líquidos muy «movibles»), pero nunca es nulo.

Además, en un líquido perfecto se suponen nulas la dilatabilidad

térmica y la compresibilidad, mientras que en los líquidos reales éstas son pequeñas, pero no nulas.

Para la definición de gas perfecto, véase § 185, *c*].

Las propiedades fundamentales de los líquidos en reposo derivan esencialmente de la movilidad de unas partes del flúido respecto a las otras. Siendo esta propiedad común a gases y a líquidos, las leyes del equilibrio de los flúidos son comunes a unos y otros.

Estas leyes son consecuencia de los dos hechos fundamentales siguientes:

1.º El rozamiento interno es proporcional a la variación de velocidad Δu (que es, pues, la velocidad relativa) entre dos capas que fluyen una sobre otra (compárese fig. 375); si Δu es nulo, será nulo el rozamiento interno. Cosa análoga sucede para el rozamiento con el medio, mientras no sucede así tratándose del rozamiento de deslizamiento.

Luego también los flúidos reales, todos ellos más o menos viscosos ($\eta \neq 0$), se pueden considerar, en el estudio de su *equilibrio*, como flúidos perfectos, es decir, sin rozamiento interno; en particular, los líquidos reales se comportan como líquidos perfectos.

2.º Toda superficie S en contacto con un flúido está sometida por parte de éste a un sistema de fuerzas de superficie, distribuídas sobre S. Y precisamente, supondremos que todo elemento dS de S está sometido a una fuerza $d\vec{F}$ que es:

a] **proporcional** a dS; por lo tanto, en magnitud,

$$dF = p \cdot dS\,; \qquad [1]$$

el sistema de dichas fuerzas es, por lo tanto, función aditiva de la superficie;

b] **normal** a dS, es decir, que en los líquidos *en reposo* $d\vec{F}$ es una *presión* normal pura, sin componente de deslizamiento.

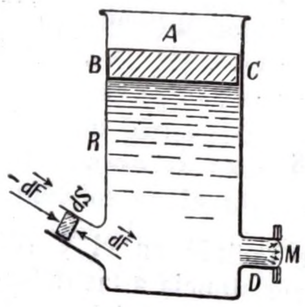


Fig. 408

Esta propiedad se puede comprobar experimentalmente del siguiente modo: Sea un recipiente R (fig. 408) conteniendo un líquido que puede estar comprimido por el émbolo A o tener en BC una superficie libre. La membrana elástica M cierra la pequeña abertura lateral D. La experiencia demuestra que la membrana M se curva con tal simetría que obliga a deducir que la fuerza ejercida por el líquido es perpendicular a la membrana en todos sus puntos.

En el caso de los gases, la existencia de una presión normal a todo elemento de superficie puede deducirse del clásico experimento elemental del rompevejigas.

Se escribirá vectorialmente:

$$d\vec{F} = \vec{p} \cdot dS \qquad [2]$$

y el vector

$$\vec{p} = \frac{d\vec{F}}{dS} \qquad [3]$$

ha de imaginarse como una fuerza paralela y del mismo sentido que $d\vec{F}$ (es $dS > 0$), referida a la unidad de superficie.

Luego p mide la *presión específica*, que suele llamarse simplemente *presión*, sobrentendiéndose que está referida a la unidad de superficie.

Si la [1] es todavía suficientemente aproximada para $dS = 1$, se tiene:

$$(dF)_{dS=1} = p\,;$$

es decir, la presión específica p viene medida por la fuerza que actúa por unidad de superficie.

Como se ha dicho ya en el § 77, 2.º, en dimensiones, dF es una fuerza, y p es una fuerza dividida por una superficie:

$$[p] = \frac{[m \cdot l \cdot t^{-2}]}{[l^2]} = [l^{-1} \cdot m \cdot t^{-2}].$$

Luego, en unidades coherentes, en el sistema cm g_m seg, p se mide en dinas por centímetro cuadrado; a tal unidad, muy pequeña, se le ha dado el nombre de *baría*. En el sistema m kg_m seg, la unidad coherente de presión es el newton por metro cuadrado, que equivale a 10 barías, y es también una unidad muy pequeña.

Es de uso frecuentísimo la unidad g_p por centímetro cuadrado y, todavía más, el kg_m por cm^2, igual a ≈ 10 newton por centímetro cuadrado.

Respecto a otras unidades convencionales para la medida de las presiones, véase § 210, *a*].

La pared dS reacciona contra el flúido aplicándole una fuerza igual y contraria $-d\vec{F}$.

Para determinar la presión que ejerce el flúido sobre dS se mide la fuerza $-d\vec{F}$ que es necesario aplicar a un elemento movible dS (figura 408) de pared del recipiente que contiene el flúido para que subsista el equilibrio (*barómetros*, § 210; *manómetros*, § 213).

Como caso particular, $d\vec{F}$ y, por tanto, $\vec{p}$, pueden ser nulos; en general, $d\vec{F}$ está dirigido desde el flúido contra dS (presión propiamente dicha), pero también puede estar dirigido desde dS hacia el flúido, el cual produce entonces una *tracción* (presión negativa *en los líquidos*, nunca en los gases).

La existencia de la presión que ejerce el flúido sobre dS puede ser debida a diversas causas :

I. El flúido está encerrado en un recipiente y es comprimido por un émbolo A.

II. El flúido está en un recipiente (abierto o cerrado) y sujeto a la acción de un campo de fuerza ; en la práctica no faltará nunca el campo de la gravedad (ley de STEVIN sobre las presiones engendradas por la gravedad en un flúido en equilibrio, § 202).

III. El flúido tiene una cohesión sensible, y ésta entra en juego para equilibrar una tracción bien uniforme ejercida sobre el flúido *(líquido)*. Este último caso de presión negativa no tiene interés práctico ; se ha dicho en el § 181 cómo puede obtenerse experimentalmente (fig. 347).

Finalmente, procediendo como en el § 195, también ahora se deduce que, si dS es una superficie infinitesimal que se supone trazada en el flúido, por ejemplo, en el líquido, en equilibrio, las dos porciones de flúido en contacto a lo largo de dS obran la una sobre la otra excitando fuerzas de superficie $d\vec{F}$, $d\vec{F}'$ iguales y opuestas, *normales* a dS. Se dice, brevemente, que estas dos fuerzas actúan sobre las dos caras de dS. Pero en este caso de los flúidos en reposo, $d\vec{F}$ y, por lo tanto, $d\vec{F}'$ en todos los casos son necesariamente *perpendiculares* a dS ; ésta es la propiedad más característica de los flúidos.

§ 200. Presión específica en un punto de un fluído. Un elemento de volumen dv de flúido en reposo, se encuentra, pues, sometido a fuerzas de superficie, esto es, a presiones $d\vec{F}$ normales en cada punto a la superficie dS del elemento considerado y proporcionales a dS, y a fuerzas de volumen, es decir, proporcionales al elemento de volumen dv.

Entre estas fuerzas de volumen, la más importante, siempre presente, es la fuerza peso :

$$d\vec{P} = \vec{\varrho}\cdot dv = \vec{g}\cdot dm = \mu\,\vec{g}\cdot dv, \qquad [1]$$

en donde $\vec{\varrho}$ y μ son, respectivamente, el peso específico y la masa específica del elemento dv ; dm es la masa de dicho elemento ; el peso específico $\vec{\varrho}$, por ser el peso de la unidad de volumen, ha de imaginarse también como un vector.

Mostremos que a partir de las propiedades anteriores a] y b] del § 199 relativas a la presión $\vec{p}$, se deduce que su valor p es independiente de la orientación del elemento de superficie $XYZ = dS$ (figura 409) que rodea al punto medio A de la misma.

En efecto, tómese en el flúido una pirámide elemental $OXYZ$. Tres de sus caras, con las aristas OX, OY y OZ, determinan un triedro trirrectángulo que se toma como triedro de referencia.

Sean las caras de la pirámide :

$$dS_x = OYZ \qquad dS_y = OZX \qquad dS_z = OXY$$
$$dS = XYZ.$$

Las fuerzas aplicadas al elemento de flúido $OXYZ$ son :

1.º Las presiones :

$$\vec{p}_x\cdot dS_x\,; \quad \vec{p}_y\cdot dS_y\,; \quad \vec{p}_z\cdot dS_z\,; \quad \vec{p}\cdot dS\,; \quad \text{en donde } \vec{p}_x,\ \vec{p}_y,\ \vec{p}_z,\ \vec{p}$$

son las presiones específicas que actúan desde el exterior sobre las caras de la pirámide ; estas presiones son normales a las caras sobre las cuales actúan y están engendradas por el contacto con el flúido que las rodea.

2.º Las fuerzas de volumen (como el peso) aplicadas a todos los puntos del flúido contenido en la pirámide ; para una pirámide infinitesimal, de volumen dv, las fuerzas de volumen son de la forma :

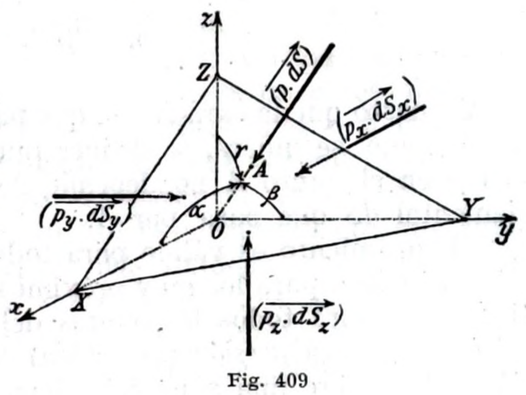


Fig. 409

$$\vec{H}\cdot dv,$$

en donde $\vec{H}$ es finito.

Cuando la pirámide es infinitesimal, se hacen infinitésimos las fuerzas tanto de superficie como de volumen, porque

$$dS_x,\ dS_y,\ dS_z,\ dS \text{ y } dv$$

tienden a cero.

Pero mientras los elementos de superficie son infinitésimos de segundo orden respecto a las aristas OX, OY y OZ de la pirámide dv es un infinitésimo de tercer orden. Luego en una pirámide infinitesimal, y salvo infinitésimos de orden superior, pueden considerarse solamente las fuerzas de presión.

Si el líquido está en equilibrio, la resultante de estas presiones

$$\vec{p}_x\cdot dS_x\,; \quad \vec{p}_y\cdot dS_y\,; \quad \vec{p}_z\cdot dS_z\,; \quad \vec{p}\cdot dS$$

existe y es nula.

Y precisamente todo ocurre como si estas cuatro presiones estuviesen aplicadas a un mismo punto del elemento de volumen, el baricentro de la cara dS.

Además, tiene que ser nula la suma algebraica de las componentes de las presiones sobre uno cualquiera de los ejes.

Proyectando sobre el eje x, ha de ser:

$$p_x \cdot dS_x + 0 + 0 - p \cdot dS \cdot \cos \alpha = 0,$$

en donde α es el ángulo que la normal OA a la cara XYZ forma con el eje x.

Pero,

$$dS \cdot \cos \alpha = OYZ = dS_x;$$

luego,

$$p_x = p.$$

Análogamente, proyectando sobre los ejes y, z resulta:

$$p_y = p \qquad p_z = p.$$

Y puesto que la cara XYZ, que pasa por el punto A, puede orientarse como se quiera, se deduce que el valor de la presión específica p en el punto A no depende de la orientación de la superficie elemental dS que pasa por A.

El rozamiento es válido para todos los puntos A del interior del flúido, incluso para los muy próximos a las paredes; luego vale efectivamente para todos los puntos del flúido.

p se llamará *presión* (específica) *en el punto A* del flúido. La presión total sobre una superficie elemental dS orientada de cualquier modo y que pasa por A, es normal a dS; viene medida por

$$p \cdot dS,$$

y actúa sobre las dos caras de la superficie dS.

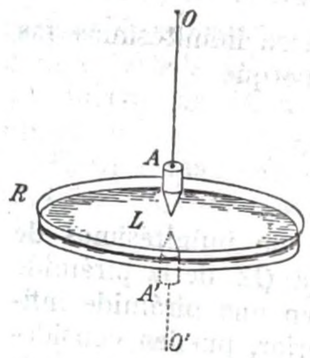


Fig. 410

§ 201. Leyes experimentales del equilibrio de los flúidos pesados.

a] Una cubeta ancha y baja contiene mercurio en reposo (fig. 410). La plomada OA y su imagen $A'O'$ aparecen como segmentos de una misma recta.

La superficie libre de un líquido en reposo es normal a la plomada, es decir, *horizontal;* esta superficie es perpendicular en todos sus puntos a las líneas de fuerza del campo de la gravedad y, por tanto, coincide con una superficie equipotencial.

Para áreas suficientemente pequeñas, puede considerarse plana la superficie horizontal del líquido.

b] Si en un mismo recipiente se superponen diversos líquidos, al conseguirse el equilibrio, se hallan colocados unos encima de

otros en el orden de sus pesos específicos ϱ crecientes, hallándose abajo el más denso.

Las superficies de separación entre los líquidos sucesivos son horizontales y, con la limitación consabida, son planas.

Incluso cuando los líquidos son completamente miscibles (como agua pura vertida con cuidado sobre una disolución saturada de sulfato cúprico), se observa una superficie de separación plana y horizontal que se va difuminando con el tiempo (difusión, § 225, *b*)], y el peso específico varía de una manera continua desde la capa superior, constituída todavía por agua pura, a la capa inferior, todavía formada por disolución saturada; dicho peso específico tiene un valor constante en cada plano horizontal, como se deduce fácilmente por la intensidad de la coloración.

Aunque es cómodo fijar la atención en el caso de los líquidos, todo lo que acabamos de decir es también verdad en todos los flúidos superpuestos, advirtiendo que si se trata de gases, que todos son completamente miscibles entre sí, la difusión es mucho más rápida que en los líquidos, por lo que no se puede ver una superficie de separación horizontal limpia entre dos gases en reposo.

La superficie libre de la figura 410 es efectivamente una superficie plana y horizontal que separa dos flúidos: aire y mercurio. Solamente existe una verdadera *superficie libre*, es decir, que no esté en contacto con un flúido superpuesto, en el límite de la atmósfera o cuando el líquido se encuentra bajo la campana neumática, si se desprecian las presiones residuales de los gases y del vapor del líquido.

c] Suponemos conocidos por física elemental los experimentos del principio de Pascal, de la paradoja hidrostática, de los vasos comunicantes y del principio de Arquímedes.

La presión en cada elemento de superficie sumergida en un líquido es independiente de la orientación de la superficie y viene dada por el peso de una columna de líquido que tenga por base el elemento de superficie considerado, y por altura el desnivel entre el centro de esta superficie y la superficie libre del líquido.

Ésta es la *ley de* Stevin, cuya validez tiene más generalidad que la que se desprende del anterior enunciado. Si la superficie llamada «libre» está en contacto con la atmósfera, la columna de líquido antes considerada da la diferencia entre la presión que actúa sobre el elemento de superficie tomado en consideración y la presión atmosférica que actúa sobre una área de la misma extensión perteneciente a la superficie llamada «libre».

Si el líquido está constituído por capas de diferente naturaleza (aceite, agua, sulfuro de carbono,.....), la columna considerada se supone formada de capas superpuestas de aceite, agua, sulfuro de carbono,..... limitadas por planos horizontales de separación entre tales líquidos.

En fin, la ley de Stevin también es válida para los gases, y establece, por ejemplo, que las diferencias de presión atmosférica (re-

ferida a la unidad de superficie) entre puntos de distinta cota, se mide por el peso de una columna de aire que tenga por base la unidad de superficie y por altura el desnivel entre los dos puntos considerados.

§ 202. Deducción de las leyes de la estática de los flúidos pesados. Los hechos experimentales anteriores no son independientes entre sí. Demostraremos que son consecuencia de las leyes generales de la estática y de las propiedades particulares de la presión en los flúidos en reposo (§§ 199, 200, sometidos a un campo de fuerzas de volumen; por tanto, son válidos tanto para los líquidos como para los gases.

Imagínese, en efecto, que un flúido esté sometido en cada uno de sus elementos dv a una fuerza de volumen, por ejemplo, a la fuerza peso

$$d\vec{F} = \vec{g}\cdot dm = \vec{g}\cdot\mu\cdot dv,$$

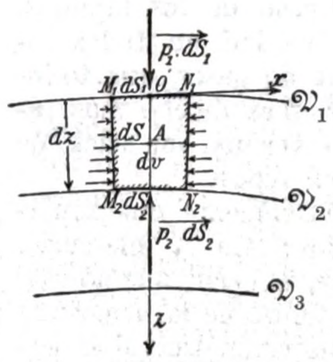


Fig. 411

o a una fuerza centrífuga (§§ 123 y 166):

$$d\vec{F} = \omega^2\cdot\vec{r}\cdot dm = \omega^2\cdot\vec{r}\cdot\mu\cdot dv.$$

Fijémonos en el caso de la fuerza de la gravedad.

El flúido viene a encontrarse en un campo de fuerza de intensidad:

$$\vec{H} = \frac{d\vec{F}}{dm} = \vec{g};$$

sea $\mathcal{V}$ el potencial (1).

Sean $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$, $\mathcal{V}_3$, ... (fig. 411) los valores de $\mathcal{V}$ sobre superficies equipotenciales sucesivas; con estos símbolos representaremos también brevemente dichas superficies; sea dv un elemento de volumen limitado por un tubo de fuerza y por dos elementos dS_1 y dS_2 de superficies equipotenciales. Se tiene, salvo infinitésimos de orden superior,

$$dS_1 = dS_2 = dS\,; \qquad dv = dz\cdot dS,$$

en donde z es un eje tangente en O a la línea de fuerza del campo y

(1) Un flúido sometido a un campo de fuerzas de volumen, únicamente puede encontrarse en equilibrio estable cuando este campo admite potencial. En efecto, si el campo de fuerzas no es conservador, imagínese en el campo una línea cerrada, a lo largo de la cual el trabajo de las fuerzas del campo no es nulo: un filete flúido que tenga por eje dicha línea cerrada, tenderá a deslizarse sobre sí mismo, bajo las fuerzas del campo, en el sentido al cual corresponde un trabajo positivo de las mismas.

dirigido en el sentido de ésta; luego z es normal en O a la superficie equipotencial $\mathcal{V}_1$ y está dirigido en el sentido de los potenciales decrecientes, es decir, *hacia abajo*. La última igualdad impone que el volumen se mida en unidades coherentes con las de longitud y de área; por ejemplo, si dz se mide en metros, dS ha de medirse en metros cuadrados y dv en metros cúbicos. *¡ No hay sitio para el litro !*; μ se mide en $\frac{g_m}{cm^3}$ o $\frac{kg_m}{m^3}$, pero no, por ejemplo, en $\frac{kg_m}{litro}$; esto vale, en general, donde quiera que se consideren presiones y se utilicen manómetros para su medición. Supongamos, para mayor sencillez, que el tubo de fuerza tenga sección rectangular; así, el elemento de volumen dv es un paralelepípedo trirrectángulo, salvo infinitésimos de orden superior; M_1M_2 y N_1N_2 son las trazas de dos caras laterales paralelas del paralelepípedo; sea dS_x la superficie de estas caras laterales.

Las fuerzas aplicadas a dv son las presiones normales a las caras, y la fuerza peso expresada por:

$$\vec{g}\cdot\mu\cdot dS\cdot dz.$$

Para que haya equilibrio debe existir y ser nula la resultante de todas estas fuerzas. Luego, en particular, es nula la proyección de todas estas fuerzas sobre el eje z.

Pero siendo las presiones laterales normales a la superficie lateral de dv y, por tanto, normales a las líneas de fuerza, dan componentes nulas; y queda:

$$p_1\cdot dS - p_2\cdot dS + g\cdot\mu\cdot dS\cdot dz = 0 \qquad (g>0,\ p_1>0,\ p_2>0,$$

en donde p_1 es la magnitud de la presión específica sobre la cara superior del volumen dv, y p_2 la presión análoga sobre la cara inferior.

Luego se tiene

$$p_2 - p_1 = dp = g\cdot\mu\cdot dz, \qquad [1]$$

siendo positivo dp si lo es dz; es decir, la presión aumenta a lo largo de las líneas de fuerza y en el sentido positivo de éstas.

Proyectando las fuerzas aplicadas al elemento dv, sobre un eje cualquiera normal a z, como el eje x, se tiene en el equilibrio

$$p\cdot dS_x - p'\cdot dS_x = 0 \qquad (p>0,\ p'>0),$$

siendo p la presión específica sobre M_1M_2, y p' la presión específica sobre N_1N_2.

Luego, se tiene:

$$p - p' = dp = 0. \qquad [2]$$

La presión (específica) no cambia si nos movemos perpendicularmente a una línea de fuerza del campo, o sea, sobre una superficie equipotencial.

Las superficies *isobaras* coinciden con las superficies *equipotenciales*.

En todos los puntos en donde $\mathfrak{V}$ es constante, también se tiene $p = \text{const.}$

Luego p es solamente función de $\mathfrak{V}$.

Por simples consideraciones geométricas se deduce fácilmente que es nulo el momento de tal sistema de fuerzas de presión respecto a un punto cualquiera, por ejemplo respecto a O; las relaciones [1] y [2] a que debe satisfacer p son, por tanto, las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio del líquido.

En fin, la [1] puede también escribirse (§ 94, [2]):

$$dp = -\mu \cdot d\mathfrak{V}. \qquad [3]$$

Para todos los elementos de volumen, como el de la figura 411, comprendidos entre dos superficies equipotenciales sucesivas (que son también dos superficies isobaras sucesivas) se tiene:

$$d\mathfrak{V} = \text{const.} \qquad dp = \text{const.}$$

Se deduce entonces de la [3]:

$$\mu = \text{const.}$$

La masa específica del flúido debe ser constante en todos los puntos de una capa infinitesimal comprendida entre dos superficies equipotenciales infinitamente próximas. Esto es: las superficies $\mathfrak{V} = \text{const.}$ (que, como sabemos, coinciden con las $p = \text{const.}$) son también las superficies $\mu = \text{const.}$

En un flúido en equilibrio la masa específica, y, por tanto, la densidad, puede variar de unos puntos a otros, pero debe ser constante en cada superficie equipotencial. Además, el principio de los trabajos virtuales permitiría deducir fácilmente (§ 208) que, para que el equilibrio sea estable, μ debe ser función creciente (o, a lo más, constante) de z.

Luego las superficies de separación de dos flúidos en reposo deben coincidir con superficies equipotenciales; en el caso de la gravedad deben coincidir con superficies horizontales, debiendo hallarse más bajo el líquido de mayor masa específica y, por tanto, de mayor peso específico.

Tanto si se trata de la superficie libre de un líquido como de su superficie de contacto con la atmósfera, se tiene en ella una variación brusca de la masa específica μ y, por consiguiente, debe tratarse de una superficie horizontal.

Concluyendo: las superficies equipotenciales ($\mathfrak{V} = \text{const.}$) isobaras ($p = \text{const.}$) y de nivel ($\mu = \text{const.}$) vienen a identificarse, y en el caso del campo de la gravedad son superficies horizontales, es decir, normales a la dirección de la plomada.

Así se encuentran de nuevo las propiedades experimentales *a*] y *b*] del § 201.

Mostremos ahora que las [1] y [2] contienen todas las leyes experimentales de los flúidos pesados en equilibrio (§ 201, *c*]).

a] **Principio de Pascal.** Despreciando las diferencias de presión debidas a la gravedad, es decir, despreciando la acción de la fuerza peso, la demostración que ha conducido a la [1] da $p_2 - p_1 = 0$ a lo largo de cualquier eje, resultando p constante en todos los puntos del flúido.

Esto es siempre verdadero con aproximación suficiente en el caso de los gases, cuando no se trata de recipientes de dimensiones enormes; por lo tanto, es lícito hablar de «presión de un gas» en equilibrio.

Si no se desprecia la acción de la gravedad, la [1] da $dp = 0$ solamente cuando $dz = 0$; por consiguiente, la condición necesaria y suficiente para que p sea constante es que los puntos considerados pertenezcan a una misma superficie horizontal.

El principio de PASCAL no es exacto más que bajo el enunciado siguiente: *la presión existente en un punto A de un flúido pesado en equilibrio es constante en todos los puntos de la superficie horizontal que pasa por A.*

b] **Ley de Stevin.** Sean A_1 y A_2 (fig. 412) dos puntos del flúido pertenecientes a distintas superficies equipotenciales $\mathfrak{V}_1$ y $\mathfrak{V}_2$ del campo de la gravedad.

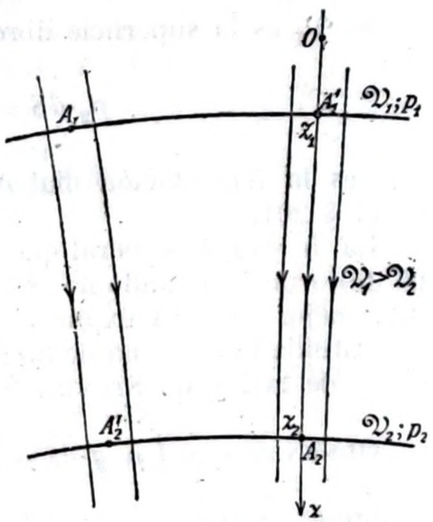


Fig. 412

Sean p_1 y p_2 las presiones correspondientes a dichas superficies.

La diferencia de presión $p_2 - p_1$ es la misma que existe entre A_1' y A_2 (o entre A_1 y A_2') pertenecientes a la misma línea de fuerza. Transfórmese esta línea en un eje (curvo) de referencia z.

A lo largo de esta línea se tiene, según la [3]:

$$dp = -\mu \cdot d\mathfrak{V} = \mu \cdot g \cdot dz.$$

Luego

$$\int_{A_1'}^{A_2} dp = \int_{z_1}^{z_2} \mu \cdot g \cdot dz; \qquad [4]$$

o sea,

$$p_2 - p_1 = \int_{z_1}^{z_2} \mu \cdot g \cdot dz. \qquad [5]$$

En particular, si pueden suponerse constantes μ y g (flúido homogéneo en un espacio pequeño, en donde el campo de la gravedad es uniforme) :

$$p_2 - p_1 = \mu \cdot g \cdot (z_2 - z_1) = \varrho \cdot (z_2 - z_1), \qquad [6]$$

siendo $\varrho = \mu \cdot g$ el peso específico del líquido.

La fuerza que actúa sobre una superficie dS que tiene por centro A_2, esto es, la presión total en A_2 sobre dS, es diferente de la presión total sobre otra superficie igual dS situada en A_1. La diferencia de las presiones totales es :

$$(p_2 - p_1) \cdot dS = \varrho \cdot (z_2 - z_1) \cdot dS. \qquad [7]$$

Si $\mathfrak{V}_1$ es la superficie libre del flúido, se tiene $p_1 = 0$ y queda :

$$p_2 \cdot dS = \varrho \cdot (z_2 - z_1) \cdot dS, \qquad [8]$$

que es la formulación matemática de la ley de STEVIN enunciada en el § 201, *c*].

La [5] es más general que la [8] porque sirve también en campos no uniformes y cuando no es constante μ ; también permite comprender, mejor que las explicaciones del § 201, cómo debe imaginarse constituída la columna de líquido pesado de que se habla en el enunciado de la ley de STEVIN.

Obsérvese que $\int_{z_1}^{z_2} \mu \cdot g \cdot dz = p_2 - p_1$ es constante a lo largo de cualquier línea de fuerza $A_1'\, A_2$, A_1, A_2', que va desde la superficie de nivel $\mathfrak{V}_1$ a la superficie de nivel $\mathfrak{V}_2$, porque p es constante en todos los puntos de una superficie equipotencial.

Por el contrario, en general, la longitud $\int_{z_1}^{z_2} dz = z_2 - z_1$ de la línea de fuerza comprendida entre dos superficies equipotenciales varía al pasar de una línea de fuerza a otra. Pero en el caso del campo de la gravedad, $\mathfrak{V}_1$ y $\mathfrak{V}_2$ son dos superficies horizontales, y $z_2 - z_1$ es el desnivel entre ellas ; luego el desnivel (geométrico) entre dos puntos *no* pertenecientes a una misma línea de fuerza *no* está definido.

c] **Principio de Arquímedes.** Nos limitaremos al caso del campo uniforme (campo de la gravedad en un espacio no muy extenso) y al

caso del cuerpo $MNIL$ (fig. 413), sumergido en el flúido, en forma de paralelepípedo trirrectángulo, con las bases IL y MN horizontales.

La resultante de las presiones aplicadas por el líquido sobre todas las caras, se reduce a las presiones sobre MN e IL ; en efecto, son iguales y contrarias las presiones sobre los pares de caras laterales como IM y LN, porque están constituídas por presiones elementales $d\vec{F}_1$, $d\vec{F}_1'$, $d\vec{F}_2$, $d\vec{F}_2'$ ..... que son iguales y opuestas dos a dos. Quedan las caras horizontales MN e IL sobre las cuales actúan las presiones $S \cdot p_1$ y $S \cdot p_2$, en donde S es el área de dichas caras, y p_1, p_2, las presiones específicas correspondientes. La resultante $\vec{R}$ de todas las presiones aplicadas existe y viene medida, según un eje vertical z dirigido hacia abajo, por la expresión

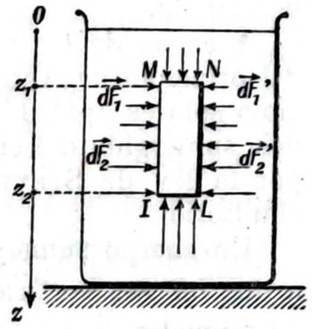


Fig. 413

$$R = S \cdot p_1 - S \cdot p_2 = S \cdot (p_1 - p_2) \qquad (p_1 > 0,\ p_2 > 0),$$

o también por la [5], donde ahora g es una constante :

$$R = -S \cdot \int_{z_1}^{z_2} \mu \cdot g \cdot dz = -\int_{z_1}^{z_2} \mu \cdot g \cdot S \cdot dz. \qquad [9]$$

Pero $S \cdot dz$ es el volumen de la capa horizontal dz del cuerpo sumergido ; luego la integral es simplemente el peso P_L del flúido desalojado ; es decir, de un volumen del flúido igual al volumen del cuerpo sumergido, y en el cual varía μ con la altura z como varía en el flúido circundante. Luego la [9] se escribe :

$$R = -P_L. \qquad [10]$$

La resultante de las presiones del flúido sobre el cuerpo sumergido es una fuerza igual y contraria al peso del flúido desalojado.

La demostración se extiende fácilmente al caso de un cuerpo de cualquier forma ; se llega también a la [10], y siempre es verdad que $\vec{R}$ tiene el mismo punto de aplicación que el peso $\vec{P}_L$, es decir, que el *empuje* $\vec{R}$ *está aplicado al centro de gravedad del flúido desalojado.*

Por otro lado, es fácil convencerse de que debe cumplirse el principio de ARQUÍMEDES : en efecto, supóngase un cuerpo completamente sumergido en el flúido, e imagínese por un momento que está sustituído por el flúido desalojado ; la presión p en cualquier punto del flúido no ha variado, y, por tanto, tampoco se ha modificado la resultante de las presiones. Como esta masa de flúido sumergida

en otro de igual naturaleza se halla en equilibrio indiferente, resulta que $\vec{R}$ y el peso $\vec{P}_L$ del flúido desalojado son fuerzas iguales y contrarias que tienen el mismo punto de aplicación ; por lo tanto, el empuje $\vec{R}$ está aplicado, como $\vec{P}_L$, en el centro de gravedad del flúido desalojado.

A causa de las variadas paradojas que se han querido deducir del principio de ARQUÍMEDES, será oportuno advertir que este principio sólo es aplicable cuando el flúido lame por completo la superficie sumergida del cuerpo y ejerce en toda ella las presiones regidas por la ley de STEVIN, es decir, las presiones correspondientes al equilibrio.

Un cuerpo sumergido en un flúido se encuentra, pues, sometido a dos fuerzas verticales opuestas : el peso propio $\vec{P}$ y el empuje de ARQUÍMEDES $\vec{R} = -\vec{P}_L$, uno aplicado en el centro de gravedad del cuerpo, y el otro en el centro de gravedad del flúido desalojado. Los dos puntos de aplicación coinciden ciertamente si el cuerpo es homogéneo (por tanto, de masa específica constante μ), si está sumergido completamente en el flúido y si éste es un líquido incompresible, también homogéneo, de masa específica μ_L. Si v es el volumen del cuerpo, la fuerza resultante a que se encuentra sometido el cuerpo sumergido viene medida en valor y signo, tomando como de costumbre el eje vertical z dirigido hacia abajo, por la fórmula

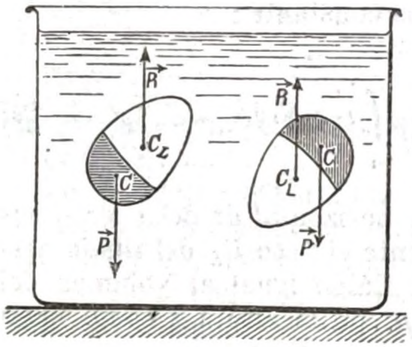


Fig. 414

$$F = P - R = v\cdot(\mu - \mu_L)\cdot g, \qquad [11]$$

de modo que esta fuerza es vertical y está dirigida hacia abajo o hacia arriba, según que se tenga $\mu > \mu_L$ o $\mu < \mu_L$.

Pero, en general, no coinciden los dos puntos de aplicación de $\vec{P}$ y de R ; el cuerpo sumergido se halla sujeto a una fuerza resultante vertical dirigida hacia abajo, medida en valor y en signo por $P - R$, y a un par. Así, el huevo de la figura 414, lastrado en un extremo por un peso conveniente para que su peso P sea idéntico al P_L del agua desalojada, estará en equilibrio entre dos aguas sólo cuando su centro de gravedad C y el centro de gravedad C_L del líquido desalojado se hallen en la misma vertical. Por lo demás, el equilibrio será estable o inestable según que C esté debajo o encima de C_L.

Si el peso $\vec{P}_L$ del flúido es despreciable, la resultante $\vec{R}$ de las presiones es nula ; pero en este caso, por el teorema de PASCAL, la presión específica p es igual en todas partes. Luego un sistema de fuerzas constituído por presiones uniformes y normales a la superficie

de un cuerpo, tiene resultante nula ; en particular, no equivale a un par. La demostración directa de este hecho puede obtenerse por un camino análogo al que sirve para demostrar que un campo uniforme de fuerza es solenoidal (§ 94).

d] **Peso de un líquido.** Sea un recipiente colocado en el platillo horizontal A (fig. 415) de una balanza, la cual se ha equilibrado con una tara conveniente. Viértase un líquido en el recipiente. La balanza se inclina a causa del peso del líquido, y se puede de este modo determinar con la balanza el peso del líquido, como si fuese un sólido. Pero esto se logra por un camino indirecto : el líquido, por la acción de la gravedad, engendra presiones $d\vec{F}$ contra las paredes del

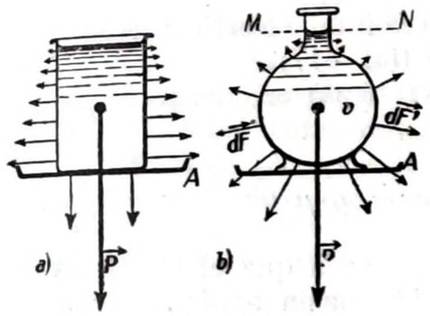


Fig. 415 Fig. 416

recipiente, normales a la pared en cada uno de sus puntos y regidas por las leyes de PASCAL y de STEVIN.

La resultante $\int d\vec{F}$ de *todas* estas presiones da la fuerza que ejerce el líquido sobre el recipiente y, por tanto, sobre el platillo en que aquél descansa.

Esta resultante existe, y es precisamente el peso del líquido, estando aplicada en el centro de gravedad de éste. En efecto, análogamente a como se ha demostrado el principio de ARQUÍMEDES, observemos que las presiones $d\vec{F}$ permanecerían invariables si el volumen v del líquido considerado se encontrase sumergido en un líquido de igual naturaleza, cuya superficie libre alcanzase el mismo nivel MN que el líquido contenido en v.

Pero, de este modo, el líquido en v se encontraría en equilibrio bajo la acción de su propio peso y de las presiones $-d\vec{F}$ debidas al líquido circundante.

La resultante $-\int d\vec{F}$ de estas presiones existe, y es igual y opuesta al peso del líquido en v estando aplicada en el centro de gravedad de éste : por tanto, $\int d\vec{F}$ es el peso del líquido.

La resultante de las presiones *ejercidas sobre el fondo* del recipiente sólo coincide con el peso del líquido cuando el recipiente tiene forma especial [como la *a*) de la figura 416]. En general, *la presión sobre el fondo no da el peso del líquido.*

Luego no debe maravillar que en el experimento de la *paradoja hidrostática* (fig. 416), la presión sobre el fondo, a igualdad de altura del líquido y de área del fondo, sea independiente de la cantidad de líquido contenido en el recipiente.

§ **203. Fórmulas hipsométricas.** En una atmósfera en equilibrio, la ley de STEVIN (§ 202, *b*]) permite responder a la siguiente pregunta: ¿Según qué ley varía la presión atmosférica p con la altura h?

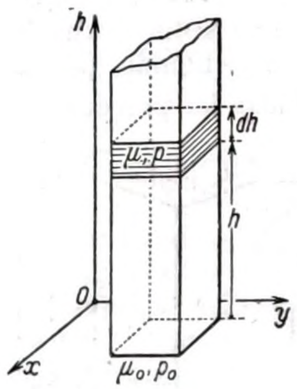


Fig. 417

Supondremos uniforme el campo de la gravedad, y el eje de las h vertical y dirigido hacia arriba.

Imagínese una columna vertical de aire de 1 cm² de sección (fig. 417).

Para un trayecto dh se tiene, según la [1], § 202:

$$dp = -g\cdot\mu\cdot dh \qquad (g>0).$$

El signo — se debe a que el eje de las h está ahora dirigido hacia arriba, de modo que $dh = -dz$. Luego es

$$dh = -\frac{1}{\mu\cdot g}\,dp\,;$$

e integrando desde $h=0$, altura a la cual corresponde la presión p_0, hasta la altura h, se tiene la *fórmula hipsométrica:*

$$h = -\frac{1}{g}\int_{h=0}^{h}\frac{1}{\mu}\,dp = -\frac{1}{g}\int_{p_0}^{p}\frac{1}{\mu}\,dp. \qquad (1)$$

Para poder proseguir es necesario saber cómo varía μ en función de p. Tratándose de pequeños desniveles, que son los que se presentan en los problemas de nivelación barométrica, puede suponerse que la columna de aire es isotérmica, tomando como temperatura la media de las temperaturas efectivamente observadas a lo largo de esta columna.

Entonces, según le ley de BOYLE [§ 185, [6] y [7]) se tiene:

$$p_0\cdot v_0 = p\cdot v, \qquad \frac{p_0}{\mu_0} = \frac{p}{\mu};$$

y la [1] da:

$$h = -\frac{1}{g}\int_{p_0}^{p}\frac{p_0}{\mu_0}\cdot\frac{1}{p}\,dp = \frac{p_0}{g\cdot\mu_0}\cdot\log\frac{p_0}{p} \qquad \text{log. natural} \quad [2]$$

Para desniveles superiores al centenar de metros no es ya admisible la hipótesis isotérmica. Es necesario establecer una ley de variación de la temperatura (y también del estado higrométrico) con la altura para poder proceder a la integración de la [1]. Se dice que se ha establecido de este modo un *aire tipo*, convenio muy útil en aeronáutica, porque permite substituir a cada presión barométrica leída en el barómetro durante la navegación aérea una altura convencional sobre el nivel del mar mediante una fórmula $h = h(p)$, que debería obtenerse integrando la [1], pero que muy a menudo es simplemente empírica y generalmente aceptada.

Esta altura convencional puede ser muy diferente de la altura real, porque las condiciones de temperatura (y de estado higrométrico) existentes en el instante de la lectura del barómetro pueden ser muy distintas que las condiciones medias, típicas de la región, utilizadas para constituir el aire tipo y para construir la fórmula empírica $h = h(p)$ antes citada.

La [2] vale para cualquier sistema de medidas coherente; por ejemplo, en el sistema cm, g_m, seg, si se miden h, g, μ, p, respectivamente en las unidades cm, $\frac{\text{cm}}{\text{seg}^2}$, $\frac{g_m}{\text{cm}^3}$, $\frac{\text{dinas}}{\text{cm}^2}$ = baría.

Si p está medida en cm_{Hg} (§ 210, *a*]), es preciso tener en cuenta que 1 cm_{Hg} equivale a $\mu_{Hg}\cdot g\,\frac{\text{dinas}}{\text{cm}^2}$.

Cuando las presiones vienen medidas en cm_{Hg} y las alturas en metros, la [2] se escribe:

$$h = \frac{p_0}{100\cdot\mu_0}\cdot\mu_{Hg}\cdot\log\frac{p_0}{p} = p_0\frac{\delta_{Hg}}{100\cdot\delta_0}\log\frac{p_0}{p}, \qquad \begin{matrix}h\text{ en m}\\ p_0,\,p\text{ en cm}_{Hg}\\ \text{log. natural}\end{matrix} \quad [3]$$

en donde δ_0 es la densidad del aire en el nivel $h=0$, y δ_{Hg} es la densidad del mercurio. Con suficiente aproximación, midiendo h en kilómetros, se tiene $p_0\,\frac{\delta_{Hg}}{100\cdot\delta_0} = 0{,}127$; por lo tanto,

$$p = p_0\cdot e^{-0{,}127\,h}, \qquad h\text{ en km} \quad [4]$$

la presión se reduce a la mitad a $\approx 5{,}4$ km de altura y se reduce a $\frac{1}{4}$ a ≈ 11 km.

La [1] daría la altura de la atmósfera $h_{máx}$ cuando la integración se extendiera hasta $p=0$. Debido a la incertidumbre de la ley de variación de la temperatura con la altitud, y a la necesidad de tener presente la estructura molecular de la atmósfera al aproximarse a cero la presión, los cálculos respectivos se reducen a puros ejercicios matemáticos sin ningún interés físico.

§ 204. Líquido pesado en rotación. Centrifugación. Un recipiente que contiene un líquido gira alrededor del eje vertical de rotación z (fig. 418) con velocidad angular constante ω. Algún tiempo después de iniciarse el movimiento, a causa del rozamiento interno, giran todos los puntos del líquido alrededor del eje z con velocidad angular ω. Se ha alcanzado el régimen estacionario. Sea μ la masa específica del líquido.

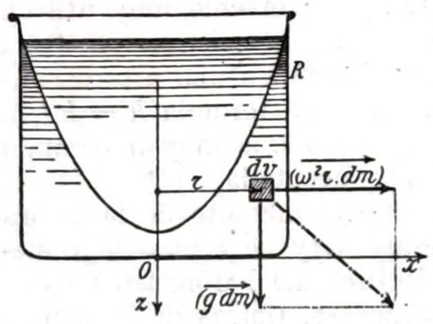


Fig. 418

El espacio ocupado por el líquido es asiento de dos campos de fuerzas simultáneos, suponiendo al observador en reposo respecto al líquido:

1.º El campo de fuerzas de la gravedad, de intensidad $\vec{H}_1 = \vec{g}$, el cual admite potencial (§ 94, [2]):

$$\mathcal{V}_1 = -g \cdot z \qquad (g > 0) \qquad [1]$$

(se supone, como de costumbre, $\mathcal{V}_1 = 0$ para $z = 0$, de donde $C = 0$);

2.º El campo de las fuerzas centrífugas existentes en cada elemento dv de volumen del líquido a la distancia r del eje de rotación, a consecuencia de la velocidad angular ω. Luego se tiene para este campo $\vec{H}_2$:

$$\vec{H}_2 = \omega^2 \vec{r};$$

y también este campo admite potencial (§ 123)

$$\mathcal{V}_2 = -\frac{1}{2}\omega^2 r^2 \qquad [2]$$

(se supone $\mathcal{V}_2 = 0$ para $r = 0$).

En un líquido en reposo contenido en un recipiente la fuerza peso está equilibrada por las fuerzas exteriores aplicadas al líquido por parte del recipiente (y a éste por parte de quien lo sostiene), originándose de este modo las presiones que existen en el seno del líquido en reposo. También ahora, para impedir la acción de la fuerza centrífuga, sirven las paredes laterales del recipiente giratorio; el líquido, además de estar sujeto a las presiones engendradas por la gravedad y regidas por la conocida ley de STEVIN, estará sometido también a un sistema de presiones que sobre cada elemento de líquido $\mu \cdot dv$ situado a la distancia r del eje tienen por resultante la fuerza centrípeta $-\omega^2 \cdot r \cdot \mu \cdot dv$; el signo — sirve para recordar que esta fuerza es centrípeta.

Esta fuerza centrípeta es análoga al *empuje de* ARQUÍMEDES, resultante de las presiones aplicadas a un elemento de líquido en equilibrio sometido a la fuerza peso.

La resultante centrípeta de las presiones $-\omega^2 \cdot r \cdot \mu \cdot dv$ se debe a la existencia del líquido circundante; si solamente cambia la masa específica del elemento de volumen considerado, permanece inalterada la resultante centrípeta de las presiones: $-\omega^2 \cdot r \cdot \mu_L \cdot dv$, en donde μ_L es la masa específica del líquido circundante, mientras que la fuerza centrífuga se convierte en $\omega^2 \cdot r \cdot \mu \cdot dv$, siendo μ la nueva masa específica dentro de dv. El equilibrio ya no es posible; para $\mu > \mu_L$, el crepúsculo extraño, de volumen dv y masa específica μ, es proyectado contra las paredes; para $\mu < \mu_L$, el corpúsculo es empujado hacia el eje de la rotación. La fuerza motriz resultante

$$\omega^2 \cdot r \cdot dv \ (\mu - \mu_L) \qquad [3]$$

puede superar muchísimo a la fuerza análoga resultante del peso del corpúsculo y el empuje de ARQUÍMEDES; expresada por

$$g \cdot dv \ (\mu - \mu_L); \qquad [4]$$

en efecto, $\omega^2 \cdot r$ (especialmente gracias a ω^2) puede exceder en mucho a g, como se ha visto en el § 123.

La *decantación*, o sea, la separación de las partículas que están en suspensión en un líquido, utilizando únicamente la diferencia [4] entre la fuerza peso de las partículas y el empuje de Arquímedes, puede sustituirse ventajosamente por la *centrifugación*, en la cual la separación de las partículas se efectúa a causa de la fuerza [3].

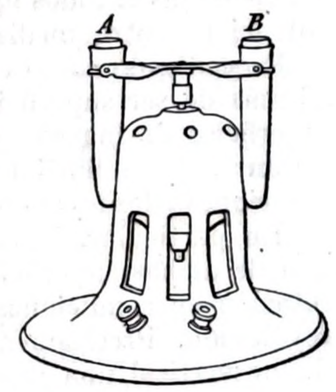


Fig. 419

Las *centrifugadoras* (fig. 419) son máquinas que sirven para este objeto, y se reducen, en último análisis, a recipientes en rápida rotación.

Análogamente, en la industria se emplean muy corrientemente centrifugadoras constituídas por recipientes de paredes agujereadas para eliminar el agua que impregna los tejidos o hilados al sacarlos de los baños de lavado, tintura, etc.

Se han realizado centrifugadoras en las que el rotor es un disco macizo y robusto provisto de dos orificios diametralmente opuestos, en donde se colocan la celdilla que contiene el líquido que ha de someterse a la centrifugación y una celdilla análoga equilibrante. Las dimensiones del rotor son modestas (por ejemplo, $r = 6$ cm), pero se alcanzan velocidades de rotación de más de 1000 vueltas por segundo. La aceleración centrífuga $\omega^2 r$ alcanza $\approx 0{,}5 \cdot 10^6\ g$ (g = acel. grav.). La centrifugación provoca una acción de sedimentación que es $\approx 0{,}5 \cdot 10^6$ veces más enérgica que la que se consigue mediante la decantación natural; puede llegarse a obtener la separación por

sedimentación de macromoléculas de masa molecular $\approx 1\,000\,000$, y aun de sólo $\approx 50\,000$ (celulosa, proteínas, albúminas, polisacáridos, polimeros sintéticos, ...).

El campo de las fuerzas centrífugas admite potencial [2]. Las superficies equipotenciales son cilindros circulares coaxiales con el eje z de rotación.

El campo resultante que existe en el líquido tiene un potencial resultante:

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 = -g\cdot z - \frac{1}{2}\,\omega^2\cdot r^2.$$

Las superficies equipotenciales vienen definidas por la expresión

$$-g\cdot z - \frac{1}{2}\,\omega^2\cdot r^2 = \text{const.},$$

o sea,

$$z = -\frac{1}{2}\,\frac{\omega^2}{g}\,r^2 + C = -\frac{1}{2}\,\frac{\omega^2}{g}\,(x^2+y^2) + C,$$

y constituyen una familia de paraboloides de revolución alrededor del eje de las z, todos iguales entre sí. Se pasa de una superficie equipotencial a otra mediante una simple traslación paralela al eje z.

Procediendo como en el § 202, se deduce que estos paraboloides, además de ser superficies equipotenciales, son superficies isobaras y superficies de masa específica $\mu = \text{const}$. En el campo de fuerzas resultante, de potencial $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2$, son válidas todas las consideraciones y las leyes enunciadas (Pascal, Stevin y Arquímedes) (1).

En particular, la *superficie libre* del líquido debe coincidir con una de dichas superficies; luego la superficie libre de un líquido en rotación en condiciones de régimen constante, es un paraboloide de revolución. Precisamente se ha empleado como espejo parabólico de eje vertical una gran masa de mercurio en rotación (2).

Como la forma del paraboloide depende de ω, se han construído *tacómetros* (que sirven para medir velocidades de rotación) en los cuales el número de vueltas por segundo se deduce de la concavidad que presenta la superficie libre de un líquido en rotación (fig. 420), esto es, del punto a que llega sobre la escala G el vértice del paraboloide que constituye la superficie del líquido.

§ 205. Flotadores. Limitémonos a un cuerpo de volumen v, sumergido en agua (fig. 421). Si su peso P es menor que el empuje de Arquímedes R, esto es, si su peso específico medio $\varrho_m = \dfrac{P}{v} = \mu_m\cdot g$

(1) En realidad, el campo $\vec{g}$ de la gravedad ya es el resultante de la gravitación terrestre y de la fuerza centrífuga de la rotación de la Tierra.

(2) Telescopio de Carrington. — *N. del T.*

es menor que el peso específico $\varrho_L = \mu_L\cdot g$ del líquido circundante, el cuerpo no está en equilibrio, y, además de que puede tender a girar (fig. 414), sube a la superficie: es un *flotador*.

Se alcanza el equilibrio cuando el peso P es igual al peso del líquido desalojado por la porción sumergida y, además, el centro de gravedad C del cuerpo está en la misma vertical z que el centro de gravedad C_L del líquido desalojado.

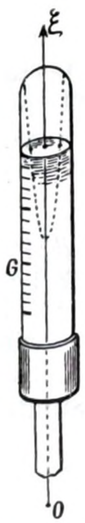


Fig. 420

En efecto, las fuerzas $\vec{P}$ y $\vec{R}$ constituyen ahora un par y están exactamente aplicadas en C y C_L respectivamente; para el equilibrio ha de ser nulo el momento del par; es decir, C y C_L han de hallarse en la misma vertical.

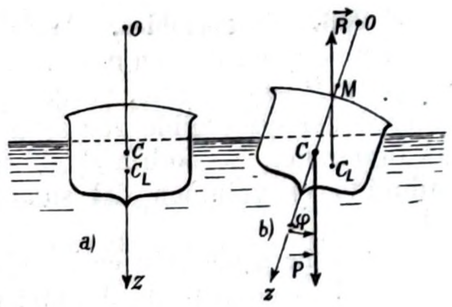


Fig. 421

El equilibrio es estable en lo que se refiere a los corrimientos verticales, porque un corrimiento hacia arriba disminuye el volumen desalojado y, por tanto, el empuje R, en tanto que P permanece constante, mientras un corrimiento hacia abajo aumenta R permaneciendo inalterado P; en los dos casos, el cuerpo es restituído hacia la posición de equilibrio por la resultante $\vec{R} + \vec{P}$.

¿Cuándo es estable el equilibrio en lo que respecta a los giros del flotador?

Obsérvese que, con el balance del flotador, aunque no varíe el volumen sumergido, cambia la forma del líquido desalojado y, por tanto, varía la posición de C_L.

El eje z, que suponemos unido rígidamente al cuerpo flotante, oscila con éste. Sea φ un pequeño giro experimentado por el flotador, por ejemplo, en torno a C; ahora la vertical que pasa por C_L encuentra a z en un punto que varía con φ, es decir, con la inclinación del cuerpo. Cuando φ tiende a cero, este punto de intersección tiende a una posición límite M, que se llama *metacentro* del cuerpo flotante. Si M está más alto que C, el par $(\vec{P}, \vec{R})$ engendrado por el balance tiende a hacer que el flotador tome nuevamente la posición de equilibrio. El equilibrio es estable.

Inclinado el flotador respecto a la posición de equilibrio y abandonado a la acción del par $(\vec{P}, \vec{R})$, oscila con un período que depende del momento de inercia y del momento motor, y, por tanto, del valor de la distancia MC (1).

Toda nave tiene su período propio de oscilación. En mar mo-

(1) Llamada *altura metacentrica*. — *N. de T.*

vida, la nave tiende también a oscilar con el período de las olas; si este período, o sea el tiempo que pasa entre la llegada a la nave de dos crestas sucesivas, coincide con el período propio de la misma se tiene *resonancia*, y la amplitud de las oscilaciones del buque puede tomar valores peligrosos.

Se tiende a alargar el período propio disminuyendo MC. En grandes buques, de balanceo poco pronunciado, MC se reduce hasta los 60 cm. El período propio llega hasta los 20 seg, y como el período de las olas raramente alcanza 10 seg, se está lejos de la resonancia. Las olas no ocasionan un balanceo de amplitud muy notable.

§ **206. Sumergibles. Aeróstatos.** Un sumergible es un cuerpo flotante cuyo volumen v se puede considerar constante, mientras que su peso P es variable, porque se dispone de compartimientos en el cuerpo del sumergible que se llenan con agua del mar para producir la inmersión. Se podría también decir que de este modo se ha disminuído el volumen del sumergible y ha permanecido constante el peso.

El sumergible está en equilibrio en inmersión cuando su peso P es igual al empuje de Arquímedes.

Pero *este equilibrio es inestable* si, como sucede en la práctica, la compresibilidad del sumergible, a medida que gana profundidad, es mayor que la pequeña compresibilidad del agua que le rodea. Al descender el sumergible, disminuye v, mientras P permanece constante; el empuje de Arquímedes R disminuye, el equilibrio se altera, y siendo ahora $P > R$, el sumergible se hunde. Puede hacerse estable la cota de inmersión mediante cierto número de timones de profundidad, cuya acción no es muy diferente que la de los timones de profundidad y de las alas de un aeroplano. Estos timones de profundidad solamente funcionan cuando el sumergible está en movimiento.

En las aeronaves, las condiciones son análogas a las del sumergible en inmersión.

En un aeróstato se tiene una *fuerza ascensional* que es la diferencia entre el peso del gas encerrado (gas del alumbrado, hidrógeno o helio) y el peso del aire desalojado por la envoltura. En caso de equilibrio, la fuerza ascensional está equilibrada por el peso de la cubierta del gas, navecilla, motores y materiales necesarios para su alimentación, equipo y carga útil (pasajeros y mercancías).

En condiciones normales, es decir, a 0 °C y a la presión de 76 cm_{Hg} (§ 210, *a*]), el peso específico ϱ_H del hidrógeno es $\varrho_H = 0{,}069 \frac{kg_p}{m^3}$; el del aire es $\varrho_{aire} = 1{,}29 \frac{kg_p}{m^3}$; se tiene, pues, una fuerza ascensional

$$\varrho_H - \varrho_{aire} = 1{,}2 \frac{kg_p}{m^3} \approx 12 \frac{newton}{m^3}.$$

Tratándose del helio, que da la mayor seguridad porque no es combustible, se tiene $\varrho_{He} = 0{,}14 \frac{kg_p}{m^3}$; luego la fuerza ascensional es todavía superior a $1{,}1 \frac{kg_p}{m^3} \approx 11 \frac{newton}{m^3}$.

Si se desprecia la tensión de la envoltura de la aeronave y se admite que ésta no se halla completamente hinchada al partir, de modo que permite la expansión del gas durante la ascensión, y si, en fin, se considera válida la ley de Boyle, se tiene una fuerza ascensional del aeróstato que es constante al variar de altura; si el aeróstato sube a un punto en donde la presión se ha reducido a la mitad, su volumen se habrá duplicado. Pero el peso específico del aire ϱ_{aire} y el ϱ del gas interno se han reducido ambos a la mitad; la fuerza ascensional por metro cúbico $\varrho - \varrho_{aire}$ ha quedado también dividida por dos. Luego la fuerza ascensional total no ha variado.

En realidad, la ascensión es producida por una pequeña diferencia (aproximadamente el 2 %) entre la fuerza ascensional y la carga total, diferencia que se llama *fuerza ascensional libre;* el globo, aunque un poco flácido al partir, alcanza rápidamente una altura en la cual queda hinchado; a partir de este momento va disminuyendo la fuerza ascensional y crece la tensión de la tela. La cubierta se rasgaría, pero lo impiden válvulas adecuadas por las que escapa una parte del gas contenido en el globo; también disminuye la fuerza ascensional por esta razón hasta que iguala a la carga total del globo. Cuando esto sucede *(zona de equilibrio)*, el equilibrio será posible, pero inestable: el globo ha llegado a esta zona con una velocidad que no es nula, y, por lo tanto, la rebasa; entonces sale más gas del globo, la fuerza ascensional se hace menor que la carga y el globo inicia su descenso. Durante éste, el globo va deshinchándose mientras la fuerza ascensional permanece constante y, por lo tanto, es ahora incapaz de sostenerlo, por lo que el globo baja hasta el suelo.

Para detener el descenso, el aeronauta echa lastre hasta lograr que la fuerza ascensional supere al peso. Entonces, el globo sube hasta una *segunda zona de equilibrio* y, rebasándola también por la velocidad adquirida, comienza de nuevo su descenso.

La habilidad del aeronauta estriba en el uso conveniente del lastre; la bondad del globo radica en la impermeabilidad absoluta de su cubierta.

No es muy distinto el modo de navegar de un dirigible. En este caso, como en el del sumergible en inmersión, los timones de profundidad mejoran mucho la estabilidad, pero sólo funcionan durante la marcha de la aeronave.

§ **207. Líquidos en vasos comunicantes.** La forma típica de los vasos comunicantes es la forma en **U** (fig. 422). En general, un re-

cipiente en el campo de la gravedad tiene forma de vasos comunicantes siempre que existan superficies equipotenciales de la gravedad (superficies horizontales) que corten el recipiente según una sección que constituya un área $S_A\ S_B$ no conexa (esto es, suma de porciones finitas y distintas).

Los razonamientos expuestos en el § 202 para establecer las leyes relativas a la presión en un punto como C, pueden hacerse considerando ya sea el líquido de la columna A, ya el de la columna B. Sean $z_{A,1}$ y $z_{B,1}$ los niveles del líquido en las dos ramas del tubo en U. Se tendrá equilibrio cuando sean iguales las presiones $p_{A,2}$, y $p_{B,2}$ en C, calculadas a lo largo de estas dos columnas.

a] **Líquido homogéneo.** Imagínese primero un *líquido homogéneo*, de masa específica constante μ. La ley de STEVIN (§ 202, [6]) da:

$$\left.\begin{aligned} p_{A,2} - p_{A,1} &= g\cdot\mu\,(z_{A,2} - z_{A,1}) = g\,\mu\,h_A \text{ para la rama } A \\ p_{B,2} - p_{B,1} &= g\cdot\mu\,(z_{B,2} - z_{B,1}) = g\,\mu\,h_B \text{ para la rama } B \end{aligned}\right\} \quad [1]$$

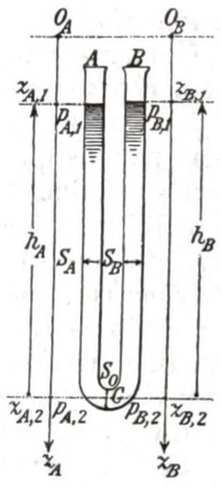


Fig. 422

y para el equilibrio debe ser $p_{A,2} = p_{B,2}$ esto es:

$$h_A + \frac{p_{A,1}}{\mu\,g} = h_B + \frac{p_{B,1}}{\mu\,g}. \quad [2]$$

En particular, puede ocurrir que sean iguales las presiones $p_{A,1}$ y $p_{B,1}$ que actúan sobre las superficies del líquido en las ramas A y B; la [2] da entonces para el equilibrio

$$h_A = h_B\,; \quad [3]$$

luego el líquido alcanza el mismo nivel en las dos ramas.

Si éstas desembocan superiormente en la atmósfera, nos hallaremos en este último caso: $p_{A,1} = p_{B,1}$ es la presión atmosférica.

Pero, en general, no es $p_{A,1} = p_{B,1}$ y, por tanto, tampoco es $h_A = h_B$. Así ocurre, por ejemplo, cuando la rama A desemboca en la atmósfera y la rama B comunica con un recipiente que contiene gas a una presión desconocida $p_{B,1}$. La [2] da entonces, en valor y signo:

$$p_{B,1} = (h_A - h_B)\cdot\mu\,g + p_{A,1}. \quad [4]$$

Tenemos el principio del *manómetro de aire libre.*

La [4] es válida en cualquier sistema de mediciones coherentes; por ejemplo, en el sistema cm g_m seg; $h_A - h_B$ está medido en cm, μ en $\frac{g_m}{cm^3}$, g en $\frac{cm}{seg^2}$, $p_{A,1}$ y $p_{B,1}$ tienen que medirse en barías $= \frac{dina}{cm^2}$.

Si $p_{A,1}$, $p_{B,1}$ se miden en cm_{Hg} (§ 210 *a*]) es menester tener en cuenta que 1 cm_{Hg} equivale a $\mu_{Hg}\cdot g\,\frac{dina}{cm^2}$, y la [4] ha de escribirse:

$$p_{B,1} = (h_A - h_B)\,\frac{\mu}{\mu_{Hg}} + p_{A,1} \qquad \begin{matrix} h \text{ en cm} \\ p \text{ en } cm_{Hg} \end{matrix} \quad [5]$$

en donde μ_{Hg} es la masa específica del mercurio en $\frac{g_m}{cm^3}$.

Si el líquido contenido en el tubo en U es mercurio, se tiene $\mu = \mu_{Hg}$ y la fórmula anterior se reduce a:

$$p_{B,1} = (h_A - h_B) + p_{A,1} \qquad \begin{matrix} h \text{ en cm} \\ p \text{ en } cm_{Hg} \end{matrix} \quad [6]$$

b] **Líquidos heterogéneos.** Imagínese ahora que A y B (figura 423) contengan *líquidos diferentes* no miscibles, y que las dos ramas desemboquen en la atmósfera libre.

Fig. 423

Sean μ_A y μ_B las masas específicas de los dos líquidos.

Se puede repetir el razonamiento anterior con tal de tomar como nivel de partida para contar las alturas h_A y h_B, el de la superficie S de separación entre los líquidos; así, el líquido es homogéneo en cada una de las dos ramas. Se tiene para el equilibrio:

$$p_{A,2} = p_{B,2}\,;$$

Además, por hipótesis:

$$p_{A,1} = p_{B,1}\,;$$

luego las [1] dan:

$$\mu_A\cdot g\cdot h_A = \mu_B\cdot g\cdot h_B,$$

o sea,

$$\frac{h_A}{h_B} = \frac{\mu_B}{\mu_A} = \frac{\varrho_B}{\varrho_A} = \frac{\delta_B}{\delta_A} \quad [7]$$

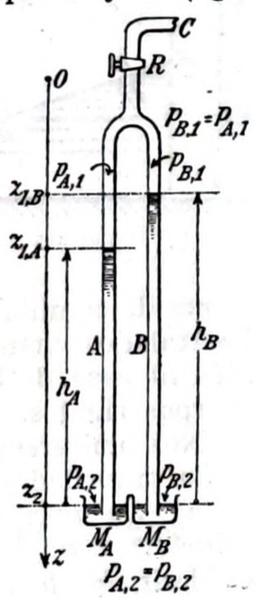


Fig. 424

Las alturas, contadas desde S, son inversamente proporcionales a las masas específicas μ_A y μ_B, y, por tanto, a los pesos específicos ϱ_A, ϱ_B, y a las densidades δ_A, δ_B.

Se tiene un modo rápido y cómodo para comparar las densidades de dos líquidos. En la práctica se emplea un dispositivo que, aunque en el fondo es parecido al anterior, resulta más cómodo porque no

mezcla los líquidos. Un tubo en U (fig. 424) está invertido, y sus dos ramas A, B se sumergen en dos vasos M_A y M_B que contienen los líquidos a examinar.

Se aspira por C: los líquidos suben en A y en B. Se cierra la llave R, y se espera el equilibrio, teniendo cuidado de que en M_A y M_B las superficies de los líquidos se hallen al mismo nivel z_2. La ley de STEVIN, aplicada a las ramas A y B, da:

$$p_{A,2} - p_{A,1} = \mu_A\, g h_A$$
$$p_{B,2} - p_{B,1} = \mu_B\, g h_B.$$

Pero $p_{A,2}$ y $p_{B,2}$ son iguales entre sí porque coinciden con la presión atmosférica al nivel z_2; y $p_{A,1}$ y $p_{B,1}$ también lo son porque coinciden con la presión del aire enrarecido al aspirar por el conducto C.

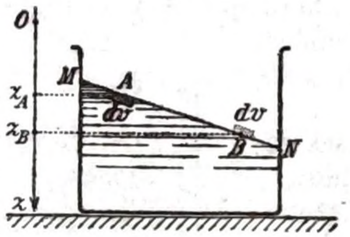


Fig. 425

Luego, alcanzado el equilibrio, se tiene:

$$\mu_A\, g h_A = \mu_B\, g h_B,$$

de cuya fórmula se deduce la [7].

§ 208. Equilibrio de los flúidos y principio de los trabajos virtuales. Las condiciones de equilibrio de los flúidos pueden deducirse del principio de los trabajos virtuales (§§ 103 y 111), cuya validez se extiende también al caso de los flúidos y no sólo a sistemas de puntos o de cuerpos rígidos.

Nos limitaremos aquí al caso de líquidos en el campo de fuerzas de la gravedad y a los dos ejemplos siguientes.

a] *La superficie libre MN de un líquido pesado en equilibrio debe coincidir con una superficie equipotencial*: $\mathcal{V} = -g \cdot z = \text{const.}$; es decir, *ha de ser plana y horizontal.*

En efecto, si no fuese así (fig. 425), habría puntos A de la superficie del líquido de cota z_A más elevada (potencial de la gravedad: $\mathcal{V}_A = -g \cdot z_A$) y puntos B de la misma superficie de cota z_B más baja ($\mathcal{V}_B = -g \cdot z_B$; $z_B > z_A$; $\mathcal{V}_B < \mathcal{V}_A$).

Mediante un corrimiento compatible con las ligaduras (líquido dentro del recipiente; líquido incompresible) se puede llevar el volumen dv de líquido desde A a B.

Llamando μ a la masa específica del líquido, el trabajo $d\mathcal{L}$ de la fuerza de gravedad durante el transporte es:

$$d\mathcal{L} = dv \cdot \mu \cdot (\mathcal{V}_A - \mathcal{V}_B) = -dv \cdot \mu \cdot g \cdot (z_A - z_B) > 0.$$

Luego se han logrado modificaciones de la configuración supuesta que son compatibles con las ligaduras y para las cuales $d\mathcal{L} > 0$. La configuración supuesta no puede implicar equilibrio.

b] *En el equilibrio de líquidos pesados diferentes en un tubo en U es válida la* [7], § 207.

En efecto, si la configuración de equilibrio es la de la figura 423, debe ser nulo el trabajo de las fuerzas de gravedad durante una deformación (reversible) de la configuración, que sea compatible con las ligaduras.

Considérese como deformación de la configuración una variación de nivel del líquido en A y, por tanto, en B; por ejemplo, que se produzca un descenso del nivel en A y una elevación en B.

Sea dv el volumen de líquido interesado en este corrimiento. Prescindiendo de un infinitésimo de orden superior y empleando los símbolos del § 207, el trabajo $d\mathcal{L}$ durante la variación de configuración es, en valor y signo:

$$d\mathcal{L} = dv \cdot \mu_A \cdot g \cdot h_A - dv \cdot \mu_B \cdot g \cdot h_B \qquad (g > 0,\ h_A > 0,\ h_B > 0).$$

Para el equilibrio se debe tener

$$d\mathcal{L} = dv \cdot \mu_A \cdot g \cdot h_A - dv \cdot \mu_B \cdot g \cdot h_B = 0,$$

de donde

$$\mu_A \cdot h_A = \mu_B \cdot h_B,$$

que es, precisamente, la [7] del § 207.

CAPÍTULO IV

Medida de las presiones en la estática de flúidos

§ 209. Presión total y presión específica. Se han definido en § 77, 2.º, y en § 199. En el caso de los flúidos en equilibrio, las presiones son siempre «normales»; no tienen componente «tangencial», es decir, paralela a la superficie sobre la cual actúan. De manera que la presión puede medirse con una balanza o con un dinamómetro (fig. 79).

Así se mide directamente la fuerza F ejercida sobre toda una superficie plana S; F es la *presión total.*

La presión (específica) media $\vec{p}$ sobre la superficie S es:

$$\vec{p} = \frac{\vec{F}}{S}. \qquad [1]$$

Si esta relación varía de una porción a otra de S, ha de introdu-

cirse el concepto de *presión (específica)* $\vec{p}$ en un punto A de S, definida por

$$\vec{p} = \frac{d\vec{F}}{dS}, \qquad p = \frac{dF}{dS} \qquad [2]$$

en donde dS es un elemento de la superficie S considerado alrededor de A.

Los aparatos que miden directamente la *presión (específica)* p se llaman *manómetros*. En esencia se basan en la aplicación de las leyes de STEVIN o de PASCAL.

Nos limitaremos a los *manómetros para gases*, pero será fácil decidir cuáles de los manómetros descritos pueden servir también para líquidos.

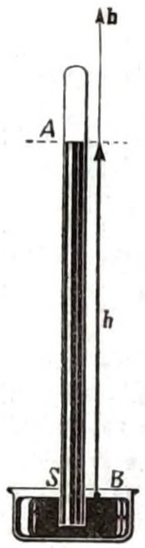


Fig. 426

Los manómetros pueden dividirse en *manómetros absolutos* y *manómetros diferenciales*. Estos últimos dan la diferencia entre la presión en dos puntos o en dos ambientes (§§ 213, 214).

El *barómetro* (§ 210) es un manómetro absoluto, y si lo consideramos bien, resulta (§ 211) que, en general, todo manómetro absoluto funciona como un barómetro.

§ **210. Barómetro.** En su empleo ordinario sirve para la medición de la *presión atmosférica*, es decir, de la presión en un punto de la atmósfera libre.

a] **Barómetro de mercurio.** La figura 426 da el esquema, bien conocido; la presión atmosférica está equilibrada por la presión hidrostática de la columna de mercurio contenida en el tubo barométrico; se tiene:

$$p \cdot S = \mu \cdot g \cdot h \cdot S,$$

en donde μ es la masa específica del mercurio; S es la sección del tubo barométrico, y h, el desnivel entre las superficies del mercurio en la cubeta y en el tubo; la superficie A es una superficie libre.

Luego

$$p = \mu\, gh. \qquad [1]$$

La masa específica μ_0 del mercurio puro a 0 °C es

$$\mu_0 = 13{,}596 \ \frac{g_m}{cm^3}$$

Por tanto, leído el desnivel h en el barómetro, se obtendrá p mediante la relación

$$p = 13{,}596 \cdot h \cdot g \qquad \begin{matrix} h \text{ en cm} \\ g \text{ en } \frac{cm}{seg^2} \\ p \text{ en barías} = \frac{dinas}{cm^2} \end{matrix} \qquad [2]$$

Para que esta expresión sea válida es preciso que:

1.º el mercurio sea puro;

2.º el mercurio se halle a 0 °C, pues en otro caso se tiene (§ 307):

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + \alpha \cdot \theta} \qquad [3]$$

siendo θ la temperatura del mercurio en °C, y α su coeficiente de dilatación cúbica, que, si θ se mide en °C, vale $\alpha = 0{,}000\,181\ (°C)^{-1}$.

3.º la escala en la que se lee h esté a la temperatura θ a la cual se ha efectuado la graduación justa, que ordinariamente es la de 0 °C. No siendo así, el desnivel verdadero es:

$$h_0 = h\,(1 + \lambda\,\theta),$$

en donde λ representa el coeficiente de dilatación lineal de la materia donde se ha grabado la escala;

4.º se conozca la aceleración de la gravedad g en el sitio donde se halla el barómetro;

5.º no existan gases residuales en la cámara barométrica para que la superficie del mercurio en A sea efectivamente *libre;* realmente, no faltará nunca la presión de vapor saturado de mercurio que a 20 °C es de unas 1,2 barías;

6.º la escala que sirve para la medida de h esté bien vertical (sirve bien el catetómetro);

7.º no sea sensible la depresión capilar en A (§ 220); por esto en los barómetros de precisión (*barómetro normal*, fig. 427), la sección interior del tubo en la parte que corresponde a la cámara barométrica y la de la cubeta B tienen un diámetro de 20 mm, por lo menos, y la cubeta, teniendo forma de tubo en U, permite efectuar la lectura del desnivel h entre meniscos de mercurio del mismo diámetro y sobre la misma vertical, de modo que cuando el mercurio en B esté bien limpio, será igual en A y en B el pequeñísimo efecto capilar todavía existente, y no podrá influir en el valor de h.

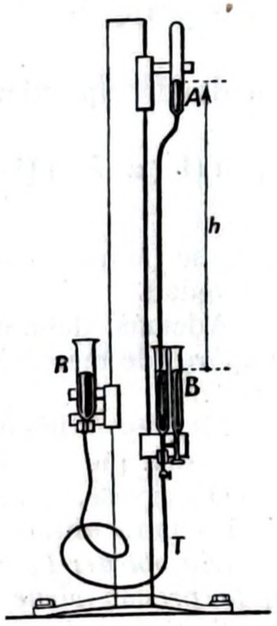


Fig. 427

Luego este barómetro normal es una especie de barómetro de sifón perfeccionado.

Las condiciones 2.º, 3.º y 4.º, teniendo en cuenta las leyes [2], [2 *bis*] y [9] del § 174 que dan la variación de g con la latitud y la altitud, obligan a escribir:

$$p = 13{,}596 \cdot g_n \cdot h \frac{1 + \lambda\,\theta}{1 + \alpha\,\theta} \cdot (1 - 0{,}002\,648 \cdot \cos 2\varphi)\,(1 - 0{,}000\,000\,\frac{309}{200}\,H) \qquad [4]$$

$$\left(h \text{ en cm},\ g_n \text{ en } \frac{cm}{seg^2},\ p \text{ en barías} = \frac{dinas}{cm^2},\ H \text{ en m}\right)$$

siendo H la altura del barómetro sobre el nivel del mar. Se empleará el coeficiente 0,000 000 309 m^{-1} en el aire, y el coeficiente 0,000 000 200 m^{-1} en el caso de un terreno de masa específica media $\approx 2{,}5\ \frac{g_m}{cm^3}$, que sirve, por ejemplo, en las nivelaciones barométricas de precisión en minería. En la fórmula [4] aparece el valor normal g_n de la aceleración de la gravedad (§ 174, [7]) en vez de $g_{45;0}$.

Luego

$$p = 13{,}596 \cdot g_n \cdot h_c \qquad \begin{matrix} h_c \text{ en cm} \\ g_n \text{ en } \frac{cm}{seg^2} \\ p \text{ en barías} = \frac{dinas}{cm^2} \end{matrix} \qquad [5]$$

en donde, aproximadamente, se tiene:

$$h_c = h\,(1-[\alpha-\lambda]\theta)\,(1-0{,}002\,648\cdot\cos 2\varphi)\,\left(1-0{,}000\,000\,\frac{309}{200}\,H\right)^{h,\,h_c \text{ en cm}}_{H \text{ en m}} \qquad [6]$$

y h_c se llama *altura barométrica corregida* para la temperatura y la gravedad.

Además, debe corregirse h_c en lo que respecta la presión de los vapores de mercurio y de los gases residuales en la cámara barométrica.

Es muy difícil obtener el valor de h_c con la precisión de 0,01 mm, mientras que se alcanza fácilmente la sensibilidad de 0,001 mm.

Obsérvese, además, que efectuadas todas las correcciones necesarias para obtener la altura corregida h_c, *el producto* [5], *que permitiría obtener la presión en dinas por* cm^2, *no se efectúa casi nunca, y la presión viene dada generalmente en altura de mercurio* h_c.

Se tiene entonces, sencillamente, pero no de acuerdo con [1], § 209, esto es, no coherentemente:

$$p = h_c\,; \qquad \begin{matrix} h_c \text{ en cm} \\ p \text{ en } cm_{Hg} \end{matrix} \qquad [7]$$

se dice que se mide la presión en *centímetros de mercurio* (cm_{Hg}); la [7] es un caso característico de igualación entre las *medidas* p, h_c y no entre las magnitudes físicas p, h_c; véase § 5.

Análogamente, vale la [7] midiendo, por ejemplo, h_c en m y p en m_{Hg}, o bien h_c en mm y p en mm_{Hg}, etc.

De una manera más general, cualquiera que sea el líquido barométrico, la presión barométrica p, la altura barométrica h y el peso específico μg del líquido, están ligados por la [1], que se escribe:

$$h = \frac{p}{\mu g},$$

de manera que la altura h puede tomarse como un índice de la presión p, porque es proporcional a esta última, mientras μg sea constante.

Del mismo modo, en el manómetro de aire libre se usará la [4], § 207, que se escribe:

$$h_A - h_B = \frac{p_{B1} - p_{A,1}}{\mu g};$$

y de nuevo la *altura manométrica* $h_A - h_B$ se toma como un índice de la diferencia de la presión $p_{B,1} - p_{A,1}$, pues es proporcional a ésta última.

Así, pues, se introduce toda una serie de unidades de presión, comodísimas, pero no coherentes.

1.º El cm_{Hg} es la presión correspondiente a una fuerza de:

$$13{,}596\ \frac{g_p}{cm^2} = 13{,}596 \cdot 980{,}665\ \frac{dinas}{cm^2} = 13\,333\ \frac{dinas}{cm^2} =$$

$$= 0{,}133\,33\ \frac{newton}{cm^2} = \frac{4}{30}\ \frac{newton}{cm^2}$$

2.º Dado el empleo del manómetro de agua, también se miden las presiones en alturas de agua; por ejemplo, en *centímetros de agua* (cm_{H_2O}). Según la ley de STEVIN, la presión de h cm_{H_2O} es:

$$p = 1 \cdot g_n \cdot h_c\,; \qquad \begin{matrix} h_c \text{ en cm} \\ g_n \text{ en } \frac{cm}{seg^2} \\ p \text{ en barías} = \frac{dinas}{cm^2} \end{matrix}$$

en donde h_c se obtiene, a partir de h, mediante la fórmula [6], en la cual, sin embargo, α significa el coeficiente de dilatación del agua; 1 cm_{H_2O} corresponde a una fuerza de:

$$1\ \frac{g_p}{cm^2} = 980{,}665\ \frac{dinas}{cm^2} = 980{,}665 \cdot 10^{-5}\ \frac{newton}{cm^2}.$$

Se emplea el cm_{H_2O} en medidas no muy precisas de pequeñas presiones o diferencias de presión. Para este objeto basta recordar que 1 cm_{H_2O} equivale a $980\ \frac{dinas}{cm^2} \approx 0{,}01\ \frac{newton}{cm^2}$.

3.º La *atmósfera* es la presión de 76 cm_{Hg}, y debe su nombre a que esta presión es la media de la presión atmosférica al nivel del mar. Una atmósfera es igual a $1033\ \frac{g_p}{cm^2}$, igual a $1{,}0136 \cdot 10^6$ barías o $\frac{dinas}{cm^2}$, es decir, poco más de $10\ \frac{newton}{cm^2}$.

4.º Finalmente, se ha difundido muchísimo, especialmente en las medidas meteorológicas y en los países ingleses, el nombre *bar* (1) dado a la antigua *megabaría*.

Por definición es :

$$1 \text{ bar} = 10^6 \text{ barías} = 10 \ \frac{\text{newton}}{\text{cm}^2} \approx 750{,}076 \ \text{mm}_{\text{Hg}}.$$

Con buena aproximación se tiene, pues :

$$1 \text{ milibar} \approx \frac{3}{4} \text{mm}_{\text{Hg}}.$$

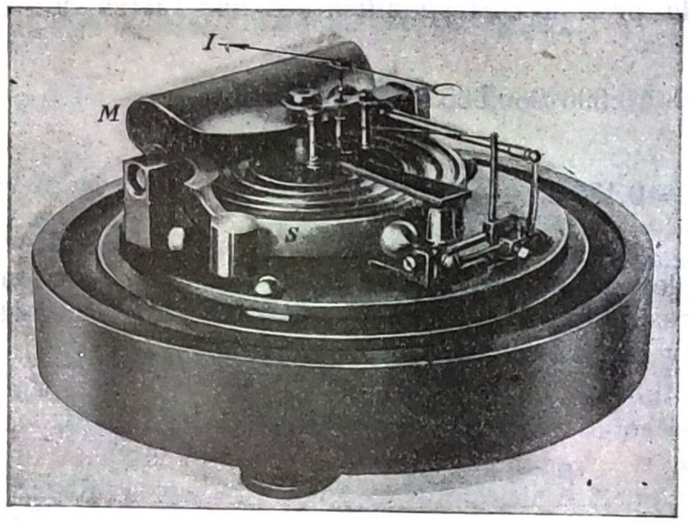


Fig. 428

Constituyó ya un progreso haber sustituído la unidad «atmósfera» por la unidad kg_p por cm^2. Al consolidarse el sistema m kg_m seg, sería ciertamente oportuno sustituirla a su vez por el *decanewton por* cm^2, unidad que le es muy vecina y coincide con el «bar».

Pero considérese la enorme cantidad de datos físicos incluídos en las palabras «a presión normal», esto es, a 760 mm_{Hg}, y se comprenderán las dificultades prácticas que se oponen a que se eliminnen de la Física el «mm_{H_2O}» y la «atmósfera».

Por fin, ¡hágase de buen grado el esfuerzo mnemotécnico necesario para recordar que la unidad mm_{Hg} ha recibido el nombre de *tor* (o *torr*) en honor de TORRICELLI!

b] **Barómetros metálicos.** Miden la presión atmosférica equilibrándola con una fuerza elástica.

El tipo más corriente es el *barómetro aneroide*, constituído por una cajita metálica *S* (fig. 428), de paredes delgadas y onduladas (de grueso 0,01 ÷ 0,015 mm, según el diámetro de la cajita), en la cual se ha efectuado el vacío. La presión atmosférica exterior aplasta la cajita

(1) La unidad *bar* fué propuesta en 1912 por el meteorólogo noruego V. BJERKNES. Por acuerdo internacional, el *milibar* es la unidad empleada por todos los países en sus mensajes meteorológicos. — *N. del T.*

[figura 429, *b*)], y un robusto muelle *M* de restitución equilibra en el centro de la cajita la acción de la presión atmosférica, y la sección de la misma toma la forma de la figura 429, *c*).

Por medio de la clavija *A*, la cara inferior de la cajita está sujeta al soporte del aparato. Toda variación de la presión atmosférica

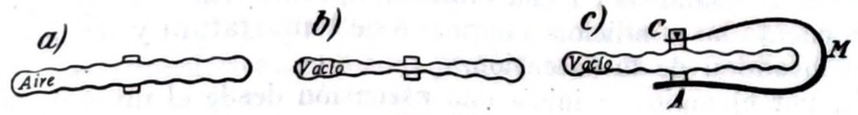


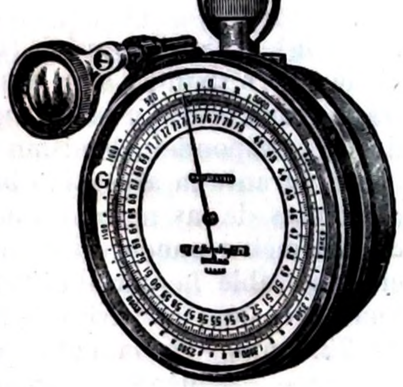
Fig. 429

origina una variación de la distancia entre el punto *C* y la base *A*.

Un sistema de palancas permite amplificar 250, e incluso 500 veces, los corrimientos de *C*, con lo cual la extremidad de un índice *X* (figura 428), que puede girar sobre una escala circular, permite efectuar una vuelta entera para variaciones de presión que abarcan, por ejemplo, desde 71 cm_{Hg} a 80 cm_{Hg}.

Escogiendo convenientemente el metal (alpaca, acero o bronce fosforoso) y procurando construir perfectamente el sistema amplificador de palancas, se pueden eliminar suficientemente los defectos elásticos y de histéresis; pero, a pesar de esto, aunque la sensibilidad puede llegar a 0,1 mm_{Hg}, la precisión raramente alcanza 1 mm_{Hg}.

Se calibra el barómetro metálico poniéndolo junto con otro de mercurio debajo de una campana y variando con una bomba la presión de la campana para comparar las indicaciones de los dos instrumentos.



F(g. 430

Una gran ventaja de los barómetros metálicos es la de ser muy manejables y la posibilidad de construirlos exentos de corrección de temperatura, mediante un juego conveniente de palancas amplificadoras que produzca una amplificación en función de la temperatura, de manera que compense las variaciones con la temperatura de las propiedades elásticas de la cámara y del resorte *M*. También se construyen barómetros en los que se aplica una compensación del error de temperatura, obtenida vaciando incompletamente la cajita *S*.

Los barómetros aneroides, además de servir como barómetros portátiles, se emplean como *altímetros*, es decir, para medir la altitud.

Es preciso, en este caso, que estén provistos de una segunda escala (fig. 430) que indique la altitud en metros y que esté grabada sobre una virola *G*, que puede hacerse girar con rozamiento respecto de la escala que da la presión atmosférica.

Un altímetro hasta 4000 metros tiene una escala de alturas que abarca una vuelta completa, y una escala de presiones que en toda la vuelta va desde 770 a 460 mm_{Hg}, aproximadamente.

La escala de las alturas permite, pues, pasar de cada valor de la presión al correspondiente valor de la altura. Esta escala está construída basándose en una fórmula hipsométrica (§ 203) que tenga en cuenta las condiciones normales de temperatura y de humedad en la localidad de la ascensión.

Si, por ejemplo, se inicia una ascensión desde el nivel de 500 m sobre el mar en el momento en que el barómetro señala la presión de 722 mm_{Hg}, es preciso girar la virola G de modo que al empezar la ascensión el trazo 500 m de la escala de alturas coincida con el 722 mm_{Hg} de las presiones.

Como el aire se enrarece al aumentar la altura, las dos escalas no pueden ser uniformes a la vez ; si es uniforme la escala de las altitudes h, la de las presiones tiene las divisiones cada vez más apartadas a medida que p disminuye : 1 mm_{Hg} de variación de presión con la altura, cuando la presión es de 760 mm_{Hg}, corresponde a un desnivel de $\approx$ 10 metros ; y 1 mm_{Hg} de variación alrededor de los 460 mm_{Hg} corresponde a un desnivel de $\approx$ 16,5 metros.

Es más frecuente, pero menos racional, que el constructor haga uniforme la escala de las presiones.

Fig. 431

En tal caso (fig. 431), al girar la escala de las altitudes h, sucede que cierto intervalo de presión (p_0, p), por ejemplo, de 750 a 700 mm_{Hg}, viene a corresponder a un desnivel diferente, mientras que, por el contrario, suponiendo g sensiblemente constante, tal intervalo de presión debe corresponder al mismo desnivel h, según la fórmula [1], § 203.

Si durante la ascensión las condiciones de la atmósfera son muy diferentes de las normales admitidas para el aire tipo, la indicación del altímetro puede estar muy equivocada. También constituye un error notable la variabilidad de la presión con el tiempo : durante una ascensión de varias horas puede ocurrir que la presión inicial de 722 mm_{Hg} en la cota 500 m, de partida, haya variado algunos mm_{Hg}, debiéndose tomar información de estas variaciones.

Dobson da como error probable, debido a la incertidumbre de la temperatura de las capas de aire atravesadas durante la ascensión, 45 m para un desnivel de 3000 m, y 150 m para uno de 9000 m. Si se añade el error debido a las imperfecciones elásticas (§ 196) y la citada variabilidad de la presión con el tiempo, se comprende que no puede considerarse el altímetro como instrumento de precisión.

c] **Barógrafo.** Es un aparato que registra la presión atmosférica en función del tiempo.

En los observatorios meteorológicos existen barómetros registradores de mercurio ; pero, generalmente, los barógrafos son barómetros metálicos provistos de un aparato registrador con tambor giratorio (fig. 16). Estos instrumentos son muy útiles para la navegación aérea, pero todavía menos precisos que los barómetros metálicos.

§ **211. Probeta.** Si en un recinto (de poca extensión, para que pueda considerarse la presión p constante en todo él) no se tiene la presión atmosférica, sino una presión distinta, se podrá medir p introduciendo en él un barómetro.

Cuando p sea grande, la altura h también lo será (§ 210 [1]). Para presiones de algunas « atmósferas », es decir, de algunas decenas de $\frac{\text{newton}}{\text{cm}^2}$, se necesitarán barómetros de mercurio cuyo tubo tenga una longitud de varios metros. La disposición no es práctica.

Si p es pequeña, también lo será h ; bastará un barómetro muy corto. Es lo que sucede bajo la campana neumática. Se reduce el barómetro a un pequeño barómetro de mercurio, de sifón, de algunos centímetros solamente, llamado *probeta* (1).

Aunque pueda alcanzar la misma sensibilidad y precisión que con un barómetro normal, generalmente se trata de un aparato tosco en el que se suele leer h con un error de 1 $\div$ 2 mm. El error más grave es el de capilaridad (§ 220), a causa de la sección muy estrecha que se usa corrientemente para el tubo en U, y de la desigualdad del efecto capilar en las dos ramas.

Gracias al principio de Pascal, no es necesario que la probeta se halle debajo de la campana, bastando que la rama abierta del tubo en U esté en comunicación con la campana mediante un tubo.

§ **212. Probeta de Mac Leod.** La *probeta* o *válvula* de Mac Leod sirve para medir presiones gaseosas extraordinariamente pequeñas, como las que se pueden obtener en recipientes en donde se ha efectuado el vacío con una máquina neumática muy buena. Un aparato que sirva para tales mediciones se llama *vacuómetro* ; la probeta de Mac Leod (fig. 432) es un vacuómetro fundado en la ley de Boyle.

El barómetro truncado mide la presión residual cuando todavía es de 1 $\div$ 2 mm_{Hg}, mientras que la válvula de Mac Leod mide presiones que varían desde 0,1 mm_{Hg} hasta 10^{-5} mm_{Hg}, y todavía puede apreciar una presión de 10^{-6} mm_{Hg}.

La presión a medir p_x se ejerce en A, a través de BDC, siendo A un grueso recipiente, de capacidad v (a contar desde el nivel M), que termina en un tubo capilar T. El tubo S es flexible, lleno de mercurio, y conduce al recipiente R, generalmente en comunicación con la atmósfera. Cuando se ha « efectuado el vacío » en $ACDB$ (es

(1) Se llama también *barómetro truncado*, y en algunas instalaciones va fuera de la campana y dentro de otra más estrecha o *probeta*, que puede ponerse en comunicación con la campana donde se efectúa el vacío. — *N. del T.*

decir, cuando sólo existe una presión pequeñísima p_x), la parte $RSCA$ es un barómetro : se tiene un desnivel de unos 76 cm entre el mercurio de la cubeta R y el mercurio de la cámara barométrica NA.

Levantando la cubeta R, sube el mercurio en N, y en un cierto momento cierra la bifurcación C.

Queda encerrado en A un volumen v de gas a la presión desconocida p_x.

Levántese R hasta que el mercurio llene A y suba también por D alcanzando un nivel fijo H_1, con lo cual el volumen del gas se ha reducido a una pequeña parte del valor inicial; por ejemplo, a una milésima parte. Según la ley de Boyle, la presión en el tubo T vale $1000 \cdot p_x$.

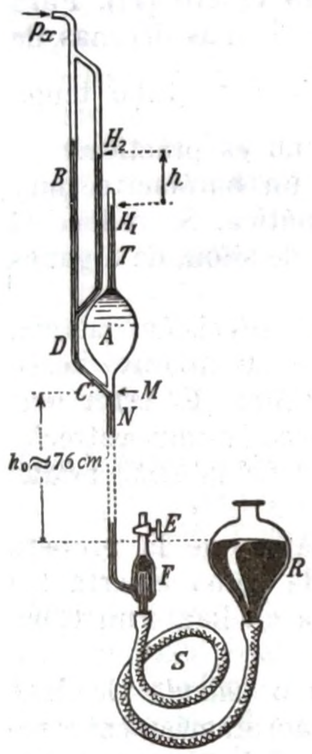


Fig. 432

En cambio, en la rama DB no se ha efectuado dicha compresión, de modo que en ella actúa sobre el mercurio una presión que todavía es p_x, sensiblemente.

El desnivel entre H_1 y H_2 será debido a una presión igual a

$$999\ p_x \approx 1000\ p_x.$$

Por lo tanto, si p_x era 0,01 mm_{Hg}, se obtiene un desnivel h, entre H_1 y H_2, de 10 mm que es bien visible.

Con un volumen de A igual a 500 cm^3 y reduciendo el gas encerrado en A a algunos milímetros del capilar T, hasta un volumen por ejemplo, de 1 mm^3, puede reducirse el volumen del gas a $2 \cdot 10^{-6}$ del volumen inicial.

Para reducir al mínimo el error de capilaridad, los tubos TH_1 y DH_2 son de igual diámetro ; pero en tubos tan delgados el mercurio corre mal y no permite apreciar de un modo seguro un desnivel h inferior a ≈ 1 mm, lo cual corresponde, en el ejemplo supuesto, au na presión $p_x = 2 \cdot 10^{-6}$ mm_{Hg}.

Más adelante (§ 378) veremos otros medios más sensibles para medir presiones residuales de gas en un recinto en que se ha efectuado el vacío; pero los instrumentos fundados en estos medios se gradúan comparándolos con la válvula de Mac Leod. La necesidad de estos otros procedimientos se ha manifestado en los últimos años, en que la técnica del vacío (§ 377) ha llegado al extremo de un enrarecimiento tan grande, que el mercurio de la válvula de Mac Leod no sólo no presenta ningún desnivel h visible, sino que, llenando completamente el capilar T, se adhiere de tal modo a las paredes de este capilar, que al bajar el depósito R, y por tanto H_2, sólo se obtiene el desprendimiento del mercurio de la extremidad del capilar para

un desnivel h negativo, que puede llegar a varios centímetros, y cuyo valor puede dar una idea del grado de enrarecimiento alcanzado (¿$p_x < 10^{-8}$ mm_{Hg}?).

Observemos, sin embargo, que la probeta de Mac Leod sólo mide la presión del gas residual en A mientras sea aplicable la ley de Boyle ; no puede servir si el gas contenido en A se adhiere a las paredes, o si se condensa durante la compresión. Por tanto, no indica la presión que existe en B y en A por efecto de los vapores de mercurio, y ya se ha indicado que a 20 °C el vapor saturante de mercurio tiene una presión de unas $\approx$ 1,2 barías, o sea de unos 0,001 mm_{Hg}.

Las dimensiones de la probeta de Mac Leod la hacen engorrosa ; la maniobra del recipiente R resulta incómoda, y puede suceder que burbujas de aire arrastradas por el mercurio desde S hacia A falseen completamente el resultado de la medida, sirviendo el dispositivo EF para recoger y expeler dichas burbujas. A pesar de esto, es todavía esencial este instrumento, como *vacuómetro*, en la técnica del vacío.

Se han construído probetas enteramente de vidrio en las que el mercurio es trasladado desde R a A, y viceversa, variando con una bomba la presión sobre R.

Si se sacrifica mucho la sensibilidad, pueden reducirse las dimensiones de la probeta de Mac Leod a pocos centímetros.

§ **213. Manómetros.** Los *manómetros* corrientes no dan la presión en un recinto, sino la diferencia de presión entre este recinto y la atmósfera.

Recordemos :

El *manómetro de aire libre* (§ 207), muy preciso, al que se debe, según se ha dicho (§ 210, *a*]), la difusión universal de las unidades de medida comodísimas, pero incoherentes: el cm_{Hg} (y sus múltiplos y submúltiplos) y el cm_{H_2O} (y sus múltiplos y submúltiplos).

El manómetro de aire comprimido, que suponemos conocido por la Física elemental.

Los *manómetros metálicos*, que son casi los únicos empleados industrialmente.

Estos últimos son análogos a los barómetros metálicos. Ahora en el interior de la cajita metálica [fig. 429, *a*)] actúa la presión desconocida, mientras en el exterior actúa la presión atmosférica. Los manómetros metálicos se calibran por comparación con un manómetro de aire libre ; para la medida de presiones hasta cerca de $10\ \frac{\text{newton}}{\text{cm}^2}$ ($\approx$ 1 atmósfera) pueden ser tan sensibles como un barómetro metálico ; se construyen hasta para medidas de $10\,000\ \frac{\text{kg}_p}{\text{cm}^2}$, o sea $\approx$ 100 000 newton por cm^2 ; señalan generalmente la presión *cero* cuando la presión interior es igual que la exterior. Su precisión relativa no es muy grande, y raramente alcanza el 1 %.

El manómetro de aire libre no es adecuado para graduar los manómetros metálicos correspondientes a fuertes presiones (por ejemplo, 50 $\frac{\text{kg}_\text{p}}{\text{cm}^2}$, $\approx 500\ \frac{\text{newton}}{\text{cm}^2}$ o más); se obtendrían desniveles inadmisibles en un aparato de uso práctico.

La figura 433 representa el esquema de un manómetro de columnas múltiples (THIESEN) de agua $\left(\mu_{H_2O} = 1\ \frac{\text{g}_\text{m}}{\text{cm}^3}\right)$ y mercurio $\left(\mu_{Hg} = 13{,}59\ \frac{\text{g}_\text{m}}{\text{cm}^3}\right)$. Sean p_x la presión desconocida y p_a la presión atmosférica. Para $p_x = p_a$, dosificando convenientemente el agua y el mercurio en cada una de las columnas, se puede hacer de modo que todos los niveles de mercurio se hallen en un mismo plano horizontal. Entonces, cuando $p_x \neq p_a$, se tendrán desniveles h_1, h_2, h_3, ... h_n, en los sucesivos manómetros «en serie» que constituyen el instrumento.

Se tiene:

$$p_x - p_a = \Delta p = h_1 + (h_2 + h_3 + \ldots\ldots + h_n)\ \frac{12{,}59}{13{,}59}. \qquad \begin{matrix} h_1, h_2, \ldots\ldots h_n \text{ en cm} \\ \Delta p \text{ en cm}_{Hg} \end{matrix} \quad [1]$$

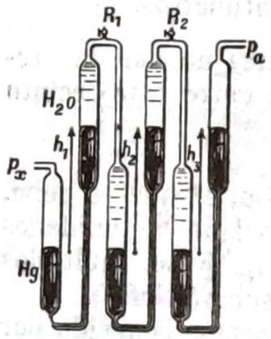


Fig. 433

En efecto, cada centímetro de h_1 engendra una presión de 1 cm_{Hg}, mientras que en las otras columnas 1 cm de desnivel engendra una presión que es debida a la distinta masa específica de los dos líquidos, y equivale, por tanto, a $\frac{13{,}59 - 1}{13{,}59}\ \text{cm}_{Hg}$.

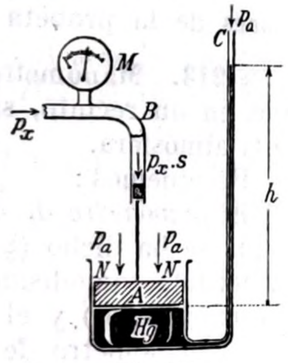


Fig. 434

Si todos los tubos son del mismo calibre, se puede suponer $h_1 = h_2 = \ldots\ldots h_n$ gracias a la incompresibilidad de los líquidos, y la [1] da más simplemente:

$$p_x - p_a = \Delta p = h_1 + (n - 1)\ h_1 \cdot \frac{12{,}59}{13{,}59}. \qquad \begin{matrix} h_1 \text{ en cm} \\ \Delta p \text{ en cm}_{Hg} \end{matrix} \quad [2]$$

También se emplea con el mismo objeto el *manómetro de* DESGOFFE, *de sensibilidad reducida* (fig. 434).

Sea p_x la presión en el interior de B, y sea p_a la presión atmosférica. La presión p_a actúa sobre C, o bien equilibra la presión atmosférica p_a, que actúa sobre la porción libre NN de la superficie superior del émbolo A, o bien equilibra la parte p_a de la presión p_x, que está transmitida por la varilla que une los dos émbolos, el pequeño de sección s y el grande de sección S.

Sobre el émbolo pequeño actúa también la presión $\Delta p = p_x - p_a$, como corresponde a la sección de tal varilla, y asimismo la presión $\Delta p = p_x - p_a$ sobre el resto de la sección s, a causa de la presión atmosférica operante sobre la parte exterior de tal émbolo.

La fuerza transmitida por la varilla, y por lo tanto $s \cdot \Delta p$, y la presión específica engendrada sobre S, es $\frac{s}{S} \cdot \Delta p$. Ésta es la presión específica ejercida sobre el mercurio Hg y equilibrada por la columna h.

Se tiene, pues:

$$h = \Delta p \cdot \frac{s}{S};$$

luego:

$$\Delta p = h\,\frac{S}{s}$$

$\left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\}$ h en cm, Δp en cmHg [3]

La presión real dentro de B es:

$$p_x = \Delta p + p_a.$$

Por ejemplo, para $\frac{s}{S} = \frac{1}{100}$, un desnivel h de mercurio de unos 74 cm, igual a una presión de 1 $\frac{\text{kg}_\text{p}}{\text{cm}^2}$ en S, corresponde a una presión Δp de 100 $\frac{\text{kg}_\text{p}}{\text{cm}^2}$ ($\approx$ 1000 newton por cm^2).

Los rozamientos del émbolo A disminuyen mucho la sensibilidad y la precisión.

Todos los manómetros antes mencionados tienen poca «rapidez», necesitando un tiempo sensible para indicar la presión, por lo cual no son aptos para señalar o registrar presiones que varíen rápidamente con el tiempo. Expondremos más adelante (§ 262 y § 264, 2.º) un método para medir las presiones rápidamente variables (explosiones, choques, presiones debidas a la llegada de ondas elásticas, etc.).

El método del *crusher* es adecuado para obtener, de un modo simple y suficientemente preciso, el valor máximo de la presión alcanzada durante una explosión, y particularmente para determinar la presión obtenida en la recámara de un cañón durante el disparo: la presión a medir actúa sobre un émbolo que comprime axialmente un pequeño cilindro de cobre. Medidas preliminares, efectuadas mediante una presión conocida sobre un cilindro igual, permiten deducir la presión en la recámara a partir del aplastamiento del cilindro.

§ 214. Micromanómetros. Daremos una idea de los más sensibles entre los numerosos tipos existentes. Lo mismo que los ma-

nómetros precedentes, son también aparatos diferenciales adecuados para medir pequeñas diferencias de presión.

a] **Micromanómetro de líquido.** Dos líquidos no miscibles, de densidad casi igual (como esencia de trementina y una mezcla de agua y alcohol), ocupan las dos partes del aparato (*micromanómetro de* KRETZ, fig. 435).

Si la razón entre las secciones s y S es, por ejemplo, de 1 a 100, se puede deducir el desnivel h entre R_1 y R_2 y, por tanto, la diferencia de presión $\Delta p = p_2 - p_1$ entre D_1 y D_2, a partir del corrimiento x de A. Se tiene, en efecto:

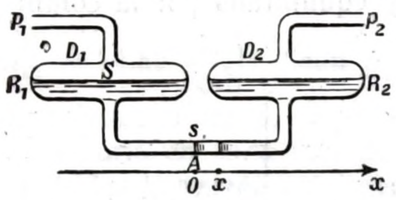


Fig. 435

$$h = x \cdot \frac{2 \cdot s}{S}.$$

En el ejemplo supuesto, h es $\frac{1}{50} \cdot x$. La diferencia Δp resulta expresada en altura h de esencia de trementina, y como la masa específica de ésta es 0,88 $\frac{g_m}{cm^3}$ aproximadamente, la diferencia de presión en cm_{H_2O} será, según la [7], § 207:

$$\Delta p = p_2 - p_1 = h \cdot 0{,}88 = 0{,}88 \cdot \frac{2\,s}{S}\, x. \qquad \begin{matrix} x \text{ en cm} \\ \Delta p \text{ en } cm_{H_2O} \end{matrix}$$

Un corrimiento de 0,5 mm en A resulta perfectamente visible y corresponde a una diferencia de presión

$$h = 0{,}5 \cdot \frac{2\,s}{S} = 0{,}01 \text{ mm}.$$

El aparato permite señalar una diferencia de presión del orden de 0,01 mm_{H_2O}, es decir, poco menos de 10 barías; no es posible alcanzar una sensibilidad mayor por la influencia nociva de la capilaridad en A.

El manómetro de KRETZ puede emplearse con un solo líquido cuando éste contiene en suspensión gránulos pequeñísimos, que se observan en A con un microscopio micrométrico (fig. 435). El gránulo observado sustituye a la superficie A; se elimina de este modo el error de capilaridad, y se pueden observar corrimientos de 0,001 mm. El método resulta bastante más sensible que el de KRETZ.

Una sensibilidad tan grande resulta ilusoria si no se procede con mucho cuidado, evitando especialmente cualquier diferencia de temperatura en el líquido, que produciría una corriente de convección.

Puede obtenerse la sensibilidad de 0,001 mm_{Hg} montando una palanca óptica (§ 36) en uno de los recipientes R_1, R_2 (fig. 435) para amplificar las variaciones de nivel de la superficie del líquido; en

este caso se empleará un solo líquido para llenar el manómetro.

b] **Micromanómetro de membrana.** Las dos presiones que se comparan actúan sobre las dos caras de una gran membrana finísima y elástica M (fig. 436), vista desde arriba), cuyos movimientos se hacen visibles con el dispositivo de la palanca óptica. El espejito S, que puede girar alrededor del eje vertical O, se encuentra obligado por A a seguir el movimiento de la membrana.

Este instrumento (FRY) es sensible a una diferencia de presión de 0,001 mm_{H_2O} y presenta una rapidez aceptable. El aparato debe calibrarse.

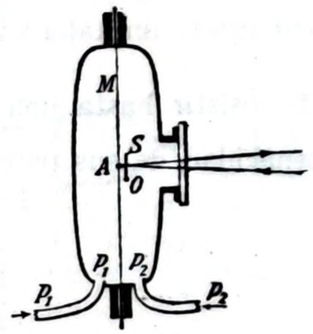


Fig. 436

§ 215. Valores de algunas presiones. He aquí el orden de magnitud de algunas presiones (superiores a la presión atmosférica):

Gas del alumbrado: $5 \div 10$ $cm_{H_2O} = 0{,}05 \div 0{,}1$ $\frac{\text{newton}}{cm^2}$

Neumáticos de bicicleta	hasta 2 $\frac{kg_p}{cm^2}$ = 20	$\frac{\text{newton}}{cm^2}$
Neumáticos de automóviles	8 » = 80	»
Calderas de vapor	10 a 20 » = 100 a 200	»
Balones de oxígeno para uso médico	10 » = 100	»
Tubos de hidrógeno y oxígeno para uso industrial	hasta 200 » = 2000	»
Presión máxima en el fusil italiano de guerra	3 300 » = 33 600	»
Explosivos rompedores	hasta 10 000 » = 100 000	»

AMAGAT midió presiones de hasta 430 «atmósferas» utilizando un manómetro de aire libre, con mercurio, en un pozo de 330 m, y de hasta 3000 «atmósferas» mediante un manómetro de DESGOFFE, con error menor que algunos cm_{Hg}.

ROEBUCK y CRAM (1937) han construído un manómetro múltiple de 8 columnas, con mercurio y tolueno, de una altura de 17,5 m, para la medida de presiones de hasta ≈ 2000 $\frac{\text{newton}}{cm^2}$ (195 «atmósferas») con la precisión de 0,1 $^0/_{00}$.

SPRING, en sus experimentos sobre la difusión de los sólidos plásticos, ha llegado a una presión de 20 000 $\frac{kg_p}{cm^2} \approx 200\,000$ $\frac{\text{newton}}{cm^2}$.

Las principales propiedades de la materia sometida a presiones de hasta 20 000 $\frac{kg_p}{cm^2}$ son conocidas hoy principalmente por los experimentos de BRIDGMAN, quien, mediante piezómetros construídos con una aleación de tungsteno y cobalto, ha llegado a alcanzar la presión de $\approx 50\,000$ $\frac{kg_p}{cm^2} \approx 500\,000$ $\frac{\text{newton}}{cm^2}$. Recientemente, dicho

físico ha llegado a un resultado inesperadamente feliz realizando la idea de superar este límite mediante el empleo de dos robustos piezómetros, uno interior al otro : mientras la presión en el piezómetro externo se limitaba a 25 000 $\frac{kg_p}{cm^2}$, el piezómetro interno resultó capaz de resistir hasta una presión de 200 000 $\frac{kg_p}{cm^2}$, demostrando que la tenacidad de sus paredes aumenta fuertemente con la presión.

CAPÍTULO V

Fenómenos de superficie

§ 216. Contacto entre varias fases. En un sistema de cuerpos en equilibrio (por ejemplo, agua en presencia de su vapor), cada parte del sistema que resulte homogénea, incluso observada con los medios ópticos más potentes, constituye una *fase*; si la fase es transparente, debe ser bien límpida, pues toda turbidez se debe a difusión de la luz y es síntoma de heterogeneidad. Véase también en el § 226, *a*], 2.º, la definición de homogeneidad.

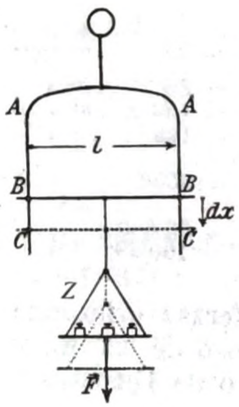


Fig. 437

En el ejemplo anterior se hallan presentes dos fases: la fase líquida (agua) y la fase gaseosa (vapor de agua).

La *superficie de contacto* entre dos fases es superficie de separación entre dos partes del sistema, cada una de las cuales es homogénea. Pueden existir superficies de contacto :

entre líquido y gas, entre sólido y gas,
entre líquido y líquido, entre sólido y líquido.

Para los fenómenos que siguen no interesa el caso de contacto sólido - sólido.

Cuando se hallan en presencia tres fases, como ocurre con una lámina de vidrio sobre la cual hay una gota de mercurio, en el aire, existe una *línea de contacto* común a las tres fases ; en el ejemplo indicado, esta línea es el contorno común de las superficies de contacto vidrio-mercurio, vidrio-aire y aire-mercurio.

Los *fenómenos de superficie* más simples se presentan en el contacto entre las diversas fases de un mismo cuerpo puro, como hielo-agua-vapor de agua; o de cuerpos puros no miscibles entre sí, como alcohol-mercurio. Pero no es siempre fácil experimentar en condiciones idealmente tan sencillas ; así, el caso más simple de « lámina

líquida » es una lámina de agua pura en presencia de vapor de agua saturado ; pero la mayor parte de los experimentos sobre láminas líquidas se suelen efectuar en el aire con láminas de agua jabonosa. En efecto, es más fácil experimentar en el aire, y conviene emplear láminas persistentes como las que se obtienen con una buena agua jabonosa.

§ 217. Superficie de contacto. Tensión superficial. Se forma una lámina de agua jabonosa en el espacio comprendido entre un hilo metálico *CAAC* en ∪ y un hilo metálico fino *BB* (figura 437). Esta lámina tiende a contraerse. Si el aparato se mantiene vertical, el hilo *BB* tiende a subir, a pesar de su peso.

La lámina líquida comprendida entre *AA* y *BB* es contráctil ; la fuerza peso $\vec{F}$ del hilo *BB* y del lastre *Z*, que es necesario colgar de *BB* para equilibrar esta contractilidad, puede servir para la medida de ésta.

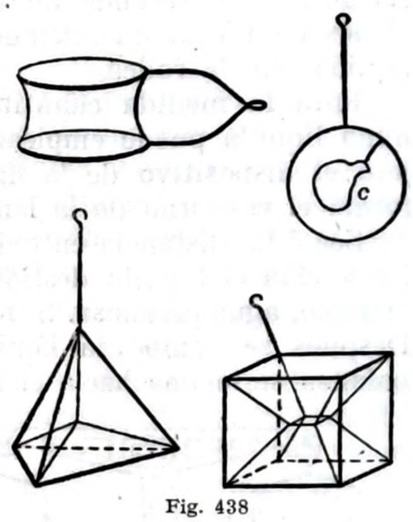


Fig. 438

Se demuestra cualitativamente la contractilidad de la lámina líquida mediante la formación de láminas de agua jabonosa apoyadas en contornos de hilos metálicos. La forma de las láminas corresponde siempre a la que tiene menor área compatible con la forma del contorno (fig. 438). El hilo de algodón *c*, que forma un bucle, se extiende formando un círculo perfecto cuando se rompe la lámina de su interior ; en efecto, el círculo tiene una área máxima a igualdad de perímetro, y el área circular, y por tanto máxima del bucle, dejará para la lámina restante, existente entre el hilo y el contorno exterior, una lámina líquida, cuya área será mínima.

Fig. 439

La contractilidad es propiedad que corresponde a la superficie de separación aire-agua jabonosa. En los experimentos citados, las superficies contráctiles son dos : las dos caras de la lámina.

Se puede preparar una disolución de alcohol en agua de una concentración adecuada para que tenga la misma densidad que el aceite de oliva.

Echando una gota de aceite de oliva en dicha disolución, queda en equilibrio indiferente y toma una forma estable perfectamente esférica. La forma esférica es la que tiene menor superficie a igualdad de volumen. Luego, la superficie de separación de los dos líquidos es contráctil.

La forma de las gotas de mercurio y la de las gotas de agua que se forman lentamente en un cuentagotas, demuestra la existencia de la lámina contráctil en la superficie líquido-gas y también en la

superficie líquido-vacío (realmente, en la superficie líquido-vapor saturante del líquido).

Se puede obtener una estroboscopia de las gotas en que se rompe una vena líquida vertical que cae libremente en el aire (fig. 439). La gota se desprende alargada, y en su caída experimenta oscilaciones de forma que demuestran la contractilidad de la superficie líquida que la rodea.

Para la medida cuantitativa de la «contractilidad» de una lámina líquida puede emplearse una balanza, sirviendo para este objeto el dispositivo de la figura 440. *MNA* es el hilo metálico que forma el contorno de la lámina.

Sea l la distancia entre los lados verticales M y N del contorno. En V está el líquido destinado a suministrar la lámina líquida; por ejemplo, agua jabonosa. Se forma la lámina y se equilibra con lastre Z. Después se rompe la lámina; la balanza se inclina hacia el lado Z.

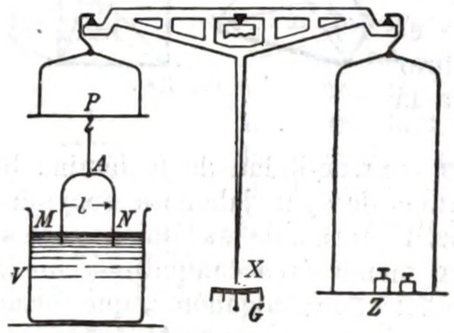


Fig. 440

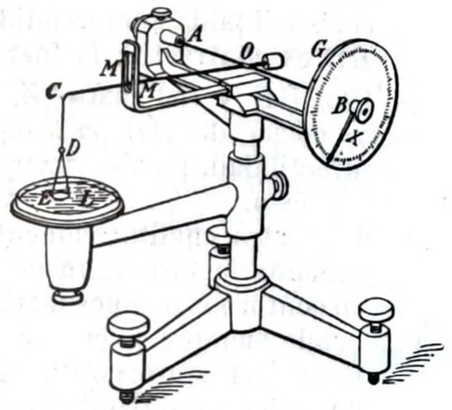


Fig. 441

Se restablece el equilibrio mediante pesos colocados en P. Si m es su masa, $m \cdot g$ mide la fuerza F de contractilidad de la lámina.

Teniendo en cuenta que la lámina tiene dos caras, se define la *tensión superficial* τ mediante la relación

$$\tau = \frac{F}{2l}. \qquad [1]$$

Se tiene:

$$[\tau] = \frac{[F]}{[l]} = [l^0 \cdot m \cdot t^{-2}];$$

la unidad coherente de tensión superficial deriva de la de fuerza y de longitud; es comodísima la unidad coherente del sistema cmg_m seg, que es la $\frac{\text{dina}}{\text{cm}}$.

Es muy cómodo emplear la balanza de torsión de la figura 441. El hilo en U se sustituye por un anillo. Formada la lámina líquida entre el anillo E y el hilo L, y llevado el índice CO en correspondencia

con la señal de referencia MM, mediante una torsión del hilo AB producida con el botón B, se rompe la lámina líquida; el índice OC da un salto hacia arriba; se le lleva de nuevo a la señal anterior mediante un giro conveniente de B. La graduación G da (por ejemplo, en dinas) la fuerza F de tensión superficial, que actúa sobre el anillo en el sentido CD por efecto de la lámina, lo mismo que en la balanza de HARTMANN y BRAUN (fig. 75).

Todavía puede emplearse la [1], siendo l el perímetro del anillo.

Al contrario de lo que sucedería en una lámina elástica (de caucho, por ejemplo) en la cual la tensión τ, definida por la [1], dependería del aumento de superficie provocado en la lámina, en las láminas líquidas bien limpias, de líquidos puros que sólo están en presencia de su propio vapor saturante, τ es independiente de la extensión de la superficie; el equilibrio entre $\vec{F}$ y la fuerza de contractilidad de la lámina, en la figura 437, es un equilibrio indiferente.

τ depende de la naturaleza del líquido: si el gas circundante es inerte e insoluble en el líquido y no son intensos los fenómenos de adsorción (§ 224), τ depende poco del gas que le rodea, y su valor respecto al vacío (mejor dicho, respecto al vapor saturante del líquido) se puede confundir con el valor de τ, con relación al gas.

τ disminuye al aumentar la temperatura, hasta anularse para los líquidos en su punto crítico (§ 309); puede decirse, en general, que τ es mayor en los líquidos que están más lejos de su temperatura crítica.

τ depende de una manera increíble de la contaminación de la superficie mediante cantidades mínimas de cualquier impureza; por ello son ya muy difíciles las medidas seguras de τ con un error menor que $1 \div 2$ %.

He aquí algunos valores de τ:

Agua-aire	a	20 °C	73	dinas/cm
Alcohol etílico-aire ...	»	20 °C	22	
Éter etílico-aire.....	»	20 °C	16	
Mercurio-vacío	»	20 °C	435	
»	»	70 °C	423	

Puede imaginarse que τ expresa la fuerza que debe mantener unidos los dos labios de un corte ideal de 1 cm de longitud efectuado en la superficie del líquido; esta fuerza ha de suponerse tangente a la lámina y perpendicular al corte.

Es mejor considerar que una lámina líquida posee una *energía superficial potencial*, puesto que, contrayéndose isotérmicamente, puede levantar un peso y, por tanto, efectuar un trabajo. Para un corrimiento hacia abajo dx (fig. 437) del peso $F = 2l \cdot \tau$ que equilibra la tensión superficial, este peso F efectúa el trabajo:

$$d\mathcal{L} = dx \cdot F = 2l \cdot \tau \cdot dx.$$

A este trabajo corresponde un aumento de superficie $dS = 2 \cdot l \cdot dx$ entre las dos caras de la lámina ; luego,

$$\tau = \frac{d\mathcal{L}}{2\,l \cdot dx} = \frac{d\mathcal{L}}{dS} \qquad [2]$$

expresa la energía superficial específica, es decir, referida a la unidad de superficie ; por esto, τ se mide frecuentemente en el sistema cm g_m seg en $\frac{\text{erg}}{\text{cm}^2} = \frac{\text{dinas}}{\text{cm}}$.

En la superficie de contacto líquido-líquido se efectúan fenómenos de tensión superficial análogos a los que presentan las superficies líquido-gas. Se presenta el caso más simple cuando los líquidos no son miscibles entre sí. Se puede obtener la medida de la tensión superficial $\tau_{1,2}$ de un líquido *1* respecto a otro líquido *2* mediante los mismos métodos indicados anteriormente (figs. 440 y 441). He aquí algunos valores a 20 °C :

Mercurio-agua	418	$\frac{\text{dinas}}{\text{cm}} = \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2}$
Mercurio-aceite de oliva	335	
Agua-aceite de oliva.....	20	
Alcohol etílico-aceite de oliva	2,3	

La deformación de la superficie de los sólidos requiere, por otras causas, fuerzas tan enormes que no es posible comprobar directamente la existencia de la tensión superficial. Una prueba indirecta de que esta tensión superficial existe, aun en los cristales, es la siguiente :

Cuando en un recinto bien isotermo se hallan presentes gotitas de un mismo líquido de diferentes tamaños, se observa una destilación del líquido desde las gotas menores a las mayores : las gotas pequeñas desaparecen para ir a engrosar las grandes. Esto es debido a que el sistema tiende a tomar como configuración de equilibrio estable la que corresponde a la mínima energía potencial de superficie, es decir, aquella para la cual el mismo volumen total de líquido corresponde a una extensión de superficie menor.

Este fenómeno *(coalescencia)* es consecuencia de la presión superficial.

Pues bien, un fenómeno análogo de coalescencia se observa cuando se hallan en presencia cristalitos pequeñísimos de una substancia determinada. Debe deducirse que también en este caso la superficie total de la fase sólida tiende a un mínimo, lo que hace presumir la existencia de una energía superficial y, por tanto, de una tensión superficial, en los sólidos.

Es probable que la misma tendencia, es decir, la tensión superficial, sea la causa preponderante del fenómeno de recristalización (§ 183).

§ 218. Energía superficial, fuerzas moleculares y tensión superficial. La tensión superficial τ nos dice que la fuerza equilibrante $F = 2 \cdot l \cdot \tau$ puede aumentar la superficie de la lámina líquida, efectuando el trabajo $d\mathcal{L} = F \cdot dx$ (fig. 437).

El aumento de la superficie correspondiente es $dS = 2 \cdot l \cdot dx$.

Se ha dicho precisamente que al extender una lámina líquida se efectúa en ésta un trabajo por unidad de superficie (§ 217, [2]) :

$$\frac{d\mathcal{L}}{dS} = \tau. \qquad [1]$$

De acuerdo con el teorema de la conservación de la energía, cuando la extensión de la lámina líquida es isotérmica, se supone que este trabajo se almacena en forma de energía potencial de superficie, que será restituído por la lámina al disminuir su superficie. Un examen somero induce a pensar que el fenómeno es análogo al presentado por un resorte que está en disposición de almacenar energía elástica de posición cuando se deforma. Pero repetimos que ahora τ es constante, independiente de la expansión que se ha hecho experimentar a la lámina líquida, a condición de que no esté contaminada.

Las láminas líquidas son contráctiles y toman la superficie mínima compatible con las ligaduras y con las fuerzas exteriores aplicadas ; es decir, la energía potencial de superficie, correspondiente a la configuración de equilibrio, es mínima, como se ha visto en mecánica para la energía potencial.

La extensión de un líquido sobre otro, el aglomerarse en gotas y la coalescencia (§ 217) son consecuencia de que, por parte del líquido, se busca la configuración de mínima energía superficial.

La energía superficial, la tensión superficial y, por tanto, los fenómenos superficiales descritos en los §§ 216 ÷ 223, se pueden considerar como consecuencia de la existencia de la fuerza de cohesión.

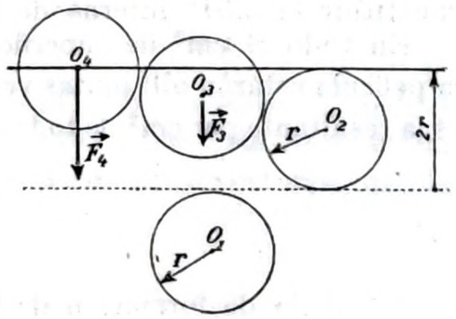


Fig. 442

Imaginemos el caso de la superficie de separación líquido-vacío. Cada molécula del líquido siente la acción atractiva de las moléculas que lo rodean. Esta atracción disminuye rápidamente con la distancia y se puede suponer sensiblemente nula a una distancia r *(radio de la esfera de acción molecular)* no bien determinada, pero del orden de algunas m μm ; por ejemplo, en el agua es $r \approx 4$ m μm (véase figura 348).

Una molécula O_1 (fig. 442), cuya esfera de acción molecular r se encuentra por completo dentro del líquido, atrae y es atraída simé-

tricamente por todas las moléculas vecinas. Las moléculas como O_3 y O_4, que pertenecen a una lámina superficial del líquido, son atraídas hacia éste por la resultante $\vec{F}$ de las fuerzas de cohesión; esta resultante va aumentando ($\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$, ...) a medida que la molécula (O_3, O_4, ...) se aproxima a la superficie del líquido.

El líquido (por ejemplo, el mercurio de una gota) se halla encerrado en una capa de moléculas que, atraídas hacia el centro de la gota por las fuerzas de cohesión, comprimen la gota *(presión de cohesión, presión interna)*.

Aumentar la superficie de un líquido significa aumentar el número de las moléculas que constituyen su lámina superficial.

Una molécula podrá ser llevada a la superficie cuando se efectúe el trabajo necesario para vencer la fuerza $\vec{F}$ a lo largo del camino r.

La fuerza $\vec{F}$ es nula cuando la distancia x de la molécula a la superficie del líquido es igual a r, y aumenta cuando x disminuye hasta cero.

Si $\vec{F}_m$ es su valor medio, $\vec{F}_m \cdot r$ es el trabajo realizado para llevar una molécula desde el interior del líquido hasta la superficie.

Para aumentar la superficie del líquido en 1 cm² es necesario efectuar un trabajo que, aproximadamente, puede suponerse para cada molécula igual a

$$\frac{1}{2} F_m \cdot r,$$

porque entre las moléculas que constituyen la nueva película superficial, unas serán llevadas hasta la superficie y otras quedarán para constituir la parte interna de la película.

En todo el cm² de superficie creada, las moléculas que forman la película estarán allí juntas venciendo la presión de cohesión $\vec{K}$, que es la resultante por cm² de todas las fuerzas $\vec{F}_m$ antes indicadas. Luego,

$$\frac{1}{2} K \cdot r$$

es el trabajo de formación de 1 cm² de superficie.

Pero este trabajo también es τ, en virtud de la [1]. Luego,

Para $\tau = 73 \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2}$ (agua), $r = 4 \text{ m}\mu\text{m} = 4 \cdot 10^{-7}$ cm,

se tiene:

$$K = 3{,}7 \cdot 10^8 \frac{\text{dinas}}{\text{cm}^2} = 3700 \frac{\text{newton}}{\text{cm}^2} \approx 380 \frac{\text{kg}_\text{p}}{\text{cm}^2}.$$

Sorprende, a primera vista, una presión interna tan enérgica en los líquidos, como resultado de la cohesión.

Consideraciones termodinámicas (§ 373) no sólo confirman la existencia de una presión interna tan fuerte, sino que conducen a valores de la misma todavía mayores; para el agua: $\approx 170\,000$ newton/cm². Efectivamente, el razonamiento efectuado no tiene en cuenta que la energía potencial adquirida por la molécula llevada a la superficie del líquido es el equivalente no sólo del trabajo mecánico efectuado $\vec{\tau} \cdot dS$, sino también de cierta cantidad de calor que es preciso proporcionar al líquido para que se conserve isotermo durante la extensión dS de su superficie.

La tensión superficial se nos presenta, pues, como el insignificante indicador de fuerzas internas bastante más enérgicas, insignificante por la pequeñez del radio de la esfera de acción molecular.

La cohesión, que constriñe las moléculas del líquido una contra otra, es la razón última de la tendencia del líquido a presentar superficie mínima, es decir, mínima energía superficial

La existencia en los sólidos de las fuerzas de cohesión, y en grado bastante más notable que en los líquidos, hace pensar que existen también en ellos presión interna y tensión superficial, como ya se ha dicho (§ 217). Pero la indeformabilidad de estos cuerpos impide efectuar experimentos para comprobar directamente la existencia de esta tensión superficial.

§ **219. Líneas de contacto.** Una línea de contacto está constituída por los puntos comunes a tres fases. Se tienen los tres casos siguientes:

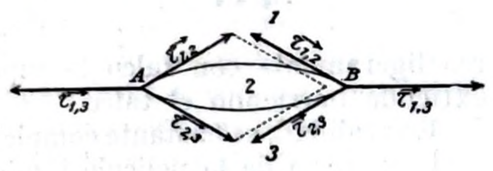


Fig. 443

a] **Gota encima de un líquido.** La línea de contorno de la gota es común a las tres fases: aeriforme *1*, líquida *2* (gota) y líquida *3*. En el esquema de la figura 443, AB representa la línea de contorno de la gota. Sobre cada elemento dl de esta línea actúan las tensiones $\overrightarrow{\tau_{12} \cdot dl}$; $\overrightarrow{\tau_{23} \cdot dl}$; $\overrightarrow{\tau_{13} \cdot dl}$ (que son tres vectores orientados como en la figura) de tres láminas líquidas. Se tendrá equilibrio si se cumple:

$$\overrightarrow{\tau_{12} \cdot dl} + \overrightarrow{\tau_{23} \cdot dl} + \overrightarrow{\tau_{13} \cdot dl} = 0,$$

o sea:

$$\vec{\tau}_{12} + \vec{\tau}_{23} + \vec{\tau}_{13} = 0. \qquad [1]$$

La gota se aplasta y ensancha, pero conserva el contorno circular y toma como configuración de equilibrio estable la que satisface a la igualdad [1]. Éste es el caso de algunos hidrocarburos del petróleo; por ejemplo, el hexadecano $C_{16}H_{34}$, sobre el agua.

Pero si *1* es aire (o vacío), *3* es agua y las láminas líquidas no están contaminadas, τ_{13} es generalmente muy fuerte $\left(\approx 73 \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2} = \frac{\text{dinas}}{\text{cm}}\right)$ res-

pecto a τ_{12} y τ_{23}. Se tiene entonces:

$$\tau_{13} > \tau_{12} + \tau_{23}\,; \qquad [2]$$

la gota tiende a extenderse. Tal es el caso de las grasas [p. ej., trioleína, $C_2H_5\cdot(C_{18}H_{33}O_2)_3$] y de los ácidos grasos (ácido butírico, ácido oleico,...) encima del agua.

En estas condiciones, ¿hasta qué límite se extenderá una pequeña gota sobre una gran superficie de agua? Los experimentos efectuados poniendo sobre el agua una gota de disolución diluída de aceite en éter, han permitido asignar un límite a esta expansión; alcanzado este límite $\tau = \tau_{12} + \tau_{23}$ no tiene ya el valor relativo a los líquidos en gran masa que aparece en la [2], sino que ha aumentado hasta alcanzar el valor τ_{13}.

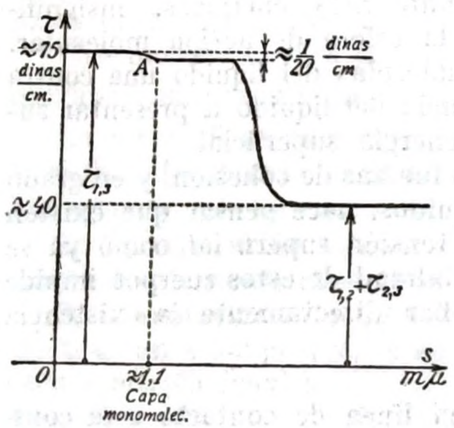


Fig. 444

Corresponde al límite antes indicado una capa de aceite encima del agua, cuyo espesor (medio) s se mide fácilmente a partir del volumen inicial de la gota y de la extensión alcanzada por la misma en la superficie del agua contaminada por el aceite: si se espolvorea ligeramente con talco la superficie pura del agua, el aceite se extiende barriendo el talco.

En realidad, es bastante compleja la dependencia entre $\tau_{12} + \tau_{23} = \tau$ y el espesor s de la película líquida; la curva $\tau = (\tau_{12} + \tau_{23}) = f(s)$ tiene la forma de la figura 444. Para $s = 0$, es decir, si se proporciona una extensísima superficie de agua a una pequeña cantidad de oleína, se tiene $\tau = \tau_{13}$, valor que corresponde al agua pura. Las moléculas de oleína desparramadas y lejanas no influyen en la tensión superficial del agua; pero sí, reduciendo la superficie concedida, las moléculas de oleína se aproximan, empieza a sentirse el efecto en el valor de τ, que resulta ligeramente disminuído. La curva $\tau = f(s)$ se flexiona en forma hiperbólica hasta un punto A en que presenta bruscamente una rama horizontal. Se supone que el punto A corresponde a un espesor monomolecular y que las moléculas de oleína se encuentran ordenadamente unas al lado de otras. El correspondiente valor de s para la trioleína resulta 1,13 m μ m. En general, estos espesores monomoleculares son del orden de 1 m μ m $= 1\cdot10^{-7}$ cm.

Para una ulterior reducción de la superficie concedida a la grasa, sus moléculas empiezan a superponerse, pero la tensión τ no se resiente hasta que la capa oleosa se haya convertido en bimolecular; he aquí la razón de la rama horizontal de la curva que sigue al punto A.

La curva $\tau = f(s)$ presenta a veces un mínimo para $s = 3 \div 4$ m μ m, índice de un intervalo de inestabilidad. La grasa se recoge entonces en gotas lenticulares, rodeadas por agua contaminada, y el perfil de las gotas no presenta los puntos angulosos A, B de la figura 443, sino que se enlaza con la superficie circundante del agua contaminada. Esta contaminación se atribuye a capas ya polimoleculares.

En una primera aproximación, que casualmente resulta poco equivocada para la trioleína, se imagina que las moléculas de esta grasa en la capa monomolecular son equiparables a *cubos* contiguos de lado $l = 1{,}13$ m μ m.

Se puede entonces obtener el número de AVOGADRO N, es decir, el número de moléculas contenidas en una molécula-gramo de un cuerpo cualquiera, a partir del peso molecular de la trioleína (885) y de su masa específica $\left(\mu = 0{,}92\ \frac{g_m}{cm^3}\right)$. En efecto, $\frac{885}{0{,}92} = 962$ cm^3 es el volumen de una molécula-gramo de trioleína, y $(1{,}13)^3$ m μ m^3 $=$ $= 1{,}44\cdot10^{-21}$ cm^3 es el volumen para cada molécula.

Luego,

$$N = \frac{962}{1{,}44}\cdot10^{21}\ \frac{\text{moléculas}}{\text{mol - g}} = 66{,}8\cdot10^{22}\ \frac{\text{moléculas}}{\text{mol - g}} \qquad [3]$$

De acuerdo con los resultados deducidos de la forma de la curva $\tau = f(s)$ de la figura 444, las determinaciones ópticas del espesor mínimo s de láminas líquidas de agua jabonosa conducen a valores de s próximos a $4 \div 5$ m μ m, que se cree poder identificar con el duplo de las dimensiones moleculares. Hace poco seguras estas determinaciones de s la incertidumbre respecto al valor del índice de refracción del líquido en láminas delgadísimas. Son más atendibles, por ser independientes de toda hipótesis sobre este índice de refracción, los resultados de medidas de espesor de láminas de mica, obtenidas por exfoliación (BOND). Este espesor varía con discontinuidad, y se observa que se presenta un valor más frecuente de la discontinuidad mínima observable. Este valor es $\approx$ 1,8 m μ m, y puede identificarse con la distancia entre sucesivos planos reticulares y, por tanto, con las dimensiones moleculares de la mica.

Volviendo a los experimentos sobre capas superficiales de grasas y de ácidos grasos, un estudio más detenido de la curva de la figura 444 en correspondencia con el punto A, ha revelado algunas características cuya interpretación exige la admisión de hipótesis muy plausibles sobre la forma y las dimensiones de las moléculas que constituyen la capa. Recordaremos aquí solamente que de estos estudios ha deducido LANGMUIR que las capas monomoleculares obtenidas por la extensión de grasas o de ácidos grasos encima del agua, están formadas por moléculas todas igualmente orientadas respecto al líquido subyacente.

Los grupos — COOH del ácido y — COO — de la grasa son «hidrófilos» y se adhieren al agua, mientras que los grupos — CH_3 permanecen alejados: he aquí por qué los hidrocarburos no se extienden sobre el agua, y las grasas y los ácidos, sí. Las moléculas son más bien comparables a paralelepípedos rectos alargados, de aristas l, l, s ($s > l$), y todos igualmente orientados. La dimensión más larga, s, es normal a la superficie del agua, y el grupo — COOH (o bien — COO —) se adhiere a ella.

Los experimentos dan la masa m de grasa que recubre con una capa monomolecular una superficie de agua conocida, S.

Se deduce de ahí, como se ha dicho anteriormente, el espesor s de la capa de grasa, es decir, la dimensión mayor s de las moléculas.

Se admite conocido por otro camino el número de AVOGADRO N. Se deduce así el número n de moléculas contenidas en la masa m de grasa. Se tiene, en efecto:

$$n : m = N : m_{mol},$$

en donde m_{mol} es la masa molecular de la grasa.

Se puede, pues, calcular el área $l^2 = \frac{S}{n}$ correspondiente a cada molécula, y, finalmente, la arista $l = \sqrt{\frac{S}{n}}$ de la misma.

He aquí algunos resultados:

	l	s
Ácido palmítico $C_{15}H_{31}\cdot COOH$	$4{,}6\cdot10^{-8}$ cm	$24{,}0\cdot10^{-8}$ cm
Ácido cerótico $C_{25}H_{51}\cdot COOH$	$5{,}0\cdot10^{-8}$ »	$31{,}0\cdot10^{-8}$ »
Ácido oleico $C_{17}H_{33}\cdot COOH$	$6{,}8\cdot10^{-8}$ »	$11{,}2\cdot10^{-8}$ »
Trioleína $(C_{17}H_{33}\cdot COO)_3\cdot C_3H_5$	$11{,}2\cdot10^{-8}$ »	$13{,}0\cdot10^{-8}$ »

El cálculo de N según la [3] no resulta muy equivocado, porque en la trioleína, l es casi igual a s; la molécula es casi cúbica.

PERUCCA para el mercurio, y BOUHET para el agua y otros líquidos, han demostrado, por diferentes caminos, que debe producirse también una orientación molecular análoga en la superficie de los líquidos puros.

b] **Líquido en contacto con una pared sólida.** La línea de contacto es la común a las tres fases: aeriforme *1*, líquida *2* y sólida *3*.

Sólo excepcionalmente es plana y horizontal la superficie de un líquido pesado que se halla en la proximidad de una pared (por ejemplo, vertical, fig. 445), como exigirían las leyes del § 202. La sección del líquido por un plano vertical tiene generalmente una de las dos formas indicadas en la figura.

Puede explicarse este fenómeno atribuyendo una *tensión superficial* no solamente a la superficie de contacto (*1 ; 2*) entre los dos flúidos, sino también a la *superficie de contacto flúido-sólido*.

En el punto de contacto A (en realidad, en la línea de contacto) se encuentran presentes tres tensiones superficiales, τ_{12}, τ_{13}, τ_{23}, orientadas como se indica en la figura. Por el principio de los trabajos virtuales, el punto A, situado junto a la pared, se halla en equilibrio si la resultante

$$\vec{R} = \vec{\tau}_{12} + \vec{\tau}_{23} + \vec{\tau}_{13}$$

es normal a la pared. Entonces, en efecto, $\vec{R}$ tiende a separar A de la pared, lo cual es imposible por la ligadura impuesta a A.

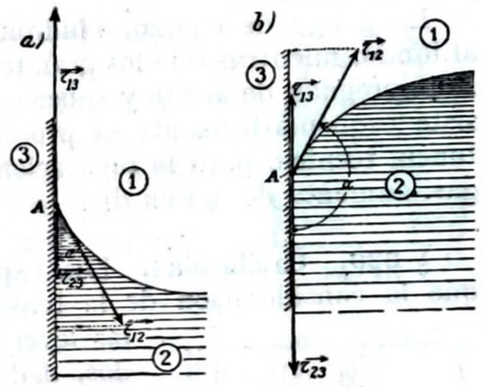


Fig. 445

Luego, se tiene equilibrio cuando es:

$$\tau_{13} = \tau_{23} + \tau_{12} \cos \alpha ;$$

α es el *ángulo de enlace* o *de contacto* entre la pared *3* y el líquido *2* (*1* es generalmente el aire); τ_{13}, τ_{23}, τ_{12}, son las magnitudes de las tensiones, y cos α es positivo o negativo según que sea $\alpha < 90^o$ o $\alpha > 90^o$.

Cuando es $\alpha > 90^o$ (aire-mercurio-vidrio), el líquido *2* (mercurio) no moja a la pared; cuando es $\alpha < 90^o$ (aire-agua-vidrio), el líquido *2* (agua) moja la pared; pero sólo diremos que la *moja perfectamente* cuando es $\alpha = 0$. Cuando α es agudo, pero no nulo, levantando lentamente la pared (por ejemplo, una lámina de vidrio vertical sumergida en agua), el sólido que constituye la pared puede también resultar enjuto, o sólo parcialmente mojado.

Experimentos realizados con caras cristalinas no equivalentes de un mismo cristal, obtenidas por exfoliación, han demostrado que el ángulo α, en un cristal determinado, no varía de una cara a otra, siendo muy probable, por tanto, que la tensión superficial en los cristales sea constante para todas sus caras (PERUCCA), lo que hace presumir que en toda la superficie de los cristales existe la misma orientación atómicomolecular.

c] **Sólido en contacto con dos líquidos.** En la figura 465, supongamos que *1* indica un líquido distinto de *2* y no miscible con éste. La línea de contacto *1 ; 2 ; 3*, cuya traza en la figura es A, es entonces una línea común a dos líquidos y a un sólido. También ahora será excepcional que el ángulo de contacto α sea de 90°. Generalmente, es $\alpha \neq 90^o$. En la configuración de la figura 445, *a*), el líquido *2* tiende a sustituir el líquido *1* en el contacto con el sólido, y éste se adhiere mejor a *2* que a *1*. Cuando es $\alpha = 0^o$, el líquido *2* se insinúa entre *1* y *3* y separa al líquido *1*, por decirlo así, del sólido *3*.

En lugar de considerar la superficie de contacto con una pared sólida, imagínese que el sólido, convertido en polvo fino, se agita

con una mezcla dc los dos líquidos *1* y *2*. Cada partícula del sólido termina por encontrarse aprisionada en una envolvente del líquido *2*.

Para un mismo par de líquidos *1; 2*, no está excluído que otro sólido *3′* puede presentar mayor adherencia con el líquido *1* que con el líquido *2*. Este es el caso para ciertos aceites minerales (*1*) agua. (*2*), cuarzo (*3*) y sulfuros metálicos (*3′* : galena, blenda, pirita, etc.) Si el mineral está constituído por uno de estos sulfuros mezclado con ganga de cuarzo, se muele, se bate con la mezcla de los dos líquidos y se decanta.

La ganga de cuarzo, « hidrófila », se impregna de agua y se va al fondo, mientras que los granitos de sulfuro metálico, « hidrófobos », se impregnan de aceite y suben con éste a flor de agua. En esto consiste esquemáticamente el procedimiento de *flotación*, cuya importancia técnica, para la separación de los minerales útiles de las gangas, aumenta de día en día.

§ 220. Capilaridad. Los experimentos del § 219 nos enseñan que la consideración de la tensión superficial conduce a modificar las leyes del equilibrio de los líquidos pesados, dadas en el § 202.

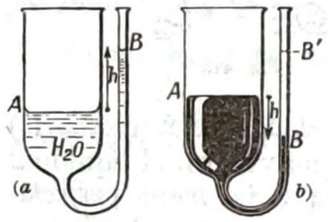


Fig. 446

La corrección es particularmente grande en el caso de los *fenómenos de capilaridad*, cuyos dos ejemplos típicos son los siguientes:

a] Un tubo en ∪ (fig. 446) tiene una rama capilar (por ejemplo, radio interior, 0,1 mm) y la otra rama es mucho más ancha (radio interior, $2 \div 3$ cm).

Si el tubo está bien limpio y se vierte agua en él, la forma de la lámina líquida junto a la pared de vidrio es la de la figura 445, *a*), siendo el ángulo α casi nulo. Se obtiene el equilibrio, quedando un desnivel h [fig. 446, *a*]) entre las dos superficies libres, siendo más alto el nivel del agua en el tubo capilar, en el cual la superficie libre es, con bastante aproximación, esférica cóncava *(menisco cóncavo)*. Para $\alpha = 0$, este menisco es prácticamente hemiesférico.

Sucede lo contrario con los líquidos que no mojan el vidrio [figura 445, *b*)], como en el caso del mercurio : se presenta entonces en el capilar un *menisco convexo*, y el desnivel h [fig. 446, *b*)] tiene signo opuesto.

El valor de h depende del radio r del capilar en el punto B, a igualdad de naturaleza de los cuerpos (líquido, pared y gas) y a igualdad de temperatura. Se cumple la fórmula

$$h = \frac{k}{r}, \qquad \textit{(Ley de JURIN)} \qquad [1]$$

siendo k una constante que depende de la tensión superficial τ del líquido y del ángulo de enlace α del líquido con la pared (§ 222).

Influyen grandemente en el valor α o en el de τ, y, por tanto, en el de k, contaminaciones mínimas del vidrio o del líquido. El siguiente experimento demuestra cuán delicada es la medida de h : inclinando el tubo de la figura 446, *b*), de modo que el menisco de mercurio llegue hasta B', y colocando lentamente de nuevo el tubo en posición vertical, se ve a menudo que el menisco de mercurio toma una forma ligeramente cóncava ($\alpha < 90°$), y en el equilibrio se tiene ahora un desnivel capilar en el mismo sentido que el del agua. Esto sucede incluso cuando se ha procedido con el máximo aseo.

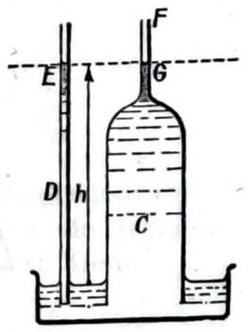


Fig. 447

En la ley de JURIN entra en juego el radio r del capilar en el punto en donde se forma el menisco : el tubo D y el tubo C (fig. 447) originan el mismo desnivel capilar con tal que en E y G tengan el mismo radio. Pero en el caso D, este desnivel se forma espontáneamente al sumergir el tubito en el líquido, mientras que en el caso C es necesario aspirar por F para que el líquido suba a llenar la parte ancha del tubo, y solamente cuando el menisco está en la porción capilar del mismo es capaz de mantener levantada la columna subyacente de líquido sin que sea necesario ya aspirar por F. El experimento tiene alguna analogía con la paradoja hidrostática.

b] Sea una vasija prismática en forma de cuña V (fig. 448), siendo muy pequeño el ángulo β que forman las dos caras de la cuña, cuya intersección h es la arista vertical. La superficie libre de un líquido en este recipiente no es plana ni horizontal, y el perfil de la misma, que se dibuja en las caras laterales de la vasija, es, con buena aproximación, una rama de hipérbola equilátera, siendo la arista h una de las asíntotas. La forma de esta superficie será cóncava [fig. 448, *b*)] o convexa [fig. 448, *a*)] según que el líquido moje o no las paredes.

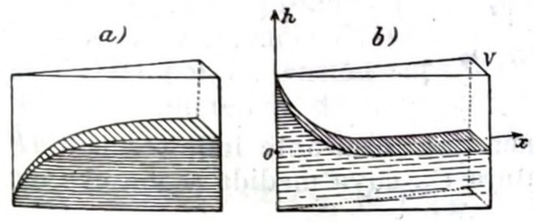


Fig. 448

§ 221. Fórmula de Laplace. La tensión superficial τ, a la que se atribuye la contractilidad de la superficie de un líquido, engendra una acción perpendicular a la superficie líquida en uno cualquiera de sus puntos O (fig. 449).

En efecto, trazando con centro en O una esfera de radio dr, cortará a la superficie líquida Σ según una línea Γ, que si Σ es regular y se desprecian los infinitésimos de orden superior, será una circunferencia de centro O y radio dr. El área de este círculo vale : $\pi \cdot (dr)^2 = dS$.

Dos diámetros vecinos, formando un ángulo $d\varphi$, cortan sobre la circunferencia dos arcos iguales $dl_1 = dl'_1 = d\varphi \cdot dr$. La tensión superficial τ aplica a estos dos arcos opuestos, respectivamente, las fuerzas $\overrightarrow{\tau \cdot dl_1}$ y $\overrightarrow{\tau \cdot dl_1'}$, de igual magnitud, tangentes a Σ y normales a los arcos correspondientes. A causa de la curvatura de la superficie Σ,

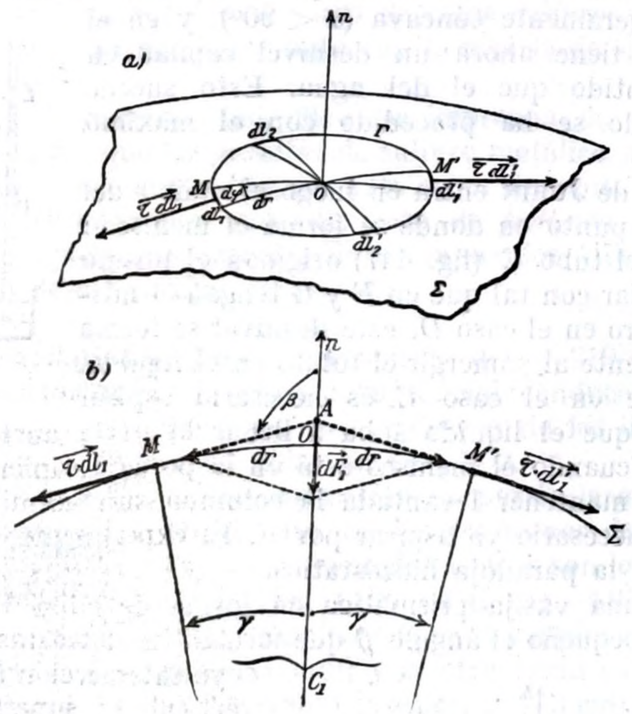


Fig. 449

las dos fuerzas $\overrightarrow{\tau \cdot dl_1}$ y $\overrightarrow{\tau \cdot dl_1'}$ tienen una resultante infinitesimal $d\vec{F}$ dirigida hacia el centro de curvatura C_1, cuya medida según el eje n es, en valor y signo :

$$dF_1 = 2 \cdot \tau \cdot dl_1 \cdot \cos\,\beta = -\,2 \cdot \tau \cdot dl_1 \cdot \operatorname{sen}\,\gamma =$$

$$= 2 \cdot \tau \cdot d\varphi \cdot dr \cdot \frac{dr}{r_1} = 2 \cdot \tau \cdot (dr)^2 \cdot d\varphi \cdot \frac{1}{r_1},$$

siendo r_1 el radio de curvatura en O de la sección $MOM'C_1$, que se tomará positivo o negativo según que OC_1 sea del mismo sentido que el fijado para el eje n, o de sentido contrario.

Otro par de diámetros vecinos, perpendiculares a los anteriores, corta los elementos $dl_2 = dl_2' = dl_1$ del círculito Γ, a cuyos elementos están aplicadas las tensiones :

$$\overrightarrow{\tau \cdot dl_2}, \qquad \overrightarrow{\tau \cdot dl_2'},$$

cuya resultante infinitesimal $d\vec{F}_2$ mide a lo largo del mismo eje n :

$$dF_2 = 2 \cdot \tau \cdot (dr)^2 d\varphi \cdot \frac{1}{r_2}$$

Estos cuatro arcos iguales, dl_1, dl'_1, dl_2, dl'_2, contribuyen a la acción normal en la cantidad

$$dF = dF_1 + dF_2 = 2 \cdot \tau \cdot (dr)^2 \cdot d\varphi \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right).$$

Designando por R_1 y R_2 los radios principales de curvatura de Σ en el punto O, y recordando que para cualquier par de secciones normales perpendiculares entre sí y trazadas por O se tiene

$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \text{const.} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} =$ « valor doble de la curvatura media de Σ en el punto O », se tiene :

$$dF = 2 \cdot \tau \cdot (dr)^2 \cdot d\varphi \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Integrando respecto a φ desde 0 a $\frac{\pi}{2}$, es decir, sumando las acciones normales dF producidas por todos los elementos dl_1, dl_2 que forman la circunferencia Γ, se tiene la medida dT de la acción normal producida por la tensión superficial que actúa en todo el contorno de la circunferencia de radio dr :

$$dT = 2 \cdot \tau \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (dr)^2 \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \tau \cdot dS \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Luego una lámina líquida cuya curvatura media no sea nula, engendra una presión específica $p = \frac{dT}{dS}$ distinta de cero, paralela a n, (o sea normal a dS) y cuya medida, en valor y signo, sobre este eje es :

$$p = \tau \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right). \qquad [1]$$

Ésta es la *fórmula de* LAPLACE.

Fórmese con armazones de alambre análogos a los de la figura 438, tan complicados como se quiera, un amasijo cualquiera de pompas y láminas líquidas con agua jabonosa, y espérese a que este conjunto de superficies líquidas tome una configuración de equilibrio.

Cada pared líquida dividirá dos espacios, en cada uno de los cuales la presión del aire tiene que ser constante, según el principio de PASCAL; por tanto, también será constante la diferencia de presiones $p_2 - p_1 = \Delta p$ entre estos dos espacios, diferencia que es debida a la curvatura de las láminas líquidas, según la [1]. Pero τ también es constante. Luego, para una de estas paredes líquidas se tendrá:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \text{const. en todos los puntos.}$$

Las superficies que se obtienen mediante láminas líquidas en equilibrio son *superficies de curvatura media constante*. Cuando las dos caras de una lámina líquida están en contacto con la atmósfera libre, se tiene $\Delta p = p_2 - p_1 = 0$, tomando la lámina líquida la configuración de una superficie de curvatura media nula.

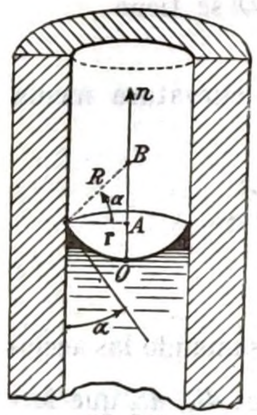


Fig. 450

§ **222. Consecuencias.** La fórmula anterior explica todos los fenómenos de capilaridad.

La ley de JURIN, por ejemplo, puede deducirse del siguiente modo:

En la figura 446, *a*), la forma prácticamente esférica del menisco en el capilar origina, a causa de la tensión superficial τ, una presión vertical p dirigida según el eje del tubo y hacia arriba, que equilibra la presión hidrostática de la columna líquida h.

Si r (fig. 450) es el radio del tubo capilar y α es el ángulo de enlace del líquido con la pared, el radio de la superficie esférica del líquido es:

$$R = \frac{r}{\cos \alpha} = R_1 = R_2.$$

Por tanto,

$$p = 2 \cdot \tau \cdot \frac{\cos \alpha}{r}.$$

Para $\alpha < 90^o$ se tiene $\cos \alpha > 0$, $r > 0$, $p > 0$; es decir, que en los líquidos que mojan el tubo, la presión capilar está dirigida hacia arriba y equilibra justamente la presión hidrostática debida a la columna h. Esta última vale, según la ley de STEVIN:

$$h \cdot \mu_{liq} \cdot g,$$

siendo μ_{liq} la masa específica del líquido, y g la aceleración de la gravedad. Se puede discutir, en una segunda aproximación, cuál es el punto exacto del menisco desde el que hay que contar la altura h y puede tenerse en cuenta que las presiones atmosféricas p_A en A y p_B en B (fig. 446) no son las mismas. Con suficiente aproximación se tiene:

$$p_A - p_B = h \cdot \mu_{aire} \cdot g,$$

en donde μ_{aire} es la masa específica media del aire entre A y B.

Resulta entonces para el equilibrio:

$$h \cdot \mu_{liq} \cdot g - h \cdot \mu_{aire} \cdot g = \frac{2 \cdot \tau \cdot \cos \alpha}{r}$$

Luego, en primera aproximación,

$$h = \frac{2 \cdot \tau \cdot \cos \alpha}{g \cdot \mu_{liq} \cdot r}, \qquad [1]$$

y en segunda aproximación,

$$h = \frac{2 \cdot \tau \cdot \cos \alpha}{g \cdot (\mu_{liq} - \mu_{aire}) \cdot r} \qquad [2]$$

(Para $r > 0$, es decir, para menisco cóncavo, resulta $\cos \alpha > 0$ y $p > 0$, y, por tanto, $h > 0$; se tiene una elevación capilar).

No sólo se obtiene así la ley de JURIN, sino también la constante k de la fórmula [1], § 220, que resulta relacionada con τ y con α por la expresión:

$$k = \frac{2 \cdot \tau \cdot \cos \alpha}{g \cdot \mu_{liq}}.$$

Ésta deriva de la [1] y, por tanto, sólo vale en primera aproximación, que, sin embargo, casi siempre es suficiente.

Puede calcularse el valor de τ, cuando se conozca α, midiendo la elevación capilar h y el radio r del tubo, puesto que se conocen μ_{liq} y g: basta emplear la [1]. En realidad, el ángulo α presenta valores tan inciertos y variables que sólo es utilizable la [1] para líquidos que mojan completamente el capilar: entonces α es nulo y se simplifica la [1].

También se podría deducir de la [1], § 221, la forma de la curva que toma la superficie líquida en la vasija en forma de cuña de la figura 448.

Preferimos explicar cómo la [1], § 221, permite relacionar la tensión superficial del agua jabonosa con la diferencia de presión

$$\Delta p = p_i - p_e > 0$$

existente entre el interior y el exterior de una pompa de jabón de radio R.

La pompa C (fig. 451), soplada en la extremidad del tubo de vidrio T, indica en el manómetro M la existencia de esta presión Δp, que no es otra que la presión normal p del § 221, debida a las dos superficies de la lámina líquida. Luego, aplicando la fórmula de LAPLACE:

$$\Delta p = 2 \cdot \tau \cdot \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\right) = \frac{4\tau}{R}. \qquad [3]$$

Si μ es la masa específica del líquido del manómetro, se tiene:

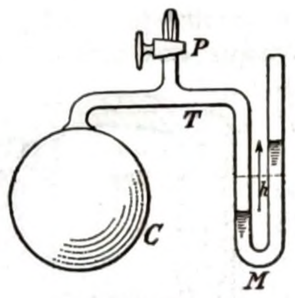


Fig. 451

$$\Delta p = h \cdot g \cdot \mu;$$

por consiguiente,

$$h = \frac{4\tau}{R \cdot g \cdot \mu}. \qquad [4]$$

Conociendo μ, por medición de R, g, h, puede obtenerse τ.

En particular, para un manómetro de agua, en el sistema cm g seg, es: $\mu = 1 \frac{g_m}{cm^3}$, de donde, por la [4], se obtiene:

$$\tau = \frac{h \cdot R \cdot g}{4}. \qquad \begin{matrix} R, h \text{ en cm} \\ g \text{ en } \frac{cm}{seg^2} \\ \tau \text{ en } \frac{dinas}{cm} = \frac{erg}{cm^2} \end{matrix}$$

La diferencia de presión Δp es inversamente proporcional a R. Soplando dos pompas de jabón de distinto diámetro en los extremos del tubo de la figura 452, cerrando el grifo A y abriendo el grifo B, se ve que la pompa más pequeña es como aspirada por la mayor: el aire se halla más comprimido en la pompa pequeña que en la mayor, por lo que pasa de la primera a la segunda.

Poniendo en comunicación dos pompas del mismo diámetro, se obtiene un equilibrio inestable.

§ 223. Otros experimentos sobre tensión superficial. La consideración de una tensión superficial explica la forma que toma una gota que va formándose lentamente por un tubo capilar afilado.

Explica también la forma que toma una gota ancha de mercurio apoyada sobre un plano horizontal de vidrio, así como la de una burbuja de aire formada dentro de un líquido al soplar con un tubo de vidrio vertical, y que alcanza un equilibrio inestable para cierta magnitud, hasta que se desprende y sube a flote.

Se deben al juego de las tensiones superficiales los movimientos que se producen en la superficie del agua espolvoreada, por ejemplo, con licopodio o talco, cuando se deja caer una gota de alcohol en un ángulo de la superficie del agua, o cuando se aproxima un tapón mojado con éter, así como al depositar en ella un granito de alcanfor, o al echar un cabello un poco graso.

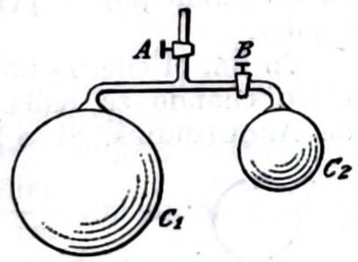


Fig. 452

Dos pequeños cuerpos flotantes, cuando ambos son mojados por el líquido o bien cuando no son mojados, se atraen si están cercanos, mientras que se repelen si uno es mojado y el otro no.

Un cuerpo pequeño que no sea mojado por el líquido, puede permanecer a flote aunque su densidad sea mayor que la del líquido. Así, una hoja de afeitar, o una aguja de coser, si están ligeramente engrasadas y se depositan con cuidado en la superficie del agua, quedan flotando. Ciertos insectos flotan y andan por encima del agua gracias a un fenómeno de tensión superficial.

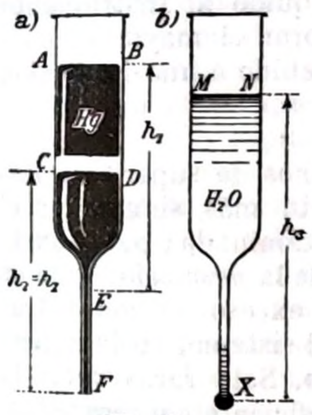


Fig. 453

Gracias a la capilaridad se producen algunos fenómenos aparentemente paradójicos.

Un recipiente que termina en un tubo capilar [fig. 453, *a*)] puede llenarse de mercurio sin que salga este líquido por el capilar.

Si este recipiente tiene un agujero de 0,01 mm de diámetro, la columna de mercurio puede alcanzar encima ≈ 50 cm, pero en cierto punto el equilibrio del líquido es inestable: el líquido empieza a bajar bruscamente por el capilar, y su salida, iniciada, por ejemplo, para $h_1 = 50$ cm, cesa súbitamente cuando h_2 se ha reducido a los mismos 50 cm.

También un líquido que moja puede mantenerse en un recipiente terminado en tubo capilar sin que se derrame. En efecto, sea $2R$ el diámetro inicial de la gota que tiende a formarse en la extremidad X del capilar [fig. 453, *b*)]: se puede suponer que $2R$ es igual al diámetro exterior del capilar.

Si $2R = 0{,}1$ mm, la gota en formación está revestida de una lámina líquida capaz de equilibrar, gracias a su tensión superficial τ, una presión hidrostática (§ 221, [1]):

$$p = \tau \frac{2}{R};$$

para el agua:

$$p = \frac{75 \cdot 2}{0{,}005} = 30\,000 \frac{dinas}{cm^2} \approx 30 \text{ cm}_{H_2O}.$$

La columna de agua h_3 puede ser sostenida hasta que no rebase los 30 cm. También esta vez el equilibrio es inestable.

En efecto, tocando con el dedo la extremidad X del capilar, se perturba la forma esférica de la gota en formación : el agua no está ya sostenida por la película esférica convexa y se derrama por el capilar.

En fin, el cuerpo flotante lastrado de la figura 454 está en equilibrio cuando se halla sumergido hasta A, en virtud del principio de ARQUÍMEDES. Si se le sumerge un poco más y después se le deja libre, sobresale de nuevo hasta aflorar en A ; pero si se le sumerge todavía más, hasta que el líquido moje la superficie de la esfera superior, el aparato toma una nueva posición, aflorando sólo en B. La tensión superficial que actúa a lo largo del contorno BB produce una fuerza vertical dirigida hacia abajo, aplicada por el líquido al instrumento y capaz de equilibrar el mayor empuje de ARQUÍMEDES, debido a una inmersión mayor.

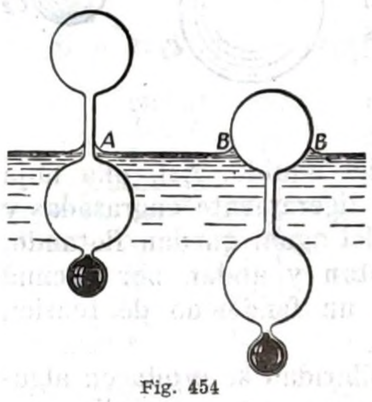


Fig. 454

§ 224. Adsorción. Absorción. Los fenómenos de superficie descritos en apartados anteriores toman el aspecto más simple en el caso de líquidos puros con superficie no contaminada ; pero, en la práctica, se complican muchas veces a causa de la *adsorción*. Éste es un fenómeno de superficie que consiste en un exceso de concentración de una de las substancias que componen el sistema, en la superficie de separación entre dos fases del mismo. Sólo raras veces la anomalía de concentración consiste en una deficiente concentración superficial *(adsorción negativa)*.

Pueden considerarse como fenómenos de adsorción los que se presentan en la superficie agua-aire (teóricamente, agua-vacío) cuando se forma sobre ésta la capa molecular de que se ha hablado en el § 219, *a*]. La concentración de oleína, prácticamente nula en la fase líquida (agua) y en la fase gaseosa (aire o vapor de agua), es elevadísima en la capa superficial.

La adsorción se produce, en general, en toda superficie de separación de dos fases, cuando están presentes, por lo menos en una de las dos fases en contacto, dos o más substancias químicamente definidas y distintas, como son el agua y la oleína en el ejemplo anterior : estas substancias se llaman *componentes* del sistema. Los fenómenos más característicos de adsorción se encuentran en los dos casos siguientes :

a] **Disoluciones acuosas.** La medida de la tensión superficial de las soluciones acuosas ha conducido a distinguir dos grupos de cuerpos disueltos, o solutos, bastante diferentes entre sí :

Solutos que no modifican sensiblemente la tensión superficial del agua o que, en todo caso, la aumentan débilmente (ejemplo : disoluciones en agua de sales inorgánicas) ; estos solutos se llaman *capilarmente inactivos*.

Solutos que modifican fuertemente la tensión superficial del agua pura, disminuyendo mucho su valor (ejemplo : disolución de jabón en agua, y, en general, soluciones acuosas de alcoholes, ácidos grasos o ésteres) : estos solutos se llaman *capilarmente activos*.

Así, una disolución acuosa de 0,1 moléculas - gramo de NaCl por litro tiene una tensión superficial $\tau = 73{,}2\ \frac{\text{dinas}}{\text{cm}}$, mientras que en el agua pura es $\tau = 73{,}0$. Una disolución acuosa de la misma concentración en moléculas - gramo de ácido isovaleriánico ($C_4H_9 \cdot COOH$) sólo tiene una tensión superficial de unas $48\ \frac{\text{dinas}}{\text{cm}}$.

Las disoluciones de solutos capilarmente activos son las que dan con facilidad espumas persistentes cuando se las bate. Se tiene así un medio de aumentar enormemente la superficie líquido-aire. Ahora bien : si se recoge la espuma, por ejemplo, de agua jabonosa, resulta más rica en jabón que el líquido restante. El jabón (p. ej. : oleato de sodio) que es capilarmente activo, se halla en la capa superficial en mayor concentración que en la fase líquida.

El hecho es general (GIBBS) : si una substancia rebaja la tensión superficial, la película superficial que separa las dos fases presenta un exceso de concentración de la misma. *Hay adsorción*. Sucede lo contrario con las substancias que aumentan la tensión superficial.

Puede comprenderse todo esto cualitativamente, teniendo en cuenta que para el equilibrio ha de ser mínima la energía potencial de superficie, por lo que la superficie de separación entre las dos fases tiende al área mínima, y, además, la tensión superficial, cuando puede modificarse, tiende a un valor mínimo ; esto último se obtiene precisamente en las disoluciones de cuerpos capilarmente activos mediante una acumulación de soluto en la superficie de lo disolución.

Se supone (BOUHET) que las disoluciones de cuerpos capilarmente activos tienen la superficie líquido - vacío constituída por una capa monomolecular de moléculas orientadas del soluto, y que las disoluciones de los cuerpos capilarmente inactivos de absorción negativa tienen la superficie constituída por una capa monomolecular de moléculas orientadas del disolvente puro.

b] **Superficies sólido-gas.** Es fácil obtener extensísimas superficies de separación sólido-gas : basta para ello reducir el sólido a polvo finísimo o escoger sólidos porosos, como el carbón vegetal, el carbón animal o el gel de sílice calcinado

Un pedazo de carbón vegetal (especialmente el carbón de nuez de coco o de cáscara de avellana) se calienta algunos minutos a $400 \div 500$ °C, mejor en el vacío, y después se coloca debajo de una

campana estrecha llena de un gas y cuyos bordes van dentro de un baño de mercurio. El mercurio sube por la campana demostrando que ha sido adsorbida una notable cantidad de gas.

La cantidad de gas adsorbido depende de la naturaleza del gas, y, en menor grado, de la naturaleza del solido, especialmente si se trata de una adsorción que no sea consecuencia de una acción química.

Por ejemplo, 1 cm^3 de carbón de boj a 20 °C y a la presión de 72 cm_{Hg} adsorbe 90 cm^3 de amoníaco, y, en cambio, solamente absorbe 1,7 cm^3 de hidrógeno. Para la espuma de mar (sepiolita) y para los mismos gases, los resultados son parecidos.

Se puede decir, en general, que los gases más adsorbidos son los que tienen la temperatura crítica más elevada.

El siguiente experimento demuestra la selectividad de la adsorción en una mezcla de diversos gases :

Se alimenta un mechero BUNSEN con gas del alumbrado que se ha hecho burbujear a través de benzol : la llama del mechero BUNSEN es bien luminosa. Pero si el gas rico en vapores de benzol, se filtra a través de polvo de carbón, la llama ya no es luminosa, porque se encuentra esencialmente alimentada por hidrógeno solo, por haber sido adsorbidos los otros componentes.

Cuando un sólido poroso, desgasado por calentamiento en el vacío, se pone en contacto con el gas que debe adsorber, se alcanza un equilibrio entre el gas que compone la fase gaseosa y el gas adsorbido al cabo de un tiempo muy breve (p. ej., algunos minutos).

La masa x de gas adsorbido es proporcional a la masa m de cuerpo poroso (que se supone de una porosidad completamente uniforme) y depende en alto grado de la presión p del gas en la fase gaseosa así como de la temperatura.

En muchos casos puede aplicarse satisfactoriamente, si la temperatura es constante, la fórmula siguiente *(isoterma de adsorción)* :

$$\frac{x}{m} = k \cdot p^n \qquad [1]$$

en la cual el coeficiente de adsorción k depende en alto grado de la temperatura y disminuye rápidamente al aumentar ésta ; además, k depende del gas y del sólido considerados. De los mismos parámetros depende también el exponente n, cuyo valor, sin embargo, se conserva comprendido entre 0,2 y 0,8. Luego la isoterma de adsorción tiene una forma como la de la curva a de la figura 455.

En concordancia con la [1], la adsorción es un fenómeno reversible : si aumenta p, se acumula más gas en la superficie del sólido ; si p disminuye, se desprende parte del gas adsorbido.

Si la adsorción se realiza a una temperatura superior a la temperatura crítica del gas adsorbido, la capa adsorbida puede imaginarse como una atmósfera gaseosa (¿ monomolecular ?) condensada sobre la superficie sólida ; a temperatura inferior a la crítica y para

sólidos mojados por el gas licuefacto, es probable que la capa adsorbida sea más bien comparable a una película líquida (¿ monomolecular ?).

Se ha dicho que k en la [1], y, por tanto, la cantidad de gas adsorbido, disminuye fuertemente al aumentar la temperatura. Luego, según el principio general de estabilidad de los equilibrios (LE CHATELIER - BRAUN) que se aplica a todos los fenómenos físicoquímicos, la adsorción debe ir acompañada de desprendimiento de calor.

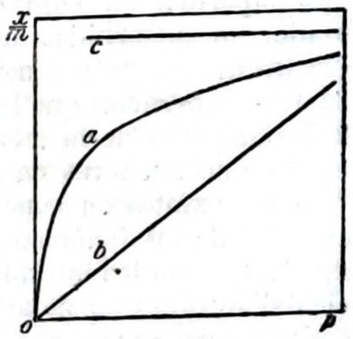


Fig. 455

El polvo de carbón de leña, desgasado por calentamiento en el vacío, dejado enfriar en éste y colocado después en contacto del aire, se recalienta por la adsorción y puede llegar a prender fuego.

Se debe al calor de adsorción el calentamiento, hasta unos 44 °C, de un termómetro cuyo depósito está rodeado de una franela bien seca, cuando se introduce en la boca el depósito termométrico.

c] **Absorción.** En contraposición a los fenómenos superficiales de adsorción, la *absorción* consiste en la penetración profunda de un componente exterior, en general gaseoso, en una fase líquida o sólida. Por tanto, la absorción es una verdadera disolución.

Entre los ejemplos más corrientes de absorción se tiene la del anhídrido carbónico por el agua. A temperatura constante, la masa x de gas disuelto en una masa m de disolvente depende de la presión p del gas considerado en la fase gaseosa, y es simplemente :

$$\frac{x}{m} = k \cdot p \qquad \textit{(Ley de HENRY)}. \qquad [2]$$

Se puede considerar la [2] como un caso particular de la [1] en que $n = 1$ (curva b de la fig. 455).

El caso de absorción de gases por los sólidos es raro. Probablemente, se presenta este fenómeno en el contacto hidrógeno - paladio, hidrógeno - caucho y anhídrico carbónico - caucho.

También se considera como absorción la del hidrógeno por el platino compacto, mientras que en el caso de la esponja de platino es la adsorción el fenómeno preponderante.

d] Se reserva, en fin, el nombre de *oclusión* para indicar la penetración de un gas en un sólido poroso de un modo general, sin distinguir si se trata de adsorción, absorción o grosero aprisionamiento mecánico de un gas en los poros de un sólido, de manera análoga a como se halla el agua en los poros de una esponja.

Con esto no queda terminada la clasificación de los fenómenos de superficie : la absorción puede ir acompañada de una reacción química de superficie entre el gas y el sólido ; si el sólido tienen una gran

superficie y se coloca en una mezcla de gases, puede producirse una reacción química entre los varios gases adsorbidos: en tal caso, la cantidad de gas adsorbida es independiente de la presión (curva c de la fig. 455), y el fenómeno es substancialmente irreversible.

Un ejemplo interesante de reacción superficial se tiene en la superficie de la esponja de platino a la temperatura ordinaria, o en la superficie de un hilo de platino calentado a unos 500 °C. Si se pone esta superficie en contacto con una mezcla de aire y gas del alumbrado, son adsorbidas moléculas de metano y de oxígeno, lo que engendra un aumento sensible de la temperatura. Sigue una viva combustión superficial que lleva el platino a la incandescencia y provoca la inflamación de la mezcla; es éste el fenómeno que se aprovecha en los encendedores de platino para el gas del alumbrado.

Esta exaltación superficial de las reacciones constituye la causa esencial de los fenómenos de *catálisis;* pero ésta se manifiesta solamente cuando los productos de la reacción, que recubren la superficie del adsorbente, no alteran su capacidad de adsorción, pues en caso contrario se «envenena» el catalizador.

Todos los fenómenos de superficie que hemos descrito tienen una notable importancia práctica.

Es conocido el gran empleo de los catalizadores en la industria química.

La tintura de las fibras textiles es consecuencia de la intensa adsorción de las substancias colorantes disueltas en el agua cuando se ponen en contacto con las fibras sumergidas en las disoluciones de los colorantes (absorción del soluto en el contacto sólido - disolución). Si esta adsorción va seguida de una acción química conveniente, el fenómeno no es ya reversible, y, por mucho que se prolongue el lavado de la fibra, ésta no destiñe.

En muchos tipos de caretas contra gases asfixiantes el gas tóxico es eliminado por adsorción; por ejemplo, con carbón de madera.

Y puede continuar la lista: los gases de algunas mezclas pueden separarse por adsorción. El fúerte poder adsorbente del carbón de madera a unos — 200 °C se emplea mucho en la técnica del vacío (§ 377); etc.

CAPÍTULO VI

Difusión y otros fenómenos moleculares

§ 225. Difusión. Este fenómeno es más intenso en los gases que en los líquidos, y es mínimo, si bien todavía sensible, en los sólidos. La difusión, junto con el movimiento browniano, obliga a suponer que las moléculas que constituyen los cuerpos no están quietas, sino dotadas de movimiento, aun en los cuerpos en que aparecen fijas en su conjunto.

a] **Sólidos.** Cuando las superficies de dos sólidos se ponen suficientemente juntas para que la adherencia entre ellos sea sensible, lo que se logra apretando fuertemente los dos sólidos uno contra otro, la adherencia va acompañada a menudo de una verdadera compenetración *(difusión)* de un cuerpo en el otro: los dos cuerpos resultan soldados no sólo por adherencia, sino que se tiene también *cementación*.

Para que el fenómeno sea bien sensible, deben apretarse fuertemente los dos cuerpos uno contra otro y durante un tiempo suficientemente largo (v. § 134, *rozamiento de arranque*). Un aumento de temperatura acelera mucho el fenómeno.

A 400 °C y bajo la presión de algunas decenas de newton (esto es, de algunos kg_p) por cm^2, el cobre y el cinc se difunden de una manera sensible en algunas horas.

Se pueden obtener así *mezclas sólidas* y, en particular, aleaciones. Experimentando con presiones de decenas de miles de newton por cm^2, SPRING ha logrado obtener, a la temperatura ordinaria, latón prácticamente homogéneo, comprimiendo polvo de cinc y de cobre.

El acero de cementación y diversas aleaciones durísimas recientes de alto punto de fusión, adecuadas para herramientas empleadas en el trabajo de los metales, se obtienen valiéndose de este fenómeno que se acelera fuertemente a temperatura elevada, coadyuvado también por reacciones químicas. También se aprovecha esta cementación al fabricar otros diversos productos industriales, como la fibra, el galalit, etc.

b] **Líquidos.** En éstos puede observarse la difusión más fácilmente que en los sólidos. Se tiene digresión:

1.º entre dos líquidos solubles (por ej., alcohol y agua);

2.º entre dos disoluciones de los mismos componentes, diversamente concentradas (por ej., una disolución acuosa diluída y otra concentrada de sulfato de cobre; en particular, agua pura y solución acuosa de sulfato cúprico);

3.º entre un líquido y un sólido soluble en él (per ej., agua y sulfato cúprico);

4.º entre un líquido y un gas soluble en él (por. ej., agua y anhídrido carbónico comprimido sobre el líquido); etc.

En todos los casos, la difusión demuestra la existencia de un movimiento de las moléculas de diferente especie que se hallan en presencia. Si se excluyen las fuerzas exteriores, como la gravedad, acciones eléctricas, magnéticas, etc., prosigue la difusión hasta que se produce una mezcla homogénea *(solución* o *disolución)* de concentración constante en todas sus puntos; mientras no se alcanza esta homogeneidad, la difusión prosigue más o menos rápida; es decir, no se llega sin aquella homogeneidad a las condiciones de equilibrio.

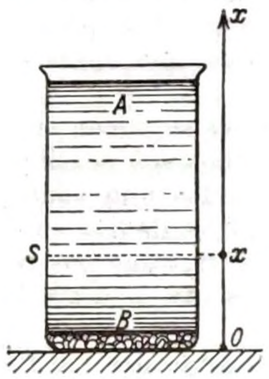


Fig. 456

Observemos que la completa homogeneidad de la mezcla corresponde al máximo desorden de las moléculas de diferente especie que la constituyen.

En los casos más sencillos solamente es observable la difusión de las moléculas de una especie.

Por ejemplo, colóquese en un vaso cilíndrico una capa de disolución acuosa concentrada de sulfato de cobre (fig. 456) y viértase encima con cautela una capa de agua pura.

Evítense las sacudidas y los desequilibrios de temperatura. Esto no obstante, esperando suficiente tiempo (un día, por ejemplo) se reconoce por la coloración que han pasado moléculas de sulfato de cobre hacia el agua pura; al cabo de un tiempo suficiente toda la vasija contiene una disolución que tiene prácticamente la misma concentración.

Las moléculas de sulfato de cobre se han difundido en el agua.

En realidad, a causa de la gravedad, las condiciones de equilibrio no corresponden a una homogeneidad completa: la concentración de la solución disminuye ligerísimamente con la altura x.

Sea S la sección del vaso cilíndrico y c la concentración de la solución.

Entre las diversas definiciones de «concentración» de una disolución en un punto, tomaremos la siguiente:

$$c = \frac{dm}{dv}; \qquad [1]$$

es decir, la relación entre la masa dm de soluto y el volumen dv de solución en que se halla disuelto.

Por razón de simetría puede suponerse que c es constante en un plano horizontal.

La concentración en la capa dx es entonces la relación

$$c = \frac{dm}{S \cdot dx}$$

y es función de x.

La experiencia demuestra que la cantidad dq de soluto que se difunde a través de una sección S del cilindro es proporcional a S, al tiempo dt y a la rapidez de variación $\frac{dc}{dx}$ de la concentración con la altura x; esto es:

$$dq = -K \cdot S \cdot \frac{dc}{dx} \cdot dt. \qquad [2]$$

K es una constante positiva *(coeficiente de difusión)* característica del par de cuerpos con que se experimenta, que depende de las unidades de medida escogidas; se tiene:

$$[K] = [l^2 \cdot t^{-1}];$$

K aumenta notablemente con la temperatura y, en general, también depende más o menos de c; el signo — sirve para indicar que el soluto pasa en el sentido en que disminuye c.

Por ejemplo, en agua a la temperatura de 10 ºC, si se mide dq en g_m, S se mide en cm^2, dt en días y $\frac{dc}{dx}$ en $\frac{g_m}{cm^3 \cdot cm}$, se tiene $K = 0{,}9$ para la urea y sólo $K = 0{,}07$ para la dextrina.

Resolviendo la ecuación diferencial [2], resulta que la homogeneidad de la solución se alcanzaría sólo en un tiempo infinitamente largo, pero en la práctica se alcanza en varios días.

También el agua se difunde a través de S, pero igualmente en los dos sentidos, y el efecto de su difusión no puede observarse macroscópicamente; en otros términos, la «concentración» del agua en los diversos niveles x no varía con el tiempo.

En el caso 1.º, el fenómeno es más complicado porque se tiene una doble difusión: el alcohol se difunde en el agua y también el agua en el alcohol.

c] **Gases.** Dos o más gases, colocados en un mismo recipiente, después de un tiempo más o menos largo (del orden de algunas horas), forman una mezcla homogénea aunque se elimine la acción de la gravedad, poniendo encima el gas más ligero, y por muchas precauciones que se tomen para evitar las corrientes convectivas, la agitación, etc.

La difusión es mucho más rápida que en los líquidos y termina cuando la disolución que resulta tiene la misma concentración de los dos componentes en todos sus puntos.

Se efectúa fácilmente el experimento haciendo llegar cloro a B (figura 457) por el conducto C hasta que este gas, más pesado que el aire, se derrame por el borde de B. Se superpone entonces la campana A, llena, por tanto, de aire. En algunas horas, se ha difundido el cloro por todo el recinto AB como lo demuestra el color de este gas.

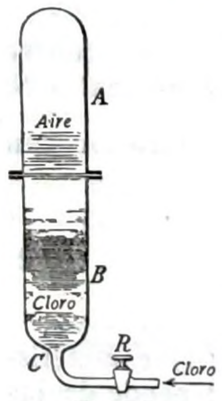


Fig. 457

La fórmula [2] es válida ahora para cada uno de los dos gases, puesto que se tiene la difusión simultánea de cada uno en el otro.

De los dos fenómenos de difusión en los sólidos y en los líquidos puede deducirse la movilidad de las moléculas de estos cuerpos, pero queda la duda de si la difusión es debida no a un simple movimiento desordenado y preexistente de las moléculas, sino a una fuerza de atracción entre las moléculas de diferente especie *(adherencia)*.

Se deduce del experimento de JOULE (compárese § 373) que en los gases estas fuerzas son prácticamente nulas; por tanto, debe considerarse la difusión en los gases como la prueba del continuo movimiento de sus moléculas: movimiento espontáneo, por lo menos en los gases. El movimiento browniano (§ 227) es una prueba más directa y más amplia de este movimiento de las moléculas y de la discontinuidad de la materia, porque se observa lo mismo en los gases que en los líquidos.

§ 226. Difusión a través de una pared porosa. Pueden efectuarse los experimentos de difusión entre dos líquidos o entre dos gases interponiendo un tabique poroso entre los dos cuerpos.

Reseñamos brevemente los principales hechos observados.

a] **Dos líquidos:**

1.º Dos líquidos puros completamente solubles entre sí, como agua y alcohol, se difunden a través de la pared porosa P (fig. 458). Las velocidades de difusión son, en general, distintas, por lo que se crea un desnivel entre los dos lados de la pared porosa, el cual crece hasta alcanzar un máximo y va después disminuyendo hasta anularse: entonces L_1 y L_2 son disoluciones igualmente concentradas de los dos líquidos.

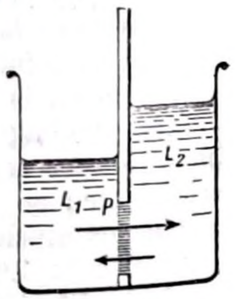


Fig. 458

2.º Sea L_1 (fig. 458) un disolvente puro y L_2 una disolución de un sólido en dicho disolvente.

El disolvente se difunde igualmente en los dos sentidos y no origina fenómenos macroscópicos.

El soluto se difunde en L_1 y después de un tiempo suficiente, L_1 y L_2 son soluciones igual y uniformemente concentradas, y no hay desnivel entre L_1 y L_2.

Si el disolvente puro es, por ejemplo, agua corriente, se puede transportar a través de la pared porosa P todo el soluto contenido en L_2.

La velocidad de difusión del soluto a través de P depende de la naturaleza de la membrana porosa y del soluto. Tomando como pared porosa una membrana de pergamino vegetal (papel tratado con ácido sulfúrico) se pueden distinguir los cuerpos disueltos en L_2 en dos grandes categorías: los *cristaloides* y los *coloides*.

La primera categoría debe su nombre al hecho de que comprende los cuerpos que cristalizan fácilmente; en la segunda entran las colas, las gelatinas, las gomas y otros cuerpos análogos.

En los cuerpos de la primera categoría, la velocidad de difusión es más o menos grande, pero nunca nula; y en los de la segunda, es nula.

Luego si en L_2 se hallan disueltos coloides y cristaloides, y el disolvente en L_1 se renueva continuamente, pueden transportarse a L_1 las cristaloides y separarlos así de los coloides que quedan en L_2. El fenómeno se llama *diálisis* (GRAHAM) y tiene cierto interés práctico.

Pero la distinción entre cristaloides y coloides no es substancial. En cambio, es fundamental el hecho de que las soluciones de coloides *(soluciones coloidales)* no son ópticamente homogéneas, mientras que la homogeneidad óptica de las soluciones de los cristaloides (como la del cloruro de sodio en agua) puede considerarse tan perfecta como la de un cuerpo puro.

La homogeneidad de las disoluciones coloidales es aparente. El examen en el ultramicroscopio permite distinguir los gránulos del cuerpo disuelto. Un haz luminoso intenso que atraviesa la seudosolución se difracta en parte lateralmente: se ve el trayecto del haz observando el coloide de costado *(fenómeno de Tyndall)*. Además, la luz difractada está parcialmente polarizada (v. tomo II). En las verdaderas disoluciones y en los líquidos puros se produce todavía este fenómeno, pero con una intensidad extremadamente pequeña.

Ahora bien, la sola diferencia entre las disoluciones verdaderas y las coloidales estriba en la magnitud de los gránulos, *no* en su naturaleza; no existen cuerpos coloides y cuerpos cristaloides, sino cuerpos disgregados en partículas absolutamente invisibles en el ultramicroscopio (moléculas, porciones de moléculas, o grupos de poquísimas moléculas), y cuerpos disgregados en partículas visibles en el ultramicroscopio.

Las partículas que están en suspensión en las soluciones coloidales tienen una masa que es varios miles de veces mayor que la de un átomo de hidrógeno.

La distinción entre los dos tipos de disoluciones (verdadera y coloidal) sólo depende de la potencia de los medios de que disponemos para investigar la heterogeneidad de la solución. En el ultramicroscopio se puede llegar a descubrir la presencia de gránulos cuyo diá-

metro es del orden de 1 mμm $= 1 \cdot 10^{-7}$ cm, mientras que en el microscopio no se alcanza más allá de 10^{-5} cm. Recordemos que el diámetro de los átomos es del orden de 1 Å $= 1 \cdot 10^{-8}$ cm. Se podrá convenir en que la solución sea coloidal cuando el diámetro de las partículas en suspensión esté comprendido, por ejemplo, entre 1 y 500 mμm.

Un cristaloide, por ejemplo, el cloruro de sodio, reducido a polvo finísimo y colocado en suspensión en un líquido en el que sea insoluble, da una seudosolución que tiene todos los caracteres de la solución coloidal.

Es interesantísimo el hecho de que puedan obtenerse soluciones acuosas coloidales diluídas (hasta a 0,5 g_m por litro) de metales (oro, plata, platino, hierro, etc.), haciendo saltar un arco voltaico entre electrodos de estos metales sumergidos en agua destilada (Bredig). Tales disoluciones, aparentemente límpidas y homogéneas, resultan diversamente coloreadas según la magnitud de los gránulos.

3.º Limitémonos, para mayor sencillez, al caso de disoluciones de sólidos en un líquido. Ha demostrado la experiencia que existen tabiques porosos con la singular propiedad de ser *semipermeables*, es decir, que se dejan atravesar por el disolvente, pero no por el soluto, aunque éste se encuentre en verdadera disolución y no al estado de seudosolución, como sucede en las disoluciones coloidales. Una membrana de papel pergamino es una pared semipermeable para las soluciones coloidales.

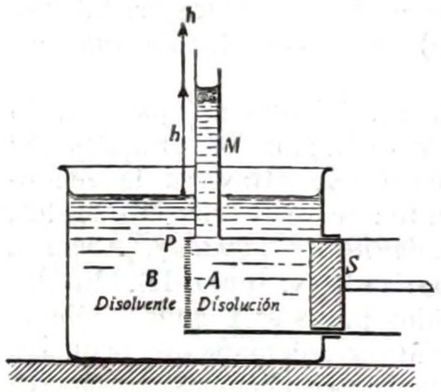


Fig. 459

El paso de substancias disueltas a través de los tabiques semipermeables se llama *ósmosis*.

Llenando un vaso poroso de bizcocho de porcelana, de los empleados para pilas, con una disolución de sulfato cúprico al 3 % y sumergiéndolo en una disolución de ferrocianuro potásico de la misma concentración, se obtiene una pared semipermeable.

En unos dos días, los líquidos reaccionan en el interior de la porcelana porosa, y el precipitado de ferrocianuro de cobre que resulta llena los poros formando una resistente pared semipermeable P (figura 459).

El agua atraviesa esta pared por difusión, pero no ocurre lo mismo con las moléculas disueltas, aunque se trate de cuerpos cristaloides.

Se llena el vaso A con una disolución ; va muy bien para el caso la disolución acuosa de azúcar (sacarosa), cuyas moléculas no están disociadas en la solución (v. tomo II). Se cierra con un tubo manométrico y se sumerge todo en el disolvente puro, teniendo cuidado

de que al principio sea igual el nivel del líquido dentro y fuera del recipiente A. Se observa entonces que va formándose un desnivel h, que después de algún tiempo alcanza un valor definitivo, mientras el agua en B no se azucara en absoluto. En cambio, el agua penetra en A. El equilibrio entre el disolvente y la disolución, establecido a través de la pared semipermeable, no obedece al principio de los vasos comunicantes, pues existe un exceso de presión p medido por el desnivel h entre la disolución y el disolvente en las dos partes de la pared ; p se llama *presión osmótica* de la disolución.

Para una disolución de azúcar al 1% y a la temperatura de 15 ºC, h mide unos 7 m (¡!). La presión osmótica p es, por tanto, de $\approx$ 0,7 atm., ($\approx$ 7 newton por cm^2).

Los valores que puede tomar la presión osmótica y la presencia en el reino animal y en el vegetal de numerosas membranas que gozan más o menos completamente de la propiedad de ser semipermeables, justifican la importancia fundamental que se atribuye en biología a los fenómenos de presión osmótica.

Un émbolo S, al trasladarse, puede crear en el manómetro M una columna cuya altura es mayor que h, con lo cual la pared semipermeable queda sometida a una presión mayor que p.

Entonces, parte del disolvente sale de A, la solución aumenta de concentración y se observa un nuevo valor de equilibrio p' ($> p$) de la presión osmótica.

Si la disolución contiene la masa m de soluto disuelta en un volumen v de la misma, diremos que $c = \dfrac{m}{v}$ es la *concentración* de la solución.

Para las soluciones diluídas, la experiencia da una relación muy simple de proporcionalidad entre la concentración c y la presión osmótica p :

$$p = k \cdot c \, ;$$

e introduciendo el volumen v ocupado por la solución, resulta :

$$p \cdot v = \text{const} \qquad [1]$$

Se obtiene así una ley análoga a la de Boyle, resultando la posibilidad de definir una *solución ideal;* la analogía con los gases es todavía bastante más profunda (§ 295) que lo que indica la expresión [1].

Se pueden imaginar tabiques con propiedades análogas a las de las paredes semipermeables, realizados por medio de artificios especiales. Por ejemplo, si en un recinto cerrado, isotérmico y privado de aire, ponemos dos vasos, uno conteniendo agua pura y el otro una solución acuosa de un sólido, podemos suponer nula la tensión de vapor del sólido. El recinto se satura de vapor de agua y, por destilación, el disolvente puede pasar desde un vaso a otro, mientras

el soluto no puede pasar. El vapor funciona como pared semipermeable.

b] **Dos gases.** Cuando la difusión se produce a través de una pared cuyos poros sean suficientemente finos (v. § 368), como los de la porcelana no barnizada *(bizcocho)*, la experiencia ofrece dos resultados sencillos y notables :

1.º Volúmenes iguales de gases diferentes (medidos en las mismas condiciones de temperatura y de presión) necesitan tiempos diferentes t_1 y t_2 para pasar de una a otra cara de la pared porosa, a igualdad de temperatura y de diferencia de presión entre dichas dos caras. Estos tiempos están relacionados con las densidades δ_1 y δ_2 de los gases por la fórmula :

$$\frac{t_1^2}{t_2^2} = \frac{\delta_1}{\delta_2} \qquad \textit{(Ley de BUNSEN)} \quad [2]$$

Se tiene así un medio para hallar la densidad δ_2, cuando se conoce δ_1, determinando t_1 y t_2. El método se emplea algunas veces, pero no es muy preciso.

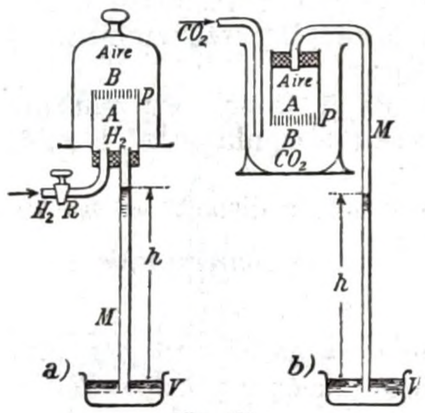


Fig. 460

2.º En una mezcla de gases, cada uno de los componentes se difunde como si el otro no existiera.

La difusión de cada uno de los gases a través de los agujeros sutiles de la pared porosa se llama en este caso *efusión*.

En particular, debe imaginarse que cuando hay el mismo gas en las dos partes del vaso poroso, la difusión se realiza en los dos sentidos. Se tienen dos corrientes gaseosas de sentido contrario, y el fenómeno de difusión observado es la resultante de las dos difusiones. Si la presión del gas es igual en los dos lados del tabique poroso, las dos corrientes inversas tienen la misma intensidad y su resultante aparece nula. Se tiene un *equilibrio estadístico, dinámico*, entre las dos porciones de gas separadas por la pared porosa.

Si los gases de los dos lados del tabique son diferentes, el más ligero se difunde más abundantemente a igualdad de presiones. En el dispositivo de la figura 460, *a*), se llena de hidrógeno el recipiente *A* cerrado por un tabique poroso *P* y se cierra la llave *R*; se forma una columna *h* en el manómetro *M* que señala un enrarecimiento en *A* : el volumen de hidrógeno que ha salido a través del tabique poroso *P* es mayor que el volumen de aire que ha entrado. Análogamente se desenvuelve el experimento de la figura 460, *b*).

He aquí dos aplicaciones de la difusión más rápida de los gases más ligeros a través de una pared porosa :

α] Se pueden construir aparatos que señalan la presencia de hidrógeno, de metano o de gas del alumbrado en el aire (fig. 461).

Supongamos que la presión inicial es la misma en *A* y en *B* (presión atmosférica) ; al llegar a *B* una mezcla formada por aire y un gas ligero, teniendo en cuenta que en el otro lado *A* del tabique poroso hay aire solo, la difusión más rápida del gas ligero origina un aumento de presión en *A* que crea un desnivel en el mercurio del manómetro *M*, estableciéndose un contacto eléctrico

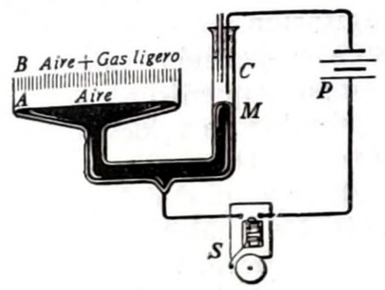


Fig. 461

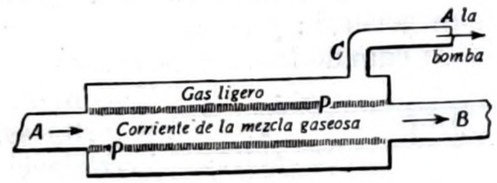


Fig. 462

en *C* que cierra el circuito y pone en funcionamiento un avisador eléctrico cualquiera ; por ejemplo, un timbre eléctrico *S*.

β] Se construyen dispositivos para separar de una mezcla de gases los que tienen diferente densidad.

Así, la mezcla de hidrógeno y oxígeno que se obtiene por descomposición del vapor de agua a temperatura elevadísima, se hace pasar por el tubo *AB* (fig. 462). La bomba extrae a través del tabique poroso una mezcla de gases que está enriquecida en el componente más ligero.

Análogamente puede separarse el helio del aire, o, más exactamente, sacar por *C* una mezcla de helio y aire más rica en helio que la mezcla que llega por *A*.

No es absurdo suponer que puedan existir paredes semipermeables que dejen pasar, de una mezcla de gases, las moléculas de una especie y no las de otra. En el caso del hidrógeno constituye una pared de esta clase, con muy buena aproximación, una lámina de platino incandescente, que es permeable para el hidrógeno y no lo es para los otros gases. Un baloncito de platino lleno de hidrógeno, herméticamente cerrado y llevado al rojo, acaba por vaciarse casi completamente porque el hidrógeno sale hasta que la presión parcial en el interior del baloncito es igual a la presión parcial del hidrógeno en el aire, que es casi nula, y por otro lado no entra aire, prácticamente.

§ **227. Movimiento browniano.** Los gránulos de las soluciones coloidales presentan el fenómeno del *movimiento browniano*.

Este fenómeno fué descubierto en 1827 por el botánico inglés BROWN, y consiste en una continua y desordenada agitación de los gránulos en suspensión, tanto más violenta cuanto menor es el tamaño de los gránulos y mayor es la temperatura de la solución.

Cuando un gas contiene en suspensión partículas menudísimas (líquidas o sólidas, como las del humo de un cigarrillo), resulta turbio y presenta marcadamente el fenómeno de TYNDALL. Además, las partículas están dotadas de movimiento browniano (EHRENHAFT).

No parece posible otra explicación de este movimiento, vivacísimo, continuo y completamente irregular, que la que da la teoría cinética de la materia. Se supone que en las soluciones coloidales las moléculas del disolvente están en una agitación continua y desordenada y que chocan contra los gránulos en suspensión. La resultante de los impulsos, es un intervalo de tiempo pequeñísimo, no es nula en general ; pero solamente imprime al gránulo una velocidad observable cuando la masa de éste es suficientemente pequeña y lo hace a intervalos de tiempo particularmente fortuitos, durante los cuales, por concordancia entre la acción de varios choques, la resultante de los impulsos resulta muy diferente de cero. En tal caso, el gránulo es separado violentamente de su posición.

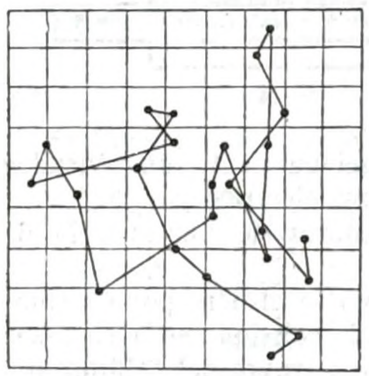


Fig. 463

En la figura 463 se indican las sucesivas posiciones de un mismo gránulo en proyección horizontal, observadas en el ultramicroscopio a intervalos de 30 seg. La longitud efectiva del lado de los cuadraditos dibujados en la figura era $3 \cdot 10^{-5}$ cm ; entre dos posiciones sucesivas indicadas para el gránulo, éste no se mueve rectilíneamente, sino de un modo desordenado ; dicho de otro modo, cada gránulo experimenta muchos choques dentro de cada 30 segundos. El gránulo era de almáciga (resina de lentisco), estaba suspendido en una disolución acuosa de urea y tenía un radio de $5{,}3 \cdot 10^{-5}$ cm.

Debe considerarse el movimiento browniano como la prueba más directa de la estructura molecular y de la teoría cinética de la materia.

La difusión (§ 225) ha de ser considerada como el resultado medio, estadístico, macroscópico, del movimiento browniano de que están dotadas las moléculas que se están difundiendo.

El vidrio llamado de rubí es una solución coloidal sólida de oro en vidrio. Las partículas de oro en suspensión son visibles en el ultramicroscopio ; pero están fijas : no hay allí movimiento browniano. Mientras en los gases y en los líquidos se debe imaginar que las moléculas se mueven desordenadamente como la multitud desordenada de una plaza, en los sólidos se imaginará que las moléculas o los átomos solamente vibran alrededor de posiciones fijas de equilibrio.

CAPÍTULO VII

Dinámica de los flúidos

§ 228. Generalidades. Únicamente trataremos de los fenómenos fundamentales y más sencillos. Nos limitaremos casi únicamente a la dinámica de los flúidos incompresibles (líquidos). La dinámica de los gases implica fenómenos térmicos muy sensibles y debe desarrollarse después del estudio de la termodinámica.

Por otro lado, en la dinámica de los líquidos *(hidrodinámica)* ya no es lícito, como en hidrostática, despreciar el rozamiento interno. Consideraremos *líquidos perfectos* (incomprensibles y sin viscosidad). Los resultados obtenidos sólo serán válidos, tratándose de líquidos reales, con cierto grado de aproximación, tanto menor cuanto más viscoso sea el líquido y cuanto más nos pongamos en condiciones de que influya la viscosidad (tubos y recipientes muy estrechos, velocidad elevada, ...).

Despreciando el rozamiento interno, se supone nula, por consiguiente, la componente tangencial de la fuerza $d\vec{F}$ que actúa sobre un elemento de superficie dS que deriva de dicho rozamiento (§ 187, *b*]). Luego admitiremos, como en hidrostática, que existe una presión $d\vec{F}$ sobre cada elemento dS de superficie fija o en movimiento sumergida en un líquido, y que esta presión dF es normal a dS y proporcional a dS :

$$d\vec{F} = \vec{p} \cdot dS.$$

Con la demostración del § 200 se puede deducir todavía que p es independiente de la orientación de dS, porque el único nuevo factor a considerar es debido a las eventuales fuerzas de inercia, originadas por las aceleraciones y que son fuerzas de masa.

Para medir p se necesitaría un manómetro pequeñísimo, rapidísimo, capaz de permanecer en un punto fijo embestido por el flúido en movimiento, o de moverse conjuntamente con el líquido ; y todo esto sin perturbar el movimiento de éste.

El espacio ocupado por el líquido en movimiento constituye un campo vectorial ; en cada punto de éste se tiene un vector velocidad $\vec{u}$ que es, en general, función del punto considerado (es decir, de sus coordenadas x, y, z) y del tiempo t.

Se dice que el movimiento es *estacionario*, o tiene *régimen estacionario* o *constante*, cuando $\vec{u}$ es función de x, y, z, pero no depende de t ; es decir, cuando las diversas partículas flúidas que vienen a ocupar sucesivamente el punto (x, y, z) pasan siempre con la misma

velocidad $\vec{u}$. Así, en un canal o en un conducto alimentado uniformemente, para obtener un suministro constante, la velocidad $\vec{u}$ del agua conducida podrá ser mayor en unos puntos del canal (por ejemplo, en aquellos en que se estrecha su sección) que en otros; pero en cada punto la velocidad es independiente del tiempo.

Supondremos que nos hallamos siempre en estas condiciones.

En el campo del vector $\vec{u}$ se podrán definir las *líneas de flujo* como se han definido en el § 80 las líneas de fuerza. Se puede tener una visión de conjunto de la forma de estas *líneas de flujo* o *líneas de corriente* intercalando en el agua en movimiento, con una serie adecuada de embuditos, filetes de agua coloreada, los cuales son conducidos por el agua que los rodea y pueden conservar su individualidad durante un recorrido discretamente largo.

Fig. 464

Si el agua circula con pequeña velocidad por un canal horizontal, por ejemplo, de vidrio, pueden dejarse caer en el fondo del mismo algunos granitos de permanganato potásico que producirán, durante bastante tiempo, filetes coloreados que indicarán las líneas de corriente.

La figura 464 está sacada de una fotografía de POHL e indica la distribución de las líneas de flujo que rodean un cilindro C (cuyo eje es normal al plano del dibujo) en una vasija de caras planas paralelas y normales al eje del cilindro C.

Pero si la velocidad del agua conducida en la vasija es suficientemente elevada, es muy diferente el aspecto de las líneas de corriente.

El movimiento del agua junto al obstáculo es *turbulento*, formándose *remolinos*, *torbellinos* o *vórtices*.

En todos los casos, la pared del recipiente, del conducto o del canal, es un *tubo de flujo*.

El campo en que está definido el vector $\vec{u}$, es decir, el campo ocupado por el líquido, puede ser simplemente conexo o múltiplemente conexo. El campo del vector $\vec{u}$ puede ser *rotacional* o *irrotacional* (§ 88).

§ 229. Cuatro ejemplos de movimiento estacionario.

a] **Movimiento irrotacional en un campo simplemente conexo.** Se verifica:

$$\text{rot } \vec{u} = 0; \qquad [1]$$

esto es:

$$\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0. \qquad [2]$$

Se tiene un potencial Φ de la velocidad $\vec{u}$; esto es, existe una función $\Phi = \Phi(x, y, z)$ tal que las componentes (u_x, u_y, u_z) de la velocidad en cualquier punto son:

$$u_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}; \qquad u_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}; \qquad u_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}. \qquad [3]$$

Existen superficies equipotenciales normales a las líneas de flujo Podemos escribir:

$$\int_{A_1}^{A_2} \vec{u} \cdot d\vec{s} = \Phi_1 - \Phi_2, \qquad [4]$$

valor independiente de la trayectoria s que une A_1 a A_2. Para una línea s cerrada, resulta $\oint \vec{u} \cdot d\vec{s} = 0$: la *circulación* $\oint \vec{u} \cdot d\vec{s}$ es nula.

En general, las superficies equipotenciales no son superficies isobaras. Por ejemplo, en un conducto cilíndrico que conduce un líquido, sea $\vec{u}$ paralela al eje del cilindro y constante en cada punto. El campo $\vec{u}$ es uniforme y admite potencial. Si dicho conducto es horizontal, las superficies isobaras son horizontales, mientras que las superficies Φ = const son planos verticales, perpendiculares al eje del cilindro.

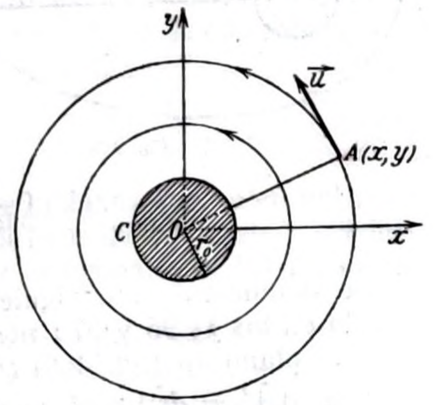


Fig. 465

Se demuestra (*teorema de* HELMHOLTZ) que el movimiento engendrado en un líquido perfecto por la acción exclusiva de las fuerzas de presión, normales a cada elemento de superficie y proporcionales a la extensión de este elemento, y por la acción de las fuerzas de volumen que admiten potencial, es siempre un movimiento irrotacional. Viceversa, con fuerzas de esta clase sólo es posible reducir al reposo un movimiento que sea irrotacional.

b] **Movimiento irrotacional en un campo múltiplemente conexo: circulación.** Un líquido gira alrededor del cilindro C (fig. 465) cuyo eje se supone normal al plano del dibujo y coincide con el eje cartesiano de referencia z. Sea r_0 el radio del cilindro.

Las líneas de flujo sean circunferencias con centro en el eje z y que giran en sentido positivo alrededor de este eje. Supongamos que la velocidad $\vec{u}$, tangente en cada punto A a las líneas de flujo, sea, en magnitud, inversamente proporcional a $z = OA$:

$$u = \frac{k}{r}. \qquad [5]$$

Se tiene:

$$u_x = -\frac{k}{r}\cdot \operatorname{sen}\ (xr), \qquad u_y = \frac{k}{r}\cdot \cos\ (xr), \qquad u_z = 0\,;$$

o sea:

$$u_x = -\frac{ky}{x^2+y^2}; \qquad u_y = \frac{kx}{x^2+y^2}; \qquad u_z = 0. \qquad [6]$$

Efectuando las derivaciones, se comprueba que se verifican las igualdades [2]: el movimiento en cada elemento de flúido es irrotacional.

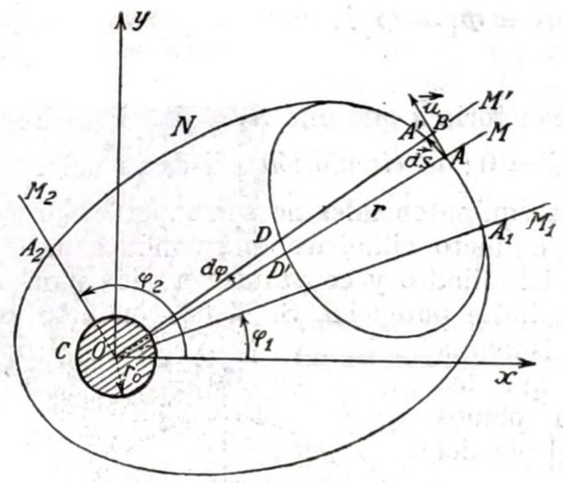


Fig. 466

Pero la *circulación* del vector $\vec{u}$ sólo es nula,

$$\oint \vec{u}\cdot d\vec{s} = 0, \qquad [7]$$

cuando se toma según una línea cerrada s no ligada al cilindro, es decir, cuando s puede ser contorno de una superficie comprendida *toda* en el campo ocupado por el líquido. Si la línea s está ligada a C, la circulación es:

$$\oint \vec{u}\cdot d\vec{s} = 2\pi k. \qquad [8]$$

Se demuestra esto siguiendo un procedimiento análogo al empleado en los §§ 95 y 97; nos limitaremos aquí al caso de contornos s en el plano xy (fig. 466) (1).

Sea $\vec{AA'} = d\vec{s}$ un elemento del contorno s, y sean OM y OM' semirrectas que salen de O y pasan, respectivamente, por A y A'. Se tiene:

$$\vec{u}\cdot d\vec{s} = u\cdot AB = \frac{k}{r}\cdot r\cdot d\varphi = k\cdot d\varphi,$$

valor independientemente de la posición de A y A' sobre las semirrectas OM y OM', y dependiendo sólo de $d\varphi$.

Si, pues, s está ligado a C (y efectúa una sola vuelta alrededor de C), se tiene:

$$\oint \vec{u}\cdot d\vec{s} = \oint k\cdot d\varphi = k\cdot \oint d\varphi = k\cdot 2\pi.$$

(1) Efectivamente, se trata de un *problema plano*, es decir, que sólo depende de las coordenadas x, y, y no de z.

Si s no está ligado a C, se contrapone a cada elemento AA' de s que corta a $d\varphi$ en un sentido, un elemento de retorno DD' que corta a $d\varphi$ en sentido contrario y que contribuye a la circulación con el término $-k\cdot d\varphi$.

Análogamente se demuestra que es:

$$\int_{A_1NA_2} \vec{u}\cdot d\vec{s} = k\ (\varphi_2 - \varphi_1) = k\varphi_2 - k\varphi_1, \qquad [9]$$

donde es

$$\varphi_1 = \widehat{xOA_1}; \qquad \varphi_2 = \widehat{xOA_2}.$$

Luego, $\int_{A_1NA_2} \vec{u}\cdot d\vec{s}$ sólo depende de los extremos de la trayectoria;

$$\Phi = -k\varphi + C_0,$$

siendo C_0 una constante aditiva arbitraria, puede suponerse un potencial de las velocidades.

Suponiendo $\Phi = 0$ para $\varphi = 0$, esto es, considerando nulo el potencial en el eje de las x (mejor, en el semiplano xz cuando se considere en el espacio el campo que se estudia),

$$\Phi = -k\varphi \qquad [10]$$

es el potencial de las velocidades; los semiplanos que salen del eje z son superficies equipotenciales para cada una de las cuales es constante φ. Estas superficies son a su vez ortogonales a las líneas de flujo en todos sus puntos.

Pero si el punto, saliendo de A_1, vuelve al mismo sitio después de dar una vuelta alrededor de C en sentido positivo, el potencial en A_1 pasa del valor $-k\varphi_1$ al valor $-k\varphi_1 - 2\pi k$; después de n vueltas, se tiene $\Phi = -k\varphi_1 - 2\pi nk$.

Luego, en general, el campo considerado admite un potencial Φ, pero éste es *función polídroma* de los puntos del campo; los infinitos valores que puede tomar Φ en cada punto vienen dados por:

$$\Phi = -k\varphi - 2\pi nk \quad (n \text{ entero, positivo o negativo}) \qquad [11]$$

La constante $2\pi k$ se llama *circulación* del flujo (irrotacional) alrededor de C.

c] **Movimiento turbillonario.** Un recipiente lleno de líquido gira alrededor de su eje z, supuesto vertical, con velocidad angular constante $\vec{\omega}$. El líquido gira alrededor de z como un todo rígido.

Gracias al rozamiento interno, se obtiene esto fácilmente en los líquidos reales después de algún tiempo de haberse iniciado la rotación; para un recipiente de un litro lleno de agua, bastan unas de-

cenas de segundo. En los líquidos perfectos, desprovistos de rozamiento interno, la rotación del recipiente no sería capaz de arrastrar en su rotación al líquido contenido, y para obtener el movimiento supuesto sería necesario aplicar un sistema conveniente de fuerzas a las diversas capas cilíndricas circulares, coaxiales con z, en que se puede imaginar dividido el líquido.

El campo del vector $\vec{u}$ es ahora el mismo estudiado en el § 93 (fig. 167) y en el § 204. Este es un campo rotacional; en cada punto del flúido se tiene:

$$\text{rot } \vec{u} = 2\vec{\omega} = \text{const.} \qquad [12]$$

No hay potencial de velocidades.

El flúido, girando de esta manera, da el ejemplo más esquemático de *torbellino* o *vórtice de eje rectilíneo*. El eje del vórtice es el eje de rotación z del cilindro.

d] **Movimiento laminar, rotacional.** Sea un tubo cilíndrico de algunos centímetros de diámetro recorrido por agua. Si la velocidad de ésta no alcanza cierto valor crítico, puede obtenerse un movimiento del líquido en el que las líneas de flujo son paralelas al eje del tubo (fig. 467), pero la velocidad $\vec{u}$ es máxima en el eje del tubo y va disminuyendo hasta llegar a cero en la vecindad de las paredes. Cada capa, constituyendo un tubo cilíndrico de agua coaxial con z, se desliza sobre la capa contigua exterior. La capa de agua que toca a las paredes del tubo está en reposo, por adherencia. La parte axial del tubo es recorrida por el agua más veloz. Aparte la simetría cilíndrica, se tiene un fenómeno análogo al de la figura 375, en donde cada capa de líquido paralela a CD constituía como una lámina líquida que se deslizaba entre las dos contiguas, lo que justifica el nombre de *laminar* dado a este tipo de movimiento.

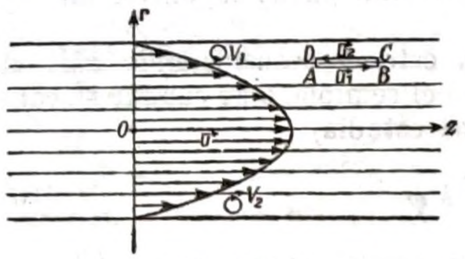


Fig. 467

El campo del vector $\vec{u}$ es rotacional; la circulación de u a lo largo de una curva cerrada no es nula, en general. Así, a lo largo del contorno $ABCD$ ($AB = CD = s$) se tiene:

$$\oint \vec{u} \cdot d\vec{s} = u_1 s - u_2 s = s(u_1 - u_2),$$

diferente de cero. porque $u_1 > u_2$. Aplicando la relación de STOKES (§ 86, [1]) se encuentra que rot $\vec{u}$ tiene por módulo $\left|\frac{du}{dr}\right|$ y las líneas del rotacional rot $\vec{u}$ son circunferencias cuyo eje es z y cuyo sentido positivo es contrario al de las saetas del reloj, para un observador que mira hacia O con el ojo en z.

Este movimiento laminar es turbillonario, resultante de una infinidad de torbellinos elementales, como V_1 y V_2, que se componen dando un movimiento de conjunto irrotacional que por sí solo movería el líquido a lo largo del tubo con movimiento constante en todas partes. Las líneas turbillonarias, es decir, las líneas de flujo de rot $\vec{u}$, son circunferencias con el centro en el eje z.

§ 230. Conservación de los vórtices. Según el teorema de HELMHOLTZ (§ 229, *a*]), un movimiento de torbellino producido en un líquido perfecto, sujeto sólo a fuerzas de volumen que admiten potencial y a fuerzas de presión, debería conservarse indefinidamente: la porción de flúido en donde rot $\vec{u}$ no es nulo puede moverse y deformarse en el flúido circundante, pero ni puede comunicar a éste su rotación, y resultar, por tanto, frenado por reacción, ni puede recibir de él nuevo impulso para la rotación.

Este resultado sólo es verdadero para los flúidos perfectos. En los flúidos reales, el teorema de HELMHOLTZ no puede ser más que aproximado a causa del rozamiento interno. Pero en los flúidos no muy viscosos, como el aire y el agua, algunos experimentos sobre vórtices demuestran la fuerte individualidad que poseen las porciones de flúido dotadas de movimiento turbillonario.

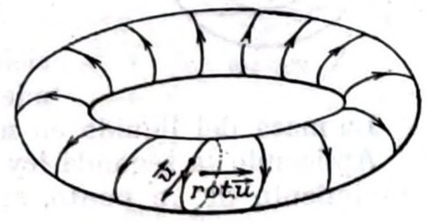


Fig. 468

Los *vórtices* que mejor se prestan a estos experimentos son los *anulares* (figura 468), que pueden suponerse obtenidos de los del § 229, *c*], imaginando que el eje del vórtice, en lugar de ser rectilíneo, se cierra sobre sí mismo; la pared del anillo es un tubo turbillonario, es decir, es tubo de flujo del vector rot $\vec{u}$.

Muchos fumadores saben producir estos vórtices con humo emitido bruscamente por la boca en pequeña cantidad, con los labios en forma de abertura casi circular. Todos hemos observado los magníficos anillos de humo que salen a veces de la chimenea de las locomotoras. Practicando un agujero circular de algunos centímetros de diámetro en el centro de una cara de una lata de petróleo vacía, llenando la lata de humo y dando un golpe en la cara opuesta al agujero se hace brotar por éste un anillo.

Este anillo se propaga en línea recta muchos metros antes de destruirse. Al tropezar con un obstáculo plano, puede reflejarse. Cuando dos anillos chocan uno contra el otro, rebotan.

El siguiente experimento es de los más instructivos. Se dejan caer, con un cuentagotas, gotas de tinta en un vaso profundo lleno de agua. Si la altura de caída es de unos 4 cm sobre la superficie del agua, cada gota forma al caer un magnífico *vórtice* anular de tinta, que avanza vivamente hasta el fondo del vaso, pudiendo atravesar unos 20 ÷ 25 cm de agua sin destruirse.

Si la altura de caída es menor, el vórtice tiene menor velocidad de traslación y se destruye más de prisa.

Si la altura de caída es mayor (7 ÷ 8 cm), el vórtice no se forma ya, y el líquido coloreado, a pesar de la mayor velocidad con que cae no es capaz de penetrar en el agua ni siquiera unos milímetros.

§ 231. Oscilaciones de un líquido pesado en un tubo en U. Sea OO' (fig. 469) el nivel correspondiente al equilibrio, S la sección del tubo, supuesta constante, μ la masa específica del líquido también constante, y l la longitud del líquido en el tubo.

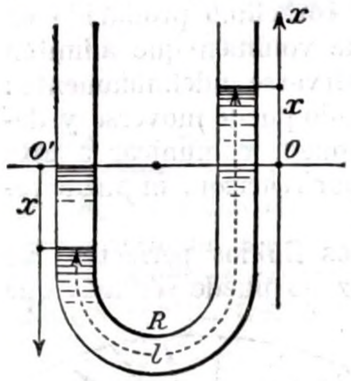


Fig. 469

Si el líquido de la rama O se levanta una altura x, la fuerza que tiende a llevarlo de nuevo a la posición de equilibrio, dirigida según el eje x, vale:

$$-2x\cdot S\cdot\mu\cdot g.$$

El signo — indica que la fuerza tiene siempre sentido opuesto que el corrimiento x.

La masa del líquido en movimiento es $l\cdot S\cdot\mu$.

Aplicando la segunda ley de la dinámica, como si se tratase del movimiento de un punto, se obtiene:

$$l\cdot S\cdot\mu\,\frac{d^2x}{dt^2}=-2x\cdot S\cdot\mu\cdot g.$$

Luego:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{2g}{l}x,$$

ecuación análoga a la [3], § 144, relativa al movimiento del péndulo. Se deduce que el líquido efectúa oscilaciones isócronas de período

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}.$$

El líquido se comporta como un péndulo de longitud $\frac{l}{2}$.

En realidad, las oscilaciones son notablemente amortiguadas a causa de los rozamientos.

Poniendo una llave en R para reducir el paso, se puede aumentar el rozamiento hasta llegar al valor *crítico*, más allá del cual el movimiento del líquido ya no es oscilatorio.

Actuando periódicamente con un émbolo sobre una de las ramas del tubo, se pueden repetir los experimentos de las oscilaciones forzadas y, en particular, las experiencias sobre la resonancia.

Así como las oscilaciones armónicas de una partícula en un medio elástico indefinido originan ondas elásticas, las oscilaciones debidas

a la gravedad, análogas a las del tubo en U, producidas en un líquido indefinido, engendran ondas: al caer una piedra en el agua de un estanque se producen igualmente ondas en la superficie del líquido; son análogas las olas del mar y las ondas de la marea.

De todos modos, en una vasija el líquido no es indefinido; para las mareas, un mar pequeño, como el mar Rojo o el mar Adriático, no puede considerarse indefinido. En el contorno del líquido se tienen reflexiones, ondas estacionarias y resonancia, análogamente a cuanto se verá al tratar de las ondas sonoras (§§ 256 ÷ 260).

§ 232. Cámara elástica. Se obtienen oscilaciones armónicas, como en el caso precedente, en el tubo AB (fig. 470), de sección S y longitud l que pone en comunicación dos cavidades C_1 y C_2 de volúmenes respectivos v_1 y v_2. El espacio total $v_1+v_2+S\cdot l$ está lleno de un gas cuya masa específica llamaremos μ. En condiciones de reposo, la presión p_0 es la misma en todo el recinto.

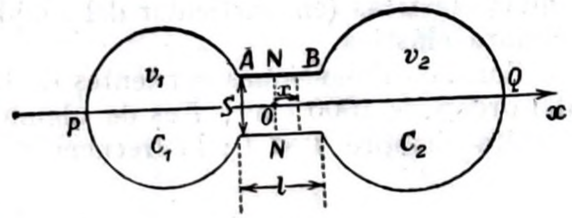


Fig. 470

Son posibles las oscilaciones del gas desde una a otra cavidad. Si es pequeño el volumen $S\cdot l$ del tubo respecto a v_1 y v_2, se puede suponer que la columna de aire AB, de masa $S\cdot l\cdot\mu$, se mueve como un émbolo rígido, produciendo así compresión en una de las dos cavidades y enrarecimiento en la otra. La diferencia de presión entre las dos cavidades da la fuerza motriz de tipo elástico que hace oscilar el aire de AB a un lado y otro de su posición de equilibrio.

La oscilación del aire de AB viene ahora determinada por el corrimiento x de una capa NN respecto a su posición de reposo.

Las variaciones de presión Δp_1 y Δp_2 de las presiones p_1 y p_2 en v_1 y v_2 producidas por el corrimiento x son, en valor y signo (§ 185, [1]):

$$\Delta p_1=-\frac{\varepsilon}{v_1}\Delta v_1=-\frac{\varepsilon}{v_1}S\cdot x;\qquad \Delta p_2=-\frac{\varepsilon}{v_2}\Delta v_2=-\frac{\varepsilon}{v_2}S\cdot x.$$

La fuerza motriz es, en valor y signo:

$$S\cdot(-\Delta p_2+\Delta p_1)=-S^2\cdot\varepsilon\,\frac{(v_1+v_2)}{v_1\cdot v_2}\,x.$$

Y la ley del movimiento $\vec{F}=m\cdot\vec{a_c}$ da:

$$S\cdot l\cdot\mu\,\frac{d^2x}{dt^2}=-S^2\cdot\varepsilon\,\frac{(v_1+v_2)}{v_1\cdot v_2}\,x;$$

o sea :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\varepsilon \cdot S}{l \cdot \mu} \cdot \frac{(v_1 + v_2)}{v_1 \cdot v_2}\, x = 0. \qquad [1]$$

Resulta la conocida ecuación diferencial del movimiento pendular. El aire de AB tiene un período propio (compárese § 144, [3], [6]) :

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{S}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}} \sqrt{\frac{v_1 \cdot v_2}{v_1 + v_2}}\,. \qquad [2]$$

Veremos que $\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} = \mathbf{v}$ es la velocidad de propagación de las ondas elásticas (en particular del sonido) en el gas contenido en la cámara elástica.

Con las dimensiones corrientes de la cámara elástica (v_1 y v_2 son del orden de 1000 cm³ ; l es de algunos cm ; S vale algunos cm²) resulta siempre $T \ll 1$; la frecuencia

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \mathbf{v} \cdot \sqrt{\frac{S}{l}} \cdot \sqrt{\frac{v_1 + v_2}{v_1 \cdot v_2}} \qquad [3]$$

es muy notable : las vibraciones del gas tienen frecuencia audible. El dispositivo se llama *cámara acústica.*

La [3] es suficientemente aproximada cuando la longitud de onda (§ 249) del sonido propio de la cámara es grande respecto a las dimensiones PQ de la misma, lo que prácticamente sucede siempre.

Además, la masa en movimiento no es sólo la contenida entre A y B ; esto se tiene en cuenta escribiendo $l + l_0$ en lugar de l en las expresiones [2] y [3]. Pero el cálculo del término correctivo l_0 no es fácil.

§ 233. Movimiento estacionario en las conducciones. Consideremos un conducto sin variaciones bruscas de sección, lleno de un líquido perfecto en movimiento, sometido a la acción de la gravedad. Sea μ la masa específica del líquido. Como se supone alcanzado el estado de régimen estacionario, resulta que $\vec{u}$ es función del punto y no del tiempo. A lo largo de las paredes del conducto, $\vec{u}$ no puede ser más que paralelo a la misma pared : el conducto es un tubo de flujo para el campo del vector $\vec{u}$.

Este campo debe ser forzosamente solenoidal a causa de la incompresibilidad del líquido (§ 93). Por tanto, el flujo a través de una sección cualquiera del conducto es constante (§ 87, [2]).

Supondremos, en fin, que $\vec{u}$ y p pueden considerarse constantes en todos los puntos de cada sección normal S del conducto (fig. 471)

y que se puede suponer suficientemente definida la altura h de cada sección S sobre un plano horizontal de referencia OO'.

La constancia de p en cada sección presupone o que las secciones S_1, S_2, ... son pequeñas (1) respecto al desnivel $h_2 - h_1$ que interesa considerar, o que son pequeñas las diferencias de presión entre los diversos puntos de una sección normal S debidas a la ley de Stevin, respecto al valor de la presión misma. Además, la constancia de $\vec{u}$ y de p en cada sección excluye que en el líquido se efectúen movimientos de torbellino o que el conducto presente recodos tan bruscos que den origen a presiones sensibles por efecto de la fuerza centrífuga.

El flujo a través de una sección normal S es entonces simplemente $S \cdot u$; para cualquier sección normal del conducto se tiene $S \cdot u = \text{const.}$

Este producto es el *gasto* P del conducto ; si dv es el volumen de líquido que atraviesa la sección S en el tiempo dt, el gasto es también $P = \frac{dv}{dt}$; luego :

$$P = \frac{dv}{dt} = S \cdot u = \text{const.} \qquad [1]$$

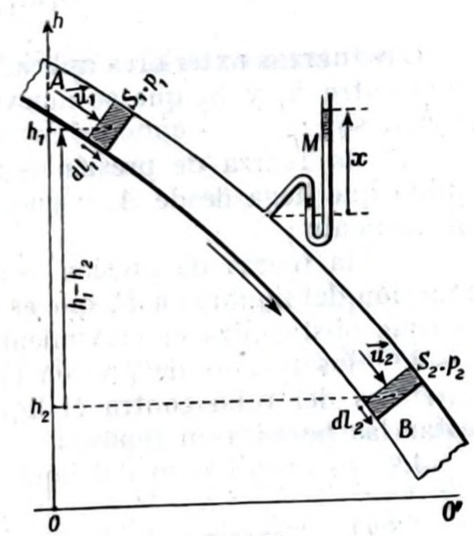


Fig. 471

Además, en nuestro caso, un manómetro M colocado lateralmente en el tubo puede dar la medida de la *presión dinámica* p sin perturbar el movimiento del flúido en el conducto. Un tubo manométrico colocado de este modo en la pared del conducto se llama también *tubo piezométrico*, y, por tanto, las presiones así medidas se llaman *presiones piezométricas.*

Cualquier manómetro puede servir para la medida ; si se trata de manómetros de aire libre, el desnivel x (fig. 471) permitirá determinar la diferencia entre p y la presión exterior, que, generalmente, es la presión atmosférica.

Si las condiciones del movimiento en el interior del conducto cambian con el tiempo con suficiente lentitud, el manómetro así instalado puede indicar los diversos valores que va tomando sucesivamente p ; si nos hallamos en condiciones de régimen estacionario, p es constante con el tiempo para cada sección.

Sea p_1 la presión en los puntos de la sección S_1, y p_2 la presión en los puntos de S_2 ; sean $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$, las velocidades, y h_1 y h_2 las alturas.

(1) Pero no demasiado pequeñas ; véase § 237.

En un elemento de tiempo dt, el líquido en S_1 se traslada en $dl_1 = u_1\,dt$; y en S_2 se traslada en $dl_2 = u_2\,dt$. Por otro lado, la [1] da:

$$S_1 u_1 = S_2 u_2\,; \qquad [2]$$

por tanto, también se verifica:

$$S_1 u_1\,dt = S_2 u_2\,dt\,;$$

esto es:

$$S_1\,dl_1 = S_2\,dl_2. \qquad [3]$$

Las fuerzas exteriores aplicadas a la porción de líquido comprendida entre S_1 y S_2 que se mueve, por ejemplo, en el sentido de la flecha, son:

1.º la fuerza de presión $+ p_1 S_1$ sobre la cara S_1, debida al líquido que llega desde A, y que se supone positiva porque activa el movimiento;

2.º la fuerza de presión $- p_2 S_2$ sobre la cara S_2, debida a la reacción del líquido en B, que es empujado, y que se supone negativa porque obstaculiza el movimiento;

3.º las fuerzas de presión ejercidas por reacción de las paredes laterales del tubo contra el líquido, que no producen trabajo por estar las paredes en reposo;

4.º la fuerza peso del líquido comprendido entre S_1 y S_2.

§ 234. Teorema de la energía (teorema de BERNOULLI). Las fuerzas 1.º, 2.º y 3.º antes indicadas efectúan en el tiempo dt los trabajos siguientes:

$$+ p_1 S_1\,dl_1\,; \quad - p_2 S_2\,dl_2\,; \quad 0.$$

El trabajo de la fuerza peso se reduce a:

$$+ S_1\,dl_1 \cdot \mu \cdot g\,(h_1 - h_2)$$

porque en el tiempo dt se ha obtenido, a fin de cuentas, el descenso del volumen $S_1\,dl_1 = S_2\,dl_2$ de líquido desde el nivel h_1 al nivel h_2.

El teorema de las fuerzas vivas da:

$$S_1\,dl_1 \cdot \mu \cdot g \cdot (h_1 - h_2) + p_1 S_1\,dl_1 - p_2 S_2\,dl_2 = S_2\,dl_2 \frac{\mu}{2} u_2^2 - S_1\,dl_1 \frac{\mu}{2} u_1^2$$

(Trabajo efectuado por las fuerzas aplicadas durante el tiempo dt)

(Variación de la energía cinética de todo el líquido en el pedazo de tubo considerado, en el mismo tiempo dt)

O sea, por la [3], § 233:

$$p_1 - p_2 + \mu \cdot g\,(h_1 - h_2) = \frac{\mu}{2}\,(u_2^2 - u_1^2), \qquad [1]$$

que puede escribirse:

$$p_1 + \mu \cdot g \cdot h_1 + \frac{\mu}{2} u_1^2 = p_2 + \mu \cdot g \cdot h_2 + \frac{\mu}{2} u_2^2 = \text{const.} \qquad [2]$$

en todas las secciones

Esta fórmula constituye el *teorema de* BERNOULLI: el *trinomio*

$$p + \mu\,gh + \frac{\mu}{2} u^2 \qquad [3]$$

es constante en todas las secciones del conducto. El movimiento se efectúa según el *régimen de* BERNOULLI.

Se deduce también de la [3] que el trinomio

$$\frac{p}{\mu\,g} + h + \frac{u^2}{2\,g} \qquad [4]$$

es constante en todas las secciones del conducto. Puesto que h es una altura, los otros dos sumandos miden alturas: $\frac{p}{\mu\,g}$ se llama *altura piezométrica*; h es la altura geométrica, y $\frac{u^2}{2\,g}$ es la *altura de detención* (o *de velocidad*, o *cinética*); esta última es, en efecto, la altura que alcanzaría el líquido dirigido hacia arriba con la velocidad u.

En correspondencia, los tres términos de la [3] reciben, respectivamente, los nombres de *presión piezométrica*, *presión de gravedad* y *presión de detención* (o *de velocidad*, o *cinética*).

Teniendo en cuenta la [2] del § 233, puede escribirse la [1]:

$$p_2 - p_1 = \mu \cdot g \cdot (h_1 - h_2) - \frac{\mu\,u_2^2}{2}\left(1 - \frac{S_2^2}{S_1^2}\right). \qquad [5]$$

Si el mismo líquido estuviese en reposo en el conducto, a igualdad de presión inicial p_1, las presiones en sus diversas secciones estarían reguladas por la ley de STEVIN [6], § 202 (es $h = -z$):

$$p_2 - p_1 = \mu \cdot g \cdot (h_1 - h_2)\,; \qquad [6]$$

de modo que sería $p + \mu\,gh = \text{const.}$ en cualquier sección del conducto. Estas presiones sólo coincidirían con las que da la [5] si fuese

$$S_1 = S_2 = \text{const.}$$

Las presiones p_2 dadas por la [2] o por la [5], existentes cuando el líquido está en movimiento, son las presiones *piezométricas*. Las

presiones p_2 dadas por la [6] existen cuando el líquido se halla en reposo a igualdad de presión inicial p_1 y son también medibles con un tubo-manómetro M (fig. 471); conviene llamarlas *presiones piezométricas estáticas* o, simplemente, *presiones estáticas* (1); por el contrario, las presiones dadas por las [2] y [5] podrán llamarse *presiones piezométricas dinámicas* o, simplemente, *presiones dinámicas*.

En el caso de que sea despreciable el trabajo de las fuerzas de gravedad (conductos con poco desnivel), la [3] da:

$$p_1 + \frac{\mu}{2} u_1^2 = p_2 + \frac{\mu}{2} u_2^2 = \text{constante} \qquad [7]$$

en cualquier sección del conducto (se excluyen el rozamiento interno, los torbellinos y el trabajo de la gravedad). Se puede decir, *grosso modo*, que lo que se pierde en presión se gana en velocidad (energía cinética). Además, si el conducto horizontal tiene también sección constante S, resulta u constante en todas las secciones, y la [7] se reduce a $p = \text{const.}$, como se tendría justamente en el caso estático.

Si en un líquido perfecto en movimiento estacionario no turbulento se aísla idealmente un tubo delgado de flujo, éste constituye con su pared lateral ideal, formada por líneas de flujo, un conducto delgado o filete líquido que satisface las condiciones indicadas en el § 233. Por lo tanto, puede aplicársele el teorema de BERNOULLI independientemente de la existencia de los filetes líquidos vecinos o de la existencia de un conducto efectivo constituyendo la pared lateral del tubo de flujo.

§ 235. Teorema de la cantidad de movimiento. Se supone todavía que nos hallamos en las condiciones del § 233.

Se aplica el teorema de la cantidad de movimiento al líquido del conducto comprendido entre las secciones S_1 y S_2. En los casos sencillos que consideraremos, basta limitarse al teorema de la cantidad de movimiento, sin aplicar el teorema del momento cinético.

Las fuerzas aplicadas son todas las que se indican al final del § 233. Se supone que existe la resultante (§ 109) y que ésta se designa por $\vec{R}$.

La variación de la cantidad de movimiento en el tiempo dt se reduce a la diferencia entre las cantidades de movimiento del líquido entrante $dm_1 \cdot \vec{u}_1$ y del líquido saliente $dm_2 \cdot \vec{u}_2$ en el pedazo de conducto considerado.

Se tiene ahora:

$$dm_1 = \mu S_1 u_1 dt$$
$$dm_2 = dm_1 = \mu S_2 u_2 dt.$$

(1) La terminología empleada por los varios autores es muy variada; así, en muchos tratados, la presión p que se puede medir con el manómetro, mientras el líquido está en movimiento, se llama «presión estática», lo que no es lógico.

Luego:

$$\vec{R} \cdot dt = \mu (S_2 u_2 \cdot \vec{u}_2 - S_1 u_1 \cdot \vec{u}_1)\, dt$$
$$\vec{R} = \mu [(\overrightarrow{S_2 u_2^2}) - (\overrightarrow{S_1 u_1^2})] = \vec{Q}_2 - \vec{Q}_1 \qquad [1]$$

entendiendo que $\vec{Q}_1 = \mu \cdot (\overrightarrow{S_1 u_1^2})$ sea un vector orientado como $\vec{u}_1$, y $\vec{Q}_2 = \mu \cdot (\overrightarrow{S_2 u_2^2})$ otro orientado como $\vec{u}_2$.

Si el líquido del conducto, comprendido entre S_1 y S_2, está en reposo, es nula la resultante $\vec{R}_s$ de las fuerzas que le son aplicadas; se trata de la resultante del peso $\vec{P}$ del líquido comprendido entre S_1 y S_2 y de las fuerzas de presión que las paredes del conducto y el líquido que se halla al exterior de S_1 y S_2 ejercen sobre el líquido considerado.

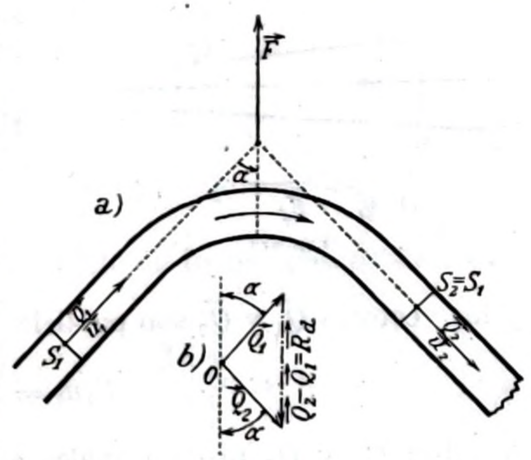


Fig. 472

Se puede imaginar que durante el movimiento de régimen estacionario en cada elemento de la superficie lateral del conducto y de las secciones S_1, S_2, se superpone a las presiones estáticas indicadas una presión debida al movimiento; la resultante $\vec{R}_d$ de estas nuevas presiones es tal que

$$\vec{R} = \vec{R}_d + \vec{R}_s = \vec{R}_d \qquad [2]$$

y la [1] da, más simplemente:

$$\vec{R}_d = \mu [(\overrightarrow{S_2 u_2^2}) - (\overrightarrow{S_1 u_1^2})] = \vec{Q}_2 - \vec{Q}_1 \qquad [3]$$

Se puede calcular $\vec{R}_d$ a partir de la variación $\vec{Q}_2 - \vec{Q}_1$ de la cantidad de movimiento por unidad de tiempo, como indica la [3]. He aquí dos casos típicos de aplicación de la [3].

a] **Conducción horizontal curva, de sección constante.** Los vectores $\vec{Q}_1$, $\vec{Q}_2$ (fig. 472) tienen las magnitudes

$$Q_1 = \mu S_1 u_1^2, \qquad Q_2 = \mu S_2 u_2^2 = Q_1,$$

están orientados como en la figura, y se hallan en un plano horizontal como el conducto.

La resultante $\vec{R}_d$ viene indicada gráficamente en la figura 472, *b*). Para que el codo de la conducción pueda imponer al líquido interior la variación de la cantidad de movimiento referida a la unidad de

tiempo $(\vec{Q}_2 - \vec{Q}_1)$, este codo, además de reaccionar (tanto con el líquido que llega como con el que sale) contra la resultante de las presiones estáticas que dan el peso del líquido contenido en el codo, debe reaccionar también con la fuerza $\vec{R}_d$ contra la acción dinámica del chorro de líquido que se encorva.

Se tiene:

$$\vec{R}_d = 2\,\mu S_1 u_1^2 \cos\alpha = 2\,\mu S_2 u_2^2 \cos\alpha. \qquad [4]$$

Si el codo no se sujetara fuertemente, se movería en el sentido de la flecha $\vec{F}$; en último análisis, el codo es proyectado por la fuerza centrífuga $\vec{F} = -\vec{R}_d$ que le aplica el líquido.

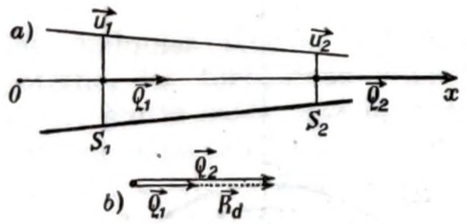


Fig. 473

b] **Conducción horizontal rectilínea, de sección variable.** Se tiene todavía (fig. 473):

$$Q_1 = \mu S_1 u_1^2, \qquad Q_2 = \mu S_2 u_2^2,$$

y los vectores $\vec{Q}_1$ y $\vec{Q}_2$ son paralelos entre sí; pero como (§ 233, [2])

$$S_1 u_1 = S_2 u_2,$$

resultan Q_1 y Q_2 proporcionales a u_1 y u_2, y, por tanto, inversamente proporcionales a S_1 y S_2:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{S_2}{S_1}. \qquad [5]$$

La resultante $\vec{R}_d$ de las fuerzas que las paredes laterales, el líquido que llega por S_1 y el líquido que sale por S_2 deben ejercer sobre el líquido de la conducción para comunicarle la variación de cantidad de movimiento referida a la unidad de tiempo $(\vec{Q}_2 - \vec{Q}_1)$, está dirigida como se indica en la figura 473, *b*).

El sistema formado por el líquido situado a la izquierda de S_1 y por el tubo que constituye la pared del conducto, que se estrecha en el sentido del movimiento del líquido (como se ve en la figura), experimenta por parte del líquido que acelera su movimiento un empuje de reacción $-\vec{R}_d$. En las lanzas de incendio, esta reacción es tan violenta que se necesita el esfuerzo de varios hombres para mantenerlas fijas contra la reacción $-\vec{R}_d$ del líquido que sale.

§ 236. Diversas aplicaciones. No entran en el cuadro de este libro la utilización de la energía de los líquidos en los conductos (motores hidráulicos y turbinas) ni el problema inverso (bombas y trompas). Pero los principios en que se basan estas aplicaciones técnicas son los indicados en los §§ 234 y 235.

Daremos unas aplicaciones sencillas de estos principios.

a] **Tubo de Venturi.** La [5], § 234 para un conducto horizontal, se escribe:

$$p_2 - p_1 = -\frac{\mu u_2^2}{2}\left(1 - \frac{S_2^2}{S_1^2}\right). \qquad [1]$$

Por tanto, si se mide con un manómetro diferencial M (fig. 474) la diferencia de presión $p_2 - p_1$ entre dos secciones conocidas S_1 y S_2 del conducto, se puede deducir u_2 y, por tanto, el gasto $P = \frac{dv}{dt} = u_2 S_2$. Resulta:

$$P = u_2 S_2 = \sqrt{\frac{2\,(p_1 - p_2)}{\mu\left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2}\right)}}. \qquad [2]$$

El aparato que sirve para este objeto se llama *tubo de* VENTURI (fig. 474); intercalado en un conducto (p. ej. de agua, $\mu = 1\ \frac{g_m}{cm^3}$) sirve para medir el gasto; manteniendo las dimensiones S_1, S_2 y las velocidades u_1, u_2 entre límites convenientes, los resultados efectivos sólo se apartan de los [2] relativos al caso ideal, que nosotros suponemos, en un $3 \div 1\ \%$.

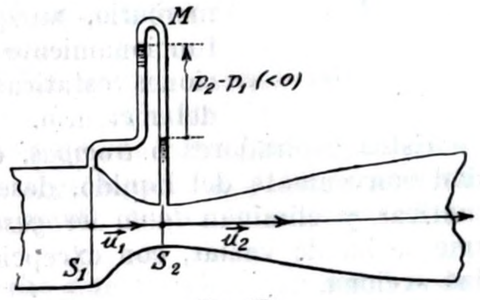


Fig. 474

b] **Aspiradores y trompas.** Apliquemos todavía la [5], § 234 a un conducto vertical que desemboca en la atmósfera por S_2 (figura 475). Se toma como sección S_2 la final del tubo. Es discutible, pero no muy erróneo, suponer que la presión p_2 es la atmosférica. Supóngase que es $h_1 - h_2 > 0$, es decir, que el nivel h_1 es más elevado que h_2.

La [5], § 234, da:

$$p_1 = p_2 - \mu g (h_1 - h_2) - \mu \frac{u_2^2}{2}\left(\frac{S_2^2}{S_1^2} - 1\right). \qquad [3]$$

Por lo tanto, si es $S_1 < S_2$ será $p_1 < p_2$; si la pared del conducto es móvil en A, esta pared está sometida por un lado a la presión exterior $p_e = p_2$, y por el otro a la presión interna p_1 menor que p_2, por lo que es empujada hacia dentro del líquido, como si éste la aspirase. A través de un agujero A efectuado en la estrangulación del

tubo, entra aire en el conducto : el líquido en movimiento produce una *aspiración* en A.

Se puede obtener la misma aspiración sobre un flúido exterior al agujero A, sometido por fuera a una presión p_2 ($> p_1$). p_1 es función de u_2 cuando se consideran fijados h_1 y h_2 ($h_1 > h_2$), S_2 y S_1 ($S_1 < S_2$) y p_2 ; al aumentar u_2 disminuye p_1, y para una velocidad u_2 conveniente puede resultar nulo p_1 ; para velocidades mayores, p_1 es negativo, con lo que el líquido se desprende (1) de la pared del conducto en lugar de apretar contra ella. Poniendo un recipiente que contiene aire, por ejemplo, en comunicación con el agujero A, se vacia.

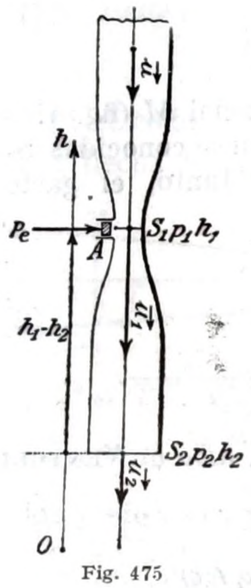


Fig. 475

De hecho, el rozamiento y los movimientos turbulentos no permiten que la [3] esté en buena concordancia cuantitativa con los hechos experimentales ; pero, no obstante, fundándose en lo que antecede, funcionan la *trompa de agua de* BUNSEN (fig. 476) y la *bomba neumática de caída de mercurio* o *trompa de mercurio de* SPRENGEL (fig. 477). Esta última es substancialmente un aspirador de mercurio, aunque también puede describirse su funcionamiento basándose en simples consideraciones estáticas, a causa del movimiento lento del mercurio.

Estos aspiradores o *trompas*, cuando funcionan con una velocidad conveniente del líquido, desempeñan el papel de bombas neumáticas y eliminan *tanto los gases como los vapores* del recipiente que se ha de vaciar, con excepción de los vapores del líquido que las acciona.

El aspirador de agua es de uso cómodo, sencillo y económico, por lo que está muy difundido ; pero si llega a faltar la presión del agua, se produce una succión de dicho líquido hacia el recinto que se vacia, lo que puede producir graves inconvenientes.

También se emplea este aspirador con válvula de seguridad que impide esta succión del agua.

La bomba de SPRENGEL es de funcionamiento muy lento y sólo tiene interés histórico.

Los aspersores y los pulverizadores de perfumes, los inhaladores de chorro de vapor y las bombas neumáticas de chorro de vapor (§ 376, *e*]) funcionan bajo el mismo principio que el aspirador de BUNSEN.

También se aplica éste al *mechero de* BUNSEN (fig. 478). El chorro de gas que sale por la embocadura I produce la aspiración del aire circundante a través de los agujeros A. La mezcla de aire y de gas se enciende en B. Se puede variar entre anchos límites la admisión

(1) Dejando de lado la adhesión a las paredes indicada en el § 181.

de aire regulando la abertura de los agujeros de aspiración. En los mecheros MECKER, la forma del camino C está estudiada de un modo muy racional, y se impide que la combustión se propague desde B

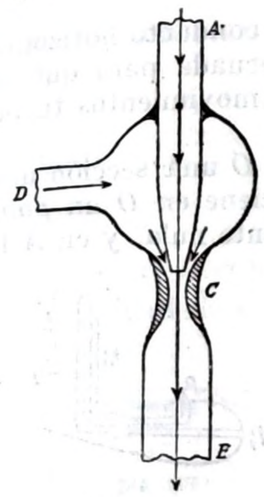


Fig. 476

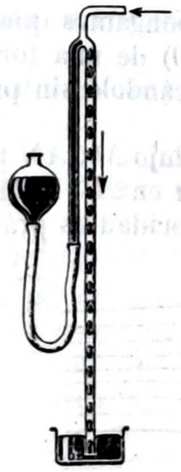


Fig. 477

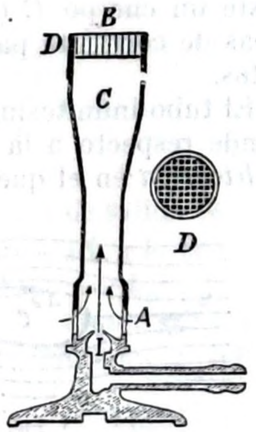


Fig. 478

hacia la cámara C mediante un tabique metálico D, cuya forma recuerda el radiador de nido de abejas.

c] **Paradojas.** El teorema de BERNOULLI explica algunos experimentos curiosos. Todos sabemos que, soplando de canto contra dos hojas bien adheridas de un libro o de una carta, las hojas se separan. Pero si las dos hojas están algo separadas y son paralelas entre sí, al dirigir entre ellas una corriente de aire, se les hace echar una contra otra.

Si se hace manar agua por un grifo que termina en un tubo de goma de paredes no muy rígidas, de modo que el tubo esté lleno, al estrechar con dos dedos una sección del tubo, el estrechamiento se comunica a todo el resto del mismo en el sentido del movimiento del agua.

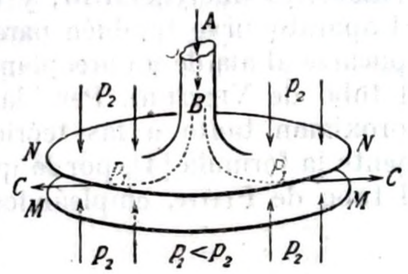


Fig. 479

Pero el experimento más paradójico de todos es el que representa la figura 479. Este experimento podría efectuarse con un chorro de agua si todo el aparato estuviese sumergido en este líquido, pero puede realizarse simplemente con un chorro de aire.

El disco móvil subyacente MM, en lugar de ser rechazado por el chorro flúido AB, ¡resulta fuertemente aspirado contra el disco NN !

El flúido en movimiento presenta en el espacio entre MM y NN una presión piezométrica en la orilla MN, MN que es igual a la pre-

sión exterior p_2; pero entonces, puesto que el flúido tiene más velocidad en las partes centrales que en la periferia, se tiene $p_1 < p_2$: la presión entre los dos discos es menor que la presión exterior, y los dos discos se aproximan.

d] **Tubo de Pitot.** Supongamos que en un conducto horizontal existe un cuerpo C (fig. 480) de una forma adecuada para que las líneas de corriente pasen tocándolo sin producir movimientos turbulentos.

El tubo infinitesimal de flujo $MOAN$ tiene en O una sección muy grande respecto a la sección en A. El líquido tiene en O un *punto de detención* en el que la velocidad es prácticamente nula, y en A ha

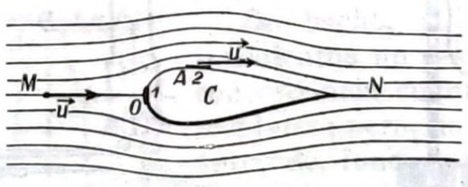


Fig. 480

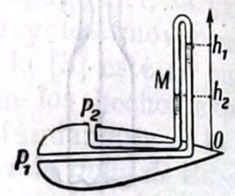


Fig. 481

tomado de nuevo su velocidad normal $\vec{u}$, correspondiente a la sección del conducto, velocidad que se supone no se ha alterado prácticamente al introducir en el conducto el cuerpo C.

Por la [7] (§ 234) se tiene, pues:

$$p_1 = p_2 + \frac{1}{2}\,\mu\, u_2^2; \qquad u = u_2 = \sqrt{\frac{2}{\mu}\,(p_1 - p_2)}. \qquad [4]$$

Así, el tubo de Pitot (fig. 481) permite medir $(p_1 - p_2)$ con el manómetro diferencial M, y determinar la velocidad u del líquido. El aparato sirve también para la medida de u en los ríos, y puede aplicarse al ala de un areoplano en vuelo, casos en los cuales no sirve el tubo de Venturi. Pero las condiciones prácticas no siempre se aproximan tanto a las teóricas para que pueda aplicarse exactamente la fórmula [4], por lo que a menudo se calibra empíricamente el tubo de Pitot, empleándose la fórmula:

$$u = k\cdot\sqrt{\frac{2}{\mu}\,(p_1 - p_2)}, \qquad [5]$$

en la cual se determina k experimentalmente para cada tubo y para cada líquido.

e] **Teorema de Torricelli.** El líquido del recipiente C (fig. 482) mana por el agujero A.

La sección S_2 de éste es pequeñísima respecto a la superficie libre del líquido S_1. Se tiene $p_1 = p_{atm}$, presión atmosférica. Además, se

supone que es posible identificar p_2 con la presión atmosférica p_{atm}:

$$p_2 = p_{atm} = p_1.$$

El teorema de Bernoulli da:

$$p_1 + g\,\mu\,h_1 + 0 = p_2 + g\,\mu\,h_2 + \frac{1}{2}\,\mu\,u_2^2;$$

por tanto:

$$u_2 = \sqrt{2\,g\,(h_1 - h_2)}. \qquad [6]$$

Este es *el teorema* de Torricelli: la velocidad de salida es igual a la velocidad de caída $\sqrt{2\,gs}$, debida a la gravedad, a lo largo del camino vertical $s = h_1 - h_2$. El teorema de Torricelli es un caso particular del de Bernoulli, y ambos

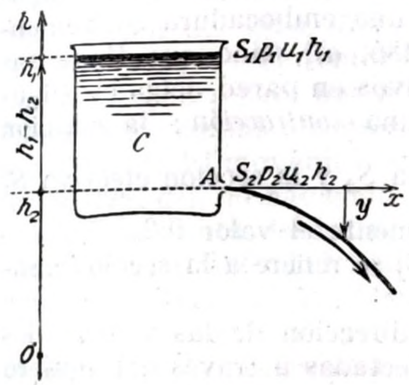


Fig. 482

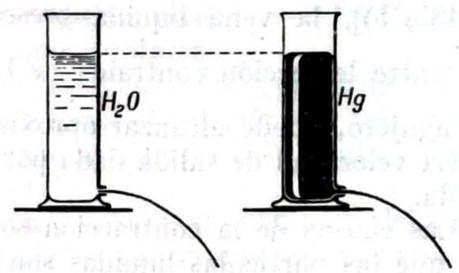


Fig. 483

son una consecuencia del teorema de la conservación de la energía.

La comprobación experimental de la [6] es una verificación indirecta del teorema de Bernoulli. Esta comprobación se efectúa fácilmente observando la forma parabólica de la vena líquida que sale por A. Si la embocadura es horizontal, las [5], § 65, dan simplemente

$$y = \frac{1}{2}\,g\cdot t^2 \qquad x = u_2\cdot t,$$

de donde:

$$y = \frac{1}{2}\,g\,\frac{x^2}{u_2^2}.$$

Por tanto, puede deducirse u_2 de la medida de un par de valores x, y correspondientes, puesto que se conoce g.

Según la [6], dos recipientes iguales (fig. 483) provistos de agujeros iguales, pero uno lleno de mercurio y el otro lleno de agua, se vacian según la misma ley. Despreciando la mayor influencia del rozamiento del aire sobre la vena de agua, las dos venas líquidas describen en cada instante curvas iguales.

El frasco de MARIOTTE permite una salida constante del líquido por el agujero A (fig. 484), debido a que la velocidad del líquido viene dada por la [6], y en ella la diferencia de nivel $(h_1 - h_2)$, que regula la velocidad de salida, es el desnivel entre C (en donde se establece la presión atmosférica exterior mediante el burbujeo del aire) y A.

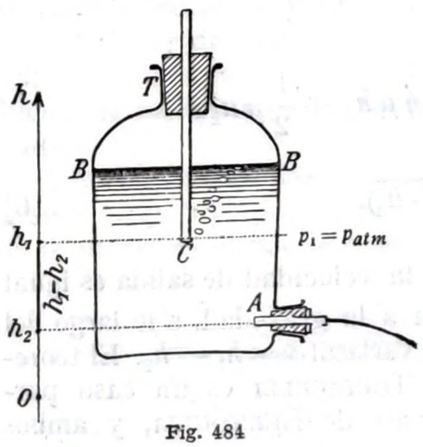


Fig. 484

Este desnivel permanece constante mientras el nivel BB no baja de C.

La salida de líquido de un recipiente se complica por otro fenómeno ulterior. Si el agujero por donde fluye, que supondremos en la pared del fondo del recipiente, no va acompañado de una embocadura conveniente [fig. 485, *a*)], sino que tiene sus bordes vivos en pared delgada [(figura 485, *b*)], la vena líquida presenta una *contracción;* la relación $\frac{S_2}{S_1}$, entre la sección contraída de la vena S_2 y la sección efectiva S_1 del agujero, puede alcanzar aproximadamente el valor 0,6.

La velocidad de salida dada por la [6] se refiere a la sección contraída.

Las causas de la contracción son la dirección de las velocidades con que las partículas líquidas son proyectadas a través del agujero y la tensión superficial del líquido.

El volumen de líquido que se derrama en la unidad de tiempo, es decir, el gasto en volumen, P, es

$$P = S_2\sqrt{2\,g\,(h_1 - h_2)}$$

y h_2 es el nivel de la sección contraída S_2.

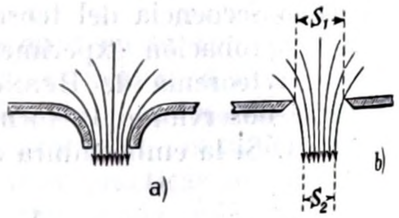


Fig. 485

Además, la vena líquida, después de abandonar el agujero de salida, está constituída por partículas que caen aceleradamente a causa de la gravedad; por ello, y debido a la acción simultánea de la tensión superficial, se aplasta la vena y se rompe después en sucesivas gotas, que caen deformándose periódicamente. Una estroboscopia de la vena muestra su estructura discontinua característica (figura 439).

f] **Molinete hidráulico.** El líquido (fig. 486) sale por dos brazos inferiores curvados. El momento cinético respecto al eje vertical ξ debe permanecer constante por ser nulo respecto a dicho eje el momento de las fuerzas exteriores aplicadas, que son la fuerza de gravedad y las reacciones de los apoyos, verticales. Luego el recipiente

adquiere un momento cinético igual y contrario al del líquido que sale por los brazos.

También se puede decir cualitativamente que, bajo la reacción del líquido proyectado por los brazos, éstos deben retroceder.

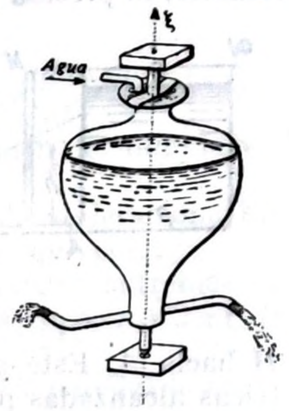


Fig. 486

§ 237. Influencia de los rozamientos. Las deducciones del teorema de BERNOULLI resultan equivocadas cuando se aplican al movimiento de líquidos reales en tubos de sección suficientemente pequeña.

En tal caso, la velocidad del líquido no puede considerarse constante en todos los puntos de una sección del tubo. Así, en un tubo cilíndrico [fig. 487 *a*)], el líquido situado junto a la pared está en reposo por adherencia y las capas cilíndricas coaxiales consecutivas resbalan unas sobre otras. El movimiento es laminar y rotacional (§ 229, *d*]), no habiendo vórtices visibles. La magnitud de la velocidad $\vec{u}$ aumenta desde las paredes hacia el interior del tubo hasta alcanzar una velocidad límite $\vec{u}_0$, que es aquella a la cual se puede aplicar el teorema de BERNOULLI.

Si el espesor Δ es pequeño con respecto al diámetro del tubo, el teorema de BERNOULLI conduce a resultados suficientemente aproximados. Este espesor Δ depende principalmente del coeficiente de rozamiento interno, pero también depende de la masa específica, de la velocidad del líquido y de la longitud del tubo.

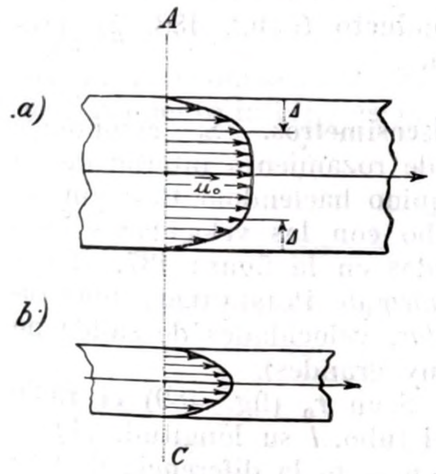


Fig. 487

Para tubos cuyo radio es menor que Δ [fig. 487, *b*)], el teorema de BERNOULLI no es aplicable en absoluto; no se establece ya el régimen de BERNOULLI.

En el caso de la figura 488, *a*), la [7], § 234, da, para una sección cualquiera del conducto horizontal cilíndrico AB:

$$p = p_0 = \text{const.} \qquad [1]$$

Si el conducto desemboca en la atmósfera, debería tenerse la misma presión (atmosférica) en todas las secciones del tubo, y todos los tubos manométricos M deberían tener un desnivel h nulo.

En substancia, el líquido se movería por inercia, y la presión pasaría bruscamente del valor p, requerido por la ley de STEVIN, al

valor de la presión atmosférica, allí en donde el líquido, al principio del conducto, adquiere su velocidad.

El experimento no confirma la [1]. Alcanzado el régimen estacionario, la presión p crece gradualmente a medida que se pasa desde

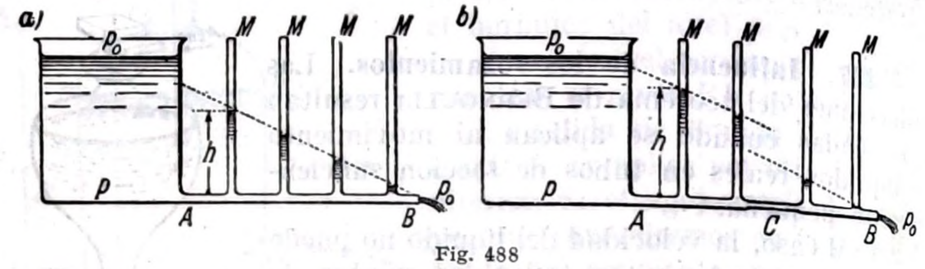


Fig. 488

B hacia A. Este aumento viene indicado por las alturas piezométricas alcanzadas por el líquido en los sucesivos tubos manométricos M. Sin embargo, hay que tener presente que, a causa del rozamiento interno, las fuerzas de superficie existentes no son ya necesariamente perpendiculares a la superficie ; los tubos manométricos $M, M...$ miden la componente normal p de tales fuerzas por unidad de superficie.

Puesto que u es con certeza constante en todo el conducto, se deduce que hay a lo largo de éste una *pérdida de carga* definida por la diferencia de las presiones p entre los extremos A y B del conducto.

Una disminución de sección en el conducto C [fig. 488, b)] produce una pérdida de carga más brusca.

§ 238. Régimen de Poiseuille. Viscosímetros. Se comprende la posibilidad de medir el coeficiente de rozamiento interno de un líquido haciéndolo fluir por un tubo con las velocidades indicadas en la figura 487, b) (*régimen de* POISEUILLE, *tubo capilar*, velocidades de salida no muy grandes).

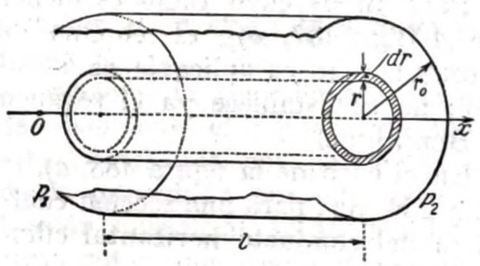


Fig. 489

Sean r_0 (fig. 489) el radio del tubo, l su longitud, $\Delta p = p_1 - p_2$ la diferencia de presiones que impele el líquido a salir. Se considera el flujo en condiciones de régimen estacionario.

Se divide idealmente el líquido en capas cilíndricas coaxiales, siendo r el radio de una de estas capas, dr su espesor, y $u = u(r)$ su velocidad.

Esta capa cilíndrica contribuye al gasto P con un volumen de líquido por unidad de tiempo igual a $2\pi r \cdot dr \cdot u$.

El gasto P del tubo completo es, pues,

$$P = \int_0^{r_0} 2\pi r \cdot u \cdot dr, \qquad [1]$$

y, como estamos en régimen estacionario, es $P = \frac{dv}{dt} = \frac{v}{t}$, es decir, el gasto es simplemente el cociente entre el volumen del líquido y el tiempo que éste ha empleado en salir.

Por otro lado, esta capa cilíndrica se mueve sin aceleración ; luego es nula la resultante de las fuerzas aplicadas, que son :

Las fuerzas de presión que actúan sobre las caras extremas del tubo, normales a dichas caras ; su resultante es $(p_1 - p_2) \cdot 2\pi r \cdot dr$, que tiende a acelerar el movimiento.

Las fuerzas de rozamiento interno sobre las dos paredes laterales de la capa.

Según la [3] del § 187, la fuerza de rozamiento sobre la cara interior de la capa es, en valor y signo, respecto al eje x:

$$-\eta \cdot \left(2\pi r \cdot l \cdot \frac{du}{dr}\right)_r,$$

que es positiva por ser $\frac{du}{dr} < 0$; en efecto, ésta se debe al líquido interior a la capa, que es más veloz y tiende a acelerar, por arrastre, la capa considerada. Sobre la cara exterior de la capa, la fuerza de rozamiento interno es retardatriz y viene dada, en valor y signo, por :

$$+\eta \cdot \left(2\pi r \cdot l \cdot \frac{du}{dr}\right)_{r+dr}.$$

Luego la fuerza resultante de los rozamientos es :

$$\eta \cdot 2\pi l \cdot \frac{d\left(r \cdot \frac{du}{dr}\right)}{dr} \cdot dr.$$

La condición de régimen estacionario, o sea, de anulación de la resultante de las fuerzas aplicadas, es :

$$(p_1 - p_2) \cdot 2\pi r + \eta \cdot 2\pi l \cdot \frac{d\left(r \cdot \frac{du}{dr}\right)}{dr} = 0.$$

Simplificando e integrando, resulta:

$$r\cdot\frac{du}{dr} = -\frac{p_1 - p_2}{\eta\cdot l}\cdot\frac{r^2}{2} + c, \quad \text{o sea:} \quad \frac{du}{dr} = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta\cdot l}\cdot r + \frac{c}{r}.$$

Integrando de nuevo obtenemos:

$$u = -\frac{p_1 - p_2}{4\eta\cdot l}\cdot r^2 + c\cdot\log r + c'.$$

Pero para $r = 0$ ne puede ser $u = \infty$, por lo que es $c = 0$; y para $r = r_0$ debe ser $u = 0$, porque el líquido se adhiere a la pared del tubo y se supone en reposo junto a ésta.

Por tanto: $c' = +\frac{p_1 - p_2}{4\eta l}\cdot r_0^2$ y, por fin, se obtiene:

$$u = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l}(r_0^2 - r^2), \qquad [2]$$

expresión que, substituída en la [1], da:

$$P = \frac{p_1 - p_2}{8\eta l}\cdot\pi r_0^4. \qquad [3]$$

El volumen v de líquido que sale en el tiempo t es

$$v = P\cdot t = \frac{p_1 - p_2}{8\eta l}\cdot\pi r_0^4 t \qquad [4]$$

lo que constituye la fórmula de G. HAGEN-POISEUILLE.

Esta fórmula permite la medición absoluta del coeficiente de rozamiento interno η cuando se miden el gasto (en volumen), el radio r_0 y la longitud l del tubo, y, por fin, la diferencia de presión

$$\Delta p = p_1 - p_2$$

entre los extremos del tubo.

La [4] tiene validez en un sistema cualquiera de medidas, por ejemplo, en el sistema cm g_m seg; en este sistema han de medirse: l y r_0 en cm; t en seg; p_1, p_2 en barías; v en cm^3; P en $\frac{cm^3}{seg}$ y η en la unidad $cm^{-1}\cdot g_m\cdot seg^{-1}$ (§ 187, *b*]).

Es más cómodo servirse de la misma fórmula [4] para obtener una medida relativa de η.

Empleando un mismo tubo y una misma presión Δp, se efectúan dos experimentos de derrame:

a] de un líquido cuyo coeficiente de rozamiento η_1 es conocido;

b] del líquido del cual quiere determinarse el coeficiente de rozamiento η_2.

Se miden los tiempos t_1 y t_2 necesarios en los dos experimentos para que se derramen volúmenes iguales v de los dos líquidos.

Se tiene:

$$\eta_1 = \frac{\pi\cdot\Delta p\cdot r_0^4\cdot t_1}{8\cdot v\cdot l}; \qquad \eta_2 = \frac{\pi\cdot\Delta p\cdot r_0^4\cdot t_2}{8\cdot v\cdot l}. \qquad [5]$$

Luego:

$$\frac{\eta_2}{\eta_1} = \frac{t_2}{t_1}; \qquad \eta_2 = \eta_1\cdot\frac{t_2}{t_1}. \qquad [6]$$

En esta fórmula [6] se basan *viscosímetros* de muy fácil empleo.

La figura 490 indica uno de los modelos más corrientes.

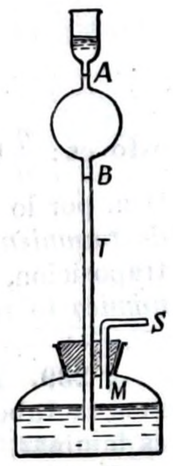


Fig. 490

Lleno el aparato con el líquido de referencia (por ejemplo, agua, para la cual se supone conocido η_1), se mide el tiempo necesario t_1 para que el líquido descienda desde el nivel A al nivel B.

Se repite la determinación con el líquido que se examina.

Entonces, en la [6] son conocidos η_1, t_1 y t_2 y puede calcularse η_2. Debe prestarse particular atención a que la temperatura sea constante y a que el líquido esté limpio. Conviene tener el aparato en un termostato (§ 290, *a*]), y para llenarlo se aspira por A o se comprime por M mediante una pera de goma aplicada en S.

Obsérvese que en este aparato fluye el líquido bajo la presión Δp debida a la columna de líquido AM, de modo que si los dos líquidos no tienen la misma densidad, no manan bajo las mismas presiones, sino sometidos a presiones Δp_1 y Δp_2 proporcionales a sus pesos específicos y, por tanto, a sus masas específicas μ_1 y μ_2. Por tanto, de la [5] se deduce:

$$\frac{\eta_2}{\eta_1} = \frac{t_2}{t_1}\cdot\frac{\mu_2}{\mu^1}. \qquad [7]$$

Generalmente, se comparan líquidos que tienen densidades no muy diversas, mientras que sus viscosidades son a menudo muy diferentes (lubricantes de diversas cualidades), por lo que no es muy fuerte la corrección introducida con la [7].

La diferencia de capilaridad entre los dos líquidos tiene una influencia completamente despreciable cuando el líquido que se de-

rrama por T no desciende dividido en gotas; por esto el tubo capilar se introduce por su extremo inferior en el líquido recogido en M.

La [7] puede escribirse así:

$$\frac{\frac{\eta_2}{\mu_2}}{\frac{\eta_1}{\mu_1}} = \frac{t_2}{t_1}. \qquad [8]$$

Esta fórmula permite calcular $\frac{\eta_2}{\mu_2}$ para el líquido en estudio cuando se conocen $\frac{\eta_1}{\mu_1}$, t_1 y t_2. Luego es inmediata la medida directa de la razón $\frac{\eta}{\mu}$. Por otro lado, se tiene (§ 187, *b*]):

$$\left[\frac{\eta}{\mu}\right] = \frac{[m \cdot l^{-1} \cdot t^{-1}]}{[m \cdot l^{-3}]} = [l^{-2} \cdot t^{-1}],$$

esto es: $\frac{\eta}{\mu}$ tiene dimensiones de una magnitud puramente cinemática, por lo que conviene dar a esta relación el nombre de *coeficiente de rozamiento interno cinemático* (o *viscosidad cinemática*). Por contraposición, η se llama entonces *coeficiente de rozamiento interno dinámico* (o *viscosidad dinámica*).

§ 239. Régimen turbulento. Número de Reynolds. Nos limitamos a tubos de radio moderado, de manera que si el movimiento es laminar, el diagrama de la velocidad es el de la fig. 487, *b*).

En un tubo determinado y para un líquido dado, al aumentar $\Delta p = p_1 - p_2$, aumenta el gasto P y, por tanto, la velocidad en cada punto del líquido. Mientras el diagrama de las velocidades es del tipo de la figura 487, *b*), el movimiento del flúido en el tubo es *laminar* o *correntilíneo*; es rotacional (§ 229, *d*]), pero no se tienen vórtices visibles. Se tiene una velocidad media $\vec{u}_m$ en el tubo, definida por el gasto P y la sección πr_0^2 del tubo. Tendremos: $u_m = \frac{P}{\pi r_0^2}$. Cuando u_m alcanza cierto valor n_c *(velocidad crítica media)*, el régimen del movimiento cambia bruscamente; ya no es válida la [3] del § 238, y el movimiento del líquido se hace *turbulento*, con torbellinos visibles; se observa un intercambio de líquido entre la zona periférica y la zona axial del tubo, y si se aplicara la [3] del § 238, daría bruscamente valores mucho mayores (y equivocados) de η.

La velocidad crítica u_1 varía con el radio r_0 del tubo, con la naturaleza del líquido, es decir, con su masa específica μ y su coeficiente η de rozamiento interno; pero, para todos los tubos cilíndricos, la relación

$$\frac{u_c \, r_0 \, \mu}{\eta} = R_c \qquad [1]$$

tiene un valor constante ≈ 1200; sin embargo, ha de tenerse presente que R_c depende de una manera notable de las paredes del tubo: con una forma cuidada y simétrica de los extremos del tubo, el valor de R puede elevarse ¡hasta 20 000!, aunque se trate de regímenes inestables.

Si no se está en condiciones tan excepcionales, el paso del régimen laminar de Poiseuille al régimen turbulento, macroturbillonario, es suficientemente brusco y bien definido, y puede suponerse debido a que se alcanza un gradiente de velocidad $\frac{du}{dr}$ (fig. 489) excesivamente fuerte en alguna capa del líquido en movimiento.

Puede efectuarse el experimento haciendo derramar un líquido, agua, por ejemplo, por un tubo horizontal T (fig. 491) de un centímetro de diámetro interior, empleando presiones variables y, por tanto, velocidades variables.

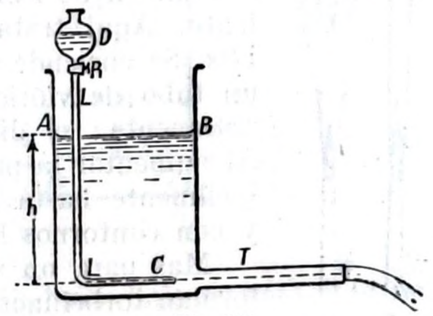


Fig. 491

Si en C, por el conducto LL se añade agua coloreada o se coloca en C un cristalito de permanganato potásico, se encanala en T un hilo de líquido coloreado, que indica con bastante limpieza un filete flúido, el cual seguirá a lo largo de todo el tubo T cuando sea laminar el régimen del movimiento.

Aumentando el nivel AB y, por tanto, la velocidad de derrame, se pasa al régimen turbulento, y el filete coloreado se destruye, por mezclarse con el líquido, a los pocos centímetros de recorrer el tubo T.

Por ejemplo, en un tubo de radio $r_0 = 0{,}2$ cm y para el agua ($\mu = 1 \frac{g_m}{cm^3}$; $\eta = 0{,}018$ cm^{-1}·g$_m$·seg^{-1} la velocidad crítica para la turbulencia es de $\approx 100 \frac{cm}{seg}$.

Más en general, consideremos la relación sin dimensiones

$$R = \frac{u_m \cdot r_0 \cdot \mu}{\eta}, \qquad [2]$$

en donde u_m es la velocidad media del líquido en el tubo.

R se denomina *número* de Reynolds y tiene un interesante significado energético; considérese una porción de la columna líquida

que se mueve en el tubo, de longitud igual al radio r_0. La energía cinética que posee esta porción de líquido puede suponerse proporcional a $u_m^2 \cdot r_0^3 \cdot \mu$, porque r_0^3 es proporcional al volumen de dicho líquido y, por lo tanto, $r_0^3 \cdot \mu$ es proporcional a su masa; recordando [3], § 187, se saca en conclusión que $\eta \frac{u_m}{r_0} \cdot r_0^2 \cdot r$ es, análogamente, proporcional al trabajo de las fuerzas de rozamiento interno, debido al escurrimiento de las distintas capas de líquido, unas sobre otras, en el trayecto r_0 considerado en el tubo.

Por lo tanto, R aparece como proporcional a la relación entre dos energías: la energética que posee el líquido y la disipada por el rozamiento interno; se alcanza la velocidad crítica u_c cuando dicha relación llega a tomar un valor conveniente.

Fig. 492

§ 240. Llamas sensibles. En el caso de los gases se aplican consideraciones y resultados análogos, tanto para el régimen de POISEUILLE como para el régimen turbulento. Aquí trataremos solamente de las *llamas sensibles*. Se enciende una llama de gas en la extremidad de un tubo de vidrio, cuya embocadura está cortada bien netamente: el diámetro del agujero es de unos 2 mm. Al aumentar la presión del gas puede alargarse la llama fácilmente hasta casi 30 cm, permaneciendo ésta quieta y con contornos bien definidos [fig. 492, *a*)].

Mas para un valor crítico de la presión del gas se forman torbellinos en la capa de contacto entre el chorro de gas y el aire circundante en reposo. La llama quema con un rumor característico y toma el aspecto de la figura 492, *b*). Se puede regular el chorro de gas de modo que la llama tenga todavía el aspecto *a*), pero que se encuentre en condiciones inestables.

Demuestra la experiencia que, en este caso, la llama pasa bruscamente del estado *a*) al estado *b*) al llegar ondas acústicas de frecuencia bastante elevada (silbidos y chillidos). Estas llamas sensibles pueden revelar fácilmente la presencia de sonidos ultraaudibles o *ultrasonidos* (cuya frecuencia de vibración rebasa los 20 000 hertz).

Análogamente, una vena de agua delgada y límpida, sostenida por una presión bien regulada, puede perturbarse y pasar al régimen turbulento por la acción de una onda sonora.

CAPÍTULO VIII

Movimiento de los cuerpos en los flúidos; rozamiento del medio

§ 241. Generalidades. Con tal que se tenga en cuenta todo el flúido, y en particular las condiciones de reposo o de movimiento que existen en el contorno del mismo, es indiferente imaginar que un sólido está en movimiento respecto al flúido o que éste se halla en movimiento respecto al sólido. En ambos casos, se considera que el observador está fijo al sólido.

Si el flúido tiene una extensión grandísima respecto al sólido y está contenido en un gran recipiente en reposo, y el sólido se mueve

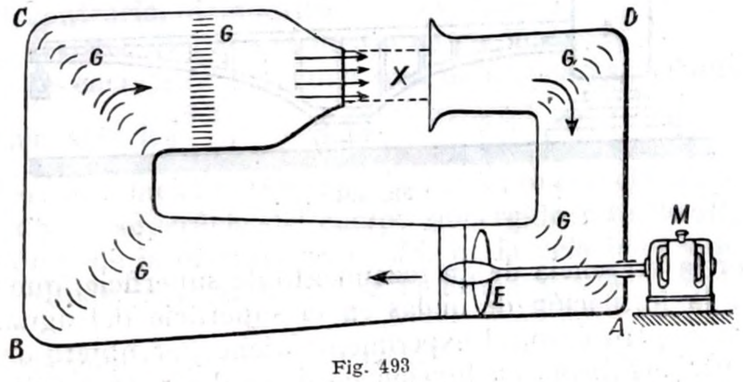


Fig. 493

con velocidad $\vec{u}$ (respecto al recipiente), el movimiento del sólido no perturba la quietud existente en el contorno del flúido; es decir: éste continúa en reposo junto a las paredes del recipiente; $\vec{u}$ es la velocidad relativa del sólido respecto a un punto cualquiera del flúido adherente a las paredes del recipiente.

Se producirán los mismos fenómenos si una gran masa de flúido circula con velocidad constante $\vec{u}' = -\vec{u}$ por un ancho conducto y choca con el sólido mantenido fijo y suficientemente alejado de sus paredes para que pueda suponerse que $\vec{u}$ no ha variado y es todavía constante en todos los puntos de una gran superficie cerrada que contiene el sólido y trazada completamente dentro del conducto, y, por lo tanto, dentro del flúido.

En el primer caso, el rozamiento que encuentra el sólido al avance es opuesta a $\vec{u}$; en el segundo, el rozamiento es del mismo sentido que $-\vec{u} = \vec{u}'$, es decir, tiende a arrastrar el sólido en el sentido del movimiento.

En este segundo caso, los experimentos son más fáciles, especialmente si se trata de flúidos gaseosos y de grandes velocidades. Se tiene entonces el dispositivo del *túnel aerodinámico* o *galería de viento* (fig. 493).

Un motor M, moviendo una hélice E, pone en rápido movimiento el aire del ancho conducto $ABCD$. Series de aletas y reguladores del movimiento, G, formados como nido de abejas, aseguran un movimiento suficientemente regular del aire para suponer que el sólido en estudio, colocado en X, está sometido a una corriente de aire de velocidad constante $\vec{u}$.

Los cuerpos en estudio pueden ser proyectiles, alas, carenas de aeromóvil, etc., y deben tener pequeñas dimensiones respecto al diámetro del chorro de aire.

En el agua, para velocidades $\vec{u}$ mucho menores, se prefiere experimentar arrastrando el modelo en estudio con la velocidad $\vec{u}$ en un canal de dimensiones suficientes.

Este canal sirve generalmente para ensayar la forma de los cascos de los buques. El rozamiento con el medio viene complicado en-

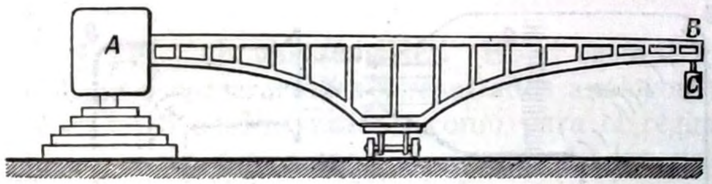


Fig. 494

tonces por la presencia de un rozamiento de superficie, que se manifiesta por la formación de ondas en la superficie del agua.

En uno y otro caso, el experimento tiene por objeto determinar la *resistencia del medio* en función de $\vec{u}$, es decir, la resultante y el par equivalentes al conjunto de las infinitas fuerzas elementales de superficie que el flúido aplica al sólido. La resistencia del medio tiende en todos los casos a disminuir la velocidad relativa $\vec{u}$ del sólido respecto al flúido.

Solamente en casos muy especiales es nulo el par y se puede hablar sólo de una *fuerza de resistencia* que el flúido aplica al sólido. Por ejemplo, nos hallamos en este caso cuando el cuerpo tiene la forma de sólido de revolución y el eje del mismo coincide con $\vec{u}$. Generalmente, se tiene también este caso en los problemas «planos».

Supondremos de ahora en adelante que puede hablarse simplemente de la resultante de las fuerzas de rozamiento.

La determinación de la resistencia del medio se efectúa aplicando el cuerpo a balanzas adecuadas (dinamómetros) mediante hilos o soportes que perturben lo menos posible el movimiento del flúido.

La medición de u es muy fácil en el caso del canal, y mucho menos segura en el caso del túnel. Es preciso en éste emplear el tubo de Venturi o un tubo de Pitot (§ 236, a], d]), cuya calibración en medida absoluta se efectúa todavía hoy por el antiguo método de Eiffel, fig. 494 : la rotación del largo brazo rígido AB imprime al cuerpo en estudio C una velocidad conocida, que puede alcanzar

notables valores antes de que las acciones centrífugas hagan inadmisibles los resultados.

Se puede imaginar la resistencia del medio como resultante de infinitas fuerzas elementales que ejerce el flúido sobre los infinitos elementos de la superficie del cuerpo sumergido en él. Pero no es posible dar una ley elemental del rozamiento con el medio, por ejemplo, para un elemento de superficie plana, de modo que la resistencia total sea simplemente la suma de las resistencias elementales calculadas según dicha ley. Así, por ejemplo, una ley elemental de este tipo, aplicada a un cuerpo en forma de diedro (fig. 495), empujado por un viento de velocidad $\vec{u}$ situada en el plano bisector del diedro, no podría conducir más que a una resistencia del medio para el diedro igual al duplo de la que experimenta una sola de sus dos caras en la dirección de la velocidad $\vec{u}$.

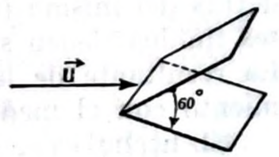


Fig. 495

Por el contrario, demuestran los experimentos que la resistencia para el diedro no es doble de la que se encuentra para una sola de sus caras, en ausencia de la otra, sino sólo los $\frac{12}{10}$.

En otros términos: La fuerza de rozamiento con el medio sobre un elemento dS de superficie del cuerpo sumergido no sólo depende de la extensión y de la orientación de dS, de la velocidad y de la naturaleza del flúido, sino también de la forma y superficie completas del cuerpo.

Suele distinguirse en la resistencia del medio la parte debida a las fuerzas normales a dS (presiones piezométricas) y la parte correspondiente a las fuerzas tangenciales debidas al rozamiento interno del flúido (tensiones tangenciales). En efecto, cada elemento de la superficie del cuerpo está sometido a una fuerza que en general *no* es normal al elemento de superficie. Esta fuerza se descompone en una componente normal y una componente tangencial. La resultante de todas las componentes normales correspondientes a todos los elementos del cuerpo da la *resistencia de presión*, y la resultante de todas las componentes tangenciales da la *resistencia de rozamiento*. La resistencia del medio es la resultante de la resistencia de presión y de la resistencia de rozamiento.

§ 242. Regímenes diversos. Supondremos siempre que $\vec{u}$ se mantiene constante respecto al tiempo mientras dura el experimento (régimen estacionario), y consideraremos primero cuerpos de forma y orientación suficientemente simétricas para poder suponer que la resistencia de presión y la resistencia de rozamiento (y, por tanto, la resultante) sean paralelas a $\vec{u}$. Nos encontramos ciertamente en este caso cuando el cuerpo tenga forma de revolución alrededor de un eje y $\vec{u}$ sea paralela a este eje.

Aun así, el fenómeno de rozamiento con el medio es extraordina-

riamente complejo. Una rigurosa esquematización permite distinguir, a igualdad de cuerpo y de orientación respecto a $\vec{u}$, los siguientes regímenes:

a] **Paradoja de D'Alembert.** Se supone que el flúido es perfecto, que el movimiento no es turbulento, que los filetes flúidos lamen el cuerpo y que a cada uno de éstos es aplicable el teorema de BERNOULLI.

Es el caso de la figura 464. Para un obstáculo esférico es fácil convencerse, fundándose en este teorema, de que las presiones que actúan sobre el obstáculo se distribuyen simétricamente delante y detrás del mismo (respecto al flujo líquido), porque los propios filetes flúidos tienen secciones simétricas delante y detrás de la esfera. La resultante de las presiones sobre la esfera es nula (1); el rozamiento con el medio es nulo.

El hecho es general: En un flúido perfecto y con movimiento irrotacional es nula la resultante de las presiones sobre el cuerpo: si éste se halla inicialmente en reposo, sigue en reposo sin ser arrastrado por el flúido que choca con él (¡!). No existe rozamiento con el medio. Este resultado constituye la *paradoja de* D'ALEMBERT, pero es igualmente paradójico que el principio de inercia. Este último sería válido si existiesen cuerpos que se moviesen sin rozamiento y estuviesen libres de la acción de la gravedad. La experiencia corriente *no* comprueba, en efecto, que un cuerpo sin estar sometido a fuerza motriz pueda moverse indefinidamente con movimiento rectilíneo uniforme.

Si se trata de un flúido real, y, por tanto, con rozamiento interno no nulo, desaparece el resultado paradójico anterior y pasamos al siguiente caso.

b] **Régimen de resistencia por rozamiento.** La resistencia debida al rozamiento es preponderante. El camino de los filetes flúidos es todavía parecido al de la figura 464, pero el flúido está dotado de rozamiento interno: el movimiento cerca del obstáculo es laminar, con microtorbellinos. Esto se logra para velocidades relativas $\vec{u}$ suficientemente pequeñas.

En este caso, la resultante de las resistencias de presión es todavía nula como en el caso *a*]; pero la capa de líquido que se adhiere a la superficie del sólido es arrastrada por este último y todo se reduce a un corrimiento de las capas sucesivas de flúido, deslizando unas sobre otras. Se comprende que la resistencia del medio pueda resultar esencialmente proporcional al coeficiente de rozamiento interno del flúido, η, y a la velocidad, u. Así lo comprueba la experiencia para valores suficientemente pequeños de u; además, establece que, para cuerpos geométricamente semejantes e igualmente orientados respecto a $\vec{u}$, la resistencia de rozamiento es también proporcional

(1) Más exactamente, en los flúidos pesados, esta resultante se reduce al empuje de ARQUÍMEDES.

a las dimensiones lineales del cuerpo. Por ejemplo, en el caso de una esfera la resistencia resulta proporcional al radio (v. § 243).

c] **Régimen de resistencia de presión; resistencia proporcional a u^2.** Cuando u aumenta más allá de cierto valor crítico, el cuerpo en movimiento respecto al flúido arrastra detrás de sí cierto volumen flúido, que podría imaginarse teóricamente en reposo respecto al cuerpo, constituyendo como una cola. En la práctica, apenas ha rebasado u dicho valor crítico, este volumen es manantial de torbellinos o vórtices que se desprenden del sólido a medida que se forman, y constituyen la *estela turbulenta*.

En estas condiciones, la resistencia del medio es mucho mayor que en el caso precedente, siendo principalmente debida a la resultante de las resistencias de presión, mientras que la resultante de las tensiones de rozamiento es despreciable. La resistencia depende ahora de la masa específica μ del flúido, y es aproximadamente proporcional al cuadrado de la velocidad u; el rozamiento interno η no tiene ya influencia sensible.

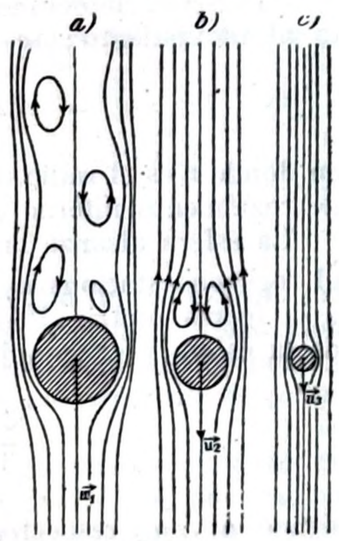


Fig. 496

Para cuerpos semejantes, la resistencia es proporcional al cuadrado de las dimensiones lineales homólogas (§ 244).

d] En fin, si u alcanza y rebasa la velocidad del sonido en el flúido (proyectiles en el aire), deja también de ser válida la proporcionalidad entre la resistencia y u^2.

Nos limitaremos a algunos casos elementales relativos a los regímenes *b*] y *c*], que son los más importantes.

Un sencillo experimento permite observar estos dos regímenes. En un cilindro ancho y hondo, lleno de agua, se dejan caer sucesivamente gotas de aceite de anilina de tamaño diverso. Estas gotas adquieren, después de unos centímetros de recorrido, una velocidad constante tanto mayor cuanto mayor sea su radio. El aceite de anilina (comercial, rojizo) se disuelve ligeramente en el agua, y convenientemente iluminado, deja una estela visible. Las gotas grandes abandonan numerosos torbellinos y caen siguiendo una línea sinuosa; la estela turbulenta es notable. Las gotas pequeñas también forman vórtices detrás de las mismas, pero éstas no se desprenden, sino que le acompañan en la caída. En las gotas más pequeñas desaparece prácticamente la cola turbulenta. Todo esto se indica esquemáticamente en la figura 496, válida con más rigor para el problema plano de la caída de un cilindro indefinido, cuyo eje es normal a la figura, en un flúido viscoso indefinido. Bajo la acción resultante de la gravedad y de la resistencia del medio, el cilindro adquiere una velocidad constante de caída tanto mayor cuanto mayor sea su radio. Para velocidades

pequeñas y, por tanto, cuando el radio del cilindro es pequeño, no se forma la estela turbulenta: se tiene el régimen de resistencia de rozamiento [fig. 496, *c*)]. Para una velocidad de caída conveniente se forma una cola con torbellinos; pero éstos no se separan del cilindro [fig. 496, *b*)]. Para mayores velocidades se obtiene la estela turbulenta [fig. 496, *a*)].

§ 243. Ley de Stokes. Se refiere al movimiento de una esfera dentro de un flúido en las condiciones del § 242, *b*], es decir, al movimiento de régimen no turbulento. Ordinariamente se trata de una esfera que cae por efecto de la gravedad en un flúido indefinido en reposo.

La resistencia del medio se reduce entonces a una fuerza $\vec{A}$ opuesta al movimiento; se demuestra que su módulo A viene dado por

$$A = 6\pi \cdot \eta \cdot u \cdot r, \qquad [1]$$

en donde r es el radio de la esfera, u su velocidad, y η el coeficiente de rozamiento interno del líquido.

La esfera alcanza la velocidad límite, constante, correspondiente al régimen estacionario, cuando la resistencia $\vec{A}$ es igual y opuesta a la fuerza motriz. Pero esta última es la diferencia entre el peso de la esfera y el empuje de ARQUÍMEDES.

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \mu g - \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \mu_0 g, \qquad [2]$$

siendo μ y μ_0, respectivamente, las masas específicas de la esfera y del flúido.

Luego se tiene la velocidad de régimen estacionario u_0 cuando es

$$6\pi r \cdot u_0 \cdot \eta = \frac{4}{3}\pi r^3 \; g\,(\mu - \mu_0),$$

es decir, cuando se cumple:

$$u_0 = \frac{2}{9}\frac{r^2}{\eta} g \cdot (\mu - \mu_0). \qquad [3]$$

Esta es la *fórmula de* STOKES, válida en todos los sistemas de medidas coherentes; por ejemplo, en el sistema $\mathrm{cm} \cdot \mathrm{g_m} \cdot \mathrm{seg}$, en el cual se medirá r en cm, u_0 en $\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{seg}}$, g en $\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{seg}^2}$, μ y μ_0 en $\frac{\mathrm{g_m}}{\mathrm{cm}^3}$, y η en $\mathrm{cm}^{-1} \cdot \mathrm{g_m} \cdot \mathrm{seg.}^{-1}$.

Supuesto que se conocen μ, μ_0 y g, la fórmula [3] permite calcular una de las tres magnitudes u_0, r, η, cuando se conocen las otras dos.

Precisamente, puede determinarse el valor η de los líquidos muy viscosos dejando caer una esferita de acero, cuyo radio se ha medido, y determinando la velocidad de caída en régimen estacionario, siempre que esta velocidad sea inferior a la velocidad crítica, pasada la cual se forma una estela turbulenta.

Conocidos u_0 y η, la determinación de r mediante la [3] se ha efectuado, después de una detenida crítica respecto a la aplicabilidad de dicha fórmula, en algunos experimentos clásicos de la física moderna mediante los cuales se ha podido determinar la carga elemental de un electrón (v. tomo II).

§ 244. Resistencia del medio proporcional a u^2, paralela y opuesta a $\vec{u}$. Limitémonos todavía a las condiciones particulares de simetría indicadas en el § 242, en las cuales la resistencia $\vec{A}$ y la velocidad $\vec{u}$ son paralelas (y opuestas).

Se admite *a priori* una fórmula del tipo:

$$A = k\frac{\mu u^2}{2} \cdot S. \qquad [1]$$

El primer miembro A representa la resistencia de rozamiento del medio, μ es la masa específica del mismo, u la velocidad, S la sección transversal máxima del cuerpo, y k es un coeficiente de proporcionalidad, de dimensiones nulas, que se denomina *coeficiente de forma* del cuerpo.

Se justifica algo la [1] con la observación que ya hizo NEWTON de que la fuerza que debe vencer el cuerpo al moverse da, por unidad de tiempo, la cantidad de movimiento Q que comunica el cuerpo al medio que le rodea. Ahora bien, Q puede suponerse igual al producto de la masa $S \cdot \mu \cdot u$, del flúido desalojado en la unidad de tiempo por la velocidad comunicada a esta masa. Si se admite que esta velocidad es proporcional a u, resulta Q proporcional a $S \cdot u^2 \cdot \mu$ y se obtiene la [1].

Se procura que en esta fórmula aparezca el denominador 2 para poner en evidencia la energía cinética de la unidad de volumen del flúido.

Debe buscarse un apoyo más sólido de la [1] mediante la experimentación. En efecto, ésta confirma dicha fórmula dentro de determinados límites de la velocidad u (§ 245) y fija para k los valores que se indican en la figura 497 para diversas formas del sólido.

A igualdad de sección transversal, de velocidad, y de medio, la forma dibujada en la parte baja ofrece una resistencia, que es únicamente $\frac{1}{30}$ de la que corresponde al plano delgado (¡!).

El anemómetro de molinete de ROBINSON (fig. 498) nos enseña la distinta resistencia que ofrece el medio para dos copas iguales

según que esté dirigida hacia el viento la concavidad o la convexidad: en el primer caso, la resistencia es casi cuatro veces mayor que en el segundo.

Analizando los espectros aerodinámicos de la estela turbulenta, es decir, los haces de líneas dibujados en la figura 497, se deduce que k disminuye proporcionalmente a la sección de la estela turbulenta.

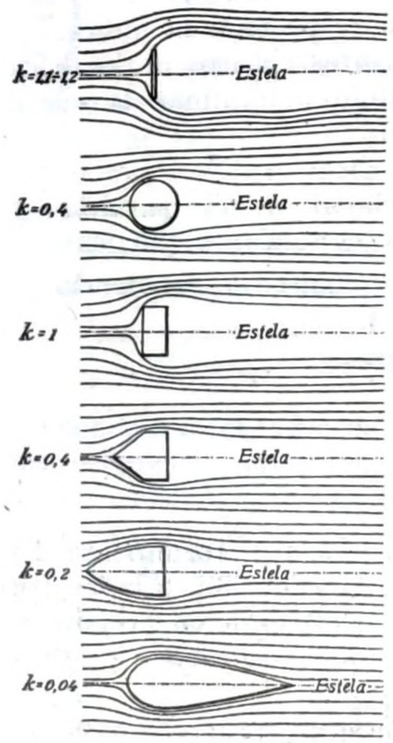


Fig. 497

La investigación de la forma «aerodinámica» para los vehículos rápidos (aviones, automóviles, buques, sumergibles, ...) es la investigación de perfiles de mínimo coeficiente de forma, y, por

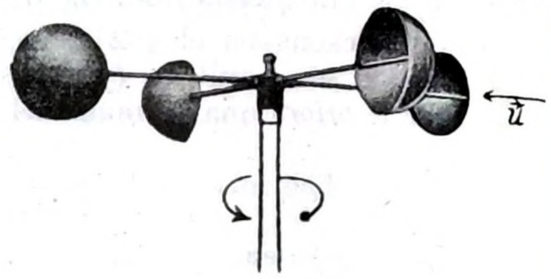


Fig. 498

lo tanto, de menor estela turbulenta. También tiene importancia este problema en los trenes rápidos, porque a grandes velocidades la resistencia del aire constituye la resistencia pasiva preponderante, por lo cual es conveniente reducirla adoptando formas aerodinámicas, con lo que se ha logrado una ventaja no despreciable para estos vehículos pesados.

§ 245. Los regímenes b] y c] y el número de Reynolds. La [1], § 243, puede escribirse bajo la forma [1], § 244, si se pone

$$6\pi\eta u\cdot r = k\frac{\mu u^2}{2}\pi r^2; \qquad S = \pi r^2;$$

esto es, si se hace

$$k = \frac{12}{\frac{\mu\cdot u\cdot r}{\eta}} = \frac{12}{R}, \qquad [1]$$

en donde R es el número de Reynolds [2], § 239, (r es ahora el radio de una esfera, no el de un cilindro) que tiene dimensiones nulas, como k.

Puede decirse, pues, que en los dos regímenes b] y c] es válida la fórmula [1] del § 244, pero en el caso b] el coeficiente de proporcionalidad k es inversamente proporcional al número de Reynolds, mientras que en el caso c] es independiente de este número.

Puede extenderse también el resultado al caso de cuerpos de forma no esférica, con sólo escoger convenientemente la dimensión que debe substituir al radio r y cambiar el valor del numerador de la [1].

Como hecho experimental, cuando se trata de cuerpos semejantes, y semejantemente orientados respecto de $\vec{u}$, el factor k solamente es función del número de Reynolds R.

Por ejemplo, una misma curva $k_s = k_s(R)$ (fig. 499) es válida para todas las esferas en cualquier medio y para cualquier velocidad.

Otra curva $k_d = k_d(R)$ sirve para todos los discos delgados circulares, normales a $\vec{u}$.

La importancia de este hecho experimental es muy grande. Por ejemplo, efectuando experimentos con un disco de las dimensiones más convenientes, resulta k determinado para cualquier otro disco *(principio de semejanza)*.

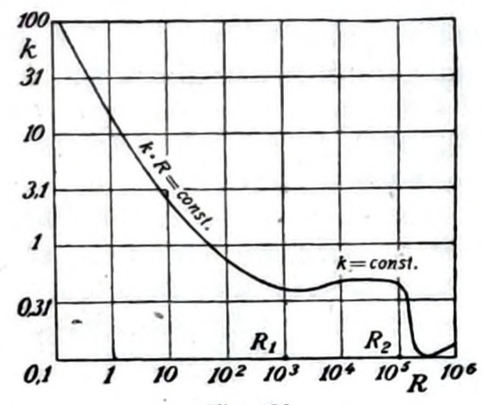


Fig. 499

Además, la curva $k = k(R)$ tiene la forma indicada en la figura: se nota en ella un primer tramo en donde se tiene sensiblemente $k\cdot R = \text{const.}$ (régimen b]); y un segundo tramo horizontal en donde es aproximadamente $k = \text{const.}$ (régimen c]).

Los valores críticos extremos que limitan este tramo son característicos de cada forma del sólido. Para la esfera, estos valores críticos son, aproximadamente, $R_1 = 1000$ y $R_2 = 100\,000$, respectivamente.

Pero sólo para valores de R muy pequeños (por ejemplo, para $R < 1$) puede considerarse exacta la ley de Stokes.

§ 246. Resistencia del medio no paralela a $\vec{u}$. Nos limitaremos a los casos más esquemáticos: en particular, a casos en que existe la resultante $\vec{A}$ de las fuerzas de rozamiento (§ 109); esto sucede ciertamente en el problema «plano».

Sea $\vec{u}$ la velocidad del cuerpo respecto al flúido. Si $\vec{A}$ no tiene sentido opuesto al de $\vec{u}$, el ángulo $\widehat{\vec{A}\vec{u}}$ es obtuso, y $\vec{A}$ se divide en dos componentes:

$$\vec{A}_t \textit{ (resistencia)} \text{ y } \vec{A}_n \textit{ (arrastre)}.$$

He aquí los dos casos más característicos:

a] **Efecto Magnus.** Un cilindro ligero de papel C (fig. 500) se pone en rotación rápida alrededor de su eje de figura horizontal, y se deja caer libremente.

El cilindro *no* cae según la vertical, sino que desciende transversalmente a lo largo de una línea l notablemente inclinada, que tiene la forma dibujada en la figura.

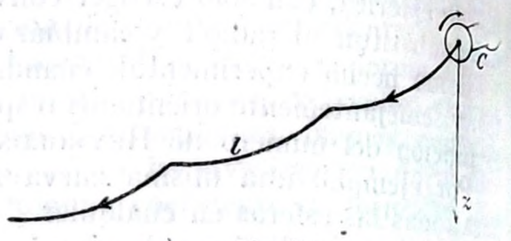


Fig. 500

El teorema de Bernoulli justifica la existencia de una resultante transversal de las fuerzas de presión sobre el cilindro que cae. En lugar de éste, imagínese que el cilindro en rotación recibe un viento que va de abajo hacia arriba (fig. 501). El cilindro arrastra en su rotación las capas de aire inmediatamente contiguas.

En P_1 la velocidad del viento y la de arrastre por rotación se restan, mientras que en P_2 se suman. Los filetes flúidos de P_1, en donde la velocidad resultante es menor, originan presiones p_1 más fuertes que las presiones p_2 debidas a los filetes flúidos más veloces en P_2. La resultante de las presiones p_1 y p_2 da el empuje transversal $\vec{A}_n$.

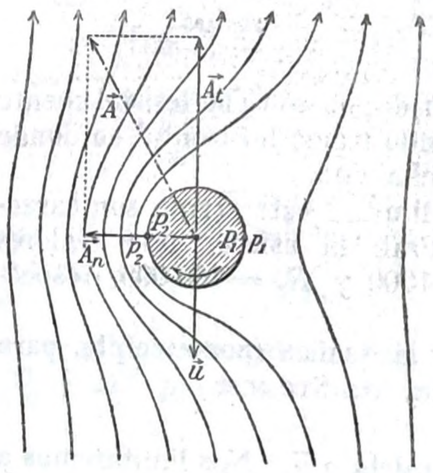


Fig. 501

En realidad, el viento produce también una resistencia A_t, y la

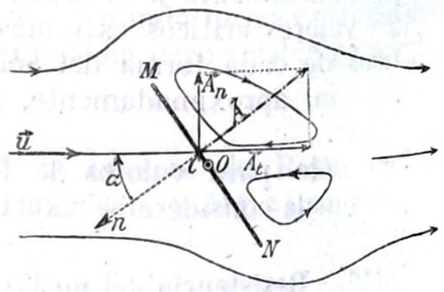


Fig. 502

resultante de todas las fuerzas aplicadas al cilindro giratorio no es $\vec{A}_n$, normal a $\vec{u}$, sino otro vector tal como $\vec{A}$.

El efecto Magnus es causa de la trayectoria anómala que siguen las pelotas de tenis «cortadas» por la raqueta y a las cuales ha comunicado ésta una fuerte velocidad de rotación. La *derivación* que se observa en los proyectiles disparados por las armas de fuego rayadas se debe, aunque en pequeña parte, al efecto Magnus.

Se ha ensayado la aplicación del efecto Magnus a los buques. En lugar de las velas se emplea un cilindro de eje vertical, montado sobre el buque, que gira rápidamente (*rotor de* Flettner): un viento lateral puede engendrar el empuje propulsivo. A igualdad de área atacada por el viento, el rotor de Flettner parece más eficaz que las velas ordinarias. Sin embargo, el éxito práctico no ha sido alentador.

b] **Plano inclinado.** La estela turbulenta (fig. 502) es asimétrica. En general, el rozamiento con el medio está constituído por una resultante y un par; en los casos más sencillos el par es nulo y puede hablarse de una resistencia $\vec{A}$ no exactamente normal al plano MN, a causa de las tensiones de rozamiento (§ 241). Esto sucede, por ejemplo, si el plano, de anchura MN, es indefinido en dirección perpendicular a la figura, si el viento es uniforme y si su velocidad $\vec{u}$ es paralela al plano de la figura: el problema es todavía «plano».

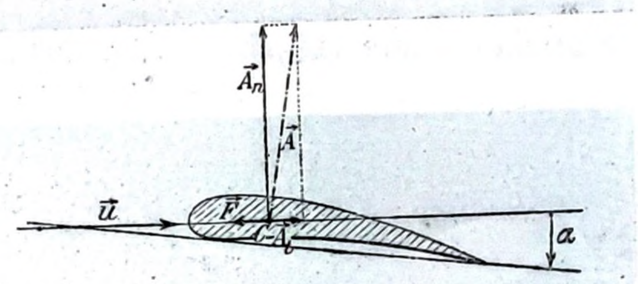


Fig. 503

El punto de aplicación C de $\vec{A}$ está más próximo al borde M, alcanzado primero por el viento.

$\vec{A}$ depende de la inclinación α. Sólo muy groseramente puede decirse que $\vec{A}$ es proporcional a $\cos\alpha$.

Además, se tiene proporcionalidad con μ, con u^2 y con el área S del plano.

El problema más interesante en el caso de una resistencia del medio no paralela a $\vec{u}$ es el de obtener el perfil que corresponde a la mayor *finura*, es decir, al valor más elevado de la razón $\frac{A_n}{A_t}$.

Con buenos perfiles (alas de aeroplano, fig. 503) se ha alcanzado el valor $26 \div 27$. Para el plano delgado (fig. 502), la finura no pasa de 7 (¡!).

Terminemos esta breve reseña sobre el rozamiento con el medio con la presentación de dos fotografías [fig. 504 *a*), *b*)] de espectros aerodinámicos relativos al problema plano de ala indefinida en dirección perpendicular a la figura. En la primera fotografía es pequeña la inclinación α, y la estela turbulenta es casi nula, mientras que en la segunda es excesiva la inclinación α, y se ve una ancha estela

turbulenta. La razón entre las resistencias A_t es del orden de 1 a 100. Se pasa con bastante brusquedad del primer régimen al segundo. El experimento en el túnel es extraordinariamente instructivo: Los

(a)

(b)

Fig. 504

hilos que sostienen el modelo del ala, son bruscamente arrebatados cuando se pasa del primer régimen al segundo. Una falsa maniobra en vuelo que haga pasar el ala del aeroplano del primero al segundo régimen, puede producir la rotura de la misma.

TERCERA PARTE

Ondas elásticas y acústica

CAPÍTULO I

Propagación de las ondas elásticas

§ 247. **Ondas elásticas y acústica.** La acústica, estudio de los sonidos, consta de una parte que puede llamarse artística: realización de instrumentos musicales y construcción de locales en los que la audición se produzca en buenas condiciones de intensidad y de claridad.

La Física se interesa por el primer problema en cuanto su objeto es establecer las leyes de vibración de los cuerpos y explicar el motivo de las sensaciones acústicas que nos proporciona la música *(acústica musical)*. La física técnica, gracias al impulso recibido por la difusión de los radioconciertos y del cine sonoro, ha emprendido con éxito estudios sistemáticos de *acústica urbana* aplicada particularmente a las salas de audición.

La *acústica fisiológica* trata del estudio de la producción de la voz y del mecanismo de recepción de los sonidos por el oído.

Pero la *acústica física*, propiamente dicha, no es más que un capitulo de la dinámica de los cuerpos elásticos, sean sólidos, líquidos o gaseosos. La acústica física es el estudio de la producción, propagación y recepción de las *ondas elásticas*, especialmente en el aire. Hoy no puede justificarse una separación entre la acústica y la mecánica de los cuerpos elásticos, más que observando que los experimentos de acústica se efectúan mediante un sentido especial: el oído.

En algunos experimentos de acústica el físico tiende a substituir el receptor «oído» por uno cualquiera de los numerosos receptores de ondas elásticas realizados hasta hoy (§§ 262 ÷ 264). Se obtienen con esto dos ventajas: independencia de los resultados experimentales respecto a las particulares facultades auditivas del experimentador, y extensión del campo de investigación a un *espectro acústico* que comprende frecuencias no audibles (subsonidos, de frecuencia inferior a 16 hertz, y ultrasonidos, de frecuencia mayor que 20 000 hertz).

Es decir, se logra la misma ventaja que en óptica cuando se substituye el ojo por un receptor más adecuado y puede extenderse el campo de nuestros conocimientos al espectro invisible, que es mucho más extenso que el visible.

Muchos de los aparatos modernos para el estudio de la acústica física son aparatos eléctricos que solamente podrán describirse de un modo somero.

§ 248. Propagación por ondas elásticas. Sea un medio elástico, homogéneo, isótropo e indefinido, como una gran masa de aire, de agua o de acero. Supongamos que un punto O del medio efectúe vibraciones según un eje, las cuales, para mayor sencillez, supondremos que son armónicas; por lo tanto, la separación s que presenta O respecto a la posición de reposo *(elongación)* medida sobre dicho eje, será una función del tiempo t del tipo

$$s = a \cdot \cos \omega t, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu, \qquad [1]$$

en donde ω es la pulsación, T el período y ν la frecuencia. Se ha supuesto que es nula la fase inicial φ_0.

Se tienen las condiciones más simples en el caso de un largo tubo de goma ligeramente tenso comparable a una *cuerda elástica* y suspendido de muchos hilos también elásticos (fig. 505).

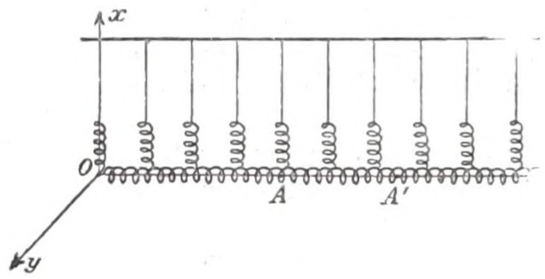


Fig. 505

Se pone en vibración (forzada) un extremo O de la cuerda, de modo que efectúe la oscilación [1].

Demuestra la experiencia que la oscilación *se propaga a lo largo de la cuerda:* ésta da la dirección de propagación *(rayo)*.

Decir que la oscilación «se propaga», quiere decir que cada punto A del medio elástico repite el movimiento de O, pero con un retardo de tiempo τ proporcional a la distancia $OA = r$:

$$\tau = \frac{1}{\mathbf{v}} \cdot r,$$

siendo $\frac{1}{\mathbf{v}}$ una constante de proporcionalidad, independiente de r si el medio es isótropo y homogéneo. Si el medio elástico es simplemente la cuerda Oz, se tiene $OA = r = z$.

τ es el tiempo necesario para que la oscilación «se propague» desde O hasta A; OA es el *rayo* según el cual se efectúa la propagación de la oscilación.

La *velocidad de propagación de fase* (§ 249) es:

$$\mathbf{v} = \frac{r}{\tau} = \frac{z}{\tau}. \qquad [2]$$

El fenómeno en conjunto se llama *propagación por ondas elásticas*; la cuerda es sede de *ondas elásticas* que se propagan con la velocidad $\mathbf{v}$.

Las oscilaciones de O, y por tanto de A, se llaman *transversales* cuando O vibra normalmente a la dirección de propagación, por ejemplo, normalmente a la cuerda de la figura 505. Las oscilaciones de O y, por tanto, de A, se llaman *longitudinales* cuando O vibra en la dirección de la propagación, es decir, en la de la cuerda; en

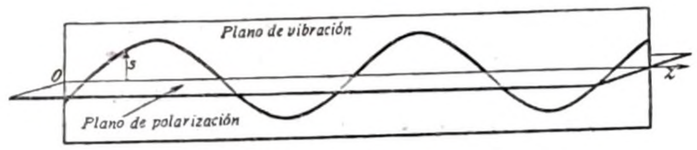


Fig. 506

tal caso, un largo muelle en hélice, formado por hilo de acero muy delgado, es más útil que el tubo de goma.

Las oscilaciones transversales son más fácilmente visibles, pero la oscilación longitudinal está determinada por a, ω y $\mathbf{v}$; para caracterizar la vibración transversal no basta esto, pues es preciso. por ejemplo, decir también si el vector corrimiento $\vec{s}$ del punto O se encuentra siempre en el mismo plano que pasa por el rayo, o sea, por la cuerda. Si así sucede y si la cuerda no está dotada de alguna asimetría especial, también vibran en este plano todos los otros puntos de la cuerda. La vibración transversal se llama entonces *polarizada* en un plano; el plano de orientación constante, que pasa por el rayo y en el que se efectúan las vibraciones, se llama *plano de vibración;* el plano que pasa por el rayo y es normal a las vibraciones, y perpendicular, por tanto, al plano de vibración, se llama *plano de polarización* (fig. 506). Para determinar una vibración transversal, aun en el caso sencillo en que está polarizada en un plano, es preciso conocer a, ω, $\mathbf{v}$ y el plano de vibración.

Puede darse el caso de que $\mathbf{v}$ varíe al cambiar el plano de vibración.

Así, en el modelo de la figura 505 la cuerda elástica está suspendida por cierto número de hilos elásticos; las vibraciones transversales se propagan con distinta velocidad, según que el plano de vibración sea horizontal o vertical, a menos que la robustez de los hilos elásticos de suspensión no esté en una relación particular con su longitud.

El experimento de propagación se efectúa también en el gas o en el líquido que llena un tubo larguísimo, de paredes muy rígidas. Se producen sólo vibraciones longitudinales: la sección inicial $O'O''$ del tubo (fig. 507) está constituída por un émbolo que efectúa oscilaciones longitudinales respecto al tubo; cada sección AA del mismo repite las vibraciones $O'O''$ después del tiempo $\tau = \frac{z}{\mathbf{v}}$, siendo $\mathbf{v}$ la velocidad de propagación de la onda longitudinal. Ahora, estas oscilaciones engendran compresiones y enrarecimientos del medio elástico, las cuales se propagan también con la misma velocidad $\mathbf{v}$, y es igualmente lícito decir que la onda longitudinal está constituída por la propagación de estas compresiones y enrarecimientos.

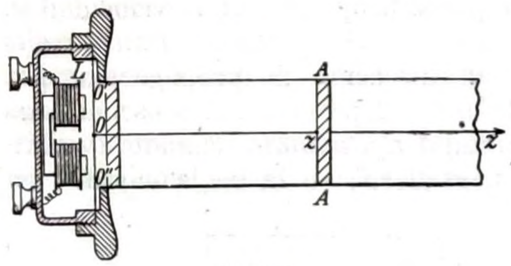


Fig. 507

El émbolo vibratorio $O'O''$ se realiza mediante la membrana L de un receptor telefónico alimentado con corriente alterna. Gracias a la posibilidad actual de obtener corrientes alternas de suficiente potencia (sin embargo, muy pequeña) y de frecuencia variable entre límites muy amplios, resulta que el dispositivo es fácil de realizar y muy cómodo.

§ 249. Ecuación de la onda. La onda elástica, obtenida según se ha dicho en § 248, se llama *onda elástica progresiva*, en oposición a *onda estacionaria* (§ 253, *b*], 2.º).

La ley del movimiento de todo punto de la cuerda elástica, en cualquier instante, es una fórmula del tipo $s = s(t, z)$, en donde s es la elongación del punto A (z) en el instante t; esta fórmula se llama *ecuación de la onda* (progresiva).

Para mayor sencillez también supondremos que la oscilación de O es sinusoidal, y distinguiremos dos casos: oscilación transversal y oscilación longitudinal.

1.º **Oscilaciones transversales.** Las supondremos polarizadas en un plano; sean xz (fig. 505) el plano de vibración y z la dirección de propagación *(rayo)*.

Supondremos que las oscilaciones del origen O vienen dadas por

$$x_{z=0} = a \cdot \cos \omega t = a \cdot \cos \frac{2\pi}{T} t = a \cdot \cos 2\pi \nu t; \qquad [1]$$

hemos representado ahora por x la elongación, que en § 249 se indicaba por s; en general, si la oscilación de O fuese transversal, la elongación $\vec{s}_{z=0}$ debería considerarse como un vector, en el plano xy, de componentes $x_{z=0}$, $y_{z=0}$.

Se ha dicho (§ 248) que el punto A, situado a la distancia z de O, repite este movimiento con un retardo $\tau = \frac{|z}{\mathbf{v}}$; luego el movimiento de A es:

$$x = a \cdot \cos\, \omega\,(t - \tau)$$
$$= a \cdot \cos \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{z}{\mathbf{v}}\right) = a \cdot \cos\, 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{T\,\mathbf{v}}\right). \qquad [2]$$

El sentido positivo del eje z es el sentido de propagación, de modo que $\mathbf{v}$ es positivo.

En contraposición a la *velocidad* (de propagación) *de grupo*, concepto que se presenta en el caso de la propagación de la luz en un medio dispersivo (v. tomo II), $\mathbf{v}$ se llama *velocidad* (de propagación) *de fase*, puesto que, de acuerdo con [2], es la velocidad con que se propaga la *fase* $\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{z}{\mathbf{v}}\right)$ del movimiento oscilatorio sinusoidal.

En un determinado instante t, los puntos de la cuerda están separados cada uno de su posición de reposo por elongaciones x dadas por la [2], en la cual t se debe imaginar constante, y z toma todos los valores correspondientes a todos los puntos de la cuerda. Luego x es función sinusoidal de z: si se fotografía la cuerda en el instante t, muestra la forma ondulada de una sinusoide, la cual se extiende desde O a lo largo de la cuerda en el sentido de las z positivas, de modo que comprende todos los puntos que han comenzado ya a repetir las vibraciones de O.

Si se fotografía de nuevo la cuerda un momento después, el tiempo ha tomado el valor $t' = t + dt$, y la sinusoide se ha trasladado a lo largo de la cuerda. Al variar el tiempo la sinusoide *(onda)* se mueve a lo largo de la cuerda con velocidad $\mathbf{v}$.

La [2] se llama *ecuación de la onda*. Si la oscilación de O es transversal y polarizada en un plano, la *onda* también es transversal y polarizada en dicho plano (fig. 506).

Para otro punto A' de la cuerda, a la distancia z' de O, se tiene en el instante t:

$$x' = a \cdot \cos\, 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{z'}{T\,\mathbf{v}}\right), \quad \left(\tau' = \frac{z'}{\mathbf{v}}\right).$$

Será $x' = x$ para cualquier valor de t cuando la diferencia de fase entre las dos vibraciones x y x' toma el valor:

$$2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{T\,\mathbf{v}}\right) - 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{z'}{T\,\mathbf{v}}\right) = 2\pi \cdot n,$$

siendo n entero, positivo o negativo; esto es, cuando sea:

$$z' - z = n \cdot T\,\mathbf{v} \qquad [3]$$

Los puntos A y A' efectúan vibraciones concordantes.

Los dos puntos más próximos A y A', distintos entre sí, que se hallan en estas condiciones, se encuentran a la distancia

$$z' - z = T\,\mathbf{v} = \lambda \qquad (n = +1). \qquad [4]$$

El valor λ se llama *longitud de onda*, y representa el camino recorrido por la onda en un tiempo T igual al período (1). Introduciendo la frecuencia ν se tiene:

$$\lambda = T\,\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}}{\nu}; \qquad \mathbf{v} = \nu \cdot \lambda. \qquad [5]$$

A y A' $(z < z')$ efectúan vibraciones concordantes, pero mientras A repite cierta vibración procedente de O, A' se halla todavía repitiendo la vibración anterior.

Introduciendo λ en la [2], se convierte ésta en:

$$x = a \cdot \cos\, 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right), \qquad [6]$$

que es la forma más corriente de la ecuación de la onda.

En general, incluso si no se verifica la [3], la diferencia de fase $\Delta\varphi$ entre las vibraciones de z y de z' es:

$$\Delta\varphi = 2\left(\frac{t}{T} - \frac{z'}{T\mathbf{v}}\right) - 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{T\,\mathbf{v}}\right) = -\frac{2\pi}{T\,\mathbf{v}}\,(z' - z) \qquad [7]$$

proporcional, como era evidente, a la distancia $z' - z$, y negativa cuando la vibración de z' se halla en retardo respecto a la de z. Si el sentido de propagación coincide con el sentido positivo del eje z, $\mathbf{v}$ resulta positivo, y la diferencia de fase es negativa para $z' > z$.

Por esto se habla más a menudo del *retardo de fase* entre las vibraciones en z y z', definido por

$$2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{T\,\mathbf{v}}\right) - 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{z'}{T\,\mathbf{v}}\right) = -\Delta\varphi = \frac{2\pi}{T\,\mathbf{v}}\,(z' - z), \qquad [8]$$

que tiene la ventaja de ser positivo cuando lo es $z' - z$ y cuando se propaga la onda en el sentido positivo de las z $(\mathbf{v} > 0)$.

(1) Según está definido, el concepto de «longitud de onda» queda circunscrito al caso de ondas sinusoidales.

El retardo de fase $-\Delta\varphi$, además de expresarse en radianes, se expresa también:

a] En ángulo, medido en vueltas, equivaliendo cada una a una oscilación:

$$-\frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{z' - z}{T\,\mathbf{v}} = \frac{z' - z}{\lambda} \text{ vueltas (u oscilaciones).}$$

b] En tiempo $(\tau' - \tau)$, expresado en número de períodos $\dfrac{\tau' - \tau}{T}$, equivaliendo cada período a una oscilación; se tiene:

$\tau' - \tau = \dfrac{z'}{\mathbf{v}} - \dfrac{z}{\mathbf{v}}$; y, por tanto, $\dfrac{\tau' - \tau}{T} = \dfrac{z' - z}{T\,\mathbf{v}} = \dfrac{z' - z}{\lambda}$ períodos.

c] En espacio $(z' - z)$ medido en longitudes de onda:

$$-\frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{z' - z}{\lambda} \text{ longitudes de onda.}$$

El concepto de longitud de onda introducido de este modo es muy cómodo y útil. Sin embargo, se debe considerar que un sonido está mejor determinado por su frecuencia que por su longitud de onda, porque cuando una onda sonora se refracta pasando de un medio elástico a otro inmediato en el cual se propaga con diferente velocidad, la frecuencia ν y el período T no cambian, pero varía la longitud de onda λ.

2.º **Oscilaciones planas longitudinales.** Nos serviremos de la figura 507. La lámina L del teléfono oscila en la dirección del eje z, y si es sensiblemente mayor que la sección del tubo $O'OO''$, funciona para el aire del tubo como un émbolo rígido, de pared plana y normal a z; la *elongación*, es decir, el corrimiento $s_{z=0}$ de esta pared respecto a la posición de reposo sea

$$s_{z=0} = a \cdot \cos\,\omega t = a \cdot \cos\,\frac{2\pi}{T}\,t, \qquad [9]$$

La ecuación de la onda plana longitudinal es idéntica a la [2]:

$$s = a\,\cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{z}{\mathbf{v}}\right) = a\,\cos\,2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{T\,\mathbf{v}}\right). \qquad [10]$$

Las consideraciones anteriores para la longitud de onda y el retardo de fase se aplican a este caso. Ahora es muy conveniente una ecuación de la onda que ponga en evidencia la propagación de las com-

presiones y enrarecimientos. Sean p_0 la presión normal del flúido en el tubo, S la sección de éste y p la presión en una sección AA (fig. 508) en cierto instante t.

Consideremos una capa infinitesimal de flúido de espesor dz. Esta capa, en estado de reposo, tiene el volumen $S \cdot dz = \Delta v$ y la presión p_0. Si, al pasar la onda, la capa dz *en un instante dado* está comprimida, esto depende del desigual corrimiento $(s_B - s_A)_{t = \text{const}}$ de las dos caras extremas AA, BB de la capa dz en aquel instante.

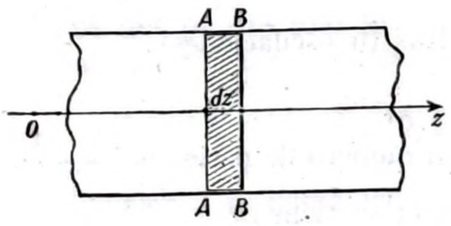


Fig. 508

Si s_A y s_B son los corrimientos de AA y de BB, respectivamente, en un mismo instante, se tiene:

$$s_B = s_A + \left(\frac{ds}{dz}\right)_{t = \text{const}} \cdot dz\,;$$

y, por tanto,

$$(s_B - s_A)_{t = \text{const}} = \left(\frac{\partial s}{\partial z}\right) \cdot dz,$$

en donde el símbolo $\frac{\partial s}{\partial z}$ indica la derivada parcial de s respecto a z, mientras permanece constante la variable t.

Se tiene, por consiguiente, una variación $d\,\Delta v$ del volumen Δv:

$$d\,\Delta v = S \cdot (s_B - s_A)_{t = \text{const}} = S \cdot \left(\frac{\partial s}{\partial z}\right) \cdot dz = \Delta v \cdot \left(\frac{\partial s}{\partial z}\right);$$

y, por consiguiente, se manifiesta en el volumen Δv un aumento de presión $(p - p_0)$ dado en valor y signo por (§ 185, [1]):

$$d\,\Delta v = -\frac{1}{\varepsilon} \cdot \Delta v\,(p - p_0). \qquad [11]$$

Cuando $d\,\Delta v$ es positivo, Δv experimenta un enrarecimiento; $p - p_0 = \Delta p$ es negativo y se tiene una disminución de presión.

Luego:

$$\Delta p = p - p_0 = -\varepsilon \frac{\partial s}{\partial z}. \qquad [12]$$

ε es el módulo de compresión uniforme *adiabática* del flúido (§ 185); decimos adiabática porque en todos los casos prácticos la propagación por ondas está constituída por compresiones y enrarecimientos que se suceden con tal rapidez y a distancias tales $\left(\text{iguales a } \frac{1}{2}\lambda\right)$,

que no permiten cambios sensibles de calor entre las capas sucesivas de flúido.

Luego, se deduce de la [10]:

$$\left.\begin{aligned} \Delta p = p - p_0 = -\frac{\varepsilon \cdot a \cdot 2\pi}{T\,\mathbf{v}} \cdot \operatorname{sen} 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{T\,\mathbf{v}}\right) = \\ = -\frac{a \cdot \varepsilon \cdot \omega}{\mathbf{v}} \operatorname{sen}\ \omega\left(t - \frac{z}{\mathbf{v}}\right) = \frac{a \cdot \varepsilon \cdot \omega}{\mathbf{v}} \cos\left\{\omega\left(t - \frac{z}{\mathbf{v}}\right) + \frac{\pi}{2}\right\} = \\ = \frac{a \cdot \varepsilon \cdot 2\pi}{T\,\mathbf{v}} \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{T\,\mathbf{v}} + \frac{1}{4}\right) \end{aligned}\right\}; \qquad [13]$$

esto es: se tiene una *onda de presión* [13], constituída por sucesivas compresiones y enrarecimientos, del mismo período y longitud de

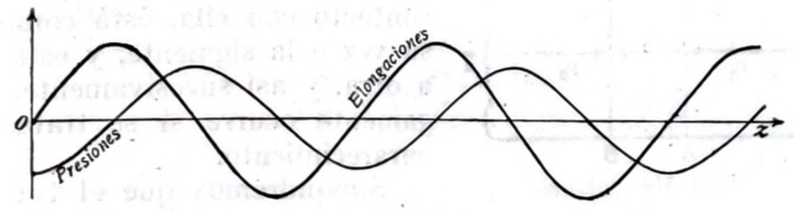


Fig. 509

onda igual que la *onda de la elongación* [10], amplitud proporcional, y que presenta un *adelanto de fase* $\frac{\pi}{2}$ respecto a aquélla; por consiguiente, ambas ondas se encuentran en cuadratura (fig. 509, § 66, a]).

Si se deriva [10] respecto al tiempo t, se tiene:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -a\,\omega \operatorname{sen} 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{T\,\mathbf{v}}\right) = -a \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \operatorname{sen} 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{T\,\mathbf{v}}\right) \qquad [14]$$

en donde $\frac{\partial s}{\partial t}$ tiene el significado de velocidad de las partículas en vibración pertenecientes a cierto plano $z = \text{const.}$, perpendicular al eje z de propagación. Puede decirse que también la velocidad de vibración varía con una ley sinusoidal y se propaga mediante ondas. La [14] es la ecuación de propagación de la *onda de velocidad*. Esta onda, como la de presión [13], presenta un adelanto de fase $\frac{\pi}{2}$ respecto a la onda [10] de la elongación; en cambio, las ondas de presión y de velocidad concuerdan en la fase, y se tiene simplemente:

$$\Delta p = p - p_0 = \frac{\varepsilon}{\mathbf{v}} \frac{\partial s}{\partial t}. \qquad [15]$$

Las *amplitudes de oscilación, de velocidad* y *de presión* son, respectivamente: a, $a\,\omega$, $a\,\omega\,\frac{\varepsilon}{\mathbf{v}}$.

§ 250. Ecuación de la propagación por ondas planas. En el § 248 se ha recurrido a la experiencia para tener una prueba de la propagación por ondas. Mostremos que esta propagación es consecuencia necesaria de la elasticidad del medio en que se halla sumergido 0 y de la segunda ley de la dinámica.

Supondremos que el corrimiento o elongación s, longitudinal o transversal, es muy pequeño respecto a λ.

Fijémonos, por ejemplo, en el caso de las vibraciones longitudinales, en un tubo lleno de aire cuya presión en condiciones de reposo es p_0. Si la lámina L (fig. 507) comprime la capa de aire que está en contacto con ella, ésta comprime a su vez a la siguiente, y esta última a otra, y así sucesivamente. Análogamente ocurre si se trata de un enrarecimiento.

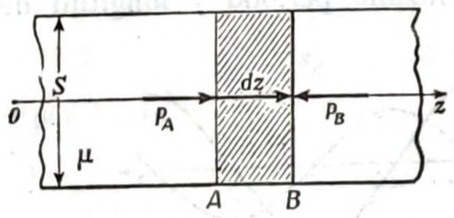


Fig. 510

Supondremos que el tubo tiene una sección S constante (fig. 510) y está lleno de un medio cuya masa específica sea μ. Una capa $AB = dz$ del tubo se mueve a lo largo del eje z, obedeciendo a la segunda ley de la dinámica por efecto de las fuerzas que le son aplicadas:

$$F = m \cdot a_c.$$

Ahora es $a_c = \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$, en donde s es el corrimiento respecto a la posición de reposo, contado según el eje z, que es función de z y de t. Además, se tiene $m = S \cdot dz \cdot \mu$. La capa AB está sometida a las presiones p_A y p_B; las presiones laterales son iguales y contrarias, dada la simetría de la compresión producida por el émbolo L (fig. 507), despreciando el peso.

La presión p es función de z y de t; luego, en cierto instante t, se tiene:

$$p_B = p_A + \frac{\partial p}{\partial z}\,dz.$$

Por tanto, en valor y signo, a lo largo del eje z, es:

$$F = S \cdot (p_A - p_B) = -\,S\,\frac{\partial p}{\partial z} \cdot dz = m \cdot a_c;$$

o sea:

$$-\,\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}. \qquad [1]$$

Pero se tiene:

$$-\,\frac{\partial p}{\partial z} = -\,\frac{\partial (p - p_0)}{\partial z},$$

y, por tanto, por la [12], § 249:

$$-\,\frac{\partial p}{\partial z} = \varepsilon\,\frac{\partial^2 s}{\partial z^2},$$

en donde ε es el módulo de compresión *adiabática* del flúido.

En fin, la ecuación [1] del movimiento de la capa AB se convierte en:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} &= \frac{\varepsilon}{\mu}\,\frac{\partial^2 s}{\partial z^2}, \\ \text{o bien, poniendo } \frac{\varepsilon}{\mu} = \mathbf{v}^2: \quad & \\ \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} &= \mathbf{v}^2\,\frac{\partial^2 s}{\partial z^2}. \end{aligned}\right\} \qquad [2]$$

Si el tubo se sustituye por una barra sólida, ε es el módulo de compresión axial (§ 191, y S se deforma generalmente durante la transmisión de las ondas longitudinales.

Luego, s, a lo largo del tubo, es una función de t y de z tal que satisface a la [2]: s es la solución de la ecuación diferencial [2].

La integral general de la [2] es:

$$s = f_1\left(t - \frac{z}{\mathbf{v}}\right) + f_2\left(t + \frac{z}{\mathbf{v}}\right), \qquad [3]$$

con

$$\mathbf{v} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} = \text{const.} \qquad [4]$$

válida en cualquier sistema de medidas coherentes; por ejemplo, en el sistema cm g_m seg, se miden:

$$\mathbf{v} \text{ en } \frac{\text{cm}}{\text{seg}},\ \mu \text{ en } \frac{g_m}{\text{cm}^3},\ \varepsilon \text{ en } \frac{\text{dinas}}{\text{cm}^2};$$

f_1 y f_2 quedan funciones arbitrarias.

Físicamente, la [3] indica que pueden propagarse en el tubo ondas planas con velocidad $|\mathbf{v}|$ constante; $f_1\left(t - \frac{z}{\mathbf{v}}\right)$ representa una onda que se propaga en el sentido positivo de las z, y $f_2\left(t + \frac{z}{\mathbf{v}}\right)$, una onda

que se propaga en el sentido negativo del eje z; la forma de las ondas (sinusoidales o no) puede ser cualquiera, y viene determinada por la forma de las funciones f_1 y f_2, que quedan arbitrarias.

Así, si se supone que en el sentido $-z$ no se propagan ondas, se tiene:

$$f_2\left(t+\frac{z}{\mathbf{v}}\right)=0.$$

Suponiendo que se propaga una onda sinusoidal en el sentido $+z$, se tendrá:

$$s=f_1=a\cos\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{z}{\mathbf{v}}\right).$$

Si la onda no es sinusoidal, se podrá efectuar su análisis armónico según FOURIER (§ 70).

Cesa toda arbitrariedad en la solución si se fijan en el instante inicial las condiciones de vibración en cada sección del tubo y si se da en función del tiempo la ley de oscilación de los dos émbolos extremos que limitan el medio elástico considerado dentro del tubo.

La velocidad de propagación $\mathbf{v}=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$ resulta ser una constante característica del medio, y es independiente de λ.

La fórmula encontrada para $\mathbf{v}$ concuerda con el resultado, evidente *a priori*, de que un medio elástico reacciona con tanta mayor rapidez contra una compresión que se le impone cuanto menor es su compresibilidad (es decir, cuanto mayor es ε) y cuanto menor es su inercia (esto es, cuanto menor es μ).

Si el tubo está lleno de gas perfecto, se tiene (§ 185, [2], [12]):

$$\varepsilon=-\frac{v\cdot dp}{dv}=\gamma\cdot p,$$

en donde γ es una constante característica de cada gas.

Luego, la velocidad de propagación de las ondas elásticas (en particular sonoras) en un gas perfecto es:

$$\mathbf{v}=\sqrt{\frac{\gamma\cdot p}{\mu}}, \qquad [5]$$

valor independiente de λ (es decir, de la frecuencia del sonido) y también de la densidad y de la presión del gas a igualdad de temperatura, ya que, según la ley de BOYLE (§ 187, [7]) se tiene:

$$\frac{p}{\mu}=\text{const.}$$

Además, en un gas perfecto (§ 295, (12]) es:

$$\frac{p}{\mu}=\frac{p_0}{\mu_0}(1+\alpha\theta),$$

en donde α es el coeficiente de dilatación del gas; por tanto:

$$\mathbf{v}=\sqrt{\gamma\frac{p_0}{\mu_0}(1+\alpha\theta)}=\mathbf{v}_0\sqrt{1+\alpha\theta}\,. \qquad [6]$$

En el aire, a 0 °C, resulta:

$$\mathbf{v}_0=\sqrt{1{,}405\,\frac{1\,013\,000}{0{,}001\,293}\,\frac{\text{cm}^2}{\text{seg}^2}}=33\,100\,\frac{\text{cm}}{\text{seg}}=331\,\frac{\text{m}}{\text{seg}}$$

y $\mathbf{v}$ aumenta con la temperatura en $0{,}55\,\frac{\text{m}}{\text{seg}}$ por cada °C, en perfecto acuerdo con la experiencia (§ 277). A la temperatura ordinaria ($15 \div 20$ °C) se puede tomar $\mathbf{v}=340\,\frac{\text{m}}{\text{seg}}$.

En el acero, $\varepsilon=21\,000\,\frac{\text{kg}_\text{p}}{\text{mm}^2}=2{,}05\cdot10^{12}\,\frac{\text{dinas}}{\text{cm}^2}$; $\mu=8\,\frac{\text{gm}}{\text{cm}^3}$; por tanto:

$$\mathbf{v}=\sqrt{\frac{2{,}05\cdot10^{12}}{8}\,\frac{\text{cm}^2}{\text{seg}^2}}\approx500\,000\,\frac{\text{cm}}{\text{seg}}=5\,000\,\frac{\text{m}}{\text{seg}}.$$

Para las vibraciones transversales $x=x\,(t,\,z)$ de una cuerda, se llega fácilmente a una ecuación de forma idéntica a la [2], si la cuerda debe sólo su elasticidad al estado de tensión constante en que se mantiene y si la tensión se puede considerar constante incluso durante el fenómeno de transmisión de la onda; esto es admisible para las ondas cuya amplitud es muy pequeña respecto a la longitud de onda.

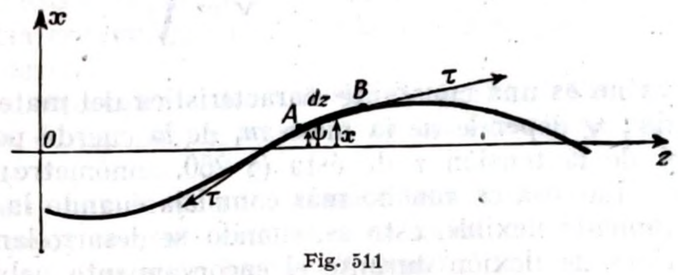


Fig. 511

En efecto, sea $AB=dz$ (fig. 511) un elemento de la cuerda en oscilación; supongamos que el eje z coincide con la posición de reposo de la cuerda, y que su tensión es τ, que se supone constante en todos los puntos de la cuerda y en todos los instantes. En concordancia con esto, se supondrá muy pequeño el ángulo ψ que la tangente a la cuerda forma con el eje z, y por tanto también serán pequeñas las amplitudes de vibración respecto a la longitud de onda.

La masa de dz es $m_1 \cdot dz$ si m_1 es la masa de la unidad de longitud de la cuerda. La fuerza aplicada al elemento dz, que vuelve a conducirlo a su posición de reposo, es en valor y signo, según el eje x:

$$\{(\tau \text{ sen } \psi)_B - (\tau \text{ sen } \psi)_A\} = d(\tau \text{ sen } \psi) = \tau \cdot d(\text{sen } \psi).$$

Pero puede escribirse sensiblemente:

$$\text{sen } \psi = \text{tg } \psi = \left(\frac{dx}{dz}\right)_{t = \text{const.}},$$

en donde x es el corrimiento transversal del elemento de cuerda respecto a su posición de reposo.

La expresión $F = m \cdot a_c$ se escribe ahora:

$$\tau \cdot d\left(\frac{dx}{dz}\right)_{t = \text{const.}} = m_1 \cdot dz \frac{\partial^2 x}{dt^2},$$

o sea

$$\tau \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} dz = m_1 \cdot dz \frac{\partial^2 x}{\partial t^2},$$

y, por fin:

$$\frac{\tau}{m_1} \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \qquad [7]$$

completamente análoga a la [2].

Pero ahora la velocidad de propagación

$$\mathbf{v} = \sqrt{\frac{\tau}{m_1}} \qquad [8]$$

ya no es una constante característica del material que foma la cuerda; $\mathbf{v}$ depende de la masa m_1 de la cuerda por unidad de longitud y de la tensión τ de ésta (§ 260, sonómetro).

La cosa es mucho más compleja cuando la cuerda no es completamente flexible, esto es, cuando se desarrollan en ella fuerzas elásticas de flexión durante el encorvamiento debido a la onda.

En general, pues, la velocidad $\mathbf{v}_l$ para las ondas longitudinales es claramente distinta que la velocidad $\mathbf{v}_t$ para las ondas transversales.

§ 251. Energía transmitida por ondas. La propagación por ondas elásticas consiste esencialmente en el hecho de que cada porción del medio elástico (capa de aire en un tubo, pedacito de cuerda) pone en vibración al sucesivo, al cual transmite, pues, energía mecánica. La propagación por ondas elásticas es transmisión de energía mecánica, en el sentido de la propagación, con velocidad $\mathbf{v}$.

Se ha visto (§ 146, [3]) que un punto A de masa m, que efectúa vibraciones armónicas de período T y amplitud a, tiene la energía total:

$$\mathcal{E} + \mathcal{U} = \frac{2\pi^2 \cdot m \cdot a^2}{T^2}.$$

Habiendo llamado m_1 a la masa vibrante referida a la unidad de longitud de tubo o de cuerda, la energía $d(\mathcal{E} + \mathcal{U})$ que atraviesa una sección en un tiempo dt se encuentra después en un pedazo de tubo (o de cuerda), es decir, está poseída de una masa $m_1 \mathbf{v}\, dt$, que vibra con amplitud a y período T. Luego, se tiene:

$$d(\mathcal{E} + \mathcal{U}) = \frac{2\pi^2 \cdot m_1 \cdot \mathbf{v} \cdot dt}{T^2} a^2,$$

de donde

$$\mathfrak{w} = \frac{d(\mathcal{E} + \mathcal{U})}{dt} = \frac{2\pi^2 m_1 \mathbf{v} a^2}{T^2} = \frac{1}{2} m_1 \mathbf{v} \omega^2 a^2; \qquad [1]$$

luego, $\mathfrak{w} = \dfrac{d(\mathcal{E} + \mathcal{U})}{dt}$ es, pues, la energía que atraviesa la sección del tubo en cada unidad de tiempo y mide la potencia de la energía transmitida por ondas a lo largo del tubo o de la cuerda. Frecuentemente, se llama a $\mathfrak{w}$ *flujo de la energía transmitida por ondas.*

Se tiene análoga propagación de energía por ondas (electromagnéticas) en la propagación de la luz, de los rayos X, del calor radiante y de las ondas hertzianas. Como en estos casos se habla de «radiación (de energía) electromagnética», así la propagación por ondas elásticas constituye una *radiación* (de energía) *elástica.*

Fijémonos en el caso de ondas transversales en una cuerda. ¿De dónde viene la energía canalizada en la cuerda y que se propaga con la onda a lo largo de ella?

Esta energía es el equivalente del trabajo efectuado desde el exterior sobre el punto O (fig. 505) y transmitido desde cada punto A al punto sucesivo de la cuerda.

¿Dónde va a terminar la energía transmitida por ondas?

Si la cuerda es perfectamente elástica y se halla en el vacío, la energía se propaga sin disipación hasta el término de la cuerda, y en el § 255 veremos lo que allí sucede.

Si la cuerda es perfectamente elástica, pero está sumergida en un medio (aire, agua, ...) perfectamente elástico, se comunican las vibraciones a dicho medio. Continuamente la cuerda cede energía al medio que la rodea *(difusión)*, y la onda se amortigua durante la propagación.

Análogamente ocurre con las ondas longitudinales planas, como las que se producen a lo largo de un tubo (fig. 507). Supondremos, para simplificar, que el tubo tiene una sección $S = 1$. La potencia

de la energía transmitida, referida a la unidad de superficie de la onda, mide la *intensidad de la onda E*. Se tiene :

$$E = \frac{w}{S_\bullet} = w_{S=1} = \frac{2\pi^2 \mu \mathbf{v} a^2}{T^2} = \frac{1}{2}\mu \mathbf{v} a^2 \omega^2, \qquad [2]$$

que coincide con la [1], porque en nuestro caso m_1 es la masa del gas contenida dentro del tubo por unidad de longitud, teniendo en cuenta que el tubo se ha supuesto de sección igual a la unidad ; por lo tanto, m_1 se sustituye por la masa específica μ del gas.

Esta energía, que, por unidad de tiempo y de sección S, se propaga a lo largo del tubo, es el equivalente del trabajo que el émbolo vibrante L (fig. 507) efectúa sobre el gas del tubo para mantenerlo en vibración y que cada capa AA reefectúa sobre la capa inmediatamente vecina de la derecha.

Esto se puede demostrar directamente :

Si cada sección AA (fig. 507) de área $S = 1$ oscila según la [10], § 249.

$$s = a \cdot \cos \omega \left(t - \frac{z}{\mathbf{v}}\right) = a \cdot \cos \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{z}{\mathbf{v}}\right),$$

se tiene simultáneamente la onda sinusoidal de presión [13], § 249 :

$$p - p_0 = -\varepsilon \frac{\partial s}{\partial z} = -\frac{a\varepsilon\omega}{\mathbf{v}} \operatorname{sen} \omega \left(t - \frac{z}{\mathbf{v}}\right).$$

Por la [4], § 250, se tiene $\varepsilon = \mathbf{v}^2 \cdot \mu$; luego :

$$p - p_0 = -\varepsilon \frac{\partial s}{\partial z} = -a\,\mathbf{v}\,\mu\omega \cdot \operatorname{sen} \omega \left(t - \frac{z}{\mathbf{v}}\right).$$

En el tiempo dt, la capa AA, determinada por la abscisa z, se traslada en $\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_{z=\text{const.}} \cdot dt$; y el trabajo efectuado por el gas a la izquierda de AA sobre la capa AA en el tiempo dt es :

$$p \frac{\partial s}{\partial t} \cdot dt.$$

El trabajo efectuado en un tiempo τ muy grande respecto al período T es :

$$\mathfrak{L}_{S=1} = \int_0^\tau p \frac{\partial s}{\partial t} \cdot dt,$$

y la potencia media $w_{S=1} = \frac{\mathfrak{L}_{S=1}}{\tau} = E$ es :

$$E = w_{S=1} = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau p \frac{\partial s}{\partial t} \cdot dt = -\frac{1}{\tau}\int_0^\tau (p - p_0)\; a\,\omega \cdot \operatorname{sen} \omega \left(t - \frac{z}{\mathbf{v}}\right) \cdot dt.$$

En efecto, se tiene :

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau p_0 a\,\omega \cdot \operatorname{sen} \omega \left(t - \frac{z}{\mathbf{v}}\right) \cdot dt = p_0 a\omega \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{z}{\mathbf{v}}\right) \cdot dt,$$

valor que es sensiblemente nulo por ser $\tau \gg T$.

Luego :

$$w_{S=1} = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{a^2 \varepsilon\, \omega^2}{\mathbf{v}} \operatorname{sen}^2 \omega \left(t - \frac{z}{\mathbf{v}}\right) \cdot dt = \frac{a^2 \mathbf{v} \mu \omega^2}{\tau}\int_0^\tau \operatorname{sen}^2 \omega \left(t - \frac{z}{\mathbf{v}}\right) \cdot dt.$$

Teniendo en cuenta que es $\tau \gg T$, se tiene sensiblemente :

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \operatorname{sen}^2 \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{z}{\mathbf{v}}\right) \cdot dt = \frac{1}{2}$$

y, por tanto :

$$E = w_{S=1} = \frac{a^2 \mathbf{v} \mu \omega^2}{2},$$

que es precisamente la [2].

Conviene introducir

$$\text{la } \textit{amplitud de velocidad} : a \cdot \omega = \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)_0, \qquad [3]$$

que es la amplitud de oscilación de la velocidad $\frac{\partial s}{\partial t}$ (§ 249, [14]) del movimiento oscilatorio $s = s\,(t)$ de la capa AA ; y

$$\text{la } \textit{amplitud de presión} : (\Delta p)_0 = (p - p_0)_0 = a \cdot \omega \cdot (\mathbf{v} \cdot \mu), \qquad [4]$$

es decir, la amplitud de oscilación de la presión $(p - p_0)$.

Entonces se puede escribir la [2] :

$$E = w_{S=1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(p - p_0)_0. \qquad [5]$$

Si el movimiento de la capa AA hubiese sido uniforme, es decir, si fuese $\frac{\partial s}{\partial t} = \text{const.}$, la potencia efectuada por unidad de área bajo la acción de una diferencia de presión $(p - p_0)$ también constante, hubiese sido:

$$\mathfrak{w}_{S=1} = (p - p_0) \cdot \frac{\partial s}{\partial t}. \qquad [6]$$

Análogamente, la potencia eléctrica $\mathfrak{w}$ lanzada en un hilo de resistencia eléctrica r por una corriente continua y constante de intensidad $i = \frac{dq}{dt}$, en donde dq es la cantidad de electricidad que atraviesa el hilo en el tiempo dt, es:

$$\mathfrak{w} = (V_1 - V_2)\, i, \qquad [7]$$

siendo $V_1 - V_2$ la diferencia de potencial que produce la corriente i; es válida la *ley de* Ohm:

$$(V_1 - V_2) = i \cdot r.$$

Si se tiene en el hilo una corriente alterna $i = i_0 \cos \omega t$, debida a una diferencia de potencial alterna $(V_1 - V_2) = (V_1 - V_2)_0 \cdot \cos \omega t$ (¡en fase con la corriente!, conductor sin autoinductancia), la potencia viene dada por:

$$\mathfrak{w} = \frac{(V_1 - V_2)_0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{i_0}{\sqrt{2}}.$$

Introduciendo los *valores eficaces*:

$$(V_1 - V_2)_{ef} = \frac{(V_1 - V_2)_0}{\sqrt{2}}; \qquad i_{ef} = \frac{i_0}{\sqrt{2}}, \qquad [8]$$

la fórmula anterior se escribe de un modo formalmente idéntico a la [7]:

$$\mathfrak{w} = (V_1 - V_2)_{ef} \cdot i_{ef}; \qquad [9]$$

y se cumple todavía la ley de Ohm:

$$(V_1 - V_2)_{ef} = r \cdot i_{ef}$$

siendo r la resistencia óhmica del conductor.

Análogamente, a partir de las [3] y [4] se obtiene:

$$\frac{(p - p_0)_0}{\sqrt{2}} = (\mathbf{v}\,\mu) \cdot \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)_0 \frac{1}{\sqrt{2}};$$

pueden definirse los valores eficaces análogos a los valores [8], y escribir una relación parecida a la ley de Ohm:

$$(p - p_0)_{ef} = (\mathbf{v}\,\mu) \cdot \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)_{ef}. \qquad [10]$$

El producto $(\mathbf{v}\,\mu)$ se llama *resistencia acústica específica*, relativa al medio elástico; «específica», porque se refiere a la unidad de sección $(S = 1)$; por ejemplo: en el aire, en condiciones normales (0 °C, 760 mm_{Hg}) es $(\mathbf{v}\,\mu) = 33\,100 \cdot 0{,}001\,293\ \text{cm}^{-2} \cdot \text{g}_\text{m} \cdot \text{seg}^{-1} = 42{,}8\ \text{cm}^{-2} \cdot \text{g}_\text{m} \cdot \text{seg}^{-1}$; en condiciones ordinarias suele ponerse en el aire $(\mathbf{v}\,\mu) = 41{,}5\ \text{cm}^{-2} \cdot \text{g}_\text{m} \cdot \text{seg}^{-1}$.

La [5] se escribe, análogamente a la [9]:

$$E = \mathfrak{w}_{S=1} = (p - p_0)_{ef} \cdot \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)_{ef} \qquad [11]$$

Todo esto constituye una analogía de forma muy útil mnemotécnicamente. Pero la resistencia eléctrica es síntoma de energía eléctrica disipada y restituída en forma de calor, mientras que la resistencia acústica tiene más bien el carácter de un «coeficiente de emisión» de la onda de radición elástica, específico de cada medio elástico. A igualdad de amplitud a y de frecuencia $\frac{\omega}{2\pi}$, resulta de la [2] que las intensidades E emitidas por un mismo manantial en medios diferentes son proporcionales a los respectivos «coeficientes de emisión» $(\mathbf{v}\,\mu)$. La energía vibratoria disipada en forma de calor no entra en las consideraciones anteriores.

§ **252. Absorción.** Pero la cuerda y el medio que la rodea no son en realidad perfectamente elásticos, y la energía se transforma gradualmente en calor a lo largo de la cuerda o en el medio que la envuelve (previa la difusión a que nos hemos referido en el § 251) a causa del rozamiento interno y a causa de la imperfecta adiabaticidad del fenómeno.

Limitémonos al caso de la cuerda en el vacío, o del tubo. La onda se amortigua durante la propagación, y la cuerda o el medio que llena el tubo se calientan. Se tiene *absorción*. El medio, no perfectamente elástico, se llama *absorbente*.

Se verifica experimentalmente que la cantidad de energía $d\mathfrak{w}$ absorbida en la unidad de tiempo por una capa suficientemente

delgada dz de cuerpo absorbente (como en el tubo de la fig. 507) es proporcional a dz (fig. 512) y a la potencia w que incide en dicha capa estrecha:

$$dw = -\alpha \cdot w\, dz \qquad \alpha > 0. \qquad [1]$$

El signo — indica que la variación dw es una disminución de w al aumentar z, esto es, en el sentido de la propagación.

Es fácil darse cuenta de la proporcionalidad entre la absorción y dz; pero también es fácil hacerse cargo de que la cantidad de energía absorbida tiene que ser un tanto por ciento de la potencia incidente w, y que, por tanto, dw debe también ser proporcional a w.

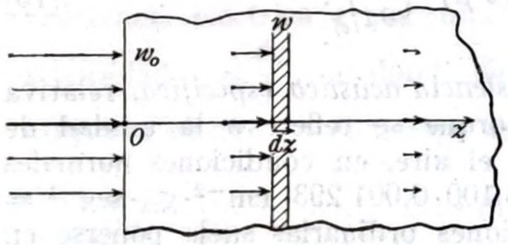


Fig. 512

La potencia de la energía radiante w que se adentra en el medio absorbente es una función de z que obedece a la ecuación diferencial [1]. Separando las variables tenemos:

$$\frac{dw}{w} = -\alpha \cdot dz\,; \qquad [2]$$

e integrando, se pasa de los logaritmos a los números, y se obtiene:

$$w = C \cdot e^{-\alpha z}.$$

Para $z = 0$ se tiene $C = w_0$, de modo que la constante de integración C significa la potencia inicial w_0, y se tiene, por fin:

$$w = w_0\, e^{-\alpha z}\,; \qquad [3]$$

α se llama *coeficiente de absorción* del medio para la onda considerada.

En una cuerda se deduce de la [1], § 251, y de la [3]:

$$\frac{2\pi^2 \nu m_1 a^2}{T^2} = \frac{2\pi^2 \nu m_1}{T^2}\, a_0^2\, e^{-\alpha z}.$$

Por tanto:

$$a = a_0\, e^{-kz} \qquad k = \frac{\alpha}{2}. \qquad [4]$$

En una cuerda, de la ley de la absorción [1] que hemos admitido, se deduce que la amplitud de vibración no es la misma en cualquier punto A de la cuerda (fig. 505); la ecuación de la onda [6], § 249, pasa a ser:

$$x = a_0\, e^{-kz} \cdot \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right). \qquad [5]$$

En un tubo, para la unidad de sección, se escribe la [3]:

$$E = E_0 \cdot e^{-\alpha z}\,; \qquad [6]$$

y esta ecuación da todavía con la [2] del § 251

$$a = a_0 \cdot e^{-kz} \qquad k = \frac{\alpha}{2},$$

y la [10], § 249, da:

$$s = a_0\, e^{-kz} \cdot \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right) \qquad [7]$$

completamente análoga a la [5].

§ 253. Interferencia. Desde el aspecto cinemático, el problema de la interferencia de dos ondas en un punto P es el mismo que el del § 66; el punto tiene que efectuar simultáneamente dos oscilaciones, y se estudia el movimiento resultante. La propagación por ondas da el artificio dinámico más cómodo para imponer a un mismo punto P ambas oscilaciones: se hacen llegar a P simultáneamente dos ondas elásticas. Acontece energéticamente que la porción de medio elástico en torno a P, en las condiciones de régimen permanente de las ondas, recibe energía de cada una de las dos ondas que llegan y cede de ella otro tanto para dar origen a ondas elásticas que parten de P.

Supondremos siempre que los corrimientos elásticos s de la posición de equilibrio sean bastante pequeños para que permitan la aplicación del principio de la independencia de las acciones simultáneas.

Interesan los siguientes casos:

a] **Dos ondas transversales de igual período, polarizadas en planos ortogonales, propagándose en el mismo sentido.** Sea el punto O (fig. 505) dotado simultáneamente de los dos movimientos:

$$\left.\begin{aligned} x &= a \cos \omega t \\ y &= b \cos (\omega t + \varphi_0) \end{aligned}\right\} \qquad [1]$$

y efectuando, por tanto, una vibración elíptica.

La vibración repetida por el punto A a la distancia z de O es:

$$\left.\begin{aligned} x_A &= a \cos \omega \left(t - \frac{z}{v_x}\right) = a \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda_x}\right) \\ y_A &= b \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{v_y}\right) + \varphi_0\right] = b \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda_y}\right) + \varphi_0\right] \end{aligned}\right\} \qquad [2]$$

Cuando es $\mathbf{v}_x = \mathbf{v}_y$, la diferencia de fase entre estas dos vibraciones es todavía φ_0 para cualquier valor de z; A repite una elipse idéntica en forma y orientación a la descrita por O.

Cuando es $\mathbf{v}_x \neq \mathbf{v}_y$, la diferencia de fase

$$\omega\left(t - \frac{z}{\mathbf{v}_y}\right) + \varphi_0 - \omega\left(t - \frac{z}{\mathbf{v}_x}\right) = \omega z\left(\frac{1}{\mathbf{v}_x} - \frac{1}{\mathbf{v}_y}\right) + \varphi_0 \qquad [3]$$

varía linealmente con z, y al aumentar z toma todos los valores, empezando por φ_0 (correspondiente a $z = 0$). Cada punto A de la cuerda efectúa un movimiento elíptico de período T, pero no repite la elipse descrita por O; ésta se deforma en la propagación al variar la distancia de A a O, y toma todas las formas que pueden obtenerse sucesivamente en el experimento de los diapasones cruzados, cuando éstos tienen una pequeña diferencia de período (§ 73).

En este último experimento varía con el tiempo la forma de la elipse; pero en el caso que estamos estudiando, en cada sitio la elipse es invariable con el tiempo, y cambia de un punto a otro de la cuerda.

Este modelo mecánico es fundamental para la fácil comprensión de los fenómenos ópticos en los cristales birrefringentes (v. tomo II).

b] **Dos (o más) ondas transversales y polarizadas en un mismo plano, o longitudinales, de igual período.** Las ondas componentes tienen por ecuaciones:

$$s_1 = a_1 \cos \omega\left(t \pm \frac{z}{\mathbf{v}}\right)$$

$$s_2 = a_2 \cos\left[\omega\left(t \pm \frac{z}{\mathbf{v}}\right) + \varphi_0\right]$$

$$s_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si el punto A, situado a la distancia z de O, debe efectuar simultáneamente las oscilaciones que le imprimen estas ondas, las oscilaciones que efectúa realmente vienen dadas por:

$$s = s_1 + s_2 + \ldots\ldots = a_1 \cos \omega\left(t \pm \frac{z}{\mathbf{v}}\right) + a_2 \cos\left[\omega\left(t \pm \frac{z}{\mathbf{v}}\right) + \varphi_0\right] + \ldots\ldots$$

Limitémonos al caso de dos ondas simultáneas. Son importantes los dos casos sencillos siguientes:

1.º *Ondas que se propagan en el mismo sentido.* Sea:

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= a \cos \omega\left(t - \frac{z}{\mathbf{v}}\right) = a \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right) \\ s_2 &= a \cos \omega\left(t - \frac{z}{\mathbf{v}} - t_0\right) = a \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} - \frac{t_0}{T}\right), \quad (\varphi_0 = -\omega t_0) \end{aligned}\right\}; [4]$$

es decir, que se juntan en el punto A dos ondas que se propagan en el mismo sentido, de igual período y de la misma amplitud, pero con diferencia de fases $\varphi_0 = -\omega t_0 = -\frac{2\pi}{T} t_0$.

La oscilación resultante es, según una fórmula muy conocida de trigonometría:

$$s = s_1 + s_2 = 2a \cdot \cos \omega \frac{t_0}{2} \cdot \cos \omega\left(t - \frac{z}{\mathbf{v}} - \frac{t_0}{2}\right).$$

Para

$$\cos \frac{\omega t_0}{2} = \pm 1$$

la oscilación resultante tiene doble amplitud que cada una de las oscilaciones incidentes. Esto sucede *para cualquier valor de z*, cuando el «retardo» de fase $-\varphi_0$

$$\left.\begin{aligned} &\text{expresado en ángulo es: } \omega t_0 = \pm 2n\pi \text{ con } n = 0, 1, 2, \ldots\ldots \\ &\qquad \text{es decir, un número entero de vueltas;} \\ &\text{expresado en tiempo es: } t_0 = \pm nT \text{ con } n = 0, 1, 2, \ldots\ldots \\ &\qquad \text{es decir, un número entero de períodos;} \\ &\text{expresado en distancias es: } \Lambda = \pm n\lambda \text{ con } n = 0, 1, 2, \ldots\ldots \\ &\qquad \text{es decir, un número entero de longitudes de onda.} \end{aligned}\right\} \qquad [5]$$

Para

$$\cos \frac{\omega t_0}{2} = 0$$

la oscilación resultante es nula, *cualquiera que sea el valor de z*. Cada punto A de la cuerda, bajo el efecto de las dos oscilaciones simultáneas canalizadas en O, permanece en reposo. Se tiene el caso más característico de *interferencia de dos ondas*.

Esto sucede cuando el retardo de fase entre las dos oscilaciones que se propagan a lo largo de la cuerda es:

$$\left.\begin{aligned} &\text{expresado en ángulo: } \omega t_0 = \pm (2n+1)\pi \text{ con } n = 0, 1, 2, \ldots\ldots \\ &\qquad \text{es decir, un número impar de medios giros;} \\ &\text{expresado en tiempo: } t_0 = \pm (2n+1)\frac{T}{2} \text{ con } n = 0, 1, 2, \ldots\ldots \\ &\qquad \text{es decir, un número impar de semiperíodos;} \\ &\text{expresado en distancia: } \Lambda = \pm (2n+1)\frac{\lambda}{2} \text{ con } n = 0, 1, 2, \ldots\ldots \\ &\qquad \text{es decir, un número impar de semilongitudes de onda.} \end{aligned}\right\} \qquad [6]$$

Diremos en el § 254 cómo se efectúa experimentalmente este caso de interferencia.

2.º *Ondas que se propagan en sentido opuesto.* Sea:

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= a\,\cos\,\omega\left(t-\frac{z}{v}\right)\\ s_2 &= a\,\cos\,\omega\left(t+\frac{z}{v}\right)\end{aligned}\right\}; \qquad [7]$$

es decir, llegan al punto A ondas que se propagan en sentidos opuestos, de igual período y de la misma amplitud. Para simplificar, se supone que en el punto O (fig. 505), correspondiente a $z=0$, se hallan las dos ondas en concordancia de fase.

Se tiene la oscilación resultante:

$$s = s_1 + s_2 = 2\,a\cdot\cos\,\frac{\omega z}{v}\cdot\cos\,\omega t. \qquad [8]$$

La amplitud de oscilación $2\,a\cdot\cos\,\frac{\omega z}{v}$ es función sinusoidal de z, y la fase inicial es nula para cualquier valor de z.

Para $\cos\,\frac{\omega z}{v}=\pm 1$, esto es, para $z=n\,\frac{\lambda}{2}$ $(n=0,\,1,\,2,\,3,\,.....)$, se tienen puntos A con la máxima amplitud de vibración $2\,a$ *(vientres)*; estos puntos están separados entre sí por una distancia igual a media longitud de onda.

Para $\cos\,\frac{\omega z}{v}=0$, esto es, para $z=(2\,n+1)\,\frac{\lambda}{4}$ $n=0,\,1,\,2,\,3,\,.....)$, se tiene $s=0$, es decir, puntos A siempre en reposo *(nodos)*; también los nodos se hallan uno de otro a una distancia igual a media longitud de onda.

En el intervalo entre dos nodos la amplitud de vibración aumenta con ley sinusoidal hasta llegar al máximo, lo que se alcanza en el vientre, y después disminuye hasta cero hasta llegar al nodo siguiente. Todos los puntos entre dos nodos vibran en concordancia de fase. Pero en el intervalo siguiente entre dos nodos, $\cos\,\frac{\omega z}{v}$ ha cambiado de signo y, por tanto, también ha cambiado de signo la amplitud de vibración $2a\cdot\cos\,\frac{\omega z}{v}$; es cómodo conservar para la amplitud el valor positivo e interpretar este cambio de signo como una variación brusca de fase, de valor π, de las vibraciones correspondientes a cada nodo.

Con mayor generalidad: en cada instante, es decir, para un valor determinado de t, la elongación s es función sinusoidal de z. Si se consideran vibraciones transversales, la cuerda toma en todo momento la forma de una sinusoide, de una onda; *la amplitud de*

esta sinusoide es función del tiempo, pero la sinusoide, es decir, la onda, permanece en reposo y no se propaga a lo largo de la cuerda. Por esto se dice que se trata de *ondas estacionarias.* Véase en el § 256 el experimento correspondiente.

§ **254. Tubo de Quincke.** Con el aparato de la figura 513 puede efectuarse un experimento para hacer visible la interferencia de ondas transversales que se propagan en el mismo sentido (§ 253, *b*], 1.º).

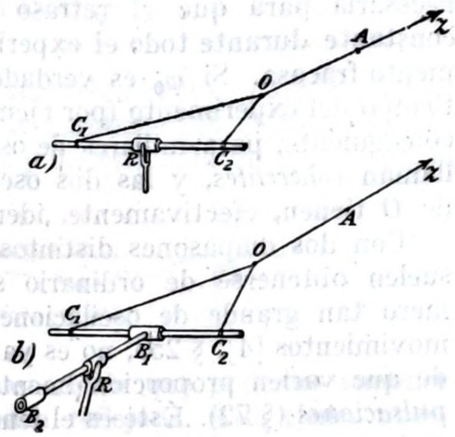


Fig. 513

$C_1\,C_2$ es una varilla que se hace oscilar como un columpio. $C_1\,O$, $C_2\,O$ y Oz son tres resortes en hélice o tres tubos de goma de la misma sección. Las ondas que proceden de C_1 y C_2 se superponen en el pedazo Oz; si $C_1\,O$ y $C_2\,O$ son iguales e igualmente tensos, las ondas que llegan a O se encuentran en oposición de fase. Si C_1R y C_2R son iguales, también lo son las amplitudes de las dos ondas, y Oz permanece en reposo.

Dispuesto el aparato como en la figura 513, *b*), la palanca B_1B_2 oscila como un columpio alrededor de R; se pueden obtener en C_1 y C_2 dos oscilaciones transversales iguales y en concordancia de fase, y en Oz prosigue una onda debida a la interferencia de las ondas que se han juntado en O y que proceden respectivamente de C_1 y C_2. El modelo es más bien grosero, y el resultado no es completamente satisfactorio.

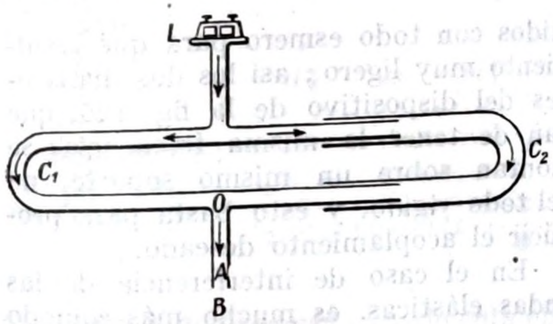


Fig. 514

Para ondas longitudinales y con resultados mucho más interesantes, se emplea el *tubo* de QUINCKE (fig. 514).

Las oscilaciones [4], § 253, se producen con un diapasón o, mucho mejor, con la membrana L de un receptor telefónico alimentado con corriente alterna de período T. El retardo de fase $-\varphi_0=\frac{2\pi}{T}\,t_0$ es debido a la diferencia de las longitudes l_1 y l_2 de las dos ramas C_1 y C_2; y en la parte OA se produce la superposición de las ondas, habiendo interferencia en cualquier punto de la misma.

Poniendo el oído en B, no se oye sonido cuando $|\,l_2-l_1\,|$ es igual a un número impar de semilongitudes de onda; se oye un sonido

de intensidad máxima cuando $|l_2 - l_1|$ es igual a un número entero de longitudes de onda λ.

Es necesario que las dos ondas que interfieren estén producidas por un manantial sonoro único, pues de otro modo sus amplitudes no podrían fácilmente obtenerse iguales, y, en especial, sus dos pulsaciones ω no podrían conservarse iguales con toda la aproximación necesaria para que el retraso de fase $-\varphi_0$ quede sensiblemente constante durante todo el experimento; si ello no sucede, el experimento fracasa. Si φ_0 es verdaderamente constante durante todo el tiempo del experimento (por ejemplo: durante algunos segundos; por consiguiente, para millares de oscilaciones) ambas ondas [4], § 253, se llaman *coherentes*, y las dos oscilaciones impuestas a las partículas de O tienen, efectivamente, idéntico período.

Con dos diapasones distintos, aunque aparentemente iguales, no suelen obtenerse de ordinario sonidos coherentes durante un número tan grande de oscilaciones; el retraso de fase entre los dos movimientos [4], § 253, no es ya constante, y en el caso más sencillo de que varíen proporcionalmente al tiempo, la interferencia origina *pulsaciones* (§ 72). Éste es el fenómeno sonoro que se percibe cuando se hacen sonar simultáneamente dos diapasones totalmente independientes y aparentemente iguales.

Para asegurar la coherencia dos ondas sonoras producidas por dos generadores sonoros, precisa un *acoplamiento* (§§ 153 y 154) entre los dos diapasones con el fin de que uno de ellos arrastre, por así decirlo, las vibraciones del otro, y establezca de este modo la identidad de la frecuencia de oscilación y, por tanto, la coherencia de las ondas emitidas.

En dos diapasones construídos con todo esmero para que resulten iguales, basta un acoplamiento muy ligero; así los dos diapasones del dispositivo de la fig. 124, que han de tener la misma frecuencia, se montan sobre un mismo soporte, no del todo rígido, y esto basta para producir el acoplamiento deseado.

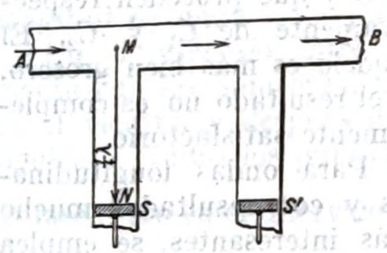


Fig. 515

En el caso de interferencia de las ondas elásticas, es mucho más cómodo efectuar la coherencia entre las dos ondas con el artificio de QUINCKE, es decir, lográndola a partir de un mismo manantial sonoro. Veremos que este artificio es indispensable cuando se trata de obtener ondas luminosas coherentes (véase tomo II).

Análogo al tubo de QUINCKE es el tubo de la figura 515. Cuando corriendo el émbolo S se hace $MN = \frac{1}{4}\lambda$, el sonido procedente de A llega a B fuertemente debilitado.

Conviene tener más de un tubo lateral S, S', ... para que la acción de interferencia se repita sucesivamente varias veces.

§ 255. Reflexión en las cuerdas y en los tubos. Indica la experiencia que al llegar una onda al final de una cuerda o de un tubo de aire, se refleja.

Efectivamente, en el extremo fijo Q $(z = l)$ de una cuerda (fig. 516) llegan las oscilaciones:

$$s_1 = a \cos \omega \left(t - \frac{l}{v}\right).$$

Pero el punto Q tiene que permanecer en reposo para cualquier valor de t; por tanto, la ligadura que mantiene fijo el punto Q impone a este punto una vibración igual y opuesta a la que se debe a la

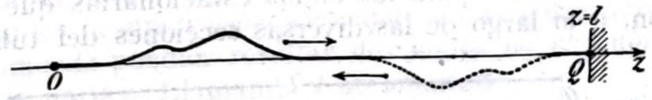


Fig. 516

onda incidente; luego, Q es origen de una onda que podemos suponer engendrada por la ligadura. Es la onda reflejada. Ésta tiene, pues, una ecuación del tipo:

$$s_2 = a' \cos \omega' \left(t + \frac{z}{v} - t_0\right).$$

Pero, para $z = l$ y para cualquier valor de t ha de ser

$$s_1 + s_2 = 0;$$

por tanto:

$$a' = a; \qquad \omega' = \omega; \qquad t_0 = \left(\frac{2l}{v} \pm \frac{1}{2} T\right).$$

Finalmente:

$$s_2 = a \cos \omega \left(t + \frac{z}{v} - \frac{2l}{v} \mp \frac{1}{2} T\right).$$

La onda que regresa experimenta en Q $(z = l)$ un retardo de fase brusco, de valor $\pm \pi$, equivalente en tiempo a $\pm \frac{1}{2} T$.

Si el extremo Q fuese libre, se tendría, en cambio:

$$s_2 = a \cos \omega \left(t + \frac{z}{v} - \frac{2l}{v}\right).$$

La onda regresa sin cambio de fase.

La experiencia efectuada con el aparato de la figura 505 puede servir para confirmar estos resultados.

En los dos casos (extremo Q fijo o libre), las ondas incidente y reflejada se encuentran en condiciones adecuadas para formar ondas estacionarias (§ 253, *b*], 2.º).

Si Q está fijo, hay un *nodo* en Q; y si Q está libre, hay un *vientre* en Q.

En el caso de un tubo lleno de gas (vibraciones longitudinales), todo lo anterior se aplica a los corrimientos s de cada capa respecto a su posición de equilibrio.

Se engendran y se propagan simultáneamente a lo largo del tubo compresiones y enrarecimientos proporcionales a $\frac{\partial s}{\partial z}$ (§ 249, [12]). En particular, se tiene para las ondas estacionarias que se forman por reflexión, a lo largo de las diversas secciones del tubo, una ley

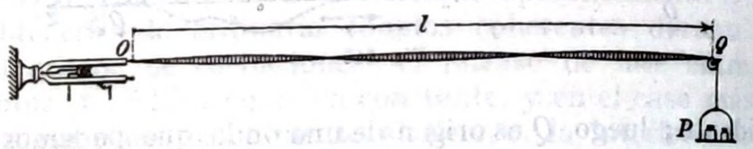


Fig. 517

de vibraciones $s = s(t, z)$ del tipo [8], § 253, y, por tanto, una onda de presión:

$$p - p_0 = -\varepsilon \cdot \frac{\partial s}{\partial z} = \frac{2a \cdot \omega \cdot \varepsilon}{\mathbf{v}} \cdot \operatorname{sen} \frac{\omega z}{\mathbf{v}} \cdot \cos \omega t.$$

Resultan también ondas estacionarias para las presiones $(p - p_0)$; pero en donde $\operatorname{sen} \frac{\omega z}{\mathbf{v}}$ es máximo, será nulo $\cos \frac{\omega z}{\mathbf{v}}$; y viceversa. *Los nodos de presión coinciden con los vientres de vibración; los vientres de presión coinciden con los nodos de vibración.*

En el extremo de un tubo cerrado hay un nodo de vibración y un vientre de presión; en el extremo de un tubo abierto ocurre inversamente.

§ 256. Obtención de ondas estacionarias. Resonancia. La formación de ondas estacionarias es perturbada por las múltiples reflexiones que, durante el experimento, sufren las ondas en O y en Q (fig. 516), es decir, en los dos extremos de la cuerda.

Estas reflexiones no perturban, sino que más bien exaltan el fenómeno, cuando las ondas diversas que se superponen al propagarse en el mismo sentido se hallan en concordancia de fase. Se tiene entonces *resonancia* entre la vibración forzada que se ha impuesto a O y el medio elástico OQ.

El experimento (MELDE) se efectúa con una cuerda OQ, uno de cuyos extremos Q está fijo y el otro O se pone en vibración, por ejemplo, mediante un diapasón electromagnético (fig. 517). Si la tensión

o la longitud de la cuerda están bien graduadas, la cuerda es asiento de un sistema de *ondas estacionarias*, siendo muy visibles a lo largo de ellas los *vientres* y los *nodos*. En O se tiene sensiblemente un nodo.

Las vibraciones transversales se encuentran netamente polarizadas en un plano.

Aplicando un dispositivo estroboscópico (§ 75), se ve que la cuerda tiene en cada instante la forma de una sinusoide que no se propaga a lo largo de la misma, sino que sólo varía de amplitud con el tiempo.

Se pueden comprobar así todas las propiedades de las ondas estacionarias.

Una cuerda dada, bajo una tensión determinada, sólo *resuena* para longitudes de onda especiales, que son aquellas para las cuales tanto Q como O puedan resultar dos nodos en el fenómeno de las ondas estacionarias. Llamando l la longitud de la cuerda, ésta debe ser igual a un número entero de semilongitudes de onda:

$$l = n \frac{\lambda}{2} \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \ldots\ldots \qquad [1]$$

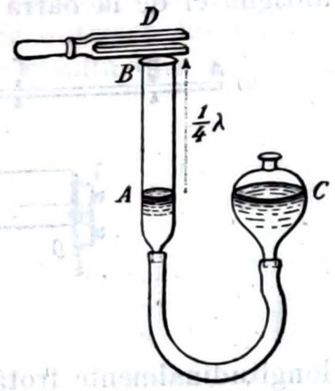


Fig. 518

La cuerda es un *resonador* para las longitudes de onda

$$\lambda = \frac{2l}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots.). \qquad [2]$$

Si $\mathbf{v}$ es la velocidad de propagación de la onda en la cuerda, se tiene también:

$$\lambda = \mathbf{v} \cdot T; \qquad \lambda = \mathbf{v} \cdot \frac{1}{\nu}.$$

Por tanto, se puede decir también que la cuerda resuena para los períodos

$$T = \frac{2l}{n \cdot \mathbf{v}} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots..) \qquad [3]$$

o, si se quiere, para las frecuencias:

$$\nu = \frac{n \cdot \mathbf{v}}{2l} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots..) \qquad [4]$$

En los tubos se tiene una resonancia análoga.

Puede efectuarse un sencillo experimento de resonancia con el dispositivo de la figura 518; se hace más o menos larga la columna

de aire BA (que termina en A con el agua, que hace de émbolo movible), bajando o levantando el depósito C. Para una longitud conveniente AB de la columna de aire resulta notablemente reforzado el sonido del diapasón D, colocado cerca de la boca del tubo B. Si, por ejemplo, el diapasón efectúa 250 vibraciones por segundo, se obtiene un máximo de sonido para $BA = 34$ cm, aproximadamente; A es un nodo de vibración y B un vientre, siendo $AB = \frac{1}{4}\lambda$ (1).

De un modo semejante funciona la caja de resonancia en que se montan los diapasones (fig. 542).

Completamente análogo es el siguiente experimento (*tubo de* KUNDT, fig. 519).

Se pone en vibración en D, por medio de un dispositivo cualquiera, el aire contenido en el tubo DG, siendo el procedimiento más antiguo el de la barra de vidrio o de acero AD, que se hace vibrar

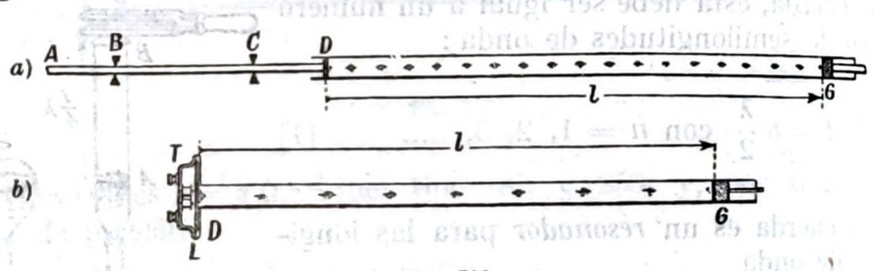


Fig. 519

longitudinalmente frotándola en BA con un paño empapado de alcohol; es mucho más conveniente utilizar las vibraciones de la lámina de un teléfono [fig. 519, *b*)].

Las ondas se propagan en el gas desde D hacia G, se reflejan y vuelven hasta D: si se gradúa convenientemente la longitud l, en el aire, entre G y D, se forman ondas estacionarias, obteniéndose resonancia entre la vibración imprimida y el aire del tubo DG.

Se regula la longitud l introduciendo más o menos el émbolo G en el tubo.

Si previamente se coloca en éste un poco de licopodio o de polvo de azúcar muy seco, al exaltarse las vibraciones por la formación de las ondas estacionarias *(resonancia)*, el licopodio se recoge en estratos equidistantes, que corresponden a los nodos de vibración. Se obtiene, desde luego, un nodo en G y otro en D. La distancia l debe contener un número entero de semilongitudes de onda:

$$l = n\frac{\lambda}{2} \quad \text{con} \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots \qquad [1]$$

(1) Esta relación no es exacta porque la influencia del aire exterior sobre las vibraciones del aire en AB produce el mismo efecto que si la longitud del tubo fuese un poco superior a la real.

Tanto en el experimento de MELDE como en el tubo de KUNDT se tiene:

$$\lambda = \mathbf{v}\cdot T,$$

siendo todavía válidas las fórmulas [3] y [4].

Ahora son fácilmente medibles l y n; por tanto, conocida una de las dos magnitudes $\mathbf{v}$ o T, se deduce la otra; por ejemplo, conocido T, se deduce $\mathbf{v}$, es decir, la velocidad de propagación de la onda elástica.

En el tubo de KUNDT se elimina la dificultad debida a la necesidad de conocer T, transformándolo, de aparato para la medida absoluta de una velocidad de propagación del sonido en un gas, en aparato para medidas relativas.

Se efectúa una primera determinación de l y de n mientras el tubo está lleno de aire, y se repite la experiencia llenando el tubo con otro gas, por ejemplo, anhídrido carbónico. Se obtienen los nuevos valores l' y n'. Con muy buena aproximación resulta que T no ha variado, y se tiene:

$$\frac{2l}{n} = \mathbf{v}\cdot T \qquad \frac{2l'}{n'} = V'\cdot T.$$

Por tanto, se deduce:

$$\frac{\mathbf{v}}{\mathbf{v}'} = \frac{l\cdot n'}{l'\cdot n}.$$

El tubo de KUNDT permite la determinación rápida y notablemente precisa de la velocidad de propagación del sonido en un gas cuando se conoce la velocidad de propagación en el aire.

Veremos más adelante cómo, mediante la medida de esta velocidad, se puede determinar la razón de los dos calores específicos de un gas a presión constante y a volumen constante.

Análogamente, cuando se conoce $\mathbf{v}$, se puede determinar por medio de la [4] la frecuencia $\nu = \frac{1}{T}$ del sonido excitante. Por ejemplo, conocida la velocidad de propagación del sonido en el aire, se determina fácilmente y con buena precisión la longitud de onda y, por tanto, la frecuencia.

Constituye esto un método absoluto, extremadamente simple e interesante, de medida de la frecuencia sonora. Se llega a esto porque se conoce $\mathbf{v}$, y el tubo de KUNDT permite medir la longitud de onda del sonido que se estudia.

Por tanto, también el tubo de QUINCKE (§ 254) puede servir para la medición absoluta de la frecuencia de un sonido, ya que también permite medir la longitud de onda.

§ 257. Propagación sobre una superficie o en el espacio. Ondas esféricas. Nos limitaremos al caso de un medio *isótropo*. La propagación de las vibraciones en una lámina o en una membrana elástica y la propagación de las ondas sonoras en el aire materializan este caso para un campo de dos y de tres dimensiones, respectivamente.

Conviene que la lámina o el espacio de aire sean muy extensos alrededor del centro productor de la onda para que no perturbe el fenómeno la reflexión de las ondas en los bordes o sobre las paredes. La máxima simetría se realiza imaginando que una esfera elástica hueca S_0, de centro O fijo (fig. 520), se halla sumergida en un medio isótropo elástico indefinido (por ejemplo, en el aire), y que la presión en el interior de la esfera varía periódicamente con el tiempo. La esfera se dilata y se contrae, pues, periódicamente; se denomina *esfera pulsante*. Todo punto A_0 de la esfera oscila a lo largo del radio OA_0 con una elongación $s_{r=r_0} = s_{r=r_0}(t)$ igual, en magnitud, para todos los puntos de la superficie S_0 de la esfera. Si esta oscilación es sinusoidal, se tiene:

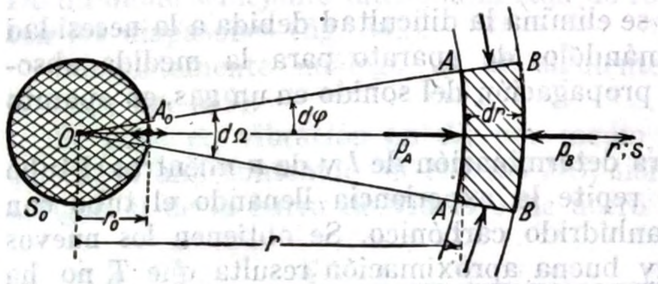


Fig. 520

$$s_{r=r_0} = a_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) = a_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right). \qquad [1]$$

Como en el caso de las figs. 507 y 508, la pared oscilante S_0 transmite sus oscilaciones al estrato esférico de aire que la rodea, y este estrato al estrato inmediato, y así sucesivamente, de manera que todo estrato AA, con centro en O, del medio elástico, repite la oscilación de S_0 con un retraso en tiempo tanto mayor cuanto mayor es la distancia $OA = r$. Se tiene una *propagación por ondas*.

Dada la simetría, se tienen *ondas longitudinales esféricas*, es decir, en todo punto A la elongación s, o sea el corrimiento de A respecto a su posición de reposo, se realiza a lo largo del radio OA y es igual para todos los puntos A, A, ... de toda superficie esférica centrada en O; por lo tanto, s solo es función de t y de r. Tenemos: $s = s(t, r)$.

Pero ahora el fenómeno es sensiblemente más complejo que el de la propagación de las ondas planas (§ 250). En efecto, la 2.ª ley de la dinámica está ahora aplicada a la porción $AABB$ (fig. 520) del medio elástico comprendido entre las dos esferas de radios r, $r + dr$ y centro O, y el cono circular de vértice O y abertura $d\varphi$, que contiene el ángulo sólido $d\Omega$; además, téngase en cuenta que las

oscilaciones de la capa de aire se producen a lo largo de $OA = Or$.

La masa de la porción de medio elástico considerado es $r^2 \cdot d\Omega \cdot dr \cdot \mu$, en donde μ es la masa específica del medio; la aceleración es $\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$; las fuerzas aplicadas son:

1.º, $+ p_A \cdot r^2 \cdot d\Omega$ sobre la cara AA;
2.º, $- p_B \cdot (r + dr)^2 \cdot d\Omega$ sobre la cara BB;
3.º, la componente paralela a Or de la resultante de las presiones sobre el borde lateral y circular AB, AB.

Llamando dR al radio del círculo AA, es $\pi \cdot (dR)^2 = r^2 \cdot d\Omega$; por lo tanto, se tiene: $dR = r \cdot \sqrt{\frac{d\Omega}{\pi}}$. El área del borde lateral es $2\pi\, dR \cdot dr$; la presión total, salvo un infinitésimo de orden superior, es $2\pi\, dR \cdot dr \cdot p_A$. Por consiguiente, la componente activa a lo largo de Or es $2\pi \cdot dR \cdot dr \cdot p_A \cdot \operatorname{sen} d\varphi$; se puede poner $\operatorname{sen} d\varphi = \frac{dR}{r}$. En definitiva, la fuerza 3º es:

$$2r \cdot dr \cdot p_A d\Omega.$$

Por consiguiente, $p_B = p_A + \frac{\partial p}{\partial r} dr$. De manera que la segunda ley de la dinámica se escribe:

$$\mu \cdot dr \cdot r^2 \cdot d\Omega \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = p_A \cdot r^2 \cdot d\Omega - \left(p_A + \frac{\partial p}{\partial r} dr\right)(r + dr)^2 \cdot d\Omega + 2p_A \cdot r \cdot d\Omega.$$

Desarrollando, prescindiendo de infinitésimos de orden superior, y reduciendo, se obtiene:

$$\mu \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial r}. \qquad [2]$$

Como en § 249, 2.º, se tiene $-\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{\partial (p - p_0)}{\partial r}$, y también ahora se calcula $p - p_0$ mediante la [11], § 249. Pero en nuestro caso, siempre con la misma aproximación, es:

$$\Delta v = r^2 \cdot d\Omega \cdot dr; \qquad s_B = s_A + \frac{\partial s}{\partial r} dr;$$

$$d\Delta v = (r + s_A)^2 \cdot d\Omega \cdot (dr + s_B - s_A) - r^2 \cdot d\Omega \cdot dr$$

$$= 2rs \cdot d\Omega \cdot dr + r^2 \frac{\partial s}{\partial r} \cdot dr \cdot d\Omega.$$

Luego, resulta:

$$p - p_0 = -\varepsilon \frac{d\,\Delta v}{\Delta v} = -\varepsilon \left(2\frac{s}{r} + \frac{\partial s}{\partial r}\right). \qquad [3]$$

Y, en fin, haciendo

$$\frac{\varepsilon}{\mu} = \mathbf{v}^2 \qquad [4]$$

la ley del movimiento [2] viene expresada por

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \mathbf{v}^2 \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{2s}{r} + \frac{\partial s}{\partial r}\right), \qquad [5]$$

que es la *ecuación*, con derivadas parciales, *de la propagación de las ondas esféricas*, del mismo modo que la [2], § 250, es la ecuación de la propagación de las ondas planas.

Luego, s, a lo largo de cada rayo Or, es una función de t y de r tal que quede satisfecha la [5]; $s = s\,(t, r)$ debe ser la solución de la ecuación diferencial [5].

La integral general de la [5], limitada a ondas que se propaguen en el sentido $O \longrightarrow r$, es decir, a ondas emitidas por la esfera pulsante, es:

$$s = \frac{1}{r^2} f\left(t - \frac{r}{\mathbf{v}}\right) + \frac{1}{r \cdot \mathbf{v}} \frac{\partial f\left(t - \frac{r}{\mathbf{v}}\right)}{\partial\left(t - \frac{r}{\mathbf{v}}\right)}; \qquad [6]$$

y la velocidad de propagación es:

$$\mathbf{v} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}};$$

f es una función arbitraria del parámetro $t - \frac{r}{\mathbf{v}}$.

Si se pone $f = k \cdot \operatorname{sen}\ \omega\left(t - \frac{r}{\mathbf{v}}\right)$, con k y ω constantes respecto al tiempo, la onda esférica es sinusoidal, y la [6] da:

la *onda de elongación:*

$$s = \frac{k}{r^2} \operatorname{sen}\ \omega\left(t - \frac{r}{\mathbf{v}}\right) + \frac{k\,\omega}{r \cdot \mathbf{v}} \cos\ \omega\left(t - \frac{r}{\mathbf{v}}\right) \qquad [7]$$

la *onda de velocidad:*

$$u = \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{k \cdot \omega}{r^2} \cdot \cos\ \omega\left(t - \frac{r}{\mathbf{v}}\right) - \frac{k \cdot \omega^2}{r \cdot \mathbf{v}} \operatorname{sen}\ \omega\left(t - \frac{r}{\mathbf{v}}\right), \qquad [8]$$

y, recordando la [3],

la *onda de presión:*

$$\Delta p = p - p_0 = -\frac{\varepsilon}{r} \frac{k \cdot \omega^2}{\mathbf{v}^2} \operatorname{sen}\ \omega\left(t - \frac{r}{\mathbf{v}}\right). \qquad [9]$$

La onda de elongación es, pues, la superposición de dos ondas longitudinales, que se propagan con la misma velocidad, que están «en cuadratura» $\left(\text{diferencia de la fase } \frac{\pi}{2}\right)$, una de las cuales disminuye en amplitud como $\frac{1}{r^2}$, mientras la amplitud de la otra decrece como $\frac{1}{r}$.

Los puntos que en un mismo instante, que puede ser cualquiera, están en concordancia de fase, son aquellos para los cuales la fase $\omega\left(t - \frac{r}{\mathbf{v}}\right)$ tiene el mismo valor; para ellos es, pues, $r = \text{const.}$ Toda superficie esférica centrada en O es lugar geométrico de puntos que vibran en concordancia de fase; este lugar geométrico se denomina *superficie de onda* (1). En el caso de las ondas esféricas, las superficies de onda son esféricas y concéntricas. En un instante dado, dos de dichas superficies, de radios r y r', vibran con una diferencia de fase:

$$\Delta \varphi = \omega\left(t - \frac{r'}{\mathbf{v}}\right) - \omega\left(t - \frac{r}{\mathbf{v}}\right) = -\frac{2\pi}{T\mathbf{v}}(r' - r) \qquad [10]$$

si esta diferencia vale 2π, la distancia $r' - r$ entre las dos superficies esféricas se denomina *longitud de onda* λ; como en § 249, se tiene:

$$\lambda = T\mathbf{v}. \qquad [11]$$

Haciendo lo mismo que en § 66, *a*], se encontraría que la [7] puede escribirse

$$s = \frac{k}{r}\sqrt{\frac{\omega^2}{\mathbf{v}^2} + \frac{1}{r^2}} \cdot \cos\left\{\omega\left(t - \frac{r}{\mathbf{v}}\right) - \Phi\right\}, \qquad [12]$$

en donde la fase Φ, constante respecto al tiempo t, viene dada por

$$tg\,\Phi = \frac{\mathbf{v}}{\omega r} = \frac{T\mathbf{v}}{2\pi r} = \frac{\lambda}{2\pi r}. \qquad [13]$$

(1) Tal como se define aquí, el concepto de «longitud de onda» se limita al caso de ondas sinusoidales.

En particular, para $r = r_0$, la [12] debe dar el estado de vibración de la pared pulsante y, por tanto, ha de coincidir con la [1]. Es decir, determina a_0 y φ_0.

Ha de ser:

$$a_0 = \frac{k}{r_0}\sqrt{\frac{\omega^2}{\mathbf{v}^2} + \frac{1}{r_0^2}} \qquad [14]$$

valor arbitrario, porque k es arbitrario; y

$$-\omega\frac{r_0}{\mathbf{v}} - \Phi_{r=r0} = \varphi_0 \text{; o sea } -\frac{2\pi r_0}{\lambda} - \text{arc tg}\frac{\lambda}{2\pi r_0} = \varphi_0, \qquad [15]$$

valor no arbitrario, porque tanto $-\omega\frac{r_0}{\mathbf{v}}$ como $\Phi_{r=r0}$ son valores determinados.

La onda [12], resultante de las dos ondas [7], se debilita y cambia de fase Φ al aumentar la distancia de r al punto O. Pero, apenas r es igual a varias veces λ, resulta Φ sensiblemente nulo, y la amplitud coincide prácticamente con $\frac{k\omega}{r\mathbf{v}}$, ya que $\frac{1}{r^2}$ resulta despreciable en comparación con $\frac{\omega^2}{\mathbf{v}^2} = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2$. De las dos ondas [7] queda, como única onda sensible, la

$$s = \frac{k\omega}{r\mathbf{v}}\cdot\cos\omega\left(t - \frac{r}{\mathbf{v}}\right) \qquad [16]$$

de amplitud $a = \frac{k\omega}{r\mathbf{v}}$ inversamente proporcional a r.

El cálculo de la energía emitida se hace por un procedimiento análogo al seguido en § 251. Se tiene todavía:

$$E = \mathfrak{w}_{S=1} = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau (p - p_0)\frac{\partial s}{\partial t}\cdot dt. \qquad [17]$$

Pero ahora $(p - p_0)$ viene dado por la [9] y $\frac{\partial s}{\partial t}$ por la [8]; de modo que la integral [17] se desdobla en dos términos, de los cuales el que contiene el producto $\cos\omega\left(t - \frac{r}{\mathbf{v}}\right)\cdot\text{sen}\,\omega\left(t - \frac{r}{\mathbf{v}}\right)$ es sensiblemente nulo. Es decir: la componente de $\frac{\partial s}{\partial t}$, que está «en cuadratura» con $(p = p_0)$, supone un trabajo medio nulo.

Puede decirse que la propagación de energía a lo largo del radio Or se debe únicamente a la onda [16]; dicha propagación define la *intensidad de la onda* mediante la expresión:

$$E = \mathfrak{w}_{S=1} = \frac{k\omega^2}{r\mathbf{v}}\cdot\frac{\varepsilon}{r}\cdot\frac{k\omega^2}{\mathbf{v}^2}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \text{sen}^2\,\omega\left(t - \frac{r}{\mathbf{v}}\right)\cdot dt = \qquad [18]$$

$$= \frac{1}{2}a^2\cdot\frac{\varepsilon}{\mathbf{v}}\omega^2 = \frac{1}{2}a^2\cdot\omega^2\cdot\mu\cdot\mathbf{v}$$

que coincide con la [2], § 251. Pero ahora $a^2 = \left(\frac{k\omega}{r\mathbf{v}}\right)^2$ es inversamente proporcional a r^2, de manera que el flujo de energía que atraviesa una esfera de centro O y radio r es:

$$4\pi r^2\cdot E = \text{constante respecto a } r.$$

La densidad E de energía emitida es inversamente proporcional a r^2; en cambio, la amplitud de oscilación a es inversamente proporcional a r, como se ha visto ya en § 251.

Volviendo a la [17] y teniendo en cuenta la [12], la intensidad de la onda, con los símbolos empleados en § 251, resulta ser

$$E = \mathfrak{w}_{S=1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)_0\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(p - p_0)_0\cdot\cos\Phi = (p - p_0)_{ef}\left(\frac{\partial s}{\partial l}\right)_{ef}\cdot\cos\Phi \qquad [19]$$

análoga a la [11], § 251, y en la cual es aun mejor la analogía con la potencia de una corriente alterna, porque, en lugar de la [9], § 251, la expresión de esta potencia eléctrica en un conductor con autoinducción es más exactamente:

$$\mathfrak{w} = \frac{(V_1 - V_2)_0}{\sqrt{2}}\cdot\frac{i_0}{\sqrt{2}}\cdot\cos\Phi = (V_1 - V_2)_{ef}\cdot i_{ef}\cdot\cos\Phi \qquad [20]$$

siendo i_{ef} y $(V_1 - V_2)_{ef}$ los valores eficaces de la intensidad de corriente y de la diferencia de potencial, respectivamente; Φ es la diferencia de fase entre estas dos magnitudes.

En particular, la [19] es aplicable a la superficie S_0 de la esfera pulsante y, por lo tanto, a la energía por ésta emitida.

La diferencia entre la [19] (ondas esféricas) y la [11], § 251 (ondas planas), sólo es sensible mientras cos Φ no sea aproximadamente igual a la unidad; basta considerar la onda esférica a una distancia r del manantial igual a varias longitudes de onda para que sea sensiblemente tg $\Phi = 0$ y, por tanto, cos $\Phi = 1$.

Las ondas sonoras engendradas en el aire libre, o en el agua de un lago o del mar, por ejemplo, cuando se golpea una campana sumergida, son ondas longitudinales aproximadamente esféricas.

Pero el método más cómodo para observar cualitativamente los fenómenos de la propagación consiste en producir ondas en la superficie de un líquido en reposo. Se tienen así ondas transversales que se propagan sobre una superficie plana.

Puede todavía imaginarse que se trata de una superficie elástica: la fuerza de gravedad y la tensión superficial cooperan a la constitución de la fuerza seudoelástica que reclama la superficie hacia la forma plana de equilibrio.

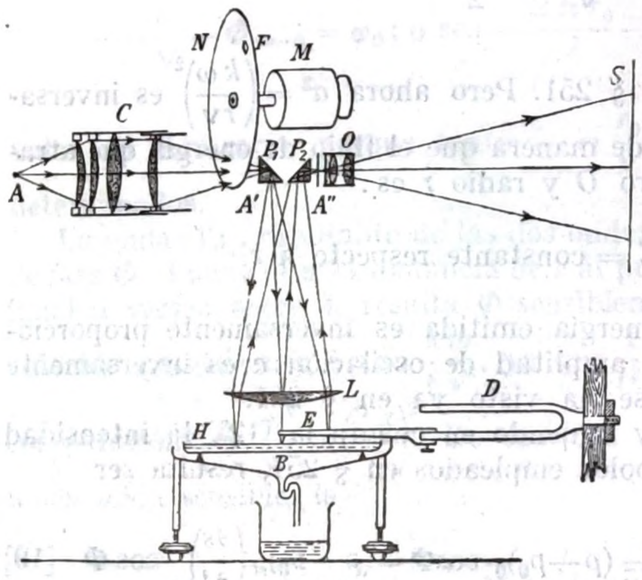


Fig. 521

Una piedrecita o una gota que caen en el agua de un estanque tranquilo permiten observar la propagación por ondas, notándose cómo disminuye la amplitud de la onda al aumentar el círculo, que es el análogo, en el plano, a la superficie de onda; se observa cómo se refleja la onda en un obstáculo, etc.

La velocidad de propagación de dichas ondas es de 20 a 30 $\frac{cm}{seg}$, según el líquido, de suerte que los experimentos efectuados en una clase con el agua de una jofaina, se desarrollan demasiado rápidamente para que puedan observarse con comodidad. Además, se producen después de un tiempo brevísimo las ondas reflejadas en las paredes de la jofaina, que se superponen a las ondas primitivas e impiden una observación fácil. Se elimina este segundo inconveniente empleando un depósito circular de muy poco fondo para que contenga una capa de líquido de pocos milímetros de profundidad; las ondas superficiales son amortiguadas rápidamente por rozamiento en el fondo, y las ondas reflejadas por las paredes tienen una intensidad despreciable. Para observar más cómodamente la propagación de las ondas, conviene recurrir a un dispositivo estroboscópico que disminuye (aparentemente) la velocidad de propagación.

El *ondoscopio de* CHARRON (fig. 521) produce la excitación de la superficie del líquido, en el depósito circular H, mediante una laminita vibrante E unida a una de las ramas de un diapasón D (de unas 40 vibraciones por segundo) y cuya punta B se sumerge en el líquido.

Con el objetivo O se proyecta en la pantalla S la imagen de la superficie líquida. El foco luminoso A, el condensador C, los prismas P_1, P_2, la lente L, y más especialmente el diafragma A'', permiten obtener sobre S una imagen vertical de las ondas de la superficie del líquido (fig. 522), cuyo sombreado corresponde a las crestas y valles de las ondas, que quedan así muy visibles.

Puede definirse la longitud de onda λ, de un modo aproximado, como la distancia entre las crestas de dos ondas sucesivas.

N es el disco estroboscópico; M, el motor de velocidad graduable, que permite disminuir (aparentemente) la velocidad de propagación de las ondas mediante el empleo de una frecuencia de rotación de N ligeramente inferior a la frecuencia de D, y, por fin, hacerlas aparecer inmóviles, utilizando una frecuencia de N igual a la frecuencia de D, e incluso ver marchar las ondas en sentido contrario, mediante una frecuencia de N ligeramente superior a la de D.

Fig. 522

Fig. 523

Pero si se obtienen en el líquido ondas estacionarias (como veremos), aparecerán las ondas en reposo y se podrán observar sin necesidad del disco estroboscópico.

§ 258. **Principio de Huygens-Fresnel. Difracción.** Limitémonos al caso de ondas en la superficie de un líquido.

Partimos de los dos siguientes experimentos fundamentales:

1.º Detrás de una pantalla agujereada no se tiene propagación rectilínea de las ondas: el agujero es manantial de nuevas ondas completas (fig. 523).

2.º Detrás de una pantalla pequeña se recompletan las ondas como si la pantalla no hubiese interceptado una porción de las mismas (fig. 524): la propagación no es rectilínea.

De acuerdo con el primero de estos dos experimentos, se imagina que *cada elemento M de una superficie de onda* Σ (fig. 525) *es manantial de ondas elementales completas, de amplitud decreciente al*

aumentar ϑ hasta anularse para $\vartheta = \pi$. Las ondas que parten de los diferentes puntos de Σ son coherentes entre sí.

Una superficie de onda Σ' que sucede a otra Σ está constituida por la envolvente de las ondas elementales emitidas por los varios puntos de Σ.

La vibración efectuada por un punto A como resultado de las ondas emitidas desde O, puede suponerse debida a la interferencia en A de todas las vibraciones que llegan allí, procedentes de todos los elementos de la superficie de Σ.

Fig. 524

Estas suposiciones constituyen el *principio de* HUYGENS - FRESNEL.

Más exactamente: este principio establece que el estado de vibración de A se puede determinar a partir del estado de vibración de todos los puntos de una superficie cerrada que separa A del manantial O; por lo tanto, se trata de una superficie que circunda a O (como, por ejemplo, la superficie de onda Σ) o bien que circunda a A.

Según el principio de HUYGENS - FRENNEL, se desvanecen la propagación según un rayo y el concepto de rayo. La propagación rectilínea y el rayo toman otro significado en la propagación por ondas.

En óptica volveremos sobre este asunto. Aquí diremos solamente que, en un medio isótropo, llamaremos *rayos* a las trayectorias ortogonales a las superficies de onda.

Así, en el caso de las ondas esféricas, los radios de las esferas concéntricas que constituyen las superficies de onda, son los rayos de la propagación por ondas; en este caso se dice que la propagación es «rectilínea», porque los rayos son rectilíneos. Análogamente, si la onda Σ (fig. 525) es plana, indefinida y de igual intensidad en todos sus puntos, las ondas envolventes sucesivas Σ', en un medio isótropo, son también planas y paralelas a Σ; los «rayos» son las normales a tales ondas planas. También ahora hay propagación rectilínea.

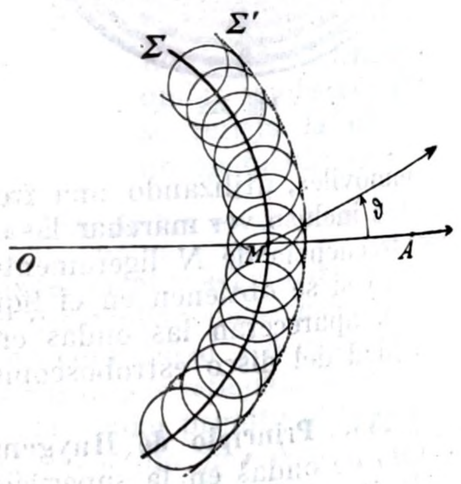


Fig. 525

Se llaman fenómenos de *difracción* los que tienen que explicarse mediante el principio de HUYGENS - FRESNEL.

Los fenómenos 1.º y 2.º son los procesos más sencillos de difracción y pueden observarse fácilmente en el caso de la propagación de vibraciones sonoras en el aire.

En general, los experimentos más complejos de difracción se efectúan mediante las ondas luminosas porque éstas se reciben directamente en el ojo o en la placa fotográfica, mientras que no hay actualmente ningún receptor de onda sonora que pueda utilizarse con tanta comodidad como dichos receptores ópticos.

Sólo describiremos un ejemplo, referente a ondas en la superficie de un líquido. Sobre el obstáculo agujereado D (fig. 526) inciden perpendicularmente ondas planas, de longitud de onda λ. Sea $a = 3\lambda$ la anchura AB del agujero.

De todos los elementos da de la superficie de onda incidente que

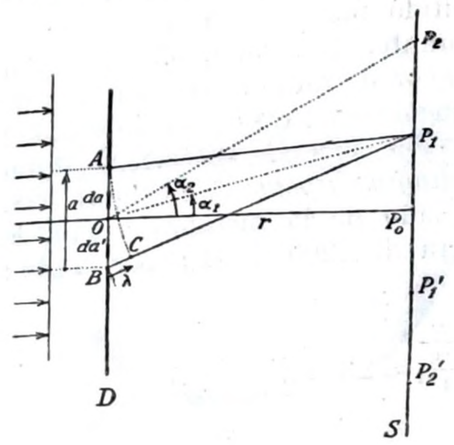


Fig. 526

Fig. 527

ocupa el agujero parten ondas elementales coherentes entre sí.

En el eje OP_0 del orificio AB, en P_0 ($OP_0 = r \gg \lambda$), las ondas elementales llegan coherentes porque sensiblemente se cumple $P_0O = P_0A = P_0B = \ldots\ldots = r$. En P_0 se tiene interferencia de ondas elementales en concordancia de fase: la oscilación resultante es muy enérgica. Pero en P_1, suponiendo que sea $P_1B - P_1A = \lambda$ (para $a = 3\lambda$ y $OP_0 \gg \lambda$, es entonces $\widehat{P_0OP_1} = \alpha_1 \approx 19{,}5^\circ$), las ondas elementales que llegan de OB deben recorrer, por término medio, un espacio mayor en $\frac{\lambda}{2}$ que las ondas que llegan de OA; cada onda elemental, procedente de un elemento da, es anulada por interferencia por la onda elemental que procede del elemento correspondiente da'. En P_1, la resultante de las acciones elementales es sensiblemente nula.

Para un punto P_2, tal que $P_2B - P_2A$ sea $\frac{3}{2}\lambda$, se vería análogamente que, dividiendo AB en tres partes, las ondas elementales que llegan a P_2 de dos partes contiguas, de entre estas tres, se eliminan por interferencia y queda activo un tercio del orificio AB. Se tiene entonces $\widehat{P_0OP_2} = \alpha_2 \approx 30^\circ$.

Para un punto P_3, tal que sea $P_3B - P_3A = 2\lambda$, dividiendo AB en cuatro partes, se deduce que las acciones de estas partes sobre P_3

se neutralizan dos a dos. Se tiene entonces $\widehat{P_0 O P_3} = \alpha_3 \approx 41{,}5°$.

En conclusión, la onda resultante que sale de AB no es igualmente intensa en todas direcciones; he aquí, en la figura 527, la fotografía de las ondas en la superficie del mercurio, obtenida con el ondoscopio Charron, en las condiciones de la figura 526.

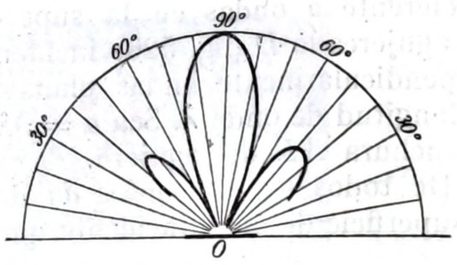
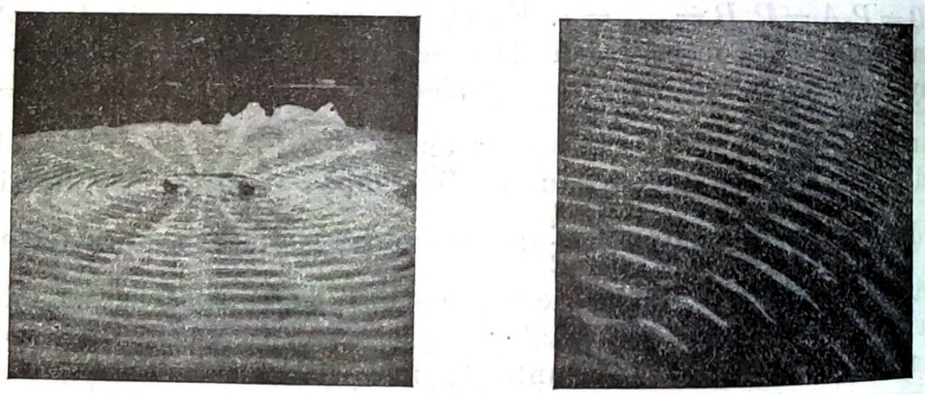


Fig. 528

Por la misma causa, el sonido emitido por una gran membrana vibrante, cuadrada, de un gran altavoz de radiodifusión, a 3 m de la membrana, resultó de intensidad variable con la dirección, según el *diagrama polar* de la figura 528. El lado de la membrana era de 53 cm, y la frecuencia del sonido era de 1200 hertz; por tanto:

$$\lambda = \frac{\mathbf{v}}{\nu} = \frac{34\,000 \frac{\text{cm}}{\text{seg}}}{1\,200 \frac{1}{\text{seg}}} \approx 28 \text{ cm}.$$

En casos más complicados, un punto A puede recibir las ondas procedentes de varios manantiales sonoros. La vibración resultante viene siempre regida por el principio de HUYGENS - FRESNEL, es decir, es debida a la interferencia de las ondas elementales que se


a) *b)*
Fig. 529

superponen en A. Se obtienen bonitos efectos, debidos a alternarse sectores en reposo con sectores recorridos por las ondas, por ejemplo mediante la interferencia de las ondas producidas en una superficie líquida por las dos ramas de un mismo diapasón [fig. 529, *a*) y *b*)].

En la figura 530 se ven las ondas estacionarias debidas a la interferencia entre las ondas incidentes y las reflejadas (§ 255).

§ **259. Reflexión, refracción y formación de imágenes.** Con el aparato de la figura 521 pueden multiplicarse a voluntad los experimentos; en particular, se logra mostrar la reflexión de las ondas sobre una pared (plana, por ejemplo, fig. 531) y la refracción de las ondas al pasar del agua al mercurio [fig. 532, *a*)].

En la figura 532, *b*), se ha dibujado con puntos el camino de tres

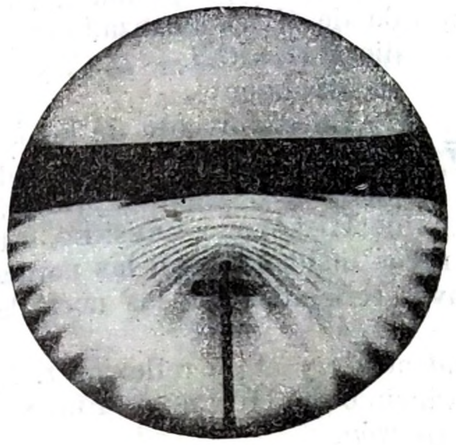


Fig. 530

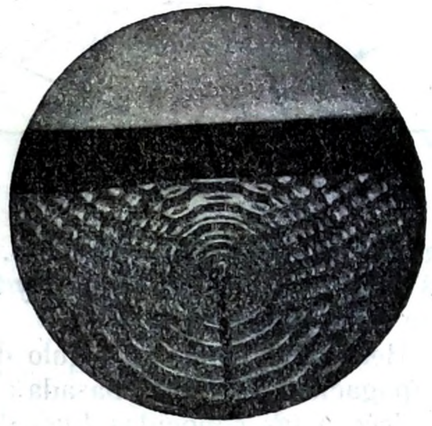
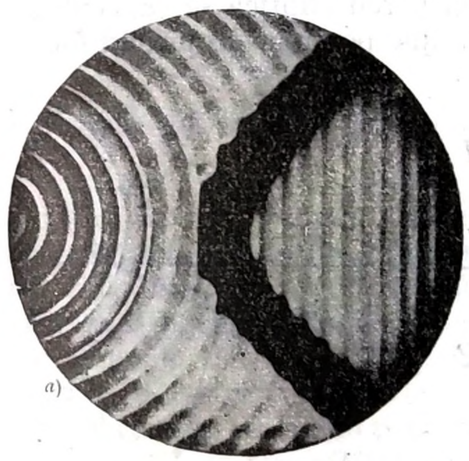


Fig. 531


a)

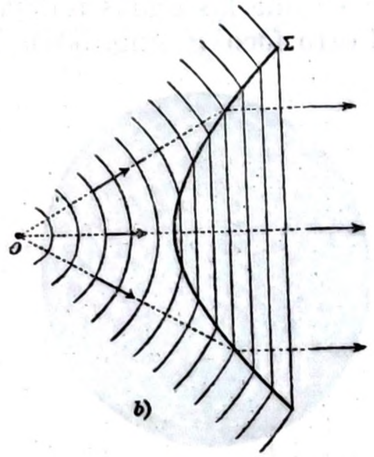


Fig. 532

rayos correspondientes a las ondas de la figura 532, *a*), para que aparezca con mayor evidencia la existencia de la refracción.

El caso de la reflexión y de la refracción de las ondas planas es particularmente expresivo.

Si el consabido manantial puntiforme de ondas está suficientemente lejos, cada *superficie* de onda (se dice brevemente «cada onda») puede considerarse como si fuese plana en una extensión pequeña respecto a la distancia del manantial, pero grande respecto a la longitud de onda.

a] **Reflexión.** Al chocar la onda incidente contra el plano de reflexión MN (fig. 533) origina en el punto de incidencia una onda (esférica) reflejada; los puntos que van desde A a B son sucesivamente origen de ondas elementales.

Cuando es excitado B, la onda elemental reflejada que partió de A ha alcanzado ya el radio $AX = OB$; la onda reflejada de C ha alcanzado el radio $CY = OB - O'C$, y así sucesivamente.

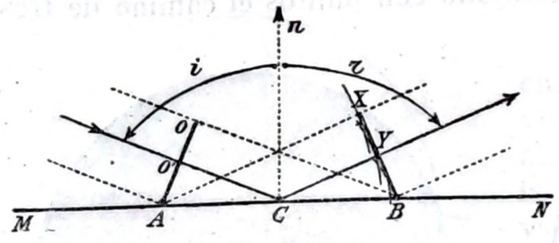


Fig. 533

La envolvente de las ondas elementales es la onda plana BX. Según el principio de HUYGENS - FRESNEL, esta envolvente es la onda reflejada. Los rayos incidentes son las normales a la onda incidente OA, y los rayos reflejados son las normales a la onda reflejada XB.

Resultan iguales el ángulo de incidencia i y el de reflexión r. La propagación por ondas basada en el principio de HUYGENS - FRESNEL obedece a las conocidas *leyes de la reflexión*.

Si el recipiente H de la figura 521 tiene forma elíptica y se producen en el líquido ondas superficiales, excitándolo en el foco F, se ve que las ondas reflejadas por la pared elíptica se concentran en el otro foco F' (fig. 534). Es sabido que por una propiedad focal de

Fig. 534

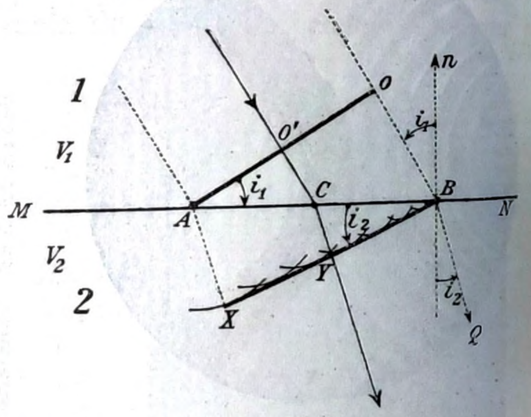


Fig. 535

la elipse, los rayos que salen de F y se reflejan en la elipse, según las leyes de la reflexión, se concentran todos en F'.

b] **Refracción.** Análogamente sucede para la *refracción* desde un medio *1* a un medio *2* (fig. 535).

Cuando el extremo O de la onda incidente OA ha llegado a B, la onda elemental emitida por A en el segundo medio llega ya a una distancia AX tal que se cumple:

$$\frac{OB}{AX} = \frac{\mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_2}, \qquad [1]$$

siendo $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ las velocidades de propagación de las ondas en los dos medios. Lo mismo sucede para cualquier otro punto C: el radio CY, en el instante en que es excitado B, satisface a la relación

$$\frac{OB - O'C}{CY} = \frac{\mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_2}.$$

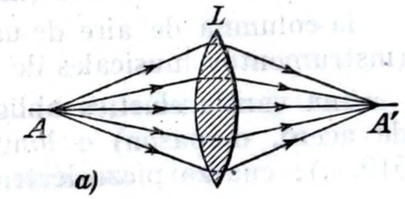
Luego la envolvente de las ondas elementales que se propagan en el medio *2* es el plano XB; considerando los rayos, es decir, las normales a la onda incidente OA y a la onda refractada BX, se tiene:

$$AB = \frac{OB}{\operatorname{sen} i_1} = \frac{AX}{\operatorname{sen} i_2},$$

o sea, según la [1]:

$$\frac{\operatorname{sen} i_1}{\operatorname{sen} i_2} = \frac{\mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_2} = n_{12} = \text{constante al variar } i_1. \qquad [2]$$

La propagación por ondas, según el principio de HUYGENS - FRESNEL, obedece a las conocidas *leyes de la refracción*. Además, para ondas que marchen en sentido inverso, esto es, desde el segundo medio hacia el primero, se tiene:



$$n_{21} = \frac{\mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_1} = \frac{1}{n_{12}}.$$

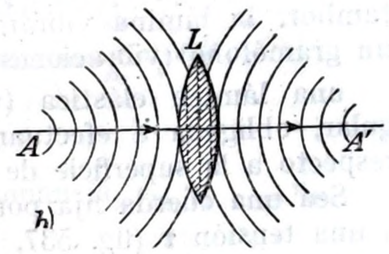


Fig. 536

El índice de refracción n_{21} es el valor recíproco del índice de refracción n_{12}. Una onda BX que se propague desde el medio *2* hacia el medio *1*, se refracta originando la onda AO; la onda, obligada a volver hacia la derecha, rehace el camino recorrido primeramente. Se dice que hay *reversibilidad* en el camino de la onda; el rayo incidente OB da el rayo refractado BQ, y el rayo incidente QB da el rayo refractado BO.

c] **Formación de imágenes.** Limitémonos al caso más interesante, que es el de imágenes obtenidas por refracción.

Se deduce en óptica geométrica, a partir de las leyes de refracción [2] aplicadas al caso de una superficie refringente esférica, o, más comúnmente, al caso de una lente delgada, que entre ciertos límites cada punto luminoso A [fig. 536, *a*] origina por refracción un punto imagen A'; esto es, que todos *los rayos que salen de A pasan por A' después de la refracción*.

Con el principio de HUYGENS - FRESNEL, puesto que es válida la [2], puede deducirse lo mismo; pero, limitándonos al caso más simple de una imagen *real*, debe decirse que las *ondas que salen de un punto A* [fig. 536, *b*)] *después de refractarse a través de la lente, se concentran, en un punto imagen*. Para un observador situado en A', las ondas incidentes aparecen esféricas y convexas, con centro en A'; en cambio, las ondas emergentes de L le parecen esféricas y cóncavas, con centro en A'.

Así resulta también evidente que la energía que parte de A se concentra en A', y, dada la definición de superficie de onda, emplea el mismo tiempo en llegar a A', cualquiera que sea el camino seguido.

§ 260. Vibraciones libres de los cuerpos elásticos. Si el medio elástico no es indefinido, las ondas producidas en un punto del mismo se propagan hasta los límites del medio, se reflejan allí, y las ondas reflejadas se superponen a las nuevas ondas incidentes, interfiriendo con ellas.

El medio elástico puede ser:

una cuerda flexible, tendida entre dos extremos y obligada a vibrar transversalmente (instrumentos musicales de cuerda);

la columna de aire de un tubo, cerrado o abierto en los extremos (instrumentos musicales de viento);

una varilla elástica obligada a vibrar transversalmente (lengüeta de acero, diapasón) o longitudinalmente [varilla AD de la figura 519, *a*); cuarzo piezoeléctrico, §§ 261, *f*) 264, 2.º, y tomo II; etc.];

una membrana tensa y fija por sus bordes, como la piel de un tambor, la lámina vibrante de un teléfono, de un micrófono, de un gramófono (vibraciones transversales);

una lámina elástica (vidrio, acero) de forma más o menos regular, obligada a efectuar, por ejemplo, vibraciones transversales respecto a la superficie de la lámina.

Sea una cuerda fija por sus extremos, de longitud l y sometida a una tensión τ (fig. 537, *sonómetro*).

Se excita la cuerda dándole un golpe con un martillito y se la deja libre bajo la acción exclusiva de las fuerzas elásticas. Al contrario de lo que se ha visto en el § 256, en donde las oscilaciones comunicadas al medio elástico eran *forzadas* y la resultante de la interferencia sólo era notable en los casos de *resonancia*, ahora las vibraciones de la cuerda después del golpe son *libres* (§ 148).

Puede imaginarse que esta excitación irregular es origen de ondas cuyas longitudes de onda resultan muy desiguales. Pero después de breves instantes, por la superposición desordenada debida a las múltiples reflexiones en los extremos de la cuerda, se destruyen todas las vibraciones salvo aquellas para las cuales está la cuerda en resonancia. Quedan en la cuerda ondas estacionarias cuyas longitudes de onda λ_1, λ_2..... λ_n..... vienen dadas por la [2], § 256:

$$\lambda_1 = \frac{1}{1} 2l; \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2} 2l; \qquad \lambda_3 = \frac{1}{3} 2l; \ \ldots\ldots; \qquad \lambda_n = \frac{1}{n} 2l \ldots\ldots$$

La forma que tomaría la cuerda vibrante si fuese solamente asiento de la primera, o de la segunda, o de la tercera ..... de estas ondas, viene indicada en la figura 538.

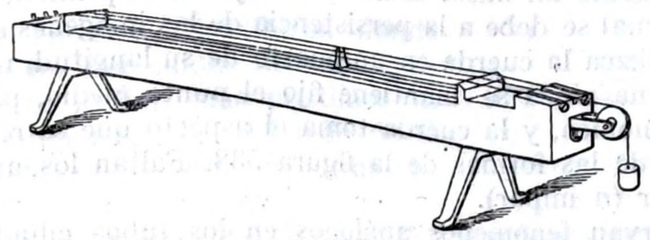


Fig. 537

Puesto que la velocidad de propagación de la onda a lo largo de la cuerda es (§ 250, [8])

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{m_1}},$$

en donde m_1 es la masa de la cuerda por unidad de longitud, las frecuencias de vibración de la cuerda por resonancia, ν_1, ν_2, ... ν_n, ... son (§ 256, [4]):

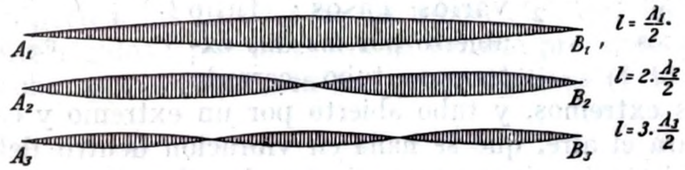


Fig. 538

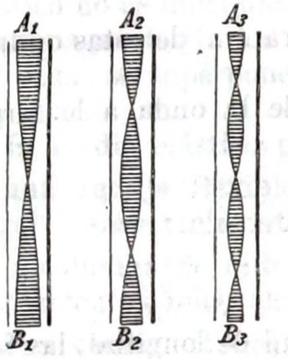
$$\left.\begin{aligned} \nu_1 &= 1\,\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{\tau}{m_1}}; \qquad \nu_2 = 2\,\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{\tau}{m_1}}; \qquad \nu_3 = 3\,\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{\tau}{m_1}} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \nu_n &= n\,\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{\tau}{m_1}} \ldots\ldots \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots\ldots) \end{aligned}\right\} \quad [1]$$

La serie de estas vibraciones constituye una *serie armónica* de sonidos; la vibración de frecuencia más baja $\left(\lambda_1 = 2l; \nu_1 = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{\tau}{m_1}}\right)$ es el *sonido fundamental* o *primer armónico*; las otras vibraciones son los *armónicos superiores*.

La amplitud de los armónicos coexistentes queda determinada por las condiciones de excitación de la cuerda. Así, si se excita la cuerda en el sonómetro punteándola por su punto medio, en la vibración que resulta predomina el sonido fundamental y el aspecto de la cuerda vibrante es como un huso, como se dibuja en la primera de las figuras 538, lo cual se debe a la persistencia de las imágenes en la retina.

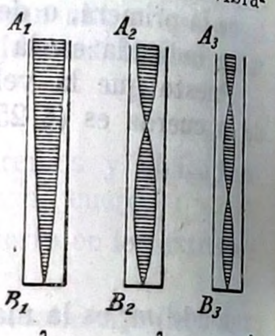
Si se pellizca la cuerda en un cuarto de su longitud, mientras con el dedo o una pinza se mantiene fijo el punto medio, predomina el segundo armónico, y la cuerda toma el aspecto que se representa en la segunda de las formas de la figura 538. Faltan los armónicos de orden impar (*n* impar).

Se observan fenómenos análogos en los tubos cilíndricos, brindando un ejemplo característico los tubos de órgano. En éstos es fácil la excitación permanente de las vibraciones : basta lanzar un chorro continuo de aire contra un labio afilado ; se pasa entonces de las vibraciones libres a las vibraciones forzadas en régimen estacionario, en resonancia, según el § 256.



$t = \frac{\lambda_1}{2}$ $l = 2 \cdot \frac{\lambda_2}{2}$ $l = 3 \cdot \frac{\lambda_3}{2}$

Fig. 539



$l = \frac{\lambda_1}{4}$ $l = 3 \cdot \frac{\lambda_2}{4}$ $l = 5 \cdot \frac{\lambda_3}{4}$

Fig. 540

Deben considerarse varios casos : tubo abierto por los dos extremos, tubo cerrado por los dos extremos, y tubo abierto por un extremo y cerrado por el otro. Para el aire, que se halla en vibración dentro del tubo, un extremo abierto funciona como vientre de vibración, y un extremo cerrado funciona como nodo.

Lo mismo que en las cuerdas vibrantes, el aire efectúa en el tubo todas las vibraciones libres compatibles con las condiciones supuestas en los extremos del tubo (de ser cerrado o abierto) y con el hecho de que las oscilaciones libres están constituídas por ondas estacionarias, en las cuales alternan y son equidistantes los nodos y los vientres. En la figura 539 se indican los modos de vibración correspondientes a los primeros términos de la serie de los sonidos producidos por un tubo abierto por los dos extremos ; se produce también una *serie armónica* de sonidos.

En la figura 540 se indican las maneras de vibración que corresponden a los primeros términos de la serie de los sonidos dados por un tubo cerrado en un solo extremo, observándose que faltan los armónicos pares (*n* par).

Para indicar la existencia de los nodos y de los vientres en estos tubos, puede utilizarse un platillo con el fondo de celofana finísima, sobre la que se ha extendido un poco de arena.

En los tubos no cilíndricos, la formación de ondas estacionarias es más complicada. Así, en la figura 541 se indica la disposición de los nodos y vientres en el caso del tercer armónico para un tubo cónico abierto. Los vientres equidistan a intervalos de $\frac{1}{2}\lambda$, pero falta el vientre en el vértice *O*, en donde hay un nodo. Los nodos *no* son equidistantes : se hallan más próximos al vientre contiguo situado del lado de *O* y tienden hacia su posición normal al aumentar su distancia a *O*.

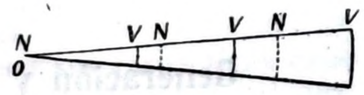


Fig. 541

También es interesante el caso de vibraciones transversales de una varilla, utilizado en los frecuencímetros y en los diapasones.

Los otros casos de vibraciones libres (membranas, láminas) son cada vez más complicados ; las series de sonidos que puede dar cada uno de estos sistemas son siempre muy numerosas. Pero resulta siempre cierto que dichas vibraciones libres corresponden a la formación de un sistema de ondas estacionarias sobre el cuerpo vibrante, sistema que debe obedecer a condiciones particulares impuestas por el problema físico : el borde libre de una lámina tiene que ser una *línea ventral* para las ondas estacionarias ; el punto en donde la lámina está fijada en el soporte es un nodo de vibración ; el borde fijo de una membrana es una línea nodal ; etc.

Además, en rigor, todos estos casos de vibraciones libres interesan los soportes, las paredes de los tubos, etc., que nunca son completamente rígidos : por lo tanto, se debería proceder siempre como se ha hecho, por ejemplo, en las pesas elásticas (§ 155).

CAPÍTULO II

Generación y recepción de ondas elásticas

261. Generadores de ondas elásticas. Generadores primarios de sonidos. Todo cuerpo en vibración, sumergido o ligado como sea con un medio elástico (el aire generalmente), engendra en este medio, y a expensas de su propia energía, ondas elásticas que se propagan como se ha indicado en anteriores apartados.

Como caso particular se tienen:

las ondas elásticas en el aire, de frecuencia audible ($\approx 16 \div 20\,000$ hertz), llamadas por esto *ondas sonoras* (véase también § 263);

las ondas elásticas en el aire, de frecuencia «inaudible» (ultrasonidos, infrasonidos); llamadas a veces también «ondas sonoras», lo mismo que antes se hablaba en óptica de ondas luminosas aunque fuesen ultravioletas o infrarrojas;

las ondas elásticas en el agua, acerca de cuya producción y sobre cuya utilidad se tratará en el § 285, *b*];

las ondas elásticas del suelo (ondas sísmicas), mucho más complejas que las precedentes, puesto que no son simplemente longitudinales, sobre cuya generación a nuestra voluntad, por fortuna a escala muy reducida, se tratará en el § 285, *c*].

Cuanto sigue (§§ 261 ÷ 268) se refiere especialmente, aunque no exclusivamente, a las ondas sonoras en el aire.

Sonido puro o simple es un sonido debido a vibraciones simples sinusoidales. Los sonidos obtenidos con los instrumentos musicales no son puros; el sonido fundamental va acompañado de armónicos, cuyo número e intensidad caracterizan el *timbre* del sonido; con más generalidad: un sonido no puro está constituído por un espectro acústico de sonidos puros, lo mismo que un haz luminoso no monocromático da, en el esprectoscopio, un espectro óptico de luces monocromáticas.

Son *ruidos* las perturbaciones sonoras en las cuales falta un carácter preciso de periodicidad.

La *altura* o *tono* del sonido está caracterizada por la frecuencia de dichas vibraciones simples sinusoidales; si el sonido no es puro, su altura queda determinada fisiológicamente por la frecuencia del sonido fundamental, aunque éste se halle presente con una pequeña energía de vibración respecto a la energía de los armónicos.

La *intensidad* de emisión del sonido viene medida por la energía emitida por el manantial sonoro en la unidad de tiempo, y, por tanto,

se puede suponer proporcional al cuadrado de la amplitud de vibración del cuerpo sonoro (§ 251, [1]).

El generador de sonido es un *radiador* de energía elástica que se propaga en el aire mediante ondas de frecuencia conveniente, del mismo modo que el generador de luz es un radiador de energía electromagnética que se propaga mediante ondas de frecuencia conveniente. El sonido es una radiación elástica.

Los instrumentos musicales de cuerda, con sus respectivas cajas de resonancia para que sea mayor la energía comunicada al aire, es decir, para que «suenen más fuerte», los tubos de órgano, los instrumentos musicales de viento, las campanas, los tambores, ... en fin, todos los instrumentos musicales, deben su emisión sonora a la vibración de un cuerpo elástico (la cuerda, o, mejor, el aire de la caja de resonancia, el aire del tubo de órgano, la pared de la campana, etc).

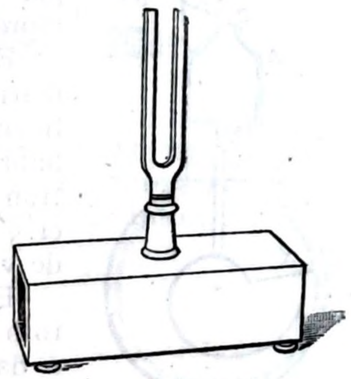


Fig. 542

La energía necesaria para entretener las oscilaciones es suministrada por el choque del martillito sobre las cuerdas en el piano, por el arco en el violín, por el chorro de aire en los instrumentos de viento o en los tubos de órgano, etc.

Todos éstos son *generadores primarios* de sonido, esto es, aparatos en los cuales una energía de otra especie engendra energía sonora.

Todavía existen otros, como la sirena, la armónica química, el arco cantante, el cuarzo piezoeléctrico, el termófono, etc.

Cada generador primario tiene derecho, por decirlo así, a tener su timbre propio o, más generalmente, su espectro acústico de emisión característico para cada uno de los sonidos que con dicho instrumento se obtienen; no ocurre esto en los generadores secundarios (§ 271) (Pohl).

Entre todos estos generadores primarios nos limitaremos a recordar los que se prestan mejor a investigaciones físicas, es decir, aquéllos que dan sonidos más puros, de altura conocida y, hasta cierto punto, de intensidad determinada.

a] **Diapasón.** En su forma más común para los experimentos de acústica va montado en una caja de resonancia (fig. 542). Se excita el diapasón con un golpe dado con un martillito de fieltro, de goma o de corcho. La energía de vibración de las ramas de acero se comunica a la pared de la caja de resonancia, engendrándose así ondas estacionarias en el aire de la misma, y desde su boca es emitida la energía sonora al aire que la rodea.

El diapasón hace, pues, de almacén de energía de vibración, la cual se comunica generalmente a la caja de resonancia, y ésta la disipa emitiéndola.

La función de la caja de resonancia es aumentar la energía comunicada al aire por el diapasón y, por tanto, aumentar la intensidad del sonido emitido.

Cuando el objeto del diapasón no sea engendrar un sonido muy intenso, sino sólo obtener un sonido de frecuencia determinada, es inútil la caja de resonancia; el *diapasón normal* de que se sirven los afinadores de instrumentos musicales es precisamente un diapasón sin caja de resonancia, construído generalmente para que dé un sonido de frecuencia 435 hertz (la_3) (1).

Para mantener un diapasón en vibración persistente, se le proporciona un dispositivo electromagnético de alimentación *(diapasón electromagnético)*, siendo uno de los mejores por su simetría y suavidad de acción el que representa la figura 65.

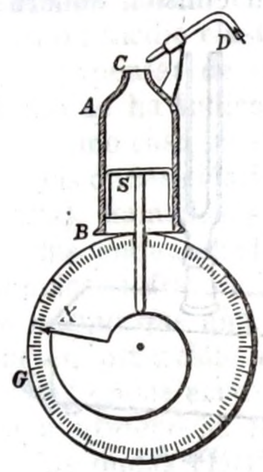


Fig. 543

El diapasón es un excelente generador primario de sonidos notablemente puros y de frecuencia bien determinada. Por esto hemos hablado ya de él considerándolo como un patrón de tiempo en el § 38, y hemos dicho en el § 40 cómo se puede determinar su frecuencia de vibración mediante una medida absoluta.

En acústica suele disponerse de una numerosa serie de diapasones, destinados, por ejemplo, a dar las sucesivas notas de la escala musical.

Existen también diapasones en los que se puede trasladar una masa a lo largo de sus ramas para poder variar la frecuencia de su vibración. Pero no puede esperarse de éstos la pureza de sonido y la constancia de frecuencia que se logran con los diapasones simples.

b] **Variador de W. Stern.** Consiste en un tubo (fig. 543) cerrado en *B* por un émbolo movible *S* y abierto en *C*. El chorro de aire procedente de *D* pone en vibración el aire del tubo. La altura del sonido producido depende de la posición del émbolo *S*, de modo que cuanto más corto es el trayecto *SA*, más agudo es el sonido.

Es un aparato cómodo, pero no muy preciso; se calibra, para las frecuencias, por comparación con diapasones patrón de frecuencias conocidas. Si el sonido del diapasón y el del aparato de W. Stern tienen frecuencias poco diferentes, se oyen pulsaciones (§ 72) entre los dos sonidos, y modificando ligeramente la altura del émbolo *S* se pueden reducir a cero dichas pulsaciones; entonces son iguales las frecuencias de los dos sonidos. La comparación de las frecuencias a base de la desaparición de las pulsaciones es un método extraordinariamente preciso.

(1) Está a punto de tomarse un acuerdo internacional, según el cual la frecuencia del la_3 *normal* será de 440 hertz.

El índice *X*, unido a la excéntrica que mueve *S*, señala sobre la graduación *G* la frecuencia del sonido emitido.

c] **Pito de Galton.** Funciona de un modo análogo. *CD* (fig. 544) es un tubito abierto por un lado y cerrado por el otro extremo mediante un émbolo que se mueve por medio del tornillo micrométrico G_2. Se dirige por *A* una corriente de aire que, al rozar con el labio *C* del tubo *CD*, pone en vibración el aire que éste contiene. El sonido que se obtiene es siempre muy agudo, no muy diferente del que puede obtenerse soplando en una llave agujereada; puede llegarse a la producción de ultrasonidos. En efecto, si la columna de aire que vibra dentro del tubo tiene una longitud $l = CD$, el sonido fundamental tiene, con buena aproximación, la longitud de onda $\lambda = 4\,l$ (fig. 540) y, por tanto, la frecuencia

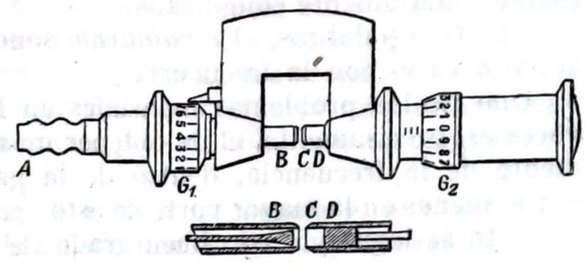


Fig. 544

$$\nu = \frac{\mathbf{v}}{\lambda} = \frac{\mathbf{v}}{4\,l}.$$

En el aire es $\mathbf{v} = 34\,000$ cm; por lo tanto, para $l = 0{,}5$ cm, ν vale, aproximadamente, 17 000 hertz, frecuencia situada hacia el límite de audibilidad para un oído normal.

d] **Teléfono.** En la actualidad, el método más cómodo y difundido para obtener sonidos muy puros, de altura e intensidad variables entre amplísimos límites, consiste en alimentar con corriente alterna un teléfono o un altavoz (§ 271,*b*]). La corriente alterna es proporcionada por osciladores de válvula termoelectrónica (v. tomo II), que se prestan del modo más práctico a proporcionarla con frecuencia e intensidad variables a voluntad. Haciendo girar la armadura móvil de un condensador variable se puede modificar la frecuencia de la corriente alterna, que es también la frecuencia del sonido emitido.

El aparato puede graduarse directamente en hertz. Basta disponer de un número conveniente de diapasones patrón de frecuencia conocida, y girar el botón de mando de las frecuencias del oscilador de válvula, para anular sucesivamente las pulsaciones entre el sonido del oscilador y el sonido de cada uno de los diapasones, como se ha indicado en el aparato de W. Stern. También puede servir para el calibrado el tubo de Quincke o el tubo de Kundt.

Pero en lugar de estos métodos puramente acústico-mecánicos, algo anticuados, se difunden cada vez más los métodos eléctricos de medida de la frecuencia de la corriente alterna que alimenta el teléfono, y, por ende, del sonido producido; la medición de la

frecuencia puede alcanzar la elevadísima precisión mencionada en el § 39.

Para cada frecuencia y para intensidades suficientemente pequeñas, la intensidad del sonido emitido puede suponerse proporcional a la potencia de la corriente alterna que lo alimenta. Pero la constante de proporcionalidad depende de la frecuencia de una manera extraordinariamente complicada.

En otras palabras, el *rendimiento* sonoro de un teléfono o de un altavoz varía con la frecuencia.

Uno de los problemas esenciales en la construcción de los altavoces es, precisamente, el de obtener un rendimiento sonoro independiente de la frecuencia, dentro de la gama de sonidos audibles, o por lo menos en la mayor parte de esta gama (30 ÷ 12 000 hertz).

Esto se logra ya, con buen grado de aproximación, en los mejores tipos de modernos altavoces.

e] **Termófono eléctrico.** Una finísima lámina de platino (espesor aproximado: 1 μm) es recorrida por una corriente alterna. La lámina experimenta calentamientos y enfriamientos periódicos, lo que origina variaciones periódicas de presión en el aire que la rodea, y, por tanto, un sonido. El sonido es más fuerte si la lámina del termófono es recorrida por una corriente *de fondo* a la cual se superpone la corriente sinusoidal. En este caso, la frecuencia del sonido es igual a la frecuencia ν de la corriente sinusoidal. Si falta la corriente de fondo, la frecuencia del sonido emitido es doble que la de la corriente. En efecto, si ésta viene dada por una fórmula tal como

$$i = i_0 \cos \omega t = i_0 \cos 2\pi\nu t,$$

el calor desarrollado en los intervalos de tiempo sucesivos dt viene dado según la ley de JOULE (v. tomo II) por:

$$i^2 \cdot r \cdot dt,$$

y, por tanto,

$$i^2 = i_0^2 \cdot \cos^2 \omega t = i_0^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\omega t\right) = i_0^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 4\pi\nu t\right)$$

es siempre positivo y oscila con frecuencia 2ν.

Si la lámina está contenida en una pequeña cavidad que tenga dimensiones geométricas conocidas, pueden calcularse a partir de éstas y de las de la lámina, así como de los datos eléctricos y térmicos del aparato, las variaciones de presión producidas en el aire de dentro de la cavidad por el calentamiento alternativo de la lámina.

Por esto, y por el hecho de que las condiciones experimentales pueden reproducirse con mayor exactitud que en los demás manantiales sonoros, ha sido propuesto el termófono como manantial sonoro patrón normal de sonido.

En realidad, el sonido obtenido es muy débil; únicamente para frecuencias muy bajas (≈ 100 hertz), la amplitud de presión dentro de la pequeña cámara del termófono puede llegar a algunas dinas por cm². Por ello, el empleo más interesante del termófono es el calibrado de los micrófonos. La lámina del micrófono forma parte de la cámara del termófono, con lo cual se puede aplicar al micrófono una onda de presión, sinusoidal, de frecuencia conocida ν y de amplitud de presión calculable $(\Delta p)_0 = (p - p_0)_0$. El micrófono está provisto de amplificador termoelectrónico; así se obtiene en la «salida» del amplificador una corriente microfónica amplificada, cuya intensidad (eficaz) puede medirse, por ejemplo, con un amperímetro para corriente alterna.

Por tanto, puede saberse para cada frecuencia ν, qué indicación del amperímetro corresponde a cada una de las amplitudes de presión $(\Delta p)_0$ engendradas por el termófono.

El micrófono (y el amplificador correspondiente) se gradúa de este modo, y es así capaz de medir la amplitud de presión de una onda sonora que incide sobre él (§ 264).

f] Señalemos todavía los osciladores de magnetostricción y los piezoeléctricos (§ 264), cuyo principio se tratará en el tomo II.

§ **262. Receptores de ondas elásticas.** El estudio de una onda elástica requiere la determinación del estado de vibración $s = s(t)$, en donde s es la elongación de la partícula del medio elástico, y t el tiempo, en un número suficiente de puntos de dicho medio elástico recorrido por la onda.

Conocido $s = s(t)$ en un punto, mediante el análisis armónico (§ 71) se pueden determinar la frecuencia, la amplitud y la fase de las componentes sinusoidales que constituyen la oscilación y que, por tanto, se hallan presentes en la onda.

La determinación del estado de vibración en un número mayor de puntos del medio elástico, permite determinar el tipo de onda (progresiva plana, o esférica, ...; estacionaria), así como la dirección, el sentido, y la velocidad de propagación.

En el caso de las ondas en una cuerda, o en la superficie de un líquido, o en el aire contenido en un tubo, el estudio del estado de vibración de los puntos del medio elástico puede hacerse fácilmente, o bien con la observación directa o por medio de varios artificios que constituyen otros tantos *receptores de ondas elásticas*, en particular de ondas sonoras (§ 263).

La mayor parte de éstos se basan en el empleo, en el punto que se estudia, de un dispositivo apto para ponerse en vibración cuando llega la onda elástica *(vibroscopios)*.

No es un problema fácil deducir el estado de vibración de la onda en el punto en estudio, a partir de la oscilación observada en el vibroscopio, y en muchos casos prácticos (vibraciones de puentes, pisos, vigas, ... construcciones en general) puede decirse que para tener

la ventaja de la simplicidad, el dispositivo se escoge a propósito en cada caso en particular, para que dé solamente algunos de los elementos de la vibración (frecuencia, amplitud, fase de los movimientos componentes sinusoidales), es decir, los que se estiman más importantes. De aquí la gran variedad de vibroscopios propuestos.

Los aparatos de medida del sonido (§ 263) instruyen suficientemente respecto al carácter de los dispositivos que pueden emplearse para tales mediciones, cuando se tenga un apoyo fijo (no en vibración) sobre el cual pueda montarse el aparato de medida.

Pero si falta este apoyo, se complica todavía más el problema de la determinación del estado de vibración de un punto, y puede obtenerse la solución con dos tipos de aparatos: *sismógrafos* y *acelerómetros*.

a] **Sismógrafo.** Un sismógrafo está constituído por una masa grande (hasta varias toneladas) suspendida o apoyada en equilibrio casi inestable, de modo que constituya como un péndulo cuyo período de oscilación es muy largo (p. ej., 40 seg o 60 seg).

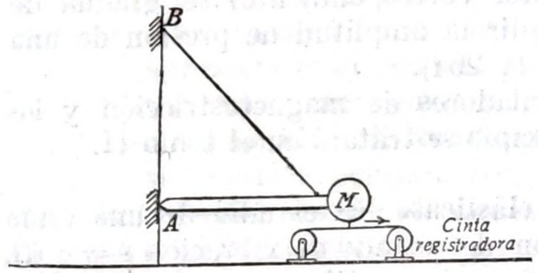


Fig. 545

En un sismógrafo ideal, la masa debería conservarse inmóvil durante la vibración del soporte que está rígidamente unido al suelo. El movimiento relativo de la masa respecto al soporte, oportunamente amplificado y registrado, permite comprobar el movimiento vibratorio del soporte y, por tanto, el del suelo.

En realidad, la masa se pone en vibración. La ventaja de la gran masa es ilusoria, y hoy se emplean a menudo sismógrafos cuya masa se reduce a pocos kilogramos; es conveniente que el amortiguamiento sea notable para que sólo se pueda considerar sensible la oscilación forzada de régimen estacionario (§ 149), incluso cuando el sismógrafo se halle en resonancia con un movimiento sísmico oscilatorio.

Es posible deducir el movimiento del soporte a partir del movimiento relativo de la masa respecto a dicho soporte, pero el problema es muy complicado.

Un sismógrafo es capaz de registrar las oscilaciones sísmicas que se realizan según un eje dado *(sismograma)*, por lo cual se necesitan generalmente tres sismógrafos, dos *horizontales* y uno *vertical*, para obtener las tres componentes ortogonales de una oscilación sísmica cualquiera.

En la figura 545 se indica esquemáticamente un sismógrafo horizontal, de péndulo horizontal, capaz de registrar las vibraciones sísmicas que se efectúan según un eje perpendicular al plano de la figura.

b] **Acelerómetro.** Este instrumento, medidor de aceleraciones, está constituído en su forma más simple por un cuerpo A (fig. 546) de masa m, apoyado sobre un plano B prácticamente rígido.

Si el soporte CD, supuesto horizontal, está en reposo o se mueve verticalmente con movimiento uniforme, la presión total P que A ejerce sobre B es el peso P_0, constante, del cuerpo A. La presión P medida en la dirección x es negativa, y debe conservarse siempre así, para asegurar el contacto entre A y B.

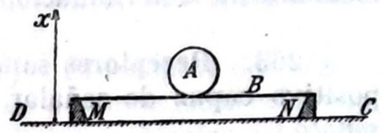


Fig. 546

Si el apoyo CD del aparato se mueve con movimiento variado, en dirección vertical, paralelamente a sí mismo, es decir, en la dirección x, variará en cada instante la presión P que A ejerce contra B; las deformaciones del plano B, debidas a las variaciones de P, supondremos que son muy pequeñas respecto a las vibraciones del apoyo CD.

Nos encontraremos en estas condiciones si el cuerpo B está constituído por una lámina MN de cuarzo piezoeléctrico (§ 264, 2.º). Las variaciones de presión de A sobre B engendran en el cuarzo una polarización dieléctrica variable.

Más sencillamente, el plano B puede ser la membrana de un micrófono, con lo cual las variaciones de presión de A engendran pequeñas deformaciones de la lámina y, por tanto, variaciones de la corriente microfónica.

Se necesitarán, pues, aparatos capaces de registrar con suficiente rapidez dichas polarizaciones dieléctricas o dichas corrientes microfónicas, así como sus variaciones con el tiempo.

En resumen, la variación $P - P_0$ de la presión debe medirse con un manómetro de suficiente rapidez para poder dar el valor de $P - P_0$ en todos los instantes.

Veamos cómo a partir de $P - P_0$ en función del tiempo se puede calcular la aceleración a_c del movimiento del soporte CD. Tenemos:

$$a_c = a_c\,(t) = \frac{d^2x}{dt^2}\,.$$

Si la aceleración de CD, en cierto instante es $\frac{d^2x}{dt^2}$, será también ésta la aceleración de A que se mueve *apoyado* sobre B. La fuerza aplicada por B sobre A es $m\frac{d^2x}{dt^2}$, y por reacción ésta es también la fuerza (de inercia) que A añade a la presión P_0. Luego se tiene en cualquier instante, en valor y en signo, según el eje x:

$$P = P_0 - m\frac{d^2x}{dt^2}\,,$$

de donde

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{P - P_0}{m}. \qquad [1]$$

Por tanto, conocido m, se puede obtener la aceleración $a_c = \frac{d^2x}{dt^2}$ mediante la determinación de $P - P_0$.

§ 263. Receptores sonoros y mediciones sonoras. Cualquier dispositivo capaz de señalar el paso de una onda sonora es un *receptor sonoro*.

En particular, el oído (§ 256) es el receptor sonoro de que la naturaleza nos ha dotado. Pero se trata de un órgano *selectivo*, esto es, solamente sensible a la gama de frecuencias $\approx 16 \div 20\,000$ hertz, y en tal gama presenta un máximo de sensibilidad hacia los 2000 hertz. Resulta, pues, que el empleo del oído como receptor sonoro plantea en Acústica problemas análogos a los de la fotometría, más antiguos éstos y, bajo ciertos aspectos, mejor sistematizados. Si la onda elástica que se propaga por el aire produce una acción fisiológica sobre el órgano auditivo (oído - cerebro), se dice con toda propiedad que la onda es *sonora*, del mismo modo que en óptica llamamos «luminosa» a la onda electromagnética que resulta visible. La sensación que la onda produce se llama *sensación sonora*, y es un problema esencial estudiar, para cada frecuencia, es decir, para ondas sinusoidales simples de distintas frecuencias, qué relación existe entre la intensidad *energética* de la onda (§§ 251, 257) con algo susceptible de medida que pueda identificarse con la intensidad de la sensación sonora. Se llega así a un complejo de medidas sonoras comparables con las mediciones «fotométricas» que se efectúan con las ondas electromagnéticas (visibles). Sin embargo, como veremos en los §§ 273 y 274, y en fotometría (tomo II), la analogía entre los dos grupos de mediciones no es completa.

Hasta el § 273, la onda sonora va a interesarnos solamente como fenómeno mecánico, independientemente de la sensación sonora que suscita en el oído y, en definitiva, en el cerebro. Es necesario, pues, utilizar un receptor que evite todo elemento subjetivo; en particular, conviene que el receptor no sea «selectivo», por lo menos dentro de la gama de frecuencias que nos interesa.

El receptor objetivo de ondas sonoras más característico y usual es el micrófono.

Colocando este receptor en un punto x, y, z del aire atravesado por la onda sonora, se trata de determinar el estado de vibración.

Este problema puede solucionarse siguiendo tres caminos diferentes; en los tres casos se supone conocida (§ 277) la velocidad v de propagación de la onda en el aire.

1.º **Medición de la intensidad de la onda sonora** (§ 264). Es la determinación de la intensidad *energética* E de la onda (§ 251); de ordinario se denomina, abreviadamente, *intensidad sonora*, lo que introduce una ambigüedad y confusión, que no ha de maravillarnos, con la «intensidad de la sensación sonora» mencionada anteriormente.

2.º **Análisis de la onda sonora** (§ 268). El receptor se limita a efectuar el análisis de FOURIER (§ 71) de la vibración sonora incidente $s = s(t)$, es decir, determina la frecuencia de los sonidos simples componentes y, por lo menos aproximadamente, sus intensidades energéticas relativas.

3.º **Registro de la onda sonora** (§ 270). El receptor determina, más o menos fielmente, en el punto x, y, z en donde se halla colocado, la función $s = s(t)$ que da la elongación s de las partículas del medio elástico vibrante en función del tiempo. Muchas veces, el registrador determina más bien $u = \frac{\partial s}{\partial t}$, o bien $p - p_0$, en función del tiempo.

§ 264. Medición de la intensidad de la onda sonora. Se supone que la onda sonora es plana y sinusoidal.

Recordemos (§ 249) que, con los símbolos acostumbrados, la ecuación de la onda de la elongación es:

$$s = a \cdot \cos\, 2\pi\nu\left(t - \frac{z}{\mathbf{v}}\right) = a \cdot \cos\, \omega\left(t - \frac{z}{\mathbf{v}}\right); \qquad [1]$$

la ecuación de la onda de velocidad es:

$$u = \frac{\partial s}{\partial t} = -a\,\omega \cdot \text{sen}\, \omega\left(t - \frac{z}{\mathbf{v}}\right); \qquad [2]$$

la ecuación de la onda de presión es:

$$\Delta p = p - p_0 = -\varepsilon \cdot \frac{\partial s}{\partial z} = -a\,\omega \cdot (\mathbf{v}\,\mu) \cdot \text{sen}\, \omega\left(t - \frac{z}{\mathbf{v}}\right). \qquad [3]$$

Luego, conocidos ν y a, son también conocidos:

la *amplitud de velocidad* $u_0 = \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)_0 = a \cdot \omega$, [4]

y la *amplitud de presión* $(\Delta p)_0 = a \cdot \omega \cdot (\mathbf{v}\,\mu)$. [5]

Estas dos últimas amplitudes son simplemente proporcionales:

$$\frac{(\Delta p)_0}{u_0} = (\mathbf{v}\,\mu), \qquad [6]$$

y la constante de proporcionalidad ($\mathbf{v}\,\mu$) es independiente de la frecuencia en cuanto lo es $\mathbf{v}$ (§ 277).

Además, la oscilación de velocidad [2] y la oscilación de presión [3] están en concordancia de fase. Por el contrario, se encuentran «en cuadratura» con la elongación [1].

Conocidos ν y a, también es conocida la intensidad E de la onda plana (§ 251, [5]) y se puede escribir:

$$E = \frac{1}{2}\, u_0 \cdot (\Delta p)_0 = \frac{1}{2}\, a^2\, \omega^2\, (\mathbf{v}\,\mu) = \frac{1}{2}\, u_0^2\, (\mathbf{v}\,\mu) = \frac{1}{2}\, \frac{(\Delta p)_0^2}{(\mathbf{v}\,\mu)}. \qquad [7]$$

En cambio, en el caso de ondas esféricas se tiene (§ 257, [1]):

$$E = \frac{1}{2}\, u_0 \cdot (\Delta p)_0 \cdot \cos \Phi\,; \qquad \operatorname{tg} \Phi = \frac{\lambda}{2\pi r}. \qquad [8]$$

Ya se ha dicho que es, sensiblemente, $\cos \Phi + 1$, es decir, que la [8] solamente es distinta de la [7] cuando la distancia r del receptor al centro de emisión no es grande respecto a la longitud de onda $\lambda = T\,\mathbf{v}$, de modo que en la práctica nos encontramos casi siempre en condiciones de poder emplear la [7].

Conocido ν, los elementos a, $(\Delta p)_0$, u_0, E, que definen una onda sonora sinusoidal, se deducen, pues, midiendo una sola de las magnitudes antes citadas.

Es preferible la medición de $(\Delta p)_0$ o de u_0, porque a partir de una u otra de estas magnitudes se calcula la intensidad E de la onda (plana) mediante las [7], sin necesidad de conocer ν.

1.º **Medición de la amplitud de vibración.** Si en el aire recorrido por la onda sonora se hallan en suspensión pequeñísimos granos de polvo o gotitas microscópicas de un líquido no evaporable (como aceite), cada una de estas partículas, arrastradas por la vibración del aire, participa de esta vibración. Obsérvese uno de estos gránulos mediante un microscopio micrométrico. Puede determinarse así la amplitud de vibración, y ésta es función de la amplitud de vibración de las partículas de aire en el que está sumergido el gránulo. Pero la forma de esta relación no es conocida, y la medida tiene carácter cualitativo.

Aparte del uso del gránulo pequeñísimo y del microscopio, el método coincide con el procedimiento elemental de determinación de los vientres de vibración en un tubo de KUNDT, mediante polvo de licopodio (fig. 519).

2.º **Medición de la amplitud de presión.** En el caso más esquemático, la oscilación de presión actúa sobre una cara de una membrana de cápsula manométrica (fig. 547). Si las dimensiones del dispositivo son pequeñas respecto a la longitud de onda del sonido que se examina, la acción de la onda no depende mucho de la orientación del receptor respecto a la dirección de propagación de la onda.

La onda sonora que llega produce una oscilación de la presión sobre la cara exterior AB de la membrana. Ésta efectúa vibraciones cuya amplitud es mucho menor que la amplitud de las vibraciones de las partículas de aire debidas a la onda sonora incidente. En otras palabras, AB es sensiblemente un plano nodal de vibración, debido a que se superpone la onda reflejada con la onda incidente: por tanto, es un vientre de presión.

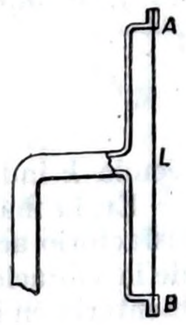


Fig. 547

Se puede suponer que la deformación de AB en todo instante es debida a la presión que actúa sobre AB (más exactamente, a la diferencia entre la presión exterior y la presión interna de la cápsula).

Puede determinarse la amplitud de vibración de la membrana mediante el dispositivo de la palanca óptica (v. fig. 436) que, junto con la membrana, deberá constituir un sistema mecánico cuya frecuencia propia de vibración sea superior a la frecuencia que el sonido impone a la membrana.

Pero actualmente está casi universalmente aceptado un método eléctrico para determinar las vibraciones de AB: la membrana AB es sencillamente la membrana de un micrófono.

La corriente eléctrica microfónica, producida al vibrar la membrana, es amplificada por medio de válvulas termoelectrónicas, hasta que sea fácilmente determinable mediante un aparato de medida para corriente alterna. En esto consiste, efectivamente, la corriente microfónica. Su medición se efectúa, por ejemplo, con una pinza termoeléctrica o con un electrodinamómetro, y se obtiene el valor medio del cuadrado de la intensidad de la corriente microfónica, y ésta se halla relacionada con el cuadrado de la amplitud de presión, y, por tanto, con la intensidad de la onda sonora.

La sensibilidad que se puede alcanzar con este dispositivo microfónico es muy superior a la del dispositivo óptico. Si se estudia la banda de las frecuencias para las que el oído tiene mayor sensibilidad, gracias a los amplificadores termoelectrónicos, incluso el micrófono vence al oído en sensibilidad.

Pero en estas medidas es también muy difícil llegar a deducir la amplitud efectiva de oscilación de la presión (§ 261, *e*]). Sólo son fáciles las medidas relativas de la intensidad sonora de una frecuencia determinada.

Si las frecuencias propias de vibración de la lámina son muy elevadas respecto a las frecuencias del sonido que se estudia, se puede admitir (§ 150) que a igual amplitud de oscilación de la presión excitante corresponde igual amplitud de vibración de la lámina microfónica.

Pero la gama sonora dentro de la cual se pretende hoy realizar esta condición es demasiado amplia (30 ÷ 12 000 hertz) para suponer que dicha suposición sea legítima.

Por otro lado, el objeto último a que tiende un micrófono desti-

nado a medir amplitudes de presión es ser fiel (§ 150); esto significa, en nuestro caso, que el micrófono debe producir una fuerza electromotriz F_e o una intensidad de corriente alterna i, de modo que la amplitud $(F_e)_0$ de oscilación de la fuerza electromotriz o la amplitud i_0 de oscilación de la intensidad de corriente sean proporcionales a la amplitud de presión $(\Delta p)_0$ de la onda incidente:

$$\left.\begin{matrix}(F_e)_0 \\ i_0\end{matrix}\right\} = k \cdot (\Delta p)_0,$$

siendo k independiente de la frecuencia en la gama antes indicada.

En la mayor parte de los casos, se logra esto de un modo ya satisfactorio actualmente, compensando la eventual infidelidad mecánica de la vibración de la lámina microfónica con una infidelidad complementaria en la transformación de la vibración mecánica en fenómeno eléctrico, ya sea en el micrófono, ya en el amplificador termoelectrónico que generalmente le acompaña.

El fenómeno de la *piezoelectricidad*, varias veces citado y del que trataremos en el tomo II, no sólo permite obtener oscilaciones elásticas persistentes de elevadísima frecuencia que no se habían podido realizar por ningún otro medio, sino que también puede utilizarse inversamente para la recepción de ondas elásticas, y precisamente para la medición de la amplitud de presión. Un cristal piezoeléctrico, por ejemplo de cuarzo o de sal de la Rochela (tartrato sódico-potásico: $NaKC_4H_4O_6 \cdot 4H_2O$), tallado convenientemente y solicitado por las variaciones de presión de una onda elástica, presenta una polarización dieléctrica y, por tanto, una f. e. m. alterna, que, amplificada mediante amplificadores termoelectrónicos, puede servir para señalar la recepción de la onda.

El fenómeno es más intenso en la sal de la Rochela que en el cuarzo; pero en general se prefiere éste por su menor fragilidad.

Es fácil alcanzar valores notabilísimos de las variaciones de presión que acompañan a una onda elástica en los líquidos, a causa de la incompresibilidad del medio.

Esto tiene por consecuencia un elevado valor del producto $(v\mu)$, por lo que, a igualdad de a y de ω y, por tanto, de u_0, se tiene un elevado valor de $(\Delta p)_0$. Por esto, los receptores piezoeléctricos han resultado especialmente eficaces para señalar ondas elásticas dentro del agua.

3.º **Medición de la amplitud de velocidad.** Un disco AB (figura 548), que puede girar alrededor del eje O, perpendicular al plano de la figura, es empujado por una corriente de aire en el sentido XY. Los filetes flúidos alrededor del disco tienen la forma indicada en la figura 502. El disco está sometido a una resultante de las presiones que no está aplicada en O, sino en un punto C más próximo al borde A, con el cual el viento choca antes (§ 246, *b*]). El disco tiene como posición de equilibrio estable la AB, normal a la dirección del viento.

En la posición AB, a 45º con la dirección del viento, el disco está sometido a un momento de rotación en el sentido en que giran las agujas de un reloj, para el que mira la figura. Si el viento cambia de sentido, el momento de rotación aplicado sobre AB permanece inalterado en magnitud y *sentido*.

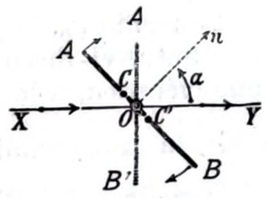


Fig. 548

Una onda sonora que se propaga en la dirección XY, a 45º respecto a AB, crea un momento de torsión. El disco AB *(disco de Rayleigh)* puede indicar la presencia de una onda sonora. El momento de torsión es muy pequeño y conviene medirlo con una balanza de torsión. El disco AB está suspendido de un fino hilo vertical, siendo O su traza sobre el plano del dibujo.

En la figura 549 se representa el conjunto del aparato: A es un amortiguador de líquido; OO' es el hilo de suspensión, y D es el disco de Rayleigh, embestido por la onda sonora que llega en el sentido de la flecha. Se mide la torsión del disco por el método de Poggendorff, siendo S el espejo correspondiente.

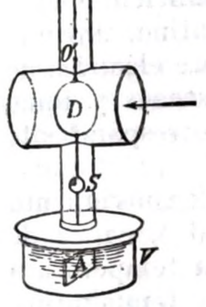


Fig. 549

Mediante hipótesis simplificadoras convenientes, puede deducirse teóricamente la siguiente relación:

$$u_0^2 = \frac{3}{2} \frac{M}{\mu \cdot r^3 \cdot \operatorname{sen} 2\alpha} \qquad [9]$$

en donde M es el momento de torsión producido por el sonido; r, el radio del disco; α, el ángulo entre la normal a AB y la dirección de propagación del sonido; μ, la masa específica del medio en que se propaga la onda sonora, y u_0, la amplitud de oscilación de la velocidad $u = \frac{\partial s}{\partial t}$ en la onda sonora (sonido puro, oscilación sinusoidal).

El coeficiente k^2 del par elástico de torsión del hilo se puede determinar (§ 189) a partir del momento de inercia del disco AB y de su período de oscilación bajo la fuerza elástica del hilo de suspensión; por tanto, si el sonido produce un giro $\Delta\alpha$ del disco, se conoce el momento

$$M = k^2 \cdot \Delta\alpha.$$

Conociendo μ y r, y midiendo α y $\Delta\alpha$, la fórmula [9] permite calcular u_0.

Las mediciones resultan difíciles a causa de las perturbaciones debidas a las corrientes de aire.

La teoría que conduce a la [9], aunque no exacta, es notablemente aproximada, y el disco de Rayleigh permite una medición

absoluta de u_0, valedera, como la [9], para cualquier frecuencia, con tal que la longitud de onda sonora λ sea grande respecto a r; por ejemplo, para frecuencias de 10 000 hertz, r no debe ser mayor que 0,5 cm.

Conocido u_0, la [6] da $(\Delta p)_0$, y la primera de las fórmulas [7] da E; por tanto, el disco de Rayleigh conduce también, como el termófono eléctrico, a la medida de la amplitud de presión $(\Delta p)_0 = (\mathbf{v}\mu)\cdot u_0$ y de la intensidad $E = \frac{1}{2} u_0^2 \cdot (\mathbf{v}\mu) = \frac{1}{2} \frac{(\Delta p)_0^2}{(\mathbf{v}\mu)}$ de una onda sonora.

Pero la sensibilidad del disco Rayleigh no es muy elevada. Se limita en el aire a una amplitud de presión de 1 $\frac{\text{dina}}{\text{cm}^2}$, o poco menos, y, por tanto, a una intensidad de la onda en el aire:

$$E = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{41{,}5} \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \cdot \text{seg}} \approx 10^{-2} \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \cdot \text{seg}}.$$

El oído, dentro del campo de frecuencias para las que tiene máxima sensibilidad ($\nu \approx 2\,000$ hertz), llega a percibir un sonido de intensidad 10^{-11} ergios por cm² y por segundo (§ 273).

El *micrófono a hilo caliente de Tucker* es un receptor de sonido empleado principalmente en fonotelemetría (§ 285, *a*]), por ser especialmente apto para señalar subsonidos, pero que es suficientemente sensible hasta los 1 000 hertz. Un hilo metálico de platino, finísimo (diámetro: unas 0,6 μm), es recorrido por una corriente eléctrica de varios miliampère, para que el hilo se ponga incandescente y tome en el aire una temperatura de régimen constante correspondiente al rojo.

Esta temperatura depende del estado de reposo o de movimiento del aire que le rodea: en una corriente de aire (viento), capaz de disipar por convección una mayor dosis de calor, la temperatura baja en función de la velocidad del viento. Con la temperatura cambia la resistencia eléctrica del hilo, y esta última es fácil de medir.

En conclusión, la velocidad del viento puede deducirse a partir de una medida de resistencia eléctrica. El aparato es un *anemómetro de hilo caliente*. Puede suponerse, con suficiente aproximación, que es válida la relación cuadrática

$$\Delta r = k \cdot r_0 \cdot u^2$$

entre la variación Δr de la resistencia r_0 y la velocidad u del viento, mientras pueda admitirse que Δr no depende de la dirección del viento, supuesto que ésta forme siempre el mismo ángulo con la dirección del hilo, como, por ejemplo, un ángulo recto.

El aparato está graduado para un viento constante y puede servir, además, para medir intensidades sonoras, substituyendo u^2 por

el cuadrado del valor eficaz de u en la vibración sonora, esto es, por $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial s}{\partial l}\right)_0^2$ (§ 251).

§ 265. Resonadores. Todo instrumento capaz de vibrar con una frecuencia propia de vibración *(oscilador)*, se convierte en un *resonador* cuando recibe (por ejemplo, de una onda sonora) impulsos periódicos cuya frecuencia coincida con la frecuencia propia.

La onda que llega aplica al resonador una fuerza sinusoidal; éste se encuentra en las condiciones del § 150, y efectúa vibraciones forzadas en *resonancia*, las cuales, por tanto, pueden alcanzar fácilmente amplitudes notables.

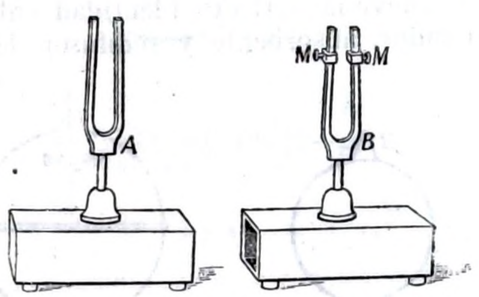


Fig. 550

El experimento más característico es el de los diapasones resonantes (fig. 550). Dos diapasones se colocan uno cerca de otro. Conviene que las bocas de las dos cajas de resonancia estén enfrentadas, a algunos decímetros de distancia. Se comprueba que *están al unísono* haciéndolos sonar a la vez y viendo que no se producen pulsaciones. Si se oyeran pulsaciones, uno de los dos diapasones tendría una frecuencia ligeramente distinta de la del otro, y corriendo un poco las pequeñas masas M se podrían eliminar las pulsaciones.

Sólo en este caso *(unísono)* sale bien el siguiente experimento: excitando uno de los diapasones, A, por ejemplo, y sujetándolo bruscamente al cabo de pocos segundos, apretando con la mano sus dos ramas, se oye sonar el otro diapasón B.

Éste ha sido puesto en vibración por la onda sonora que llega de A. El resonador B se ha encontrado en disposición de absorber una notable cantidad de la energía de la onda sonora que le llega. Esta energía se transforma parcialmente en calor debido a las imperfecciones elásticas del diapasón B; otra parte es almacenada por el diapasón o por la caja de resonancia, a medida que va aumentando la amplitud de su propia vibración, y otra parte es reemitida bajo forma de sonido difundido por B. Pronto se alcanza un régimen estacionario, y entonces en cada intervalo $\Delta\tau$ de tiempo, la energía tomada a la onda que llega es igual a la suma de la transformada en calor (pequeña en un buen diapasón) y de la reemitida bajo forma de sonido difundido. El fenómeno energético es más complejo que en el § 150 por la presencia de la energía difundida.

Si A y B (fig. 550) están muy próximos, la onda difundida por B, volviendo hacia A, *reacciona* sobre A de un modo sensible; el fenómeno es más bien comparable al de los péndulos acoplados (§ 154).

La presencia de B acelera de modo sensible el amortiguamiento de A; B succiona la energía de A.

Pero la *reacción* de B sobre A se hace pronto insensible alejando los dos diapasones; entonces, la presencia de B no altera de un modo sensible la vibración de A, y la energía sonora absorbida y después difundida por B, es tomada directa y completamente de la onda que llega, de la cual la caja de resonancia de B logra captar la energía correspondiente a una superficie que no puede definirse fácilmente, pero que es mucho mayor que la correspondiente a la boca de la caja de resonancia.

El experimento de la figura 550 es muy instructivo porque pone de relieve la perfecta identidad entre *oscilador* y *resonador*. Un resonador, absorbente y redifusor de la energía que se propaga por

Fig. 551

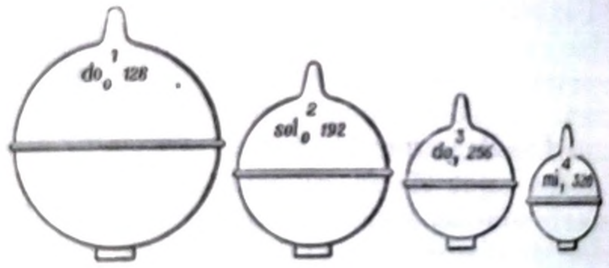


Fig. 552

ondas, es, a su vez, un oscilador capaz de emitir, cuando es excitado, la misma frecuencia que absorbe.

Es clásica la forma de los *resonadores acústicos* ideada por HELMHOLTZ (fig. 551): una esfera hueca, de paredes rígidas, generalmente de latón, presenta una boca A provista de un cuello corto C, y tiene en el extremo opuesto un pequeño conducto B que se adapta a la oreja del experimentador. Teóricamente, el resonador debería estar cerrado en B y provisto de un aparato capaz de medir la amplitud de presión.

Cada uno de estos instrumentos resuena para una frecuencia bien determinada, y es necesario disponer de una serie de resonadores (fig. 552), uno para cada una de las frecuencias sonoras que se estudian.

Se elimina este inconveniente mediante resonadores variables como son los de KÖNIG (fig. 553). Al variar el volumen del resonador, cambia la frecuencia de resonancia.

Esto se logra también con sólo variar la longitud del cuello C (fig. 551) o el diámetro de la abertura A, que está entonces formada por un diafragma iris.

Estos resonadores se encuentran en el comercio ya calibrados para las frecuencias de resonancia, y aunque el análisis eléctrico de los sonidos (§ 268) los haya relegado entre las antigüedades históricas, conviene hacer un breve estudio sobre su funcionamiento

Cuando el resonador funciona, el aire del cuello C (fig. 554, a), o, más generalmente, el aire de la abertura, se encuentra en vibración por la acción de la onda incidente. La masa de aire vibrante no está bien determinada. Únicamente para resonadores provistos de un cuello delgado y relativamente largo, se puede admitir, en primera

Fig. 553

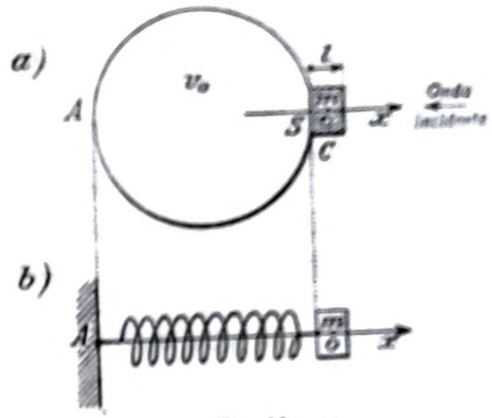


Fig. 554

aproximación, que la masa m de aire vibrante, es la contenida en el cuello C, de longitud l y de sección S; luego se tiene:

$$m = l \cdot S \cdot \mu,$$

siendo μ la masa específica del aire.

Si m se traslada un trayecto dx, el volumen v_0 del aire contenido en el resonador cambia en

$$dv = S \cdot dx$$

y la presión p_0 que existe normalmente en v_0 varía en (§ 185, c])

$$dp = -\varepsilon \frac{dv}{v_0} = -\gamma \cdot p_0 \frac{dv}{v_0} = -\gamma \cdot p_0 \frac{S}{v_0} dx.$$

La masa m, trasladada en dx, se encuentra sometida a la fuerza de tipo elástico

$$dF = S \cdot dp = -\gamma p_0 \frac{S^2}{v_0} dx;$$

luego es un sistema capaz de oscilar (oscilaciones libres, § 145) con pulsación:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\gamma p_0 S^2}{v_0 m}} = \sqrt{\frac{\gamma p_0 S}{\mu v_0 l}}, \qquad [1]$$

de modo que es capaz de engendrar oscilaciones forzadas de resonancia si recibe una onda sonora de frecuencia ν.

Estas elementales consideraciones, análogas a las efectuadas para la cámara elástica en el § 232, sólo son lícitas si todo el aire del cuello C, y sólo éste, se halla en vibración como un bloque rígido, y todo el aire en v_0 se encuentra a una presión uniforme. Esta última hipótesis es aceptable cuando la longitud de onda $\lambda = T\nu$ del sonido al que responde el resonador, es grande respecto a las dimensiones del mismo. En la caja de resonancia de la figura 550 y en el resonador de la figura 518, no sucede así: la longitud del tubo resonante es $\frac{1}{4}\lambda$. Por el contrario, sucederá esto con buena aproximación en los resonadores de Helmholtz y de Köning. Entonces, el gas contenido en v_0 funciona como un resorte elástico comprimido y estirado por la masa vibrante m. El resonador es el análogo acústico de la masa m fijada en A por medio de un muelle como se indica en la figura 554, *b*).

Cuando hay resonancia, las vibraciones de m pueden ser varias decenas de veces más amplias que las vibraciones de la onda excitadora que llega. También la oscilación dp de la presión en v_0, en particular sobre el fondo A del resonador, puede ser varias decenas de veces mayor que la oscilación de la presión en la onda incidente; por esto era lícito despreciar, respecto a dp, las variaciones exteriores de presión debidas a la onda que llega.

La energía sonora almacenada de este modo en el resonador, y la difundida por el resonador durante régimen estacionario hacia el ambiente que le rodea, y, por fin, la transformada eventualmente en otra forma (como, por ejemplo, en calor dentro del resonador), se han tomado de la onda que llega. Como se ha dicho al hablar de la caja de resonancia de la figura 550, el resonador absorbe la energía de la onda incidente no sólo de una área S correspondiente a la boca del resonador, sino de una área notablemente mayor, relacionada de un modo no fácilmente determinable con la longitud de onda λ de resonancia.

§ 266. Receptores del sonido acoplados a resonadores. Si uno de los dispositivos indicados en el § 264 se acopla a un resonador variable, graduado, que pueda ser puesto en concordancia con la frecuencia que llega, se obtendrán dos ventajas:

1.º Se podrá determinar la frecuencia del sonido que llega. No es una determinación muy precisa (error del 1 %), pero a menudo resulta suficiente.

2.º Se amplificará algunas decenas de veces la sensibilidad del dispositivo de medición.

El dispositivo sensible del receptor sonoro tiene que encontrarse en el sitio del resonador en donde se halla exaltada la amplitud de presión o en el lugar en donde se exalta la amplitud de velocidad,

según que el receptor sea adecuado para medir una u otra de estas dos cosas.

Así, el disco de Rayleigh se monta a menudo en el cuello de un resonador [fig. 555, *a*), visto en sección desde arriba; *b*), visto de frente], en donde es máxima la amplitud de velocidad de las partículas.

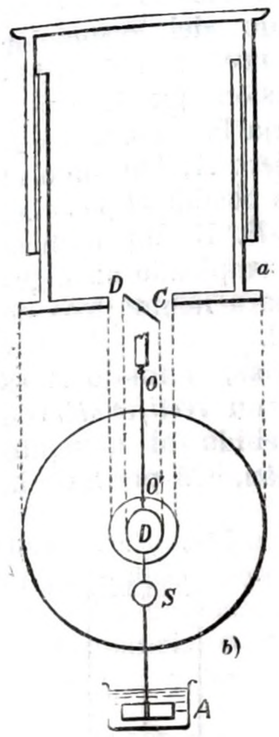


Fig. 555

Tanto si se trata del disco de Rayleigh como del micrófono de hilo caliente, el empleo de un resonador puesto al unísono con el sonido que llega, además de la ventaja de aumentar la sensibilidad, ofrece otra que consiste en que al montarlos en el cuello del resonador se hallan defendidos contra las corrientes accidentales de aire que perturbarían mucho su empleo.

Análogamente, la membrana sensible a las presiones, de la figura 547, puede montarse en el fondo de un resonador, en donde existe un vientre de presión. Se tiene así el *resonador de membrana* de M. Wien (figura 556), en el cual la vibración de la membrana A, que es una finísima lámina metálica ondulada, pone en vibración una palanca óptica: el hacecillo luminoso, procedente de un agujerito fuertemente iluminado, se refleja en el espejo s y es recogido por el anteojo de observación; la imagen del agujerito aparece al observador en forma de una rayita luminosa, cuya longitud indica la amplitud de vibración de la membrana y, por tanto, la amplitud de presión dentro del resonador.

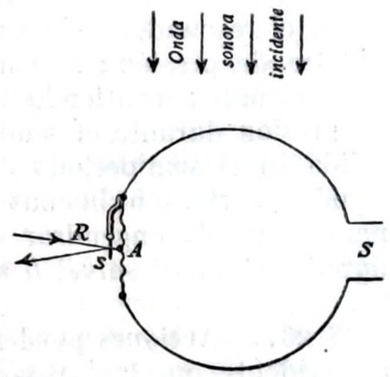


Fig. 556

El resonador de membrana de Wien permite también determinar fácilmente la *amplificación* que se obtiene mediante el resonador.

Si la onda sonora, en resonancia con el resonador, se dirige hacia éste en el sentido que indican las flechas (fig. 556), y si la boca S del resonador se ha cerrado herméticamente con una pared rígida, el aparato funciona como la cápsula manométrica de la figura 547; la palanca óptica indica una pequeña amplitud de vibración de la membrana, debida a la variación de la presión *exterior*, mientras que la presión interior del resonador es prácticamente constante. Abierta la boca S, la palanca óptica indica una amplitud mucho mayor de vibración de la membrana (hasta unas cuarenta veces). Ahora se mide la oscilación de resonancia de la presión *interior*.

mientras que la presión exterior se puede considerar constante en una primera aproximación.

El manómetro de válvula de la figura 557 *(válvula de Kundt)* es también adecuado para la medida de la oscilación de presión en el fondo de un resonador. La delicada membrana de caucho P cierra el agujero A del fondo del resonador e impide el paso del aire en el sentido $P \longrightarrow A$, porque la presión que tiende a producir este paso empuja la membrana P contra el borde del agujero A, haciendo el cierre hermético. Pero es posible el paso del aire en el sentido $A \longrightarrow P$. Es un artificio semejante al que se ha empleado en algunos tipos de válvulas para neumáticos de bicicletas o de automóvil.

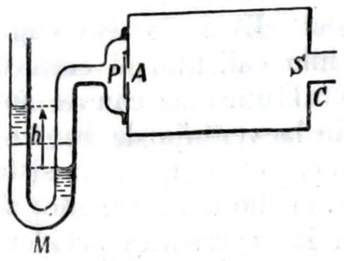


Fig. 557

Si el resonador es asiento de ondas estacionarias, el fondo A es vientre de presión ; la válvula P funciona como un *rectificador* de la presión, permitiendo la entrada del aire debida al aumento de presión durante el semiperíodo de la compresión, sin permitir la salida en el semiperíodo de enrarecimiento. Un sonido fuerte, en buenas condiciones de resonancia, puede engendrar en el manómetro de líquido M un desnivel h superior a 10 cm_{H_2O}.

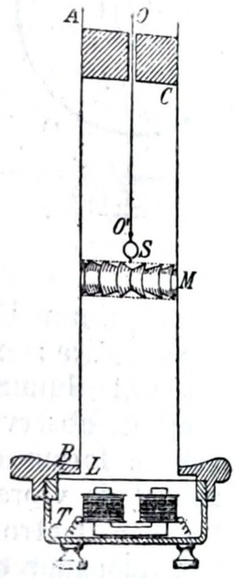


Fig. 558

§ 267. Acciones ponderomotrices del sonido. Es evidente que las vibraciones del sonido producen vibraciones de los cuerpos sobre los cuales incide. Pero se entiende por *acciones ponderomotrices del sonido* aquellas acciones que no tienen carácter vibratorio. Una onda sonora, batiendo sobre un obstáculo que la refleja o la absorbe, produce en él una presión. Es como si la onda que llega golpease el obstáculo sobre el cual debe rebotar. La existencia de esta *presión del sonido*, en realidad muy débil, se ha podido observar experimentalmente, y se deduce teóricamente a partir de las leyes de propagación y de reflexión del sonido.

También el disco de Rayleigh nos presenta un ejemplo de acción ponderomotriz del sonido.

El disco, que inicialmente forma un ángulo de 45° con la dirección de las vibraciones, tiende a colocarse de modo que su plano sea normal a dicha direcccción, esto es, a la dirección de propagación del sonido, y, si puede girar libremente, alcanza esta posición de equilibrio estable después de cierto número de oscilaciones amortiguadas.

Se obtiene una acción ponderomotriz más enérgica, continua, pero que no puede expresarse fácilmente con una fórmula teórica,

sustituyendo el disco de Rayleigh por un molinete M, cuyo eje coincide con la dirección del sonido, y cuyas aletas, curvadas en forma de teja, tienen, respecto a dicha dirección, la disposición que se indica en la figura 558. Este molinete, bajo la acción del viento que se dirige a lo largo de su eje, gira en un sentido independiente del sentido del viento. Montado en un vientre de vibración de un resonador, se pone en rapidísima rotación.

Produciendo ondas estacionarias (tubo de Kundt) mediante el sonido emitido por la lámina de un teléfono alimentado con una potencia del orden de un watt y cuya frecuencia es de 1200 hertz, en los vientres de las ondas estacionarias se han observado momentos del par motor superiores a 50 dinas·cm, que son enormes respecto a los que pueden medirse mediante el método de POGGENDORFF. Este molinete, convenientemente calibrado, puede sustituir ventajosamente, según PERUCCA, al disco de Rayleigh.

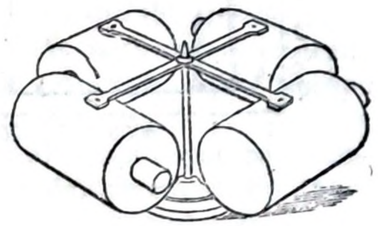


Fig. 559

Otro ejemplo de enérgica acción ponderomotriz lo da el aparato de la figura 559. Cuatro ligeros resonadores de hoja de aluminio, afinados para la misma nota, constituyen un molinete.

Si un diapasón, afinado para la misma nota y provisto de caja de resonancia, se pone en vibración enérgica y la boca de su caja de resonancia se presenta a la embocadura de uno u otro de los resonadores, el molinete se pone en rotación : las bocas de los resonadores marchan hacia atrás.

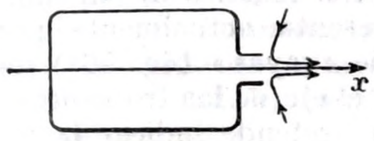


Fig. 560

En efecto, en un resonador excitado se produce un flujo de aire tal como indican las flechas curvas de la figura 560, y según el teorema de la conservación de la cantidad de movimiento tiene que retroceder el resonador (compárese con el molinete hidráulico).

§ 268. Análisis de los sonidos. Se ha supuesto hasta ahora que se estudiaban sonidos simples, aunque algunas consideraciones del § 264 son aplicables también a los sonidos compuestos. En tal caso, en los aparatos del § 266 tenemos ya los dispositivos necesarios para obtener un *análisis del sonido*. Así como el espectroscopio descompone una luz en las radiaciones simples que la integran *(luces monocromáticas)* y puede dar la frecuencia (o la longitud de onda) y la intensidad de cada una de sus radiaciones simples, también un *analizador acústico* tiene por objeto determinar las frecuencias y las intensidades de los sonidos simples que componen un sonido compuesto, verificando así su *análisis*. Por analogía con el caso óptico, también se dice que el analizador acústico es un « espectroscopio »

acústico, que da el *espectro acústico* de los sonidos que se estudian, y se dice que los sonidos simples que lo componen son sonidos «monocromáticos».

Constituye un analizador acústico el resonador variable de la figura 553, cuando está graduado para las frecuencias de resonancia

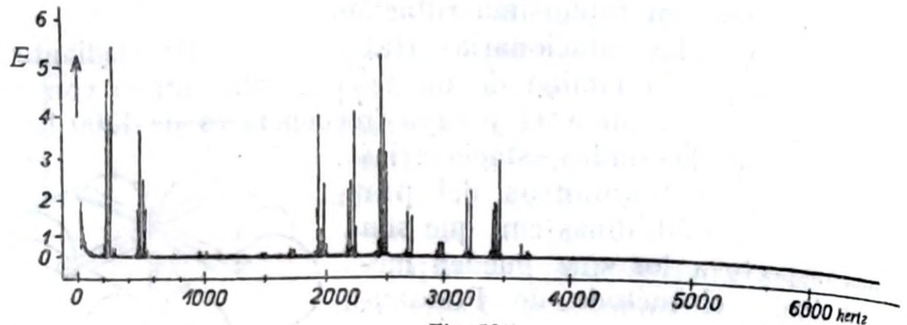


Fig. 561

y provisto del disco de Rayleigh o de una lámina manométrica (fig. 556): variando la capacidad del resonador se varía gradualmente la frecuencia de resonancia.

Cuando ésta es igual a una de las frecuencias que existen en el sonido compuesto que se estudia, el resonodor entra en resonancia, y el disco de Rayleigh o la lámina del fondo *A* (fig. 556), señalan la existencia de la resonancia.

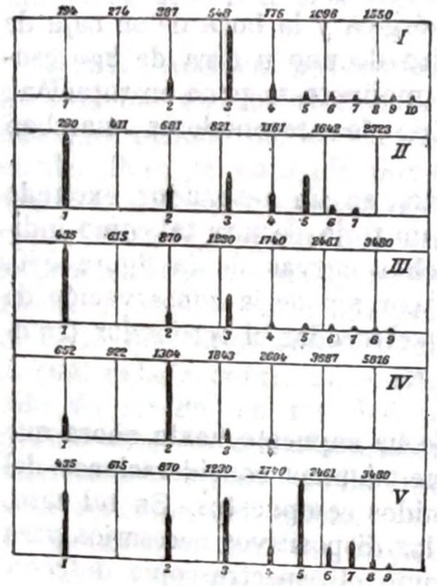


Fig. 562

El espectro acústico de un sonido se representa actualmente por una serie de «rayas» (fig. 561) repartidas en el eje de las frecuencias, cuya altura pretende indicar la intensidad relativa de los diversos sonidos componentes.

A causa de las dificultades que presenta la medida absoluta de las intensidades del sonido para todas las frecuencias, se obtiene mayor precisión en la determinación de las frecuencias que en la de las intensidades, incluso si sólo se trata de intensidades relativas.

El interés técnico alcanzado por el análisis de los sonidos al extenderse la radiodifusión, el gramófono, el cine sonoro, y al perfeccionarse la telefonía, ha movido a los físicos a mejorar los métodos de análisis, creando *analizadores eléctricos* de los sonidos, de diversos tipos, en los cuales se obtiene un análisis rápido y preciso del sonido, transformando éste en corriente eléctrica variable mediante un

micrófono. La *corriente microfónica* así obtenida es la copia de la vibración sonora. Después se efectúa el análisis de esta corriente variable mediante dispositivos eléctricos (v. tomo II). Se determinan las frecuencias de los sonidos componentes mediante dispositivos muy precisos basados en las pulsaciones; las intensidades componentes se deducen a base de medidas de intensidades de corrientes eléctricas, que aunque no siempre representan con seguridad la intensidad del sonido componente en medida absoluta, tienen la ventaja de ser muy cómodas.

El espectro acústico de la figura 561 se ha obtenido en 20 seg mediante el registro fotográfico obtenido por medio de uno de estos analizadores eléctricos y se refiere al sonido de la vocal *i* cantada con la nota la_2 ($\nu = 217$ hertz) y «mantenida» durante aquel tiempo por la persona con la cual se ha experimentado.

En la figura 562, I, II, III y IV, se representan los espectros acústicos de los sonidos emitidos por las cuatro cuerdas de un violín STRADIVARIUS. Las frecuencias fundamentales de estos sonidos (en la escala de temperamento igual) son, respectivamente:

$\nu' = 194$;	$\nu'' = 290$;	$\nu''' = 435$;	$\nu'''' = 652$	hertz
sol_2	re_3	la_3	mi_4	

Obsérvese lo exaltados que quedan el tercer armónico en el sonido emitido por la primera cuerda, y el segundo armónico en el de la cuarta cuerda; nótese también lo débil que es el sonido fundamental dado por la primera cuerda, sonido que, sin embargo, caracteriza la altura del sonido en lo que respecta a sus efectos musicales.

En la figura 562, V, se da, por fin, el espectro acústico del sonido emitido por la tercera cuerda de un violín corriente ($\nu''' = 435$ hertz, la_3).

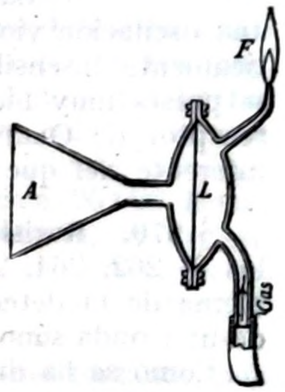


Fig. 563

§ 269. **Llamas sensibles.** Tratemos otra vez de la cápsula manométrica de la figura 547. Se supone que el interior de la cápsula está lleno de gas del alumbrado que alimenta, bajo presión constante, una llamita *F* (fig. 563). El embudo *A* sirve para recoger la energía sonora incidente. La vibración de la lámina, debida al vientre de presión que se forma sobre la membrana de la cápsula (§ 264, 2.º), propaga en el gas que alimenta la llama variaciones de presión, que se manifiestan en forma de variaciones de longitud de la llamita *F*.

Observada ésta por reflexión en un espejo giratorio (compárese con fig. 138), se observa una cinta luminosa, cuyo borde superior es dentado, que, gracias a la pequeña inercia de la llama, repite con

bastante fidelidad las variaciones de presión en la lámina de la cápsula, a las que se debe dicho dentado.

Este artificio, de carácter solamente cualitativo, ha sido durante muchos decenios el único capaz de indicar la función $\Delta p = \Delta p\,(t)$ que caracteriza la vibración de un sonido más o menos complejo.

Actualmente todavía tienen algún interés las llamas sensibles porque pueden señalar sonidos de frecuencia ν no audible, tanto ultrasonidos ($\nu > 20\,000$, hasta más allá de 100 000 hertz) y subsonidos ($\nu < 20$ hertz).

La llama sensible más adecuada para indicar la presencia de ultrasonidos es la que se indicó en el § 240.

En fonotelemetría (§ 285, *a*]) se necesita un aparato para señalar subsonidos con el objeto de conocer la llegada del subsonido producido en el disparo de un cañón *(onda de boca)*.

Esta onda, cuya frecuencia se halla en el límite de la gama audible y frecuentemente debajo, se oye por la sensación de ruido que acompaña a la llegada al oído de cualquier variación brusca de presión; no debe confundirse con el golpe sonoro desgarrador que se oye al llegar la *onda balística* producida por el proyectil en su trayectoria (§§ 283 y 285, *a*]).

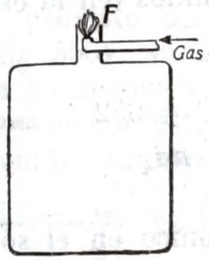


Fig. 564

Entre los diversos dispositivos empleados para señalar la llegada de la onda de boca ha dado buenos resultados una llama sensible F (fig. 564) que quema en la embocadura de un gran recipiente cuya capacidad es de $15 \div 20$ dm³. La onda incidente produce una oscilación violenta de la llama, y ésta, por el contrario, es prácticamente insensible a los sonidos de frecuencia elevada. También se presta muy bien para señalar la llegada de la onda de boca el receptor de OLLIVIER, que es un dispositivo de válvula, no muy diferente del que representa la figura 557.

§ 270. Registro de los sonidos. Todos los medios indicados en los §§ 262, 264, 266 y 268, sólo resuelven imperfectamente el problema de la determinación de una onda elástica, y en particular de una onda sonora en el aire.

Como se ha dicho en el § 262, sólo se tiene la solución completa del problema cuando se determina la función $s = s\,(t)$, es decir, la elongación s de una partícula del medio elástico en función del tiempo.

Un aparato registrador del sonido debe ser capaz de registrar *fielmente* esta función $s = s\,(t)$. Se trata, pues, de un registrador de elongaciones; se plantea análogamente el problema de un registrador de velocidades $u = \dfrac{\partial s}{\partial t} = u\,(t)$ o de un registrador de presiones $(p - p_0) = \Delta p = \Delta p\,(t)$.

En el caso conceptualmente más simple, se efectúa el registro sobre un plano cartesiano, en el que el eje de abscisas es el eje de los

tiempos, y el eje de ordenadas, el de los valores de s, representados a una escala conveniente. El registro será *fiel* cuando la curva dibujada por el aparato tiene por ecuación, en la escala adecuada,

$$s = s\,(t). \qquad [1]$$

La dificultad del problema del registro fiel del sonido consiste en que las variaciones de la función $s = s\,(t)$ son extremadamente rápidas; en el sonido incidente pueden estar contenidos sonidos simples componentes cuya frecuencia, sólo en la gama de los sonidos audibles, puede llegar a más de 10 000 hertz; el aparato registrador ha de ser capaz de obedecer, hasta estas frecuencias, con su órgano inscriptor. Y como el valor real de s es siempre muy pequeño (a menudo sólo es de algunas micras), el registro debe efectuarse con una *amplificación* elevadísima en el eje de las s.

La resolución del problema, alcanzada por EDISON con su *fonógrafo*, sólo ha llegado a un grado satisfactorio en este último decenio, gracias a la posibilidad de emplear amplificadores de válvula termoelectrónica.

Actualmente se obtienen registros sonoros con un grado admirable de fidelidad, tanto para fonógrafo como para cinta sonora. Trataremos solamente del principio del método de registro sonoro en la forma más adecuada para las investigaciones de acústica.

El órgano receptor del sonido es una membrana finísima ($0{,}02 \div 0{,}003$ mm) de mica, de vidrio o de duraluminio, sobre la cual actúa la onda sonora que se ha de registrar, lo mismo que sobre la cápsula manométrica de la figura 547. Esta membrana se halla fuertemente tensa para que su período propio de vibración sea muy elevado respecto a las vibraciones de máxima frecuencia que ha registrar; nótese que se debe llegar a registrar hasta una frecuencia de $8000 \div 10\,000$ hertz para un buen registro de la voz. Se llega hasta una frecuencia propia de la membrana de casi 20 000 hertz. El amortiguamiento de la membrana debe ser notable, lo que se logra reduciendo a pocas centésimas de milímetro el espesor de la almohadilla de aire comprendida entre la lámina y el fondo de la cápsula.

En estas condiciones, la lámina efectúa vibraciones forzadas, que repiten con suficiente fidelidad las vibraciones sonoras incidentes (§ 150, *e*]). Pero a causa de la notable tensión que tiene que aplicarse para elevar el período propio de la lámina, la amplitud de vibración de ésta es extremadamente pequeña, del orden de algunas micras como máximo.

Gracias a una técnica constructiva muy perfeccionada, y al conocido dispositivo de la palanca óptica (v., p. ej., fig. 63), puede transformarse dicha vibración en la oscilación rotatoria de un ligerísimo espejito que está ligado con la lámina; el espejito constituye a su vez un nuevo sistema oscilante, cuya frecuencia propia ha de ser más

elevada que la máxima frecuencia a registrar, y cuyo amortiguamiento debe ser notable.

Un hacecillo de luz procedente de un manantial puntiforme y reflejado en el espejito S (fig. 565) forma la imagen nítida del manantial sobre una película cinematográfica B que corre con movimiento uniforme en dirección perpendicular al movimiento de oscilación que el espejito imprime a la imagen del manantial. El movimiento uniforme de traslación de la película da el eje de los tiempos, y el movimiento oscilatorio del espejito produce la elongación de la imagen luminosa sobre la cinta.

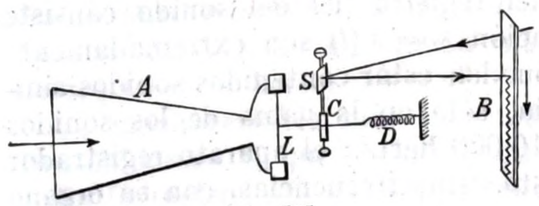


Fig. 565

La membrana de la figura 547 es un receptor de presión; si el dispositivo descrito es fiel, registra una curva que es la representación gráfica de la función $\Delta p = \Delta p\,(t)$.

La figura 565 da el esquema de los primeros y más sencillos aparatos de este género, el *fonodeik* de MILLER, que alcanza amplificaciones de 2 500, aproximadamente; es decir, la elongación de la imagen luminosa sobre la película fotográfica es 2 500 veces superior a la efectiva de la membrana. Entre el eje y el espejito suman una masa de unos 20 mg_m. Un embudo recoge la onda sonora y exalta la acción de ésta sobre la membrana.

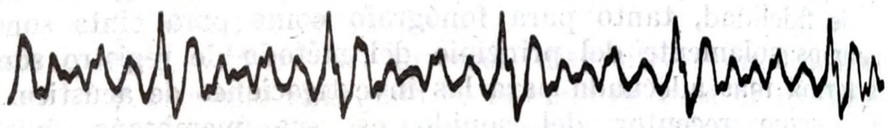


Fig. 566

La figura 566 reproduce un registro sonoro obtenido con el fonodeik.

En un aparato tan sencillo, necesariamente se ha tenido que sacrificar exactitud para ganar en sensibilidad. Así dentro de las frecuencias audibles se encuentran campos de resonancia de la membrana. En la figura 567 se representa la sensibilidad de un fonodeik en función de la frecuencia. Las ordenadas solamente tienen un significado cualitativo pero, a pesar de esto, es evidente que esta curva de sensibilidad tiene algunas frecuencias privilegiadas.

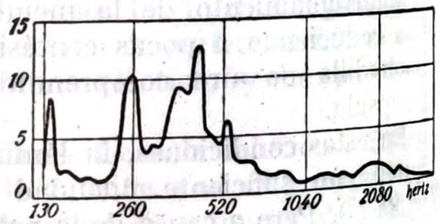


Fig. 567

Este defecto queda muy reducido en los micrófonos modernos. Así en la figura 568 se representa la curva de sensibilidad de un micrófono-condensador de RIEGGER (v. tomo II).

Actualmente, en lugar del registro mecánico-óptico de la vibración sonora, se prefiere un registro eléctrico obtenido del siguiente modo: La lámina que recibe la onda sonora es la lámina de un micrófono. En un micrófono apto para medir la presión $\Delta p = \Delta p\,(t)$ de la onda sonora incidente, el problema de la fidelidad (micrófono *ortofónico*) es análogo al ya reseñado en el § 264, 2.º. Sin embargo, la condición que aquí debe satisfacer el micrófono (y el amplificador termoelectrónico correspondiente) es más completa: el micrófono es «fiel» si a la salida del amplificador se obtiene una f. e. m. F_e o una intensidad de corriente $i = i\,(t)$ proporcional *en cada instante* a Δp.

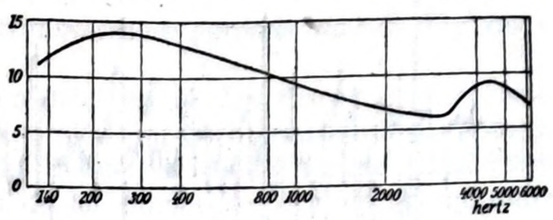


Fig. 568

Esto es, debe ser:

$$\left.\begin{array}{l} F_e = k \cdot \Delta p\,(t) \\ \text{o mejor} \\ i = k \cdot \Delta p\,(t) \end{array}\right\} \text{con } k \text{ constante independiente de } \Delta p.$$

La corriente microfónica tiene una potencia original debilísima (a menudo sólo es del orden de 10^{-9} watt), pero los amplificadores termoelectrónicos llegan a amplificarla sin distorsión (§ 150, *e*]) hasta una potencia que alcanza en radiotelefonía centenares de kilowatt. Para el registro del sonido no se necesita tanto: basta con que la corriente microfónica sea amplificada hasta la potencia de algunos watt. La *corriente fónica* así obtenida es lanzada a un robusto *oscilógrafo* (v. también tomo II). En la figura 569 se indica esquemáticamente un oscilógrafo tipo DUDDEL. El equipo móvil está constituído por dos hilos finos AB y CD muy tensos, colocados entre los polos de un potente electroimán, y recorridos por la corriente fónica. El equipo $ABCD$ tiende a girar en uno u otro sentido según sea el de la corriente que lo recorre. Un espejito S y el método de LORD KELVIN permiten observar las vibraciones del equipo bajo la forma de vibraciones de un punto luminoso sobre una pantalla. Supongamos que estas oscilaciones se efectúan horizontalmente, y sustituyamos la pantalla por una película fotográfica que se mueve con velocidad uniforme en sentido vertical. Obtendremos sobre la película el registro sonoro en una forma completamente análoga a como se obtiene con el fonodeik.

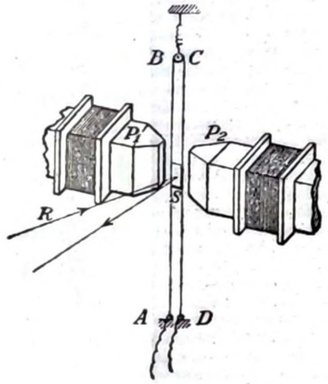


Fig. 569

La ventaja del dispositivo eléctrico consiste en que, gracias a la fuerte energía disponible en la corriente fónica, se obtienen oscilaciones suficientes del equipo, a pesar de que éste está constituído

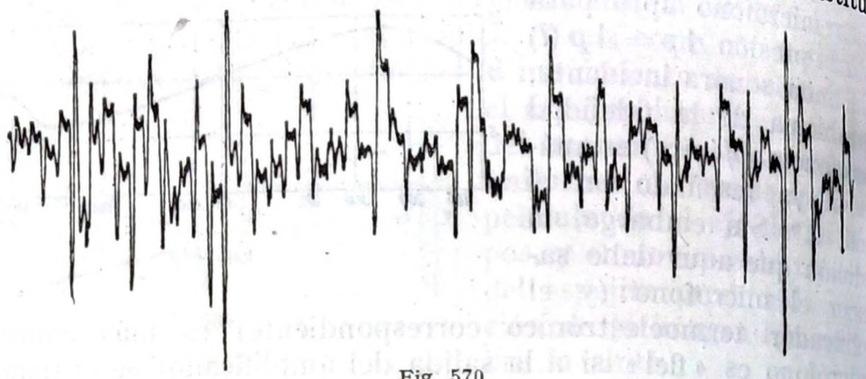


Fig. 570

por hilos muy tensos, con el fin de que la frecuencia propia del equipo sea superior a la máxima frecuencia que se quiere registrar.

Este registro fotográfico de la vibración sonora [$s = s\,(t)$ o $\Delta p = \Delta p\,(t)$], efectuado con un aparato fiel, constituye lo más completo que pueda desearse en la medición del fenómeno sonoro.

Pero si queremos deducir del registro obtenido los sonidos simples que constituyen un sonido complejo, nos encontramos frente a

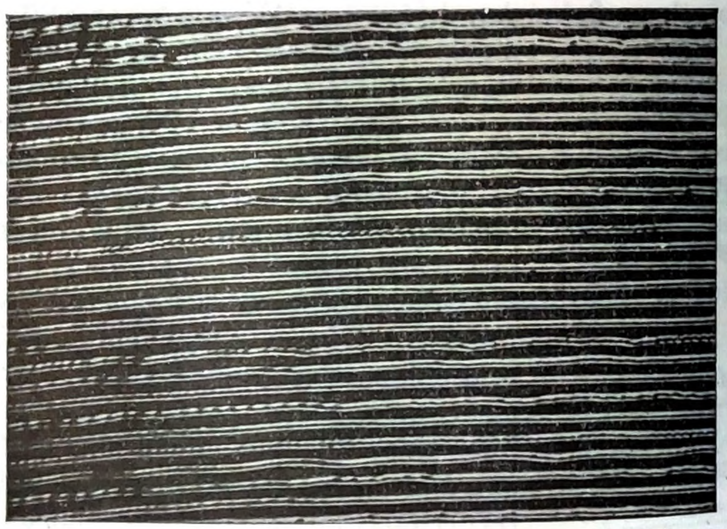


Fig. 571

un problema que, aunque sólo es de orden geométrico, es extremadamente complicado y enojoso.

Basta, para convencerse, inspeccionar someramente la curva de la figura 570, que es el registro del sonido de una orquesta para un intervalo de tiempo de unos 0,2 segundos (¡!).

Conviene volver a los analizadores físicos de los sonidos descritos en el § 268.

Si la corriente fónica, en lugar de ser enviada al equipo de un oscilógrafo, gobierna la vibración de un agudo buril, se puede obtener la incisión sobre cera o sobre un metal blando como el aluminio de un surco caprichosamente ondulado (fig. 571) que repite en sus microscópicas ondulaciones transversales *(gramófono)* la ley de vibración del sonido primario.

Esto constituye la incisión eléctrica de los discos gramofónicos. En la figura 571 se ve una porción de disco gramofónico, fotografiado con un aumento de ocho diámetros; cada par de líneas luminosas paralelas muestra uno de los numerosos surcos gramofónicos vecinos impresos en el disco.

También puede efectuarse la incisión sobre celuloide o puede reducirse al finísimo surco que traza la punta sobre un vidrio o un tambor de acero ahumados, dispositivo cómodo muy empleado en física (§ 19).

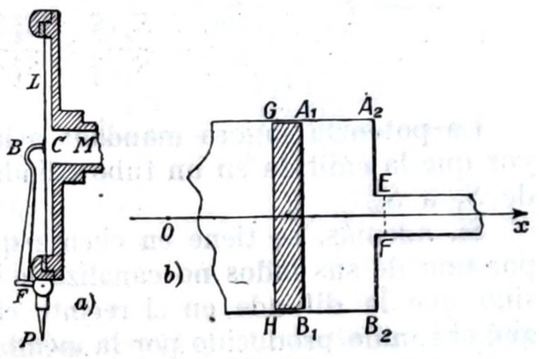


Fig. 572

§ 271. Generadores secundarios de sonido. Son *generadores secundarios*, o *reproductores de sonidos*, los aparatos que producen energía sonora a expensas de energía que fué ya anteriormente, en todo o en parte, energía sonora.

Al contrario de los generadores primarios, su principal valor consiste en ser «fieles», o sea, en estar desprovistos de un timbre propio, como ocurre a veces con los generadores primarios (§ 261).

Dos ejemplos característicos son el gramófono y el teléfono.

a] **Gramófono.** La energía sonora primaria, convenientemente amplificada, sirve para producir el registro del sonido sobre el disco gramofónico.

En el gramófono reproductor, la punta P [fig. 572, *a*)], obligada por el peso del aparato BM a seguir el curso gramofónico impreso en el disco, pone en vibración el diafragma L, que se convierte en manantial de sonido. Éste es canalizado en la trompa, cuya forma (determinada de un modo más bien empírico) es tal que no produzca una exaltación irregular de los diversos sonidos.

Se obtiene un notable aumento de la potencia sonora mediante una estrecha cámara de aire C comprendida entre el diafragma vibrante L y la embocadura M de la trompa. En efecto, el aparato puede compararse esquemáticamente con un émbolo $A_1 B_1$ [figura 572, *b*)] que vibra según el eje de las x en un cilindro $A_1 A_2 B_1 B_2$, de sección S_1, que se estrecha bruscamente y tiene en EF la sección $S_2 \ll S_1$. Si las dimensiones de la cámara de aire $A_1 B_2$ son pequeñas respecto a la longitud de onda del sonido producido por $A_1 B_1$,

el aire puesto en movimiento por A_1B_1 tiene, en cada instante, el mismo volumen que el aire obligado a vibrar en la sección estrecha EF. Por tanto, la amplitud de vibración a_2 del aire contenido en EF y la amplitud de vibración a_1 de A_1B_1 se encuentran entre sí en razón inversa de las respectivas secciones S_2 y S_1:

$$a_1 S_1 = a_2 S_2.$$

La potencia sonora w, es decir, la energía emitida en la unidad de tiempo, es proporcional a S y a a^2. Por tanto, mientras la potencia sonora w_1 emitida por A_1B_1 en un tubo cilíndrico (como la que desde GH se propaga en el sentido de las x negativas) es proporcional a $S_1 a_1^2$; la w_2, canalizada en EF, es proporcional a $S_2 a_2^2$; esto es:

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{S_2 a_2^2}{S_1 a_1^2} = \frac{S_2^2 a_2^2}{S_1^2 a_1^2} \cdot \frac{S_1}{S_2} = \frac{S_1}{S_2}.$$

La potencia sonora mandada a la trompa del gramófono es mayor que la emitida en un tubo cilíndrico de sección S_1, en la relación de S_1 a S_2.

Si, además, se tiene en cuenta que el diafragma L [fig. 572, *a*)] por uno de sus lados no canaliza la vibración en un tubo cilíndrico, sino que la difunde en el recinto circundante, se comprenderá por qué el sonido producido por la membrana del gramófono mana por la trompa y, en cambio, es prácticamente inaudible el sonido que llega directamente de la cara exterior del diafragma.

La exaltación de la potencia sonora se obtiene a expensas de la mayor potencia necesaria para hacer vibrar el émbolo A_1B_1 [fig. 572, *b*)] cuando, en su proximidad, el cilindro presenta el estrechamiento EF. El aire de la estrecha cámara A_1B_2 resulta más difícilmente compresible a consecuencia del estrechamiento EF.

Si la distancia A_1A_2 no fuese pequeña respecto a la longitud de onda, el fenómeno cambiaría completamente: la potencia sonora emitida por A_1B_1 tendría el valor que corresponde al conducto cilíndrico. La potencia sonora que llega a A_2B_2 se transmite, en parte, a lo largo del tubo más estrecho, y en parte se refleja. La suma de las potencias reflejada y transmitida es igual a la potencia incidente. La onda sonora reflejada, volviendo a A_1B_1, reacciona sobre el manantial, y éste, para perseverar en su vibración, deberá efectuar un trabajo externo diferente del que sería necesario si A_1B_2 fuese un cilindro indefinido.

b] **Teléfono.** La energía sonora primaria ha actuado sobre un micrófono produciendo la corriente eléctrica microfónica que, directamente o después de amplificada, actúa sobre el teléfono. Éste es el generador secundario del sonido.

En el caso de la radiotelefonía, la cadena de las transformaciones de la energía, desde la energía sonora primaria que impresiona el micrófono en la estación emisora hasta la energía sonora regenerada por el teléfono en la estación receptora, es más complicada.

En el caso del cine sonoro, la energía sonora primaria origina primeramente un registro óptico o gramofónico del sonido, y algunas veces magnético. A partir de este registro se obtiene de nuevo, sincrónicamente con la proyección de la cinta, la corriente fónica que alimenta los potentes teléfonos receptores, llamados *altavoces*.

El reproductor del sonido es un teléfono, incluso en el caso del gramófono cuando se emplea el *pick-up* o *reproductor de sonido*. En efecto, este pick-up (fig. 573) está constituído por un núcleo XY que oscila alrededor del eje O y termina en la punta gramofónica X, Ésta, conducida por el surco del disco gramofónico, efectúa un movimiento oscilatorio.

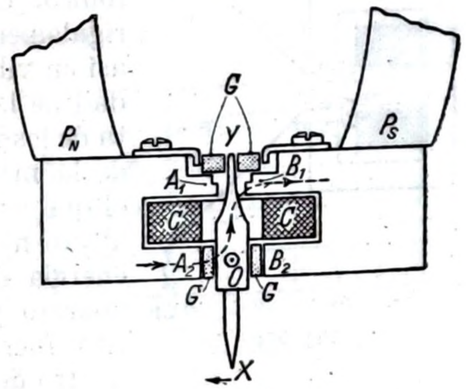


Fig. 573

En condiciones de reposo ha de suponerse que la parte OY del núcleo es simétrica respecto a las extremidades polares A_1A_2, B_1B_2 que terminan el imán en herradura $P_S P_N$. Si, por efecto de su oscilación, X se aparta hacia la izquierda, y por lo tanto Y hacia la derecha, quedá perturbada la simetría y se tienen líneas de inducción dirigidas a lo largo de OY en el sentido que indica en la figura la línea de trazos; si Y se aparta hacia la izquierda, se tienen líneas de inducción dirigidas según YO, Por consiguiente, al vibrar X se altera el flujo de inducción ligado al carrete CC. En éste aparece una fuerza electromotriz de inducción capaz de engendrar la corriente microfónica.

Ésta, convenientemente amplificada, alimenta un altavoz, que sustituye al sistema de la membrana y de la trompa de los gramófonos corrientes (fig. 572).

G, G son revestimientos de goma elástica

En cualquier caso (receptor telefónico, casco, difusor o altavoz) se tiene una corriente eléctrica fónica $i = i(t)$ que repite el fenómeno sonoro primario y que debe ser capaz de reproducir vibraciones sonoras en el aire. Y esto debe hacerlo fielmente: si la onda sonora primaria estaba caracterizada por la elongación $s_1 = s_1(t)$ de las partículas vibrantes del aire, la onda reproducida debe tener una elongación tal $s_2 = s_2(t)$ que se tenga en cualquier instante

$$s_2 = k \cdot s_1$$

siendo k un factor de amplificación del reproductor.

El artificio que, a partir de la corriente fónica $i = i(t)$, sirve para obtener la vibración de la lámina del teléfono, del difusor o del altavoz, utiliza de modos muy diversos una cualquiera de las acciones

ponderomotrices electromagnéticas o electrodinámicas de la corriente eléctrica.

En los *altavoces electrodinámicos*, una bobina B (fig. 574), recorrida por la corriente fónica de potencia suficientemente amplificada, se encuentra entre las extremidades polares NN y S de un potente electroimán. Bajo la acción del campo magnético de éste, la bobina está sometida a una fuerza dirigida en el sentido SC o en el sentido CS, según sea el sentido de la corriente fónica. La membrana cónica $MOOM$, unida rígidamente en OO a la bobina B, se pone así en vibración. Cooperan a una buena fidelidad de la reproducción la construcción robusta de los soportes, la forma y la masa adecuada de la membrana, así como el dispositivo con el que va unida la orilla MM de la membrana al aro fijo $A\,A$; interviene también la notable energía de vibración puesta en juego en tal aparato y el amortiguamiento electromagnético fuerte de la bobina, obligada a vibrar dentro del potente campo magnético NSN.

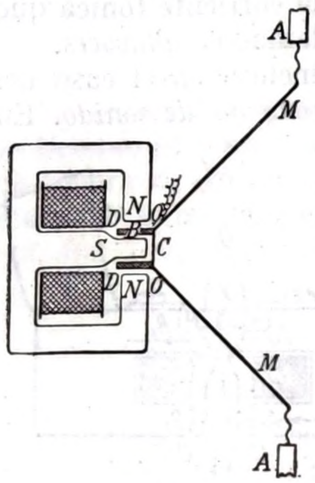


Fig. 574

También se asegura ahora la fidelidad necesaria mediante las conocidas condiciones (§ 150, *e*]): frecuencia propia de la membrana suficientemente elevada y amortiguamiento suficiente de sus vibraciones libres.

Hay que tener presente que la fidelidad obtenida en estas reproducciones sonoras no es perfecta; sin embargo, como se deduce de las curvas de sensibilidad análogas a las de las figuras 567 y 568, relativas a los receptores registradores de sonido, fonógrafos, teléfonos y altavoces, reproducen con suficiente fidelidad las frecuencias comprendidas entre 40 y 8000 hertz. La reproducción de la música es excelente; la de la voz es ya más que satisfactoria, pero el timbre resulta sensiblemente alterado, lo que constituye un grave inconveniente desde el punto de vista artístico, y especialmente la reproducción de algunas consonantes (como *s* y *f*) es todavía defectuosa. En los aparatos más perfeccionados hay simultáneamente dos (o más) altavoces, destinado cada uno a la reproducción fiel de los sonidos en una parte de la gama entera que se quiere obtener (por ejemplo, $30 \div 12\,000$ hertz).

Para los efectos prácticos de la comprensión de la palabra, la figura 575 indica cómo varía el porcentaje de las palabras comprendidas si el reproductor no reproduce los sonidos situados por encima de una cierta frecuencia (curva seguida) o por debajo de una cierta frecuencia (curva de trazos). Por ejemplo, un teléfono incapaz de reproducir sonidos de frecuencia superior a 3000 hertz, permitiría todavía comprender el 85 % de las palabras de un discurso, lo cual es a menudo suficiente en la práctica.

§ 272. Voz. El órgano de la voz es comparable a un instrumento de viento con lengüeta. El aire que procede de los pulmones atraviesa la tráquea, pone en vibración las dos *cuerdas* o *labios vocales* que, colocados en la laringe, están sostenidos por músculos adecuados para casi cerrar la embocadura de la tráquea. El pedazo en el cual las cuerdas vocales casi se tocan es la *glotis vocal* y el otro en que quedan desunidas es la *glotis respiratoria*.

La corriente de aire procedente de los pulmones produce la vibración de las cuerdas vocales, y los músculos que regulan su tensión gradúan la altura del sonido.

Pero este sonido es extraordinariamente complejo. Las cavidades bucal y nasal funcionan como resonadores, de modo que algunos de los sonidos componentes quedan particularmente reforzados por resonancia según la amplitud y la forma que se da a la cavidad bucal. Esto es lo que sucede durante el canto de las vocales.

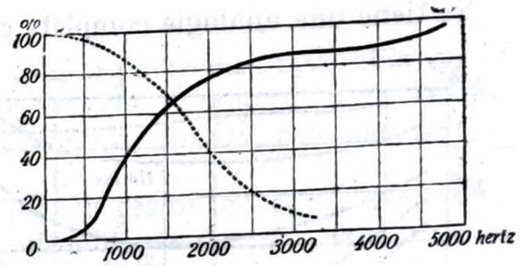


Fig. 575

Además, entran en acción los labios, la lengua, el paladar y los dientes para producir los ruidos, generalmente sin carácter musical, que constituyen las consonantes.

En el caso del canto de las vocales se obtiene una u otra vocal según la forma y la amplitud de la cavidad bucal, y una u otra nota según la tensión de las cuerdas vocales.

Los sonidos reforzados por la cavidad bucal se llaman *formantes*, y para cada persona y para cada vocal son casi independientes de la altura de la nota con que se canta, porque al variar esta nota, permanece prácticamente sin variación, durante el canto de una vocal, la forma que se da a la cavidad bucal.

La altura del sonido de la voz varía entre 65 y 290 hertz para la voz de *bajo*, y de 260 a poco más de 1000 para la voz de *tiple*. Los armónicos de estos sonidos y los sonidos producidos por las consonantes silbantes tienen intensidad sensible para frecuencias que rebasan los 10 000 hertz.

La potencia sonora emitida por la voz normal es, por término medio, del orden de $100\ \frac{\text{erg}}{\text{seg}}$; un 90 % de dicha potencia corresponde a frecuencias de $40 \div 1500$ hertz.

§ 273. Oído. El receptor natural del sonido es el oído, del mismo modo que el ojo es el receptor natural de la luz. El oído tiene el mérito de ponernos en relación con el mundo exterior en lo que se refiere a los fenómenos acústicos; alcanza una sensibilidad maravillosa.

Pero tiene varios defectos graves:

las propiedades del oído no son iguales en todas las personas, y frecuentemente hay notables diferencias entre el oído derecho y el izquierdo de una misma persona;

el oído percibe solamente sonidos de frecuencia comprendida en una gama que puede fijarse entre 20 y 12 000 hertz para un oído medio normal; pero oídos muy jóvenes perciben todavía sonidos agudísimos (silbidos) cuya frecuencia alcanza hasta 20 000 hertz;

la sensación sonora no se presta fácilmente a una definición cuantitativa que determine cuándo se debe entender que una «sensación sonora» es doble de otra de igual frecuencia, o igual a otra de frecuencia distinta.

Se tiene una analogía completa con las dificultades que se encuentran para la definición de la sensación luminosa del ojo (v. tomo II).

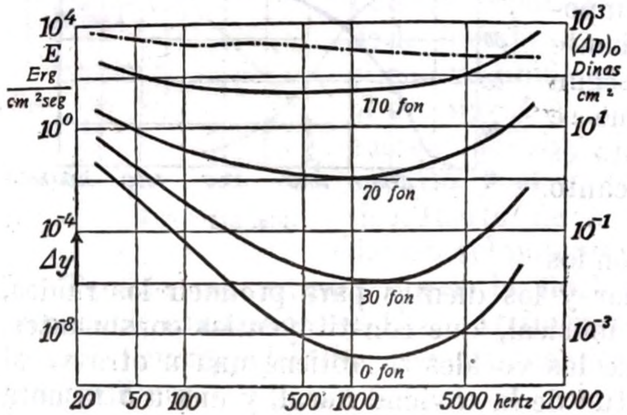


Fig. 576

He aquí las características esenciales de un oído normal.

a] **Campo de audibilidad.** En la figura 576 se indican, en función de la frecuencia y de un modo más bien esquemático, dos curvas extremas; el área comprendida entre ellas determina el *campo de audibilidad.* La curva inferior da el *umbral de sensación sonora,* es decir, la mínima intensidad de la onda sonora que es revelada todavía por el oído. Esta intensidad E, energética, está expresada en $\frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \cdot \text{seg}}$ y su escala es logarítmica. La curva superior de trazos, muy mal definida, da el *umbral de la sensación dolorosa* del sonido. Los sonidos cuya intensidad es mayor o igual que la indicada en dicha curva, para cada frecuencia, producen, junto con la sensación sonora, una sensación de dolor en el oído.

Por consiguiente, por lo menos para las altas frecuencias, puede fijarse como *límite de audibilidad* la frecuencia para la cual se cortan las dos curvas del umbral sonoro y del umbral de sensación dolorosa; para las bajas frecuencias, antes de que se corten, se desciende a frecuencias que, para intensidad suficiente de la onda, todavía impresionan nuestro oído, pero sin producir ya una sensación definida de tono musical.

Las curvas indicadas no pueden tener más que carácter medio y cualitativo a causa de la diferencia entre uno y otro oído, de la dificultad grandísima de efectuar con precisión medidas absolutas de

la intensidad sonora, y de la definición misma de «umbral» según que se tenga o no en cuenta la perturbación que la cabeza de la persona receptora engendra en la onda incidente, en particular según que la presión $(\Delta p)_0$ sea la que existe en el tímpano de la oreja o la que existe en la onda sonora en ausencia de la cabeza del experimentador.

Así, por ejemplo, WIEN, y recientemente WAETZMANN y KEIBS, dan para el umbral de sensación sonora, hacia los 2000 hertz, valores de la intensidad E solamente de $\approx 10^{-11}\ \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \cdot \text{seg}}$ equivalentes a $10^{-18}\ \frac{\text{watt}}{\text{cm}^2}$.

Es curioso observar que el ojo, en la parte más favorable del espectro (el verde), necesita una energía (radiante electromagnética) diez veces mayor que la energía sonora mínima todavía audible.

Esta energía sonora, recibida por un gramo de agua, debería ser almacenada durante más de cien mil millones de años para producir un aumento de temperatura de 1 °C, es decir, para constituir la energía de una caloría pequeña (¡!).

La amplitud de vibración de las partículas de aire en dicha onda sonora tan tenue, pero todavía audible, sería del orden de 10^{-9} cm, es decir, de $\frac{1}{30}$ del diámetro molecular del oxígeno, aproximadamente $\frac{1}{10\,000}$ del camino libre medio (§ 369) de las moléculas del aire a la presión atmosférica.

Los mejores micrófonos que se emplean actualmente para la captación del sonido en la cinematografía sonora o para la radiodifusión, a pesar de haber alcanzado una sensibilidad maravillosa gracias a los procedimientos de amplificación de la corriente microfónica primaria mediante los amplificadores termoelectrónicos, quedan todavía muy por debajo de dicha sensibilidad en el campo de frecuencias en que el oído es tan sensible.

La energía recibida por la membrana microfónica tiene que ser del orden de $10^{-10}\ \frac{\text{watt}}{\text{cm}^2}$.

En el diagrama de la figura 576 se dan dos escalas para las ordenadas, ambas logarítmicas: una de la intensidad E de la onda sonora, y otra de la amplitud de presión $(\Delta p)_0$ de dicha onda.

La ventaja de la escala logarítmica es que permite representar claramente en un mismo diagrama frecuencias que van desde ≈ 25 a $\approx 10\,000$ hertz e intensidades que van desde 10^{-9} a $10^{-5}\ \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \cdot \text{seg}}$, variando, por tanto, en la relación de 1 a 10^{14}.

Además, la [7], § 264, en escala logarítmica se escribe:

$$\log_{10} E = 2\cdot\log_{10} (\Delta p)_0 - \log_{10} [2\cdot(\mathbf{v}\,\mu)] ;$$

en el aire y para ondas progresivas, es $2\cdot\mathbf{v}\,\mu = 93\ \mathrm{cm^{-2}}\cdot g_m\cdot\mathrm{seg^{-1}}$ (§ 251, al final); luego, con la aproximación que puede ponerse; $2\cdot\mathbf{v}\,\mu = 100\ \mathrm{cm^{-2}}\cdot g_m\cdot\mathrm{seg^{-1}}$, es:

$$\log_{10} E = 2\cdot\log_{10} (\Delta p)_0 - 2 ;$$

la indicación logarítmica de las intensidades se obtiene simplemente de la logarítmica de las presiones duplicando la escala y corriéndola en dos unidades logarítmicas.

En fin, en la escala logarítmica de las intensidades, un segmento Δy paralelo al eje de las ordenadas, indica una variación $\Delta \log_{10} E$. Pero representando por e la base de los logaritmos naturales, se tiene:

$$\frac{d \log_{10} E}{d E} = \frac{1}{E}\log_{10} e ;$$

luego, diferenciando $\log_{10} E$ para ΔE suficientemente pequeño, resulta:

$$\Delta \log_{10} E = \frac{\Delta E}{E}\cdot\log_{10} e.$$

Es decir, un segmento Δy paralelo al eje de las ordenadas, de longitud constante, dondequiera que se trace en la figura 576, representará un determinado tanto por ciento de variación $\frac{\Delta E}{E}\cdot\log_{10} e$ de la intensidad de la onda sonora. Se verá la ventaja de ello en *c]* y en el § 274.

b] **Umbral diferencial para las frecuencias.** Si una onda sonora de intensidad constante cambia de frecuencia, es necesario cierto tanto por ciento de variación $\frac{\Delta \nu}{\nu}$ de la frecuencia para que el oído, recibiendo sucesivamente los dos sonidos, perciba una variación de altura del sonido. El cociente $\frac{\Delta \nu}{\nu}$ mide el *umbral diferencial* de sensibilidad del oído para las frecuencias. Este umbral depende de la frecuencia ν según el diagrama de la figura 577 (H. Fletcher); el diagrama se refiere a una onda sonora de intensidad $10^{-3}\ \frac{\mathrm{erg}}{\mathrm{cm^2\cdot seg}}$.

Para dicha intensidad, y alrededor de $\nu = 870$ hertz (la_4), una variación de 3 hertz es ya percibida; del la_4 al la_4 *sostenido*, la frecuencia sube de 870 a 922 hertz y constituye el intervalo de un semitono; el oído puede, pues, percibir para tales frecuencias un intervalo de $\frac{1}{15}$ de semitono, aproximadamente.

c] **Umbral diferencial para las intensidades.** Si una onda de frecuencia constante cambia de intensidad E, se necesita cierto tanto por ciento de variación $\frac{\Delta E}{E}$ de la intensidad E para que el oído perciba una variación de intensidad en la sensación sonora. El cociente $\frac{\Delta E}{E}$ mide el umbral diferencial de sensibilidad del oído para la intensidad del sonido. Este umbral depende de E y de la frecuencia según el diagrama de la figura 578 (V. O. Knudsen). La hipótesis de que el umbral diferencial $\frac{\Delta E}{E}$ sea constante para todas las frecuencias y todas las intensidades (ley de Fechner-Weber) sólo resulta aceptable para sonidos notablemente intensos.

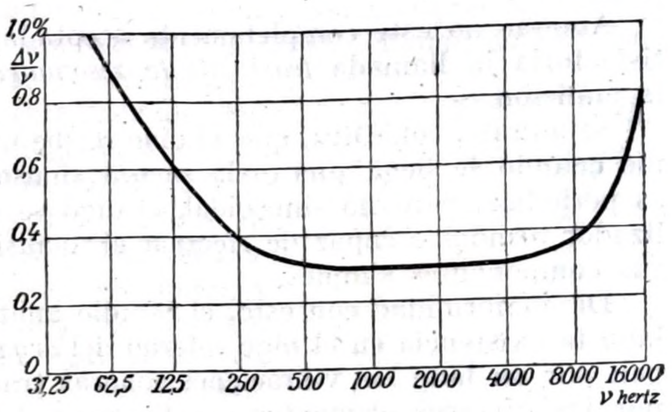


Fig. 577

d] **Efecto de ensordecimiento o de enmascaramiento.** Cuando llegan simultáneamente al oído dos sonidos de diferente frecuencia y uno de ellos disminuye gradualmente en intensidad, éste deja de ser audible cuando su intensidad es todavía bastante superior al umbral de sensación sonora. El sonido más intenso «cubre» y «enmascara» al más débil. El efecto depende de una manera no sencilla de la frecuencia y de la intensidad del sonido intenso.

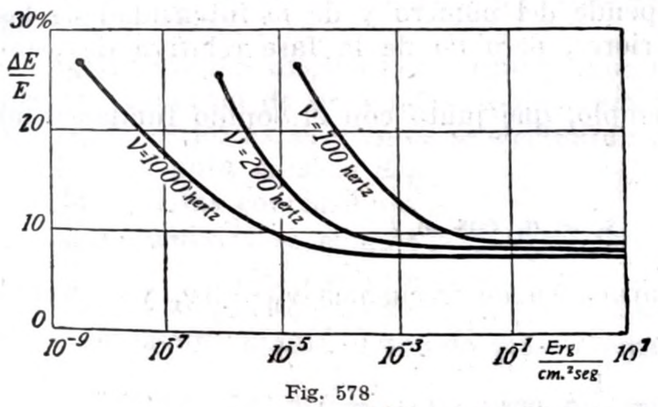


Fig. 578

e] **Poder analizador del oído.** El hecho fundamental consiste en la facultad que tiene el oído de reconocer los sonidos que componen un sonido complejo. Esta facultad, que puede ser muy mejorada por el ejercicio, permite, por ejemplo, al director de orquesta distinguir unos de otros los diversos sonidos que llegan simultáneamente a su oído, aunque sean muy numerosos.

El ojo está desprovisto de un poder analizador análogo para la luz no monocromática que recibe ; la sensibilidad y el poder analizador demuestran que el oído puede considerarse como un órgano más perfecto que el ojo, si bien menos precioso desde un punto de vista práctico.

Aunque no esté completamente aceptada, puede considerarse satisfactoria la llamada *teoría de la resonancia* de HELMHOLTZ sobre la audición.

Se admite, con OHM, que el oído recibe una sensación sonora simple cuando le llega una onda sonora sinusoidal. Si la onda sonora es periódica, pero no sinusoidal, el oído se comporta como un analizador armónico capaz de efectuar el análisis del sonido recibido en sus componentes simples.

De conformidad con esto, el estudio anatómico del oído ha revelado la existencia en el oído interno del *órgano de* CORTI, al cual llegan por un lado las vibraciones sonoras transmitidas sucesivamente por los diversos elementos constitutivos del oído, y, por otro lado, las propagaciones del nervio acústico. El órgano de CORTI puede compararse, por su constitución anatómica, a una pequeñísima arpa dotada de muchos miles de cuerdas (muchas más de 20 000).

Según HELMHOLTZ, la función física del órgano de CORTI sería la de un sistema de resonadores de resonancia no muy aguda, en el cual se efectúa el análisis del sonido complejo que llega al oído.

Entre los muchos fenómenos que interpreta esta teoría de la resonancia, recordemos solamente el siguiente : el timbre de un sonido no simple en el que el primer armónico (sonido fundamental) tiene cierta frecuencia ν_1, depende del número y de la intensidad de los sonidos armónicos superiores, pero *no* de la fase relativa de estos armónicos.

Supongamos, por ejemplo, que junto con el sonido fundamental de frecuencia $\nu_1 = \dfrac{\omega_1}{2\pi}$

$$s_1 = a_1 \cos \omega_1 t$$

llega al oído el tercer armónico de frecuencia $\nu_3 = 3\nu_1$ y amplitud $a_3 = \dfrac{1}{3} a_1$:

$$s_3 = \frac{1}{3} a_1 \cos (\omega_3 t + \varphi_{03}).$$

La ley de la vibración resultante $s = s(t)$ es muy diferente según la diferencia de fase que presentan los dos movimientos componentes en cierto instante, por ejemplo, en el instante $t = 0$. Las formas de la vibración resultante son diferentes, pero el oído juzga idénticos estos sonidos.

f] **Audición biauricular.** Supongamos un observador colocado en una plaza grande y llana, para evitar las perturbaciones debidas a

la reflexión del sonido. Si sucesivamente se dejan caer piedras al suelo, siempre en el mismo sitio, el observador, aun a ojos cerrados, podrá orientarse hacia el manantial del sonido, es decir, hacia el punto del suelo golpeadc por las piedras, y determinar el plano vertical en donde está el manantial del sonido, con una precisión insospechada. Pero para que esto suceda es necesaria la *audición biauricular*. Escuchando con un solo oído, tapando el otro con un poco de cera o de algodón, resulta difícil buscar el manantial sonoro.

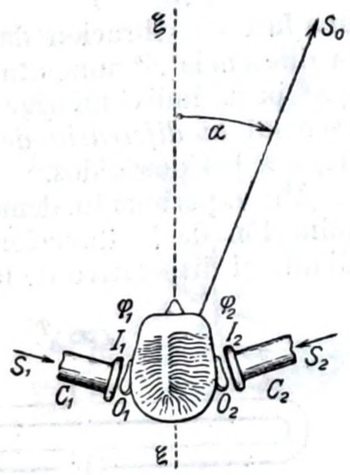


Fig. 579

Esta propiedad del oído puede atribuirse a tres causas : desigual intensidad de sonido recogido por los dos oídos ; diferencia de fase del sonido en los dos oídos, y diferencia de tiempo en la percepción por los dos oídos. Para investigar estas tres causas se han efectuado recientemente algunos experimentos (BOLLE, LO SURDO y ZANOTELLI) con un dispositivo capaz de hacer llegar simétricamente a los dos oídos O_1, O_2, mediante dos conductos C_1, C_2 (fig. 579), dos sonidos puros (sinusoidales) de la misma frecuencia ν, de los cuales podía hacerse variar arbitrariamente :

o bien la diferencia $\Delta I = I_2 - I_1$ de las intensidades I_1, I_2 manteniendo fija la fase ($\varphi_1 = \varphi_2$),

o bien la diferencia de fase $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ conservando fija la intensidad ($I_1 = I_2$).

Finalmente, el dispositivo permitía experimentar con sonidos puros, la frecuencia de los cuales ν podía también modificarse ; la mayor parte de los experimentos se efectuaron para $\nu = 256$ hertz, esto es, para la nota musical do_1.

He aquí las conclusiones :

A igualdad de fase, cuando la diferencia de intensidades $\Delta I = I_2 - I_1$ llega hasta $\approx 0{,}2 \cdot I_2$, el observador juzga que el manantial sonoro no se halla sobre el eje de simetría ξ, sino situado en S_0, hacia el lado de la oreja que recibe el sonido más intenso.

Recuérdese que si $\dfrac{I_1}{I_2} = \dfrac{8}{10}$, la realización de las amplitudes de vibración es $\dfrac{a_1}{a_2} \approx \dfrac{9}{10}$.

El ángulo α mínimo perceptible correspondiente es más bien grande, del orden diez grados o más.

A igualdad de intensidad, cuando la diferencia de fase $\Delta\varphi$ llega hasta $\approx 5°$, el observador juzga que el manantial sonoro está situado hacia el lado del oído que recibe el sonido con fase anticipada (en la figura sería : $\varphi_2 - \varphi_1 > 0$).

La incertidumbre en la determinación del ángulo α puede reducirse ahora a $\approx 4^o$.

Pero si se mantiene constante $\Delta\varphi$ y se hace variar la frecuencia ν, al disminuir ν, es decir, al aumentar el período T del sonido, aumenta el ángulo α juzgado por el observador.

Como $\frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{\Delta t}{T}$, en donde Δt es la diferencia de tiempo con que una fase de vibración dada llega a los dos oídos, a igualdad de $\Delta\varphi$ la diferencia Δt aumenta con T. Por consiguiente, hemos de admitir que para individualizar la dirección de procedencia del sonido es esencial *la diferencia de tiempo* con que una fase dada del mismo llega a los dos oídos.

Un experimento demostrativo de la influencia de Δt en la determinación de la dirección de procedencia del sonido se efectúa mediante el dispositivo de la figura 580. T es un teléfono alimentado con

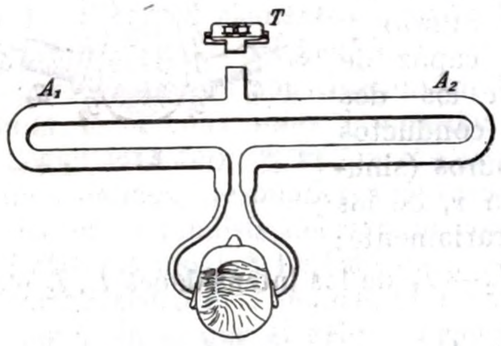


Fig. 580

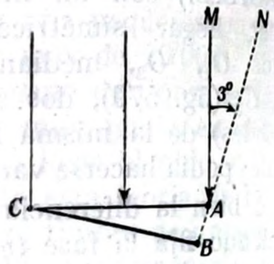


Fig. 581

corriente alterna constante; el sonido producido llega a los dos oídos del observador atravesando el aparato $A_1\ A_2$ análogo al de QUINCKE (§ 254); si A_1 y A_2 tienen la misma longitud, el observador tiene la impresión de que el sonido procede directamente de un punto enfrentado con dicho observador. Alargando A_2, por ejemplo, se tiene la impresión de que el manantial sonoro se aparta lateralmente hacia la izquierda.

Para sonidos bastante agudos recibidos con la oreja libre, la cabeza del observador *hace sombra* al sonido y éste llega mucho más intenso al oído que está dirigido hacia la onda sonora que llega; en tal caso prevalece el efecto de la diferente intensidad cuando se trata de establecer la dirección de procedencia del sonido.

La determinación de la dirección de dónde procede el sonido se efectúa con un error de $\approx 3^o$ *(ángulo de hesitación)*; se deduce fácilmente (fig. 581) que la diferencia que puede percibirse en el tiempo de llegada a los dos oídos de una misma fase de vibración llega a ser de unos $30 \cdot 10^{-6}$ seg. Éste es, en efecto, el tiempo que emplea el sonido para recorrer el segmento AB, si $CA = 16$ cm es la distancia entre los dos oídos, y si es $\widehat{MAN} = \widehat{ACB} = 3^o$.

Aumentando la distancia entre los dos receptores se puede aumentar la sensibilidad para determinar la dirección MA. Esto tiene cierto interés práctico.

En la figura 582 se indica esquemáticamente un aparato destinado a determinar la dirección de dónde procede el ruido del motor de un aeroplano en vuelo, muy útil para ayudar de noche a buscar el aparato por medio de los proyectores. Se tienen dos pares de amplísimos receptores y dos observadores O_1 y O_2. Uno de ellos emplea los dos receptores $R_2\,R_2$ que se encuentran en un plano horizontal, y con ellos determina el plano vertical que contiene la dirección del sonido que llega. El otro observador se sirve de los dos receptores $R_1\,R_1$, colocados en un mismo plano vertical, y determina la inclinación de la dirección del sonido que llega respecto al plano horizontal. Las distancias $R_1\,R_1$ y $R_2\,R_2$ pueden ser de más de 2 metros.

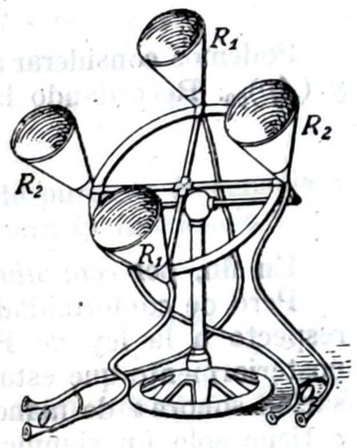


Fig. 582

El aparato descrito proporciona la dirección normal a la onda sonora incidente, que sólo pasa con certeza por el manantial sonoro cuando la propagación es rectilínea; pero como la propagación del sonido en el aire no es en general rectilínea (§ 281), el aparato descrito pierde gran parte de su valor práctico.

Por lo demás, los procedimientos ideados para individualizar los aeroplanos mediante la reflexión sobre los mismos de ondas electromagnéticas continuas, resultan hoy en día mucho más ventajosos que este aparato acústico.

§ 274. Nivel y sensación sonora. — Fon.

1.º **Nivel sonoro.** Aceptada como verdadera la ley de FECHNER-WEBER (§ 273, *c*]), es natural establecer que para un sonido puro dado, de frecuencia ν, la *sensación sonora* ς, es decir la «impresión fisiológica según la cual sentimos que un sonido es más o menos fuerte», aumenta en un valor constante $d\varsigma$ cada vez que la intensidad (energética) E de la onda sonora aumenta en su mismo «tanto por ciento» $\frac{dE}{E}$. Es decir,

$$d\varsigma = k' \cdot \frac{dE}{E} \qquad [1]$$

en donde k' es una constante independiente de la frecuencia ν y de la intensidad E.

También es natural suponer que se tenga $\varsigma = 0$ en el umbral de la audibilidad, es decir, para la intensidad E_0 de la onda o, si se

quiere, para la amplitud de presión $(\Delta p)_{00}$ correspondiente a la curva que limita inferiormente el campo de audibilidad en la figura 576.

Entonces, de la [1], integrando y pasando a los logaritmos decimales se obtiene :

$$\varsigma = k \cdot \log_{10} \frac{E}{E_0} \qquad (k = k' \cdot \log_e 10). \qquad [2]$$

Podemos considerar análogamente las amplitudes de presión $(\Delta p)_0$ y $(\Delta p)_{00}$. Recordando la [7], § 264, la [2] da :

$$\varsigma = 2\,k \cdot \log_{10} \frac{(\Delta p)_0}{(\Delta p)_{00}}. \qquad [3]$$

En fin, *por convenio se pone* $k = 10$.

Pero de conformidad con las desviaciones que se han encontrado respecto a la ley de FECHNER-WEBER, ha tenido que reconocerse posteriormente que esta magnitud ς no es apta para medir la «sensación sonora» de manera completamente satisfactoria. Según la [2], ς tiene sólo un significado físico : mide la intensidad energética E de la onda sonora en escala logarítmica ; es decir, a sonidos cuya intensidad E es 10^1, 10^2, 10^3, ... veces mayor que la intensidad del umbral E_0, se atribuyen los valores 10·1, 10·2, 10·3, ... de ς.

Si una magnitud física (en general una energía) llega a ser 10 veces mayor, se dirá que su *nivel* ha aumentado en 1 *bel* ; si se hace 10^n veces mayor, se dirá que su *nivel* ha aumentado en n bel ; también se dice que ha experimentado una *amplificación* de n bel ; si n es negativo, la ganancia de n bel significa de hecho una *atenuación* en $|n|$ bel (1).

Haber puesto $k = 10$ en las fórmulas [2] y [3] equivale a expresar los *niveles*, en particular el *nivel sonoro*, en *decibel*.

El valor ς dado por la [2] o la [3] mide en decibel el *nivel sonoro* del sonido puro considerado, *respecto al umbral sonoro* correspondiente, es decir, respecto al umbral del sonido de la misma frecuencia.

(1) ¿Constituye todo esto una ventaja? Si de cierta magnitud física han de ser consideradas variaciones de enormes proporciones, por ejemplo, ≈ de 1 a 10^{12} para las intensidades del sonido de frecuencia ν en el campo de la audibilidad (fig. 576), el empleo de la escala logarítmica en los diagramas es precioso.

¿Pero es en realidad más claro y más cómodo decir que una magnitud G tiene un nivel de n bel (sobre cierto nivel de referencia G_0), en vez de decir que es $G = 10^n \cdot G_0$? Desde luego, el bel y el decibel se extienden ampliamente ; del nivel sonoro, al aumento de un amplificador, a la atenuación de una línea telefónica, se pasa a la *densidad óptica* del ennegrecimiento de una emulsión fotográfica impresionada : el ennegrecimiento tiene la densidad n si produce la atenuación de n bel en el flujo luminoso que la atraviesa, es decir, si el flujo transmitido es igual a 10^{-n} veces al flujo incidente.

Asimismo el p_H de los electroquímicos esconde también sus bel.

E incluso recientemente se ha propuesto (TOWNSEND) introducir una medida del «vacío» obtenido mediante una bomba neumática, que es, propiamente, una medida en bel del «nivel de vacío» respecto a un nivel de presión de referencia, que el lector tendrá la cortesía de recordar : 1 mm_{Hg} ; la bomba produca un «nivel de vacío» n si reduce a 10^{-n} mm_{Hg} la presion existente en el recinto en estudio.

Téngase muy presente que cierto número de decibel de *nivel* de determinada magnitud física, sólo determinan dicha magnitud cuando se ha hecho un convenio sobre el *nivel de referencia*, es decir, sobre el valor de la magnitud física a la que se atribuye el nivel O, como lo es el valor E_0 en el caso de la [2].

Por lo tanto, un sonido puro tiene un *nivel sonoro* ς :

$$\varsigma = 10 \cdot \log_{10} \frac{E}{E_0}. \qquad \varsigma \text{ en decibel} \qquad [4]$$

Esta definición puede aplicarse a un sonido puro de frecuencia ν cualquiera ; E_0 es la intensidad del umbral para la frecuencia ν.

Se tiene también

$$\varsigma = 20 \cdot \log_{10} \frac{(\Delta p)_0}{(\Delta p)_{00}}. \qquad \varsigma \text{ en decibel} \qquad [5]$$

La *diferencia de nivel* entre dos sonidos de intensidades E_1, E_2 es :

$$\varsigma_2 - \varsigma_1 = 10 \cdot \log_{10} \frac{E_2}{E_1}. \qquad \varsigma_2 - \varsigma_1 \text{ en decibel} \qquad [6]$$

El nivel sonoro aumenta en ≈ 3 decibel cada vez que la intensidad de la onda sonora se dobla ; efectivamente, se tiene entonces :

$$\varsigma_2 - \varsigma_1 = 10 \cdot \log_{10} 2 \approx 3 \text{ decibel}.$$

El nivel sonoro aumenta en 1 decibel si es

$$10 \cdot \log_{10} \frac{E_2}{E_1} = 1, \quad \text{o sea} \quad \frac{E_2}{E_1} \approx 1{,}26,$$

es decir, si la intensidad de la onda aumenta en un ≈ 25 %. De acuerdo con el umbral diferencial de la intensidad representado en la figura 578, en el campo de validez de la ley de FECHNER-WEBER, el oído sólo percibe variaciones de nivel sonoro si la intensidad de la onda varía en un ≈ 10 % ; por lo tanto no se necesitan fracciones de decibel de nivel sonoro.

Análogamente, a partir de la [5] se tendría :

$$\varsigma_2 - \varsigma_1 = 20 \cdot \log_{10} \frac{(\Delta p)_{02}}{(\Delta p)_{01}} \qquad \varsigma_2 - \varsigma_1 \text{ en decibel} \qquad [7]$$

de manera que tendríamos un aumento de nivel sonoro de 1 decibel cuando el aumento de amplitud de presión fuese de ≈ 12 %.

Un acuerdo internacional ha fijado la intensidad del umbral so-

noro, para $\nu = 1000$ hertz, en el valor $E_0 = 10^{-9} \frac{\text{erg}}{\text{seg}\cdot\text{cm}^2}$; por tanto, en el aire en condiciones normales $\left(2\cdot\nu\mu \approx 83 \frac{g_m}{\text{seg}\cdot\text{cm}^2}\right)$ a dicho umbral, según la [7], § 264, le corresponde la amplitud de presión:

$$(\Delta p)_{00} = 2{,}92\cdot 10^{-4} \frac{\text{dinas}}{\text{cm}^2}$$

y un valor eficaz de la presión:

$$'(\Delta p)_{ef,0} = 2{,}07\cdot 10^{-4} \frac{\text{dinas}}{\text{c m}^3}. \qquad [8]$$

Luego una amplitud de presión $(\Delta p)_0$ de 1 $\frac{\text{dina}}{\text{cm}^2}$, a 1000 hertz, da un sonido cuyo nivel sonoro es $\approx$ 70,5 decibel (sobre el valor del umbral; fig. 576). Un valor eficaz $(\Delta p)_{ef}$ de 1 $\frac{\text{dina}}{\text{cm}^2}$ da un sonido de $\approx$ 73,5 decibel.

El umbral de la sensación dolorosa de los sonidos de 1000 hertz se tiene para el nivel de $\approx$ 135 decibel (por encima del umbral de audibilidad).

2.º **Sensación sonora. — Fon.** Al principio se creyó que, admitida la validez de la ley de FECHNER-WEBER, el *nivel sonoro* (1.º) podría tomarse como medida de la *sensación sonora*; se identificó el decibel con la unidad de aumento de tal sensación y a esta unidad se le dió el nombre de *fon (antiguo)*.

En este caso, la *línea isofona* de sensación sonora 0 fon es la curva límite inferior del campo de audibilidad de la figura 576; se obtendrá cualquier otra línea isófona en el diagrama (logarítmico) trasladando dicha curva límite inferior paralelamente al eje de ordenadas. Así, por ejemplo, trasladando dicha curva límite un trayecto Δy (fig. 576), correspondiendo esto a dos unidades en el exponente del 10 que da la intensidad E, se obtiene la línea isófona para la sensación sonora de $10\cdot\log_{10}\cdot 10^2 = 20$ fon.

Pero a causa de la inexactitud de la ley de FECHNER-WEBER, la definición de la *sensación sonora* no puede deducirse de la [1] y no puede medirse con valores coincidentes con los decibel, como lo son los fon antiguos.

Convengamos, además, en que la sensación sonora ha de tener el valor 0 en el umbral de audibilidad y que para la frecuencia $\nu = 1000$ hertz, tenga el valor 70 *fon (nuevos)* cuando la amplitud de presión sea de 1 $\frac{\text{dina}}{\text{cm}^2}$, pero que la sensación de 35 fon (nuevos) se atribuya a un sonido que «se sienta con una intensidad mitad que la correspondiente a 70 fon». Mas, ¿qué quiere decir que «se sienta con una intensidad igual a la mitad»? Se ha convenido, por ejemplo, en

que en un individuo normal (cuyos dos oídos tienen idénticas características) y para sonidos que lleguen simétricamente respecto a ambas orejas, la sensación sonora percibida con los dos oídos sea doble que la que percibe con una sola (la otra está cerrada, por ejemplo, con cera).

Consideraciones fisiológicas de este tipo han permitido expresar en números *(fon nuevos)* las sensaciones sonoras obtenidas con sonidos puros de frecuencia $\nu = 1000$ hertz. Más tarde han sido extendidas a los sonidos puros de otras frecuencias, conviniendo en que la sensación sonora sea siempre 0 en el umbral de audibilidad y de 70 fon (nuevos) para aquellos sonidos que el oído juzga tan «fuertes» como el sonido de 70 fon de frecuencia 1000 hertz.

Se han encontrado *líneas isófonas*, es decir, de igual sensación sonora (número de fon nuevos = constante), cuyo trazado está indicado, más bien esquemáticamente, en la figura 576.

Las consideraciones desarrolladas sobre las mediciones de las intensidades de la onda sonora y de la sensación sonora son notablemente complejas, más que las correspondientes consideraciones fotométricas en óptica.

La dificultad de definir en óptica iluminaciones iguales de colores diferentes es análoga a la dificultad de definir en acústica sensaciones sonoras iguales de frecuencia distinta.

Pero en fotometría:

es relativamente fácil la definición de «manantial de luz» patrón *(bujía)* y de «brillo» de un manantial de luz extenso (v. tomo II);

no interesa al problema de la medida de la «sensación luminosa» debida a intensidades diferentes del haz de luz; nos contentamos, por ejemplo en la definición de iluminación *de un color dado*, con definir como iluminación doble la que engendra una onda luminosa de doble intensidad; es decir, para definir iluminaciones de diferente intensidad, se utiliza la ley de las distancias.

En cambio, en acústica:

no se tiene hasta ahora un manantial sonoro patrón, ni siquiera convencional, fácilmente reproducible; el mejor que se tiene es el termófono eléctrico (§ 261, *e*]);

se ha querido llegar hasta definir, además de la razón de las intensidades energéticas de dos ondas sonoras, una medición de la «sensación sonora» fisiológica, haciendo equilibrios para llegar a definir qué significa que un sonido nos produce una sensación sonora «doble» que otra.

Sin embargo, el problema de la medición de las intensidades sonoras queda resuelto si confiando en la capacidad del constructor y aceptando el principio de la medida en que se basa el dispositivo adoptado, empleamos aparatos ya graduados en fones *(fonómetros)*. Estos aparatos se encuentran muy difundidos para fines técnicos; su funcionamiento está siempre subordinado a numerosos dispositivos eléctricos, en los que no podemos detenernos.

CAPÍTULO III

Campo sonoro indefinido y aplicaciones técnicas de la Acústica

§ 275. Campo sonoro indefinido. Al contrario de lo que sucede para la luz, los experimentos sobre la propagación del sonido son generalmente perturbados por fenómenos notables de difracción y de interferencia. Además, las paredes de la estancia en donde se experimenta, el suelo y los aparatos de medida son otras tantas causas de perturbaciones difíciles de calcular. Sólo en un recinto grandísimo respecto a la longitud de onda que se estudia, y de paredes absorbentes para el sonido, pueden efectuarse experimentos sobre la propagación del mismo. Debe observarse que ya los sencillos experimentos sobre las sombras que prueban la propagación rectilínea de la luz, en el caso del sonido sólo se cumplen con una grosera aproximación, debido a la difracción en el contorno de los diafragmas con los que se intenta limitar el cono sonoro. El experimento sólo tiene un éxito satisfactorio cuando las pantallas y los diagramas tienen dimensiones grandes respecto a la longitud de onda.

En resumen, mientras la óptica geométrica contiene los experimentos más sencillos e inmediatos de la óptica, en la acústica geométrica los experimentos son difíciles de realizar y de resultado poco satisfactorio.

Las leyes de la óptica geométrica (propagación rectilínea, leyes de la reflexión y de la refracción) tienen sus análogas en acústica, pero resulta que es necesario imaginarlas como leyes aproximadas, a causa del mecanismo descrito en los §§ 258 y 259 para la propagación de las ondas en el espacio.

Si bien didácticamente es útil la analogía entre acústica y óptica ondulatoria, es necesario no olvidar que se trata de fenómenos de naturaleza substancialmente distinta. Basta recordar aquí que mientras las ondas sonoras en el aire son longitudinales y de naturaleza mecánica, por lo que no pueden existir ni propagarse en el vacío, las ondas luminosas son transversales, de naturaleza electromagnética, y se propagan perfectamente en el vacío.

§ 276. Propagación rectilínea del sonido. El pito de GALTON (§ 261, *c*]) regulado para dar un sonido agudísimo ($\nu = 20\,000$ hertz aproximadamente, $\lambda = 1{,}5$ cm en el aire) y una llama sensible (§ 269)

apta para revelar la llegada de dicho sonido, junto con pantallas y diafragmas cuyas dimensiones son del orden del metro, permiten ya observar con aproximación aceptable la existencia de sombras sonoras, de acuerdo con la propagación rectilínea.

§ 277. Determinación de la velocidad del sonido. Ha sido determinada en gran número de gases, el primero de todos el aire. La velocidad del sonido $\mathbf{v}$ se ha determinado directa e indirectamente. Los métodos directos consisten en medir un espacio *(base)* recorrido por la onda sonora y determinar el tiempo empleado en recorrerlo. Los métodos indirectos se fundan esencialmente en determinar la longitud de onda y el período T del sonido (puro) con que se experimenta. Se tiene entonces (§ 249, [5]) :

$$\mathbf{v} = \frac{\lambda}{T}.$$

La longitud de la base (hasta varios kilómetros) puede medirse fácilmente con sólo un error de $\frac{1}{100\,000}$; la onda sonora, pasando sucesivamente por los extremos de la base, actúa sobre dos membranas microfónicas idénticas, capaces de gobernar un contacto que cierra un circuito eléctrico. Así, un cronógrafo del tipo descrito en el § 40 puede registrar el intervalo de tiempo (del orden de 10 seg hasta $\frac{1}{1\,000}$ de segundo, es decir, con un error relativo de $\frac{1}{10\,000}$.

Las determinaciones directas efectuadas en el aire libre, y por tanto a una presión prácticamente normal, no son muy precisas, porque la temperatura, el estado higrométrico y el viento, son elementos perturbadores que varían de un modo irregular y no conocido entre los distintos puntos de la base.

Los mejores valores obtenidos, reducidos a 0 °C y al aire seco, varían entre 330,5 $\frac{\text{m}}{\text{seg}}$ y 331,5 $\frac{\text{m}}{\text{seg}}$, en perfecto acuerdo con el valor teórico (§ 250).

Las determinaciones efectuadas en el aire contenido en tubos, entre las cuales son clásicas las de REGNAULT (1862-63), por un lado eliminan en gran parte el debilitamiento del sonido que se produce en el aire libre al aumentar la distancia al manantial sonoro y, por otro, introducen una nueva perturbación debida a las paredes del tubo, cuya magnitud sólo es despreciable para tubos de diámetro grande (por ejemplo, 100 cm). La velocidad del sonido a 0 °C varía entre 324,2 $\frac{\text{m}}{\text{seg}}$ en un tubo de 10,8 cm de diámetro, y 330,3 $\frac{\text{m}}{\text{seg}}$ en otro de 110 cm.

Los métodos indirectos eliminan las causas de perturbación indicadas, y permiten medir, tanto en el aire libre como en el contenido en un tubo, en condiciones de temperatura y de estado higrométrico bien conocidos.

HEBB ha determinado λ por la formación de ondas estacionarias en el aire libre, realizando así uno de los mejores métodos de medida de **v**.

A_1 y A_2 (fig. 583) son dos grandes espejos parabólicos, hallándose en el foco F_1 del primero un pito de GALTON G, que es el manantial de ondas sonoras de frecuencia ν conocida; el foco F_2 del otro espejo está ocupado por un micrófono M_2.

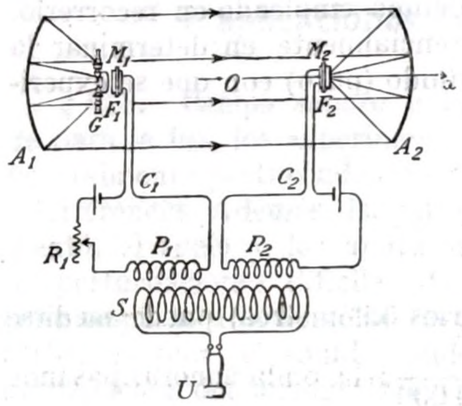


Fig. 583

Junto a F_1 se encuentra otro micrófono M_1. Al llegar el sonido a los micrófonos produce dos corrientes sinusoidales de frecuencia ν en los circuitos C_1 y C_2, que, pasando a los primarios P_1 y P_2 producen en el secundario S del transformador P_1P_2S una corriente inducida.

La corriente secundaria resultante es debida a la suma (interferencia) de las dos corrientes secundarias inducidas por P_1 y P_2. Si las dos corrientes inducidas se encuentran en oposición de fase (por estarlo los sonidos que llegan en el mismo instante a M_1 y M_2), se tiene una corriente resultante

$$i = i_{01}\cos\omega t - i_{02}\cos\omega t = (i_{01} - i_{02})\cos\omega t,$$

que es constantemente nula cuando sea $i_{01} = i_{02}$. Se traslada el sistema M_2A_2 en el sentido del eje x hasta que se note en el teléfono U un mínimo de intensidad sonora, y se regula la resistencia R_1 de modo que este mínimo sea sensiblemente nulo. Alejando nuevamente el sistema A_2M_2 del sistema A_1GM_1, se producen en el teléfono U variaciones periódicas de la intensidad del sonido; se repiten los mínimos (sensiblemente nulos) para cada alejamiento igual a λ.

Se puede determinar la posición de los mínimos extremos, incluso para un alejamiento igual a 100 λ, con error menor que $\frac{1}{10}\lambda$. Por tanto, se determinó el valor de λ con error menor que $1\,{}^0/_{00}$. Fué determinada la frecuencia ν (= 2 376 hertz) con una aproximación todavía mayor, por comparación con un diapasón patrón. Se obtiene en el aire seco a 0 °C

$$\mathbf{v} = \lambda\cdot\nu = (331{,}2_9 \pm 0{,}4)\,\frac{\text{m}}{\text{seg}}.$$

El coeficiente de temperatura resultó aproximadamente $+ 0{,}55\,\frac{\text{m}}{\text{seg}}$ por °C; en el aire saturado de vapor de agua, la velocidad resultó mayor en $0{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{seg}}$.

Entre los métodos indirectos para medir **v** se cuenta el del tubo de KUNDT, ya descrito (§ 256), el cual permite una fácil determinación relativa de la velocidad del sonido en los distintos gases, y en distintas condiciones de temperatura estado higrométrico, diámetro y naturaleza del tubo, etc.

Decimos «etcétera» porque **v**, en un examen más acabado, depende también de otras condiciones. La independencia de la presión es sólo aproximada, como lo es la ley de BOYLE, admitida para llegar a la [5] del § 250. Así, en el aire, a la presión $p = 100$ atm $\left(\approx 1000\,\frac{\text{newton}}{\text{cm}^2}\right)$ y a 0 °C se tiene $\mathbf{v} = 355\,\frac{\text{m}}{\text{seg}}$.

Recientemente se ha propuesto como valor más probable de la velocidad del sonido en el aire seco y privado de CO_2 a 0 °C y a presión normal (760 mm_{Hg}) el valor

$$(331{,}45 \pm 0.05)\ \frac{\text{m}}{\text{seg}}$$

válido en general para todas las frecuencias audibles.

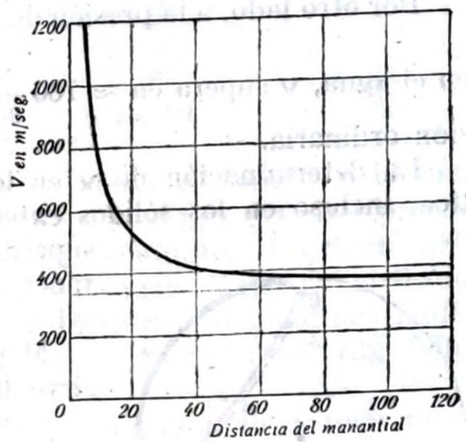


Fig. 584

Parece que se acepta hoy una pequeña variación de **v** con la frecuencia del sonido, que también queda justificada por consideraciones teórico-moleculares. Pero esta variación en el aire seco y en el campo de las frecuencias audibles parece limitarse a un aumento de **v** con la frecuencia no superior a $\approx 1\,{}^0/_{00}$.

Además, en el aire libre, **v** es independiente, entre amplísimos límites, de la intensidad del sonido; pero cuando la amplitud de la elongación s no puede considerarse pequeñísima respecto a la longitud de onda, la velocidad **v** de la perturbación es mucho mayor que la normal. Esto sucede especialmente en la onda de presión que acompaña a las explosiones; así, en la figura 584 se ha dibujado la curva que representa **v** en función de la distancia al punto en donde se ha producido la explosión: la velocidad de propagación tiene asintóticamente al valor normal a medida que se debilita la onda con el aumento de la distancia; se ha dejado indeterminada la uni-

dad de medida de la distancia porque el efecto depende de la violencia de la explosión.

Indiquemos también que si **v** no tiene el valor normal porque s no puede considerarse como infinitesimal, la onda se deforma al propagarse.

La determinación de **v** en los líquidos se efectúa por medios análogos, pero es más difícil y menos exacta.

Tiene especial interés la determinación de la velocidad del sonido en el agua, especialmente en la de mar, por necesitarse este dato cuando se quiere determinar acústicamente la profundidad del mar en un punto (§ 285, *b*]).

Se admite que la fórmula que da **v** en función de la temperatura θ y de la salinidad S, es la siguiente :

$$\mathbf{v} = 1410 + 4{,}21\,\theta - 0{,}037\,\theta^2 + 1{,}14\,S \qquad \begin{matrix} S \text{ en } ‰ \\ \mathbf{v} \text{ en } \frac{\text{m}}{\text{seg}} \\ \theta \text{ en } ^\circ\text{C} \end{matrix} \qquad [1]$$

Por otro lado, a la presión de 1000 atmósferas $\left(\approx 10\,000\ \frac{\text{newton}}{\text{cm}^2}\right)$, en el agua, **v** supera en $\approx 160\ \frac{\text{m}}{\text{seg}}$ al valor de **v** que se tiene a la presión ordinaria.

La determinación de **v** en los sólidos es todavía más problemática, incluso en los sólidos extensos, a causa de la influencia de la superficie libre y de la propagación simultánea de ondas longitudinales y transversales.

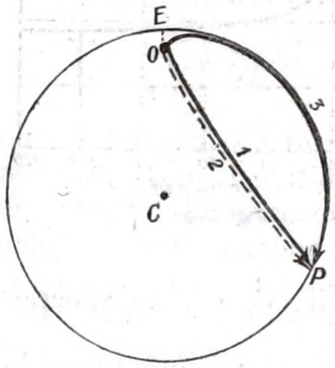


Fig. 585

Mejor que la determinación directa sirve la determinación indirecta mediante la fórmula del § 250 : $\mathbf{v} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$ que da v en función del módulo de compresión adiabática uniforme ε y de la masa específica μ.

Es característico el caso de las *ondas sísmicas*. Los sismogramas registrados a gran distancia del manantial de ondas *O* (figura 585, *hipocentro ; E* es el *epicentro* correspondiente), localizado siempre a pocos kilómetros por debajo de la superficie terrestre, indican que llegan al sismógrafo *P* tres series distintas de ondas sísmicas :

ondas longitudinales internas, *primarias* (las más rápidas : velocidad de unos $7{,}1\ \frac{\text{km}}{\text{seg}}$);

ondas transversales internas *secundarias* $\left(\text{velocidad de unos } 4\ \frac{\text{km}}{\text{seg}}\right)$;

ondas superficiales longitudinales y transversales a la vez. Estas últimas son las más lentas, pero las más desastrosas : velocidad, $\approx 3{,}6\ \frac{\text{km}}{\text{seg}}$; período, de 10 a 20 seg, y, por tanto, $\lambda \approx 35 \div 70$ km.

La primera fase del *sismograma* (fig. 586) corresponde a la acción de la onda primaria sola ; en la *segunda fase* se encuentran presentes las ondas primaria y secundaria ; en la *tercera fase*, que empieza en *L*, están presentes las tres ondas juntas. Conocidas las velocidades de propagación de las ondas, se deduce la distancia *OP* (fig. 585) de la duración de las dos primeras fases. De un modo análogo, se deduce la distancia entre el observador y un cañón que dispara, a partir de la diferente velocidad que tienen el sonido y la luz.

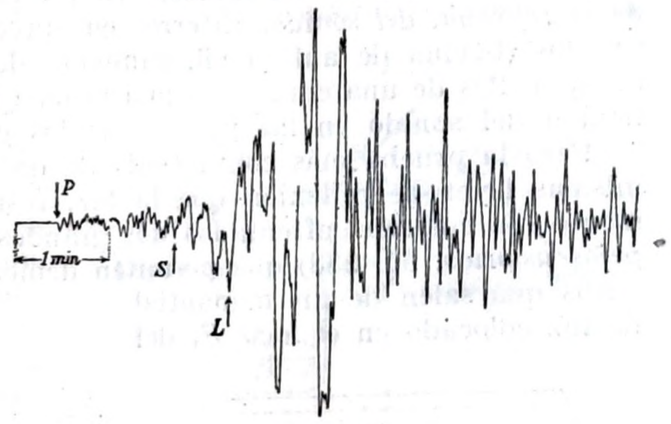


Fig. 586

Por ejemplo, para una distancia *OP* de 2000 km, las fases preparatorias tienen una duración de unos cuatro minutos. La figura 586 se refiere a un terremoto ocurrido en el mar Jónico, registrado en Roma por uno de los aparatos del Instituto Nacional de Geofísica ; la fase *PS* ha durado $\approx$ 80 seg, y la distancia *OP* (fig. 585) se ha calculado en $\approx$ 750 km.

Del estudio de estas ondas sísmicas se han podido deducir interesantes conclusiones respecto a la constitución interna de la Tierra.

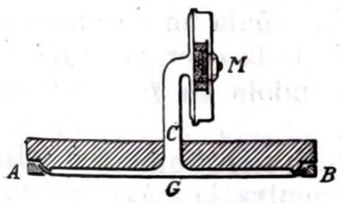


Fig. 587

Puede decirse que el único sólido suficientemente extenso para estudiar la propagación de las ondas es la corteza terrestre, y ésta no puede tomarse de modo alguno como ejemplo de cuerpo definido y homogéneo. En estos últimos años se han determinado las velocidades de propagación de las ondas sonoras en capas de diversa composición litológica.

Se produce la onda, por ejemplo mediante la detonación de una pequeña cantidad de explosivo enterrada, y se recibe por medio de un *geófono* (fig. 587), constituído por una ancha membrana *AB* bien adherente al suelo *G*. La onda que llega, recogida por esta membrana, es transmitida, por el aire del conducto *C*, al micrófono *M*.

Los valores de la velocidad del sonido para diversos materiales varían entre 6 000 $\frac{m}{seg}$ (rocas compactas) y 2 000 $\frac{m}{seg}$ (creta, terrenos blandos).

El geófono, apoyado en el pecho de un hombre, se convierte en un buen *cardiófono*, que, mediante los métodos conocidos (§ 270), permite registrar muy exactamente las pulsaciones cardíacas.

§ **278. Reflexión del sonido.** El *eco* es una prueba cualitativa de la *reflexión del sonido*. El error en apreciar la procedencia de los sonidos (bocina de automóvil, campana del tranvía) en los cruces de las calles de una ciudad, es una prueba de la existencia de la reflexión del sonido en las paredes de los grandes edificios.

Pero la prueba más convincente de que el sonido obedece a las mismas leyes de reflexión que la luz, resulta del siguiente experimento. Se colocan enfrentados dos grandes espejos parabólicos (*espejos ustorios*, fig. 588) que permiten demostrar que los rayos luminosos que salen de un manantial de luz colocado en el foco F_1 del

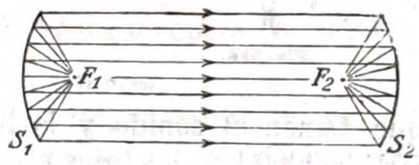


Fig. 588

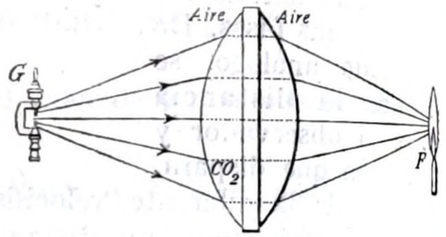


Fig. 589

primer espejo S_1, reflejándose en S_1, originan un haz paralelo, que, recogido por S_2, se concentra en F_2.

Se repite el experimento colocando en F_1 un cuerpo caliente que emite radiaciones infrarrojas, invisibles (p. ej., esfera de hierro calentada a unos 500 °C). Un termómetro, o mejor la soldadura de un par termoeléctrico (§ 304, *d*]), colocado en F_2, señala un notable calentamiento a causa de la concentración en F_2 de la energía radiante infrarroja. Puede encenderse una cerilla colocándola en F_2. Resulta justificado el nombre de «espejos ustorios».

Colocando en F_1 el pito de GALTON y en F_2 una llama sensible, se podrá observar que en este punto se encuentra la máxima concentración de energía sonora.

Se ha visto ya que HEBB ha utilizado estos espejos para la medición de **v** (fig. 583).

§ **279. Refracción del sonido.** Puede efectuarse un experimento análogo al de la formación de imágenes ópticas para refracción de la luz a través de una lente convergente, sustituyendo la lente por un grueso recipiente de la misma forma (fig. 589) limitado por dos membranas finas de caucho.

Se llena este recipiente de anhídrido carbónico a una presión ligeramente superior a la atmosférica para que su forma pueda compararse a la de una lente convergente. En el anhídrido carbónico el sonido se propaga más lentamente que en el aire, y de esto se deduce la acción convergente (compárese con fig. 536, § 259).

El experimento de SCHELLBACH y BOEHM (fig. 590) es mejor porque no existe la membrana perturbadora en la superficie de separación de los dos gases.

En el borde de un recipiente R_1 [fig. 590, *a*)] hay una membrana de colodión *mm*, en la que choca el golpe sonoro producido por la chispa *E*. La membrana es puesta en vibración, y las ondas sonoras resultantes llegan hasta la lámina *pp* recubierta con polvo de licopodio. Se ve que éste se reúne en anillos elípticos concéntricos, cuyo centro común es el punto *C*, situado en el normal *EM* bajada desde el espinterómetro *E* a la membrana *mm*.

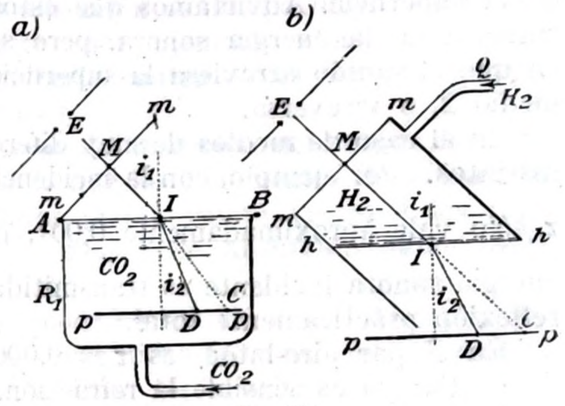


Fig. 590

Se llena ahora de anhídrido carbónico el recipiente R_1, haciendo llegar lentamente este gas por el fondo hasta que rebase el borde *AB*. Se tiene una superficie bastante definida y plana que separa el anhídrido carbónico del aire superpuesto.

Al repetir el experimento se forman en *pp* anillos elípticos diferentes de los anteriores, porque su centro se encuentra en *D*. El rayo sonoro, normal a las ondas sonoras, es *MID*; se tiene refracción con aproximación a la normal. El índice de refracción *del anhídrido carbónico respecto al aire* es:

$$n_{CO_2} = \frac{\operatorname{sen} i_1}{\operatorname{sen} i_2} = 1{,}24,$$

constante al variar i_1.

Para un gas más ligero que el aire (hidrógeno) se efectúa el experimento como indica la figura 590, *b*). El recipiente está invertido: la membrana de colodión *mm* se encuentra en su fondo, y el hidrógeno llega por *Q*, siendo *hh* la superficie que le separa del aire. Resulta para el índice de refracción *del aire respecto al hidrógeno*:

$$n_{aire} = \frac{\operatorname{sen} i_1}{\operatorname{sen} i_2} = 3{,}79.$$

§ **280. Energía reflejada y refractada.** Lo mismo que para la luz, el flujo de la energía sonora incidente w_i, es decir, la energía sonora que alcanza por unidad de tiempo la superficie de separación

de los dos medios 1, 2, se divide en dos partes: el flujo refractado w_t y el flujo reflejado w_r; su suma es igual al flujo sonoro incidente. En este sentido se dice que un rayo incidente origina un rayo refractado y otro reflejado.

En general, el flujo reflejado y el refractado son diferentes;

$$\tau = \frac{w_t}{w_i} < 1 \quad \text{y} \quad \varrho = \frac{w_r}{w_i} < 1 \qquad (\tau + \varrho = 1)$$

son, respectivamente, el *factor de transmisión* y el *factor de reflexión* de la superficie. Advirtamos que éstos dependen del ángulo de incidencia de la energía sonora, pero son independientes del sentido en que el sonido atraviesa la superficie, ya sea del medio 1 hacia el medio 2, o viceversa.

En el caso de medios de muy diferente densidad, τ y ϱ son muy distintos. Por ejemplo, con la incidencia normal en el par aire-agua, τ sólo vale aproximadamente 0,001, de modo que sólo $\frac{1}{1\,000}$ de la energía sonora incidente es transmitida por refracción; se tiene una reflexión prácticamente total.

En el par aire-latón es $\tau = 0{,}000\,005$. En el par agua-latón $\tau = 0{,}18$; ya es sensible la refracción.

Pero obsérvese que si se quieren extender estas consideraciones a los sólidos, es necesario tener en cuenta que éstos transmiten ondas tanto longitudinales como transversales, y el problema se complica muchísimo.

§ 281. Perturbaciones. La propagación de las ondas sonoras en el aire no se efectúa según los simples esquemas sugeridos por la propagación rectilínea y por las leyes de reflexión y refracción; se presentan, por el contrario, numerosas *perturbaciones*.

Puede existir una absorción de la energía sonora.

Para ondas planas, la intensidad E disminuye con la distancia según la [6] del § 252:

$$E = E_0 \cdot e^{-\alpha z}.$$

El coeficiente α de absorción aumenta con la frecuencia ν.

Esta absorción se atribuye al rozamiento interno, a propagación del calor por conducción o por emisión de radiaciones electromagnéticas entre las capas de aire sucesivamente comprimidas (y por tanto calentadas, § 316) y enrarecidas (y por tanto enfriadas, § 316). Se ha calculado también el valor de α debido a estas causas; las absorciones teóricas así calculadas en el aire seco, en condiciones normales, son muy pequeñas para las frecuencias audibles, pero se hacen rápidamente sensibles al aumentar la frecuencia: la intensi-

dad de una onda plana se reduciría a $\frac{1}{100}$ del valor inicial después de un recorrido de

370 50 10 2,5 0,6 cm,

cuando la frecuencia es

$\nu =$ 132 000 330 000 825 000 1 650 000 3 330 000 hertz.

A igualdad de frecuencia, la absorción es mucho mayor en el anhídrido carbónico que en el aire; por ejemplo, a 23 °C y para $\nu = 100\,000$ hertz, la absorción sería cuatro veces mayor; y para 200 000 hertz, ochenta veces mayor.

Pero es una causa mucho mayor de absorción del sonido la falta de homogeneidad del medio, por lo que los coeficientes de absorción experimentales son muy superiores (hasta veinte veces) a los previstos como consecuencia de las causas de absorción antes indicadas.

Toda causa que varíe las propiedades elásticas del aire, y principalmente la temperatura, puede crear dicha falta de homogeneidad. Dos capas de aire contiguas de distinta temperatura se comportan como los dos gases de la figura 590. Esto sucede también para la luz, pero en grado mucho mayor en el sonido. Resultan reflexiones y refracciones de la energía sonora, y como suele ser irregular la superficie de separación, estas refracciones y reflexiones son irregulares y producen una difusión de la energía sonora que, para los efectos del debilitamiento de la onda sonora primaria, es del todo equivalente a una absorción: el aire es entonces acústicamente *turbio*.

Una atmósfera muy límpida para la luz puede ser turbia para el sonido.

La existencia de *superficies de discontinuidad* para las propiedades del aire, debidas a una discontinuidad en la temperatura o en el estado higrométrico, es la causa de las múltiples reflexiones en el estampido del rayo, que originan el *trueno*.

La lluvia, la niebla y los copos de nieve originan un sensible enturbiamiento sonoro del aire. A veces se observa que al penetrar en un banco de niebla se transmite mejor el sonido, lo cual puede atribuirse a que el aire se halla más en calma y contiene menor número de superficies de discontinuidad.

En la atmósfera generalmente disminuye la temperatura al aumentar la altitud, por lo que en altura el sonido se propaga más lentamente (§ 250, [6]); la atmósfera se comporta como una superposición de capas cuyo índice de refracción aumenta con la altura, de donde resulta que los rayos sonoros se curvan hacia las capas más frías, es decir, hacia arriba.

Pero también se observan a menudo *inversiones* del gradiente de temperatura, *aumentando* ésta con la altura. Entonces, el rayo sonoro se curva hacia abajo.

Como consecuencia de este encorvamiento se producen fenómenos de espejismo sonoro, análogos al espejismo óptico.

En fin, el viento aporta también su acción perturbadora. Éste aumenta de intensidad con la altura, lo que produce un arrastre de la onda sonora más fuerte en las capas altas que en las bajas, y, como consecuencia, una deformación y plegado de la superficie de onda. Esta se dobla hacia la tierra en los puntos a *sotavento* O_1 (fig. 591), es decir, en los puntos para los cuales el viento se dirige desde el manantial sonoro hacia el observador; se dobla hacia arriba en los puntos a *barlovento* O_2, es decir, allí donde el viento va del observador al manantial. En O_1 se oye el sonido, y en O_2 no se oye.

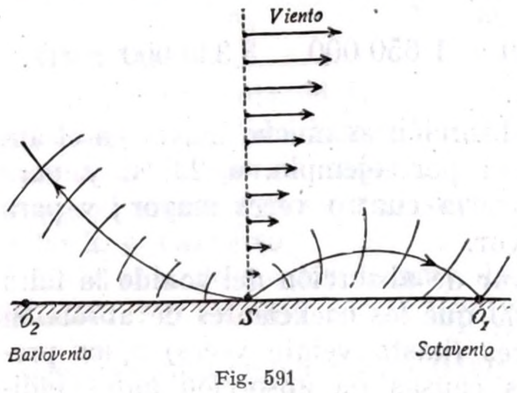


Fig. 591

Se ha observado otro tipo de perturbación en la propagación del sonido a distancias grandísimas. Se han utilizado como manantiales sonoros el estampido del cañón y el disparo de cantidades notables de explosivo. En la actualidad, los experimentos, o mejor dicho, las observaciones, se han hecho en gran escala a base del estallido de las bombas de aviación, y todas ellas conducen en forma concordante a establecer la existencia de una *zona de silencio*. Hasta ≈ 100 km como máximo, se observa una zona normal de audibilidad, pero a menudo, independientemente del viento, la zona de audibilidad tiene un radio mucho menor por la atenuación del sonido producido por los obstáculos que se hallan en la superficie del suelo; sigue una zona de silencio que se extiende, aproximadamente, desde los 100 a los 200 km del manantial sonoro.

Luego viene una segunda zona de audibilidad. La distancia recorrida por el sonido, calculada a partir de su velocidad normal y del tiempo transcurrido entre el momento del disparo y la llegada de la onda sonora, resulta ser $50 \div 70$ km mayor que la distancia directa entre el manantial sonoro y el observador.

Se atribuye este fenómeno a un encorvamiento (¿reflexión?, figura 592) del sonido en las altas zonas de la atmósfera, debida probablemente a una inversión del gradiente vertical de temperatura hacia los $30 \div 40$ km de altura. Viene luego una segunda zona de silencio y una extensa zona de audibilidad, debidas a otra ulterior reflexión del sonido que se produce primero en el suelo y luego en la alta atmósfera.

También se han efectuado en el agua experimentos de absorción

de los sonidos, y especialmente de los ultrasonidos, con resultados análogos a los descritos para el aire.

§ 282. Efecto Doppler. Sean S (fig. 593) un manantial sonoro y R un receptor, por ejemplo, el oído de un observador. Sea $\mathbf{v}$ la velocidad de propagación.

Si ν_1 es la frecuencia de las vibraciones de S, éste emite ν_1 vibraciones en un segundo. Cuando S y R están en reposo *respecto al medio elástico que sirve para la propagación*, el aire, por ejemplo, llegan ν_1 vibraciones a R en un segundo. El observador oye el sonido producido por S con su verdadero tono.

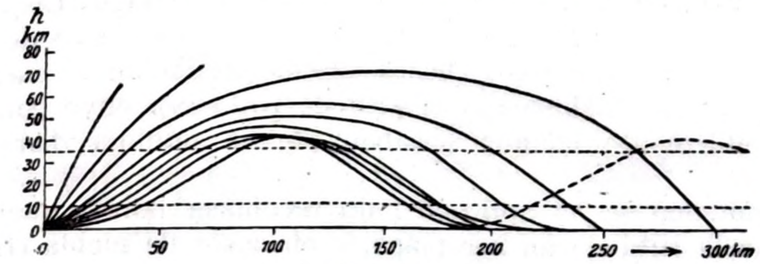


Fig. 592

Pero supongamos que S tenga la velocidad u_1 según el eje Ox individualizado por SR, y que R tenga la velocidad u_2 según el mismo eje. Las velocidades u_1 y u_2 vienen dadas en valor y signo.

Las ν_1 vibraciones, emitidas en un segundo por S, constituyen ν_1 longitudes de onda distribuídas no en un espacio $\mathbf{v}$, sino en el espacio $\mathbf{v} - u_1$. Por otro lado, si R tiene la velocidad u_2, sólo es capaz de recoger en un segundo las vibraciones que se encuentran distribuídas a lo largo del segmento $\mathbf{v} - u_2$.

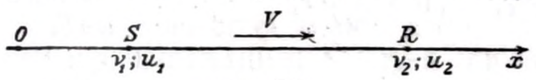


Fig. 593

Si ν_1 longitudes de onda se hallan distribuídas en el segmento $\mathbf{v} - u_1$, ¿cuántas contendrá el segmento $\mathbf{v} - u_2$?

Llamando ν_2 a este número de longitudes de onda, se tiene:

$$\nu_1 : (\mathbf{v} - u_1) = \nu_2 : (\mathbf{v} - u_2)$$

Por tanto,

$$\nu_2 = \frac{(\mathbf{v} - u_2)}{(\mathbf{v} - u_1)} \nu_1 \qquad [1]$$

siendo ν_2 el número de ondas que llegan a R en un segundo. El observador oye un sonido de frecuencia ν_2, mientras que S le envía un sonido de frecuencia ν_1.

El observador oye el sonido con su verdadera nota solamente cuando es $u_1 = u_2$.

Las fórmulas se complican un poco cuando el manantial y el observador no se mueven según un mismo eje.

Se efectúa el experimento haciendo girar rápidamente un brazo en cuyo extremo hay un silbato. La altura del sonido es diferente en los instantes en que el silbato se aproxima al observador (sonido más agudo) que en los momentos en que se aleja (sonido más grave). En esto consiste el *efecto* DOPPLER.

Se observa fácilmente el efecto DOPPLER durante los tiros de artillería: el tono del silbido del proyectil baja bruscamente cuando éste pasa por la mínima distancia del observador. El autor ha observado en 1916, en las márgenes de la meseta de Asiago (Lisser), magníficos casos de efecto DOPPLER durante la caída de cascos de metralla en los disparos antiaéreos. Dichos cascos producían al caer un sonido muy puro (análogo al del pito de GALTON), cuyo tono disminuía sensiblemente cuando pasaban por la mínima distancia del observador.

El fenómeno se ha aplicado para reconocer por la noche la dirección de la ruta de un aeroplano, o en casos de niebla (BERNINI).

Cuando R está fijo y S tiene la velocidad u_1, resulta:

$$\nu_2 = \frac{\mathbf{v} - u_1}{\mathbf{v}}\,\nu_1 = \left\{1 + \frac{u_1}{\mathbf{v}} + \left(\frac{u_1}{\mathbf{v}}\right)^2 + \ldots\ldots\right\}\cdot\nu_1$$

Si está fijo S, y R tiene la velocidad $u_2 = -u_1$, es decir, opuesta a la que tenía S en el caso anterior, resulta:

$$\nu_2' = \frac{\mathbf{v} + u_1}{\mathbf{v}}\,\nu_1 = \left(1 + \frac{u_1}{\mathbf{v}}\right)\cdot\nu_1$$

Suponiendo que u_1 es muy pequeño respecto a $\mathbf{v}$, coinciden ν_2 y ν_2', con *error menor que los términos de segundo orden* en $\frac{u_1}{\mathbf{v}}$.

Si $\left(\frac{u_1}{\mathbf{v}}\right)^2$ no es despreciable, no pueden suponerse iguales ν_1 y ν_2; el movimiento relativo de R respecto a S es el mismo en los dos casos, pero la altura del sonido recibido por R es diferente. Se tiene un modo de reconocer en el movimiento relativo quién está en reposo y quién está en movimiento *respecto al aire.*

§ 283. Onda balística. Si el manantial S se mueve con velocidad u superior a la del sonido $\mathbf{v}$, el fenómeno de DOPPLER cede su lugar a otro fenómeno: existe una envolvente de las ondas sucesivas producidas por S, lo que crea un frente de onda extraordinariamente enérgico para los efectos sonoros.

Se presenta también este fenómeno en lo que respecta a la onda de presión que produce un proyectil delante de sí mismo. Si la velocidad del proyectil es mayor que la del sonido, existe una envolvente de las ondas de presión a la que se da el nombre de *onda balística* u *onda de choque.*

La perturbación que acompaña al proyectil es muy complicada. En la figura 594 donde además de la estela turbulenta se tiene una onda balística múltiple, resulta bien visible esta perturbación.

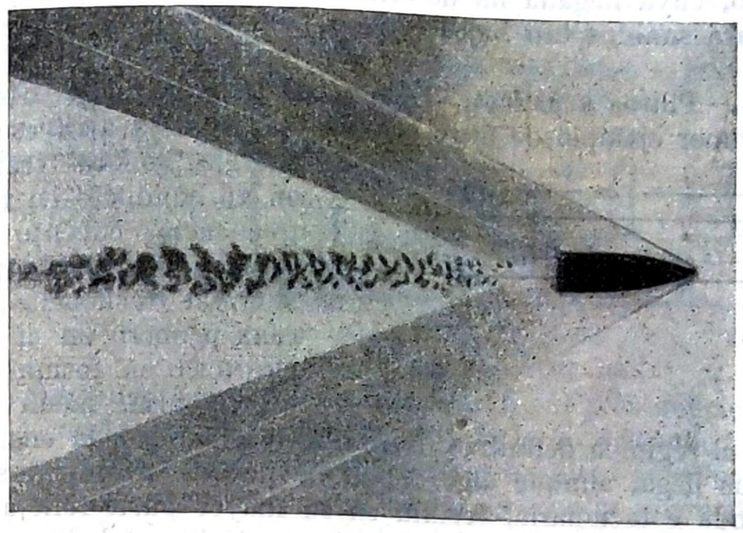


Fig. 594

Un buque que avanza sobre un mar tranquilo engendra ondas en la proa (el asiento o *sillage* de los franceses), que presentan analogía con la onda balística, y deja en la popa una estela turbulenta.

Para conocer el ángulo α (fig. 595) que la dirección de la velocidad $\vec{u}$ del manantial S forma con la dirección de propagación de la onda balística, basta razonar como en el § 259 para la onda XB de la figura 535.

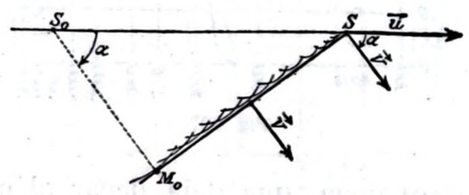


Fig. 595

La envolvente de las ondas esféricas elementales engendradas por el proyectil en su trayecto desde S_0 a S determina en el espacio una onda cónica, cuya traza, en el instante en que el proyectil se halla en S, es M_0S; el triángulo M_0SS_0 es rectángulo.

S_0M_0 y S_0S son espacios recorridos en tiempos iguales por la onda de presión producida en S_0 por el proyectil. Luego se tiene:

$$\cos\alpha = \frac{M_0S_0}{S_0S} = \frac{\mathbf{v}}{u}.$$

Para $u < \mathbf{v}$, α es imaginario: no hay envolvente y falta la onda balística.

Es debida a la onda balística la impresión sonora ensordecedora que se recibe en los disparos de artillería, debida al proyectil, y que vulgarmente se atribuye al *cañonazo*. A alguna distancia de la boca de fuego, el verdadero cañonazo *(onda de boca)* corresponde a un sonido extraordinariamente bajo y más a menudo a un verdadero subsonido, cuya llegada ha de señalarse mediante un receptor adecuado para sonidos tan bajos (§ 269).

§ 284. Filtros acústicos. El tubo de QUINCKE (figs. 514 y 515) da un primer ejemplo de filtro acústico que se deja atravesar por la energía sonora transmitida en un conducto en todas las frecuencias excepto en una.

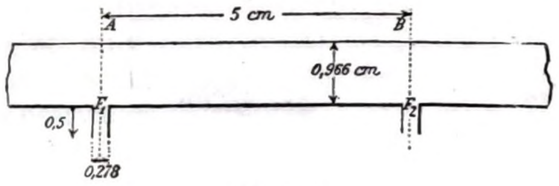


Fig. 596

La energía correspondiente a tal frecuencia se almacena primero en el tubo de QUINCKE en forma de onda estacionaria, hasta que, alcanzado el régimen definitivo de equilibrio dinámico, la energía posterior que llega, aunque algo debilitada por los rozamientos que sufre la onda estacionaria, resulta en su mayor parte reflejada hacia el manantial por el dispositivo interferométrico.

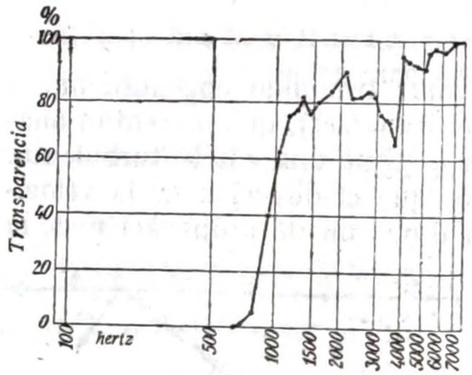


Fig. 597

Un resonador de HELMHOLTZ, adaptado al oído, es un filtro de

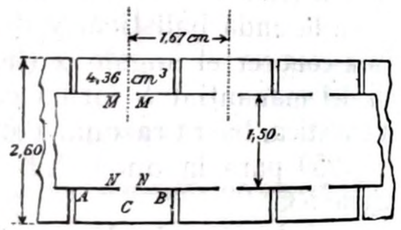


Fig. 598

resonancia, que deja llegar al oído, con intensidad privilegiada, la energía sonora correspondiente a la frecuencia de resonancia.

Además de estos filtros de resonancia, se tienen otros tipos de filtros acústicos, debidos a STEWART.

Un tubo con cortas derivaciones laterales (fig. 596) es un filtro acústico *de alta*, es decir, capaz de dejar pasar tan sólo las frecuencias suficientemente elevadas; el límite inferior de las frecuencias que pasan depende de las dimensiones geométricas del dispositivo.

Con un tubo de esta clase, constituído por doce elementos sucesivos AB, cuyas dimensiones se dan en la figura 596, se tiene la curva de transmisión de la energía sonora, en función de la frecuencia, que indica la figura 597; en las ordenadas figura el factor de transmisión en tantos por ciento.

En esencia, lo que ocurre es que una onda de baja frecuencia no puede propagar sus variaciones de presión a lo largo del tubo porque los agujeros F_1, F_2 funcionan como igualadores de las presiones interior y exterior; la onda «se esfuma» hacia el exterior del tubo a través de los agujeros F. Pero si la onda tiene una frecuencia suficientemente elevada, la inercia de los tapones de aire que ocupan

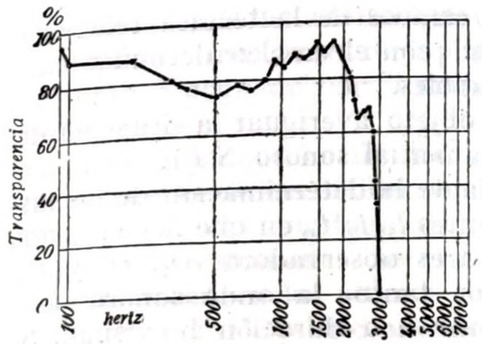


Fig. 599

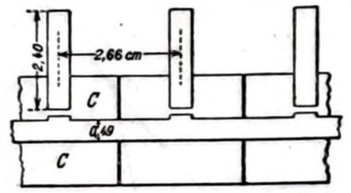


Fig. 600

los tubos que constituyen las derivaciones F_1, F_2, es suficiente para obligar a la onda que llega a proseguir a lo largo del tubo. Un tubo con cámaras-manguito laterales (fig. 598) es un filtro acústico *de baja*. Con un tubo de esta clase, constituído por cuatro elementos sucesivos AB con las dimensiones indicadas en la figura, se obtiene la curva de transmisión de la figura 599. Esta vez, una onda de baja frecuencia que llega a MN, tiene tiempo de «llenar» con su presión toda la cámara C y propagar así su presión a las capas MN del tramo sucesivo de tubo. Una onda de alta frecuencia que llega a MN, desemboca en un recinto C ya suficientemente grande para provocar la reflexión de la onda que llega, como sucede en la extremidad de un tubo abierto en la atmósfera (§ 255).

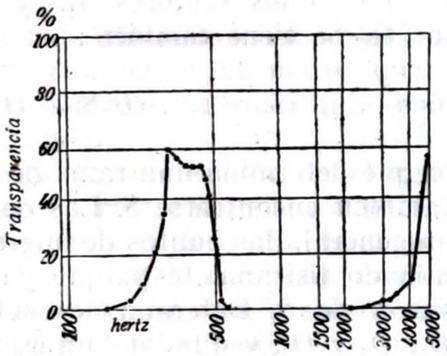


Fig. 601

Una combinación de los dos filtros, con dimensiones convenientes de las partes, constituye un *filtro de banda*. En la figura 600 se da la sección de uno de estos filtros, y en la figura 601 se representa la curva de transmisión correspondiente.

Obsérvese que el filtro presenta discontinuidades en la transmisión del sonido para frecuencias a las que corresponden longitudes de onda notablemente mayores que la longitud de cada elemento del filtro.

Respecto a la analogía con los filtros eléctricos, véase el tomo II.

§ 285. Aplicaciones técnicas de la acústica. No se ha querido tratar en este libro ni la acústica musical, ni los instrumentos mu-

sicales y su construcción, porque son asuntos que plantean problemas esencialmente fisiológicos y artísticos.

Tampoco nos detenemos a hablar de la importancia de la acústica en la técnica de la telefonía y de la radiotelefonía, del cine sonoro y del gramófono.

Recordaremos brevemente otros campos de la técnica relacionados con la acústica o, más en general, con el empleo de ondas elásticas, incluso de frecuencias no audibles.

a] **Fonotelemetría.** Tiene por objeto averiguar la situación del manantial sonoro S (fig. 602) mediante la determinación de los instantes t_1, t_2, t_3, en que llega la onda a tres observadores O_1, O_2 y O_3. Por tanto, la onda sonora debe tener una duración brevisima. Se tiene en valor y signo:

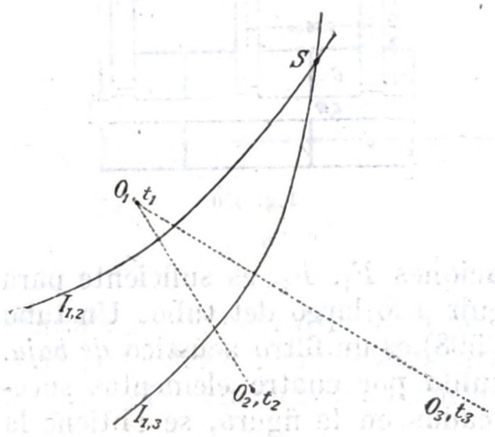


Fig. 602

$$O_2S - O_1S = (t_2 - t_1)\cdot \mathbf{v} \qquad [1]$$

expresión en la que son conocidos $\mathbf{v}$ y $(t_2 - t_1)$.

Luego S se encuentra en una rama de hipérbola $I_{1,2}$, de focos O_1 y O_2, y tal que la diferencia entre los radios vectores O_1S y O_2S viene dada, en valor y signo, por la [1]. Se tiene también:

$$O_3S - O_1S = (t_3 - t_1)\cdot \mathbf{v}, \qquad [2]$$

lo que determina una rama de otra hipérbola $I_{1,3}$, sobre la cual debe también encontrarse S. Las dos ramas de las dos hipérbolas tienen, en general, dos puntos de intersección, pero el problema queda determinado físicamente porque ya se conoce, aproximadamente, la posición de S. Determinados sobre un plano topográfico los puntos O_1, O_2 y O_3, y dibujando a escala las hipérbolas $I_{1,2}$ e $I_{1,3}$, se obtiene sobre dicho plano la posición de S.

Como el trazado de las hipérbolas no es cómodo, se prefiere el «método de los arcos». Se indican en el plano topográfico los lugares O_1, O_2 y O_2 (fig. 603), ocupados por los observadores en el orden de distancias crecientes desde el manantial S, es decir, de modo que sea $t_1 < t_2 < t_3$.

Con centro en O_2 y radio $r_2 = \mathbf{v}\cdot(t_2 - t_1)$, reducido a la escala del plano topográfico utilizado, se traza la circunferencia Σ_2. Con centro en O_3 y radio $r_3 = \mathbf{v}\cdot(t_3 - t_1)$ se traza análogamente la circunferencia Σ_3. La distancia desde S a O_1 y a las circunferencias Σ_2 y Σ_3 es la misma, porque r_2 representa el exceso de distancia de S a O_2, y r_3 el exceso de distancia S a O_3, respecto a la distancia SO_1.

Sobre un papel translúcido se prepara, una vez para siempre, una familia de circunferencias concéntricas de radio gradualmente creciente, por ejemplo, de mm en mm. Se superpone el papel translúcido al plano topográfico y se traslada hasta que una circunferencia de la familia pase por O_1 y sea tangente a Σ_2 y a Σ_3. Una vez hecho esto, el centro común de la familia de circunferencias indica, sobre el plano, el punto S ocupado por el manantial sonoro.

La determinación de los emplazamientos de las artillerías enemigas y la del punto alcanzado por nuestras granadas, se efectuó muchas veces, en los últimos años de la guerra 1915-1918, mediante la fonotelemetría aplicada respectivamente a la onda de boca del cañón (§ 269) o a la onda producida por la explosión del proyectil. Pero los resultados sólo son buenos cuando el campo sonoro no está perturbado (§ 281).

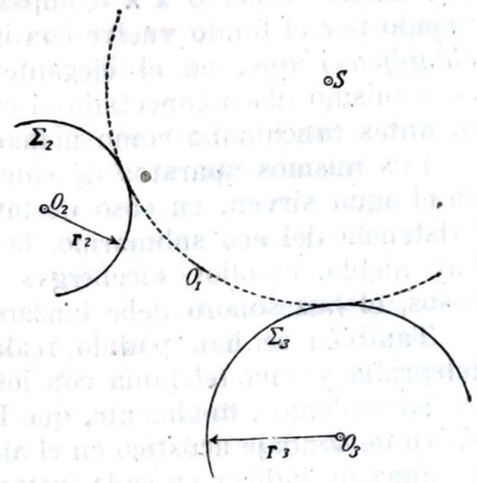


Fig. 603

Aplicando la fonotelemetría a la onda balística (§ 283), se pueden, pues, obtener datos relativos al movimiento de los proyectiles en el aire, utilísimos para la balística.

b] **Sondaje acústico.** Si se excluye la determinación de las profundidades de algunas decenas de metros, puede afirmarse que el *sondaje acústico* de las profundidades marinas ha sustituído completamente al antiguo método de la sonda.

Conocida la velocidad $\mathbf{v}$ de propagación del sonido en el agua, puede deducirse la profundidad del mar a partir del tiempo necesario para que una señal sonora que ha partido de la quilla de la nave regrese a la misma por reflexión en el fondo del mar (eco). Los experimentos se efectúan en pocos segundos y con una precisión ampliamente suficiente. Por medio de aparatos automáticos se obtiene el registro, por puntos, del perfil del fondo marino a lo largo del recorrido de las naves, durante los viajes normales de las mismas.

Para pequeñas profundidades es más conveniente un método que se basa en la formación de ondas estacionarias entre la superficie y el fondo del mar.

Los diversos métodos de sondaje acústico se diferencian en el tipo de manantial sonoro y en el del receptor de la onda sonora reflejada.

El manantial más empleado es el oscilador de cuarzo piezo-eléctrico, porque proporciona fácilmente ultrasonidos de frecuencia próxima a 50 000 hertz ($\lambda = 3$ cm en el agua), emitidos por un disco excitado por el cuarzo y que vibra de un modo parecido al émbolo D de la figura 519, *a*).

Éstos son los sonidos más convenientes. Presentan un amortiguamiento relativamente pequeño para una potencia que puede rebasar el kilowatt y constituyen un haz sonoro cónico de muy pequeña abertura, aunque el disco vibre en el agua libre y no en un tubo como en la figura 519; esto depende de las grandes dimensiones del manantial sonoro respecto a λ (compárese fig. 528). Así, el haz sonoro reflejado por el fondo vuelve con intensidad poco reducida al receptor *(hidrófono)* que, en el elegante dispositivo LANGEVIN-FLORISSON, es el mismo disco conectado al cuarzo piezoeléctrico que un momento antes funcionaba como manantial sonoro.

Los mismos aparatos de emisión y recepción de señales sonoras en el agua sirven, en caso de invisibilidad, para determinar, por la existencia del eco submarino, la existencia de otros buques cuando hay niebla, escollos, «icebergs» o sumergibles escondidos. En estos casos, el haz sonoro debe lanzarse horizontalmente.

También se han podido realizar con estos medios sonoros una telegrafía y una telefonía con los sumergibles.

Recordemos, finalmente, que FLORISSON ha propuesto un dispositivo de sondaje acústico en el aire basado también en el eco sonoro, y capaz de indicar en cada instante al piloto de una aeronave la altura a que se halla sobre el suelo.

c] **Prospección geofísica del subsuelo mediante el sonido.** Se han ensayado métodos análogos a los anteriores para determinar la existencia en profundidad de capas geológicas de particular interés minero (metales, petróleos). El manantial sonoro es la explosión de una pequeña carga de explosivo, y el receptor es un geófono o un sismógrafo muy sensibles. Los resultados no pueden ser bien definidos a causa de las irregulares heterogeneidades del subsuelo y de los diferentes caminos que puede seguir la onda elástica para llegar desde el manantial al receptor; sin embargo, se han obtenido resultados satisfactorios en Texas y en Persia en la investigación de petróleo, hasta profundidades de algunos kilómetros.

d] **Acústica arquitectónica.** Consta de dos partes esenciales:

1.ª Estudio de la absorción de los sonidos, de los ruidos y de las trepidaciones, de modo que no resulten perturbados los recintos próximos al manantial de estas vibraciones.

Para reducir esta perturbación, es preciso, por un lado, reducir la intensidad sonora de los manantiales. Los rotores de los motores deben equilibrarse bien en lo que se refiere a las masas giratorias (§ 166); deben evitarse los choques, los traqueteos y las irregularidades del movimiento (como las producidas a menudo por los engranajes). Son conocidas las normas que regulan en la circulación ciudadana el empleo de las señales sonoras.

Por otro lado, es preciso estudiar la *transparencia sonora* de los diversos materiales, midiendo su factor de transmisión o, si se quiere, el factor de reflexión y el factor de absorción.

Un buen emplazamiento de los motores sobre soportes *antivibrantes*, constituídos por materiales blandos que absorben las vibraciones (como fieltro y plancha de goma esponjosa), o bien con suspensiones elásticas sobre resortes, impiden suficientemente la transmisión al suelo subyacente de las trepidaciones de los motores.

En el comercio se encuentran hoy materiales absorbentes del sonido, en general masa porosas, para revestir cabinas telefónicas, muros divisorios, etc. Entre los medios más eficaces para producir dicha absorción, puede emplearse un revestimiento blando, especialmente si es múltiple.

Es característico el caso de las salas de toma cinematográfica del sonido: sus paredes deben ser fuertemente absorbentes.

2.ª Construcción de salones (para concierto, teatro, conferencias, cine sonoro, etc.) cuyas propiedades acústicas ofrezcan a los espectadores una audibilidad buena y uniforme.

Sentado que en los salones corrientes el sonido experimenta doscientas o trescientas reflexiones sobre las paredes antes de resultar inaudible, puede admitirse que el sonido se distribuye rápidamente de un modo uniforme por toda la estancia. Solamente invalidarían esta conclusión las reflexiones múltiples regulares. Pero estas se evitan fácilmente porque son debidas especialmente a la presencia de grandes techos de cúpula o de extensas paredes planas.

La bondad acústica de un salón se puede considerar determinada por el *tiempo de reverberación* o *de resonancia* que se define del siguiente modo: Supóngase que hay en el salón un manantial sonoro de intensidad constante; después de algunos instantes de actuación, se alcanza en la sala un régimen acústico definitivo de equilibrio dinámico y se dice que está «saturada» de sonido. Un micrófono colocado en un punto cualquiera de la sala señala una intensidad sonora constante con el tiempo. Cesando bruscamente el sonido, éste va amortiguándose y un micrófono unido a un registrador conveniente de la corriente microfónica puede indicar este amortiguamiento. Se llama *tiempo de reverberación* τ el necesario para que la intensidad inicial E_0 se reduzca a $E_1 = 10^{-6} \cdot E_0$, con la ulterior condición de que E_1 sea la mínima intensidad audible (intensidad correspondiente al umbral de la sensación sonora).

Este tiempo varía notablemente con la frecuencia, reduciéndose a la mitad cuando la frecuencia pasa de 200 a 5 000 hertz. Conviene, sin embargo, experimentar con sonidos no puros y contentarse con lo poco significativa que resulta la medida.

No son excepcionales los valores de $5 \div 6$ segundos para el tiempo de reverberación τ.

Ahora bien, para que una sala tenga buenas cualidades acústicas debe existir en ella una distribución uniforme del sonido, y τ debe estar comprendido entre ciertos límites, porque si el tiempo τ es demasiado corto, la sala es sorda, y si es demasiado largo, la sala es resonante. En este caso se superponen en el oído los sonidos sucesivos: aun no está amortiguado el uno cuando llega el otro, y es

muy difícil comprender un discurso. Un concierto de órgano podrá presentar efectos de plenitud y de plasticidad artísticamente agra-

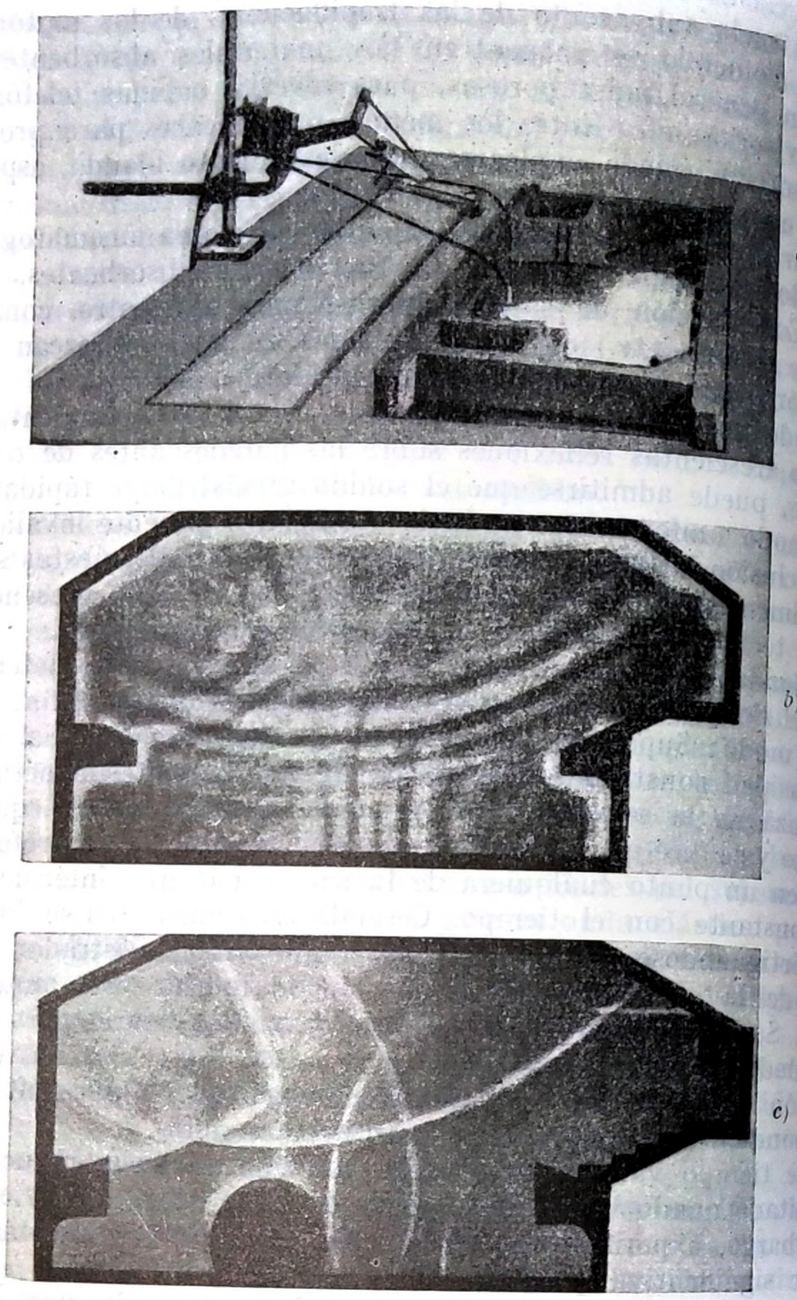


Fig. 604

dables, mientras que la música de «jazz» perdería buena parte de sus síncopes característicos.

SABINE afirma que $\tau = 1{,}1 \div 1{,}5$ seg es un valor conveniente para salones de unos 2 000 m³, mientras se recomiendan valores de $2 \div 3$ seg para grandes salones de unos 20 000 m³. Para la música,

τ puede tomar los valores más elevados arriba indicados, mientras que para la voz conviene mantenerse en los valores mínimos.

Generalmente, en una sala resulta demasiado largo el tiempo τ y es preciso reducirlo a otro más conveniente. Esto se logra aumentando el poder absorbente de las paredes, del techo y del pavimento, mediante el empleo de grandes superficies de paño, doseles en el techo, alfombras, materiales porosos y telas enyesadas para la ejecución de los frisos arquitectónicos, enguatando los asientos, etc.

Además, el público constituye un elemento absorbente de primer orden.

En fin, para evitar que se produzcan interferencias demasiado regulares del sonido (como las de la figura 534) conviene, antes de la construcción de la sala, experimentar con un modelo de la misma: el perfil de una sección vertical de un salón cinematográfico sirve de contorno a un recipiente en el cual se producen ondas como en la figura 521.

Fig. 605

Tomando el modelo a la escala 1 : 50, se tiene la ventaja de que se reducen en la misma proporción el modelo y la longitud de onda; en efecto, las longitudes de onda en la superficie del líquido son del orden de 1 cm, y las longitudes de onda en el aire para sonidos de frecuencia 700 hertz son de $\approx$ 50 cm, es decir, 50 veces mayores.

En la figura 604, *a*) se ve uno de estos modelos y el excitador de ondas; la figura 604, *b*) es la fotografía de un tren de ondas en la superficie del líquido después de una primera reflexión sobre el techo de la sala, y la figura 604, *c*) es la fotografía, en condiciones análogas, de la onda sonora producida al saltar una chispa eléctrica.

Para un salón rectangular se tienen reflexiones no completamente desordenadas y la distribución del sonido no es uniforme (fig. 605). Se obtiene fácilmente una difusión rápida y uniforme de la onda adoptando formas más complicadas para las salas.

e] **Resumen de algunas otras aplicaciones.** La medida del factor de transmisión del sonido a través de una pared, mencionada en *d*], 1.ª, en general puede ya conducir a la determinación de algunas de las propiedades mecánicoelásticas del material de que está formada la pared.

Por otra parte, a base de la determinación de la velocidad del sonido en una barra, pueden deducirse las constantes elásticas ε, τ (§ 250) de la misma. Por regla general se utilizan ondas estacionarias y métodos que pueden considerarse como una extensión a los sólidos

de los que, basados en el tubo de KUNDT (§ 256), sirven para determinar en los flúidos los valores de ε y de γ (§ 335) a partir de la velocidad V del sonido. En el caso de los sólidos, los fenómenos son mucho más complejos porque las ondas elásticas no son necesariamente longitudinales.

De un año para otro van perfeccionándose los métodos de investigación de los defectos de homogeneidad en los materiales (cavidades, burbujas, grietas, etc.), métodos que repiten, a escala muy reducida y con el uso de ultrasonidos de frecuencias elevadísimas, el mismo procedimiento indicado en *b*] y en *c*], basado en la reflexión de las ondas elásticas sobre eventuales superficies de discontinuidad (caras de las fisuras) existentes en la pieza que se estudia.

Parece que estos métodos van consolidándose, más que los de análisis fundados en los rayos X, cuando se trata de la comprobación de la homogeneidad de los metales obtenidos por fundición, porque requieren instalaciones poco complicadas, más fácilmente adaptables a los distintos puntos del objeto que se examina, independientemente de su forma, y porque la prueba no resulta perturbada por la eventual complejidad del objeto sometido a examen o de las partes adyacentes al mismo.

Puede decirse que estos métodos traducen en mediciones cuantitativas, y mucho más satisfactorias, la antigua técnica rudimentaria de hacer sonar el objeto (p. ej., una campana, una copa, etc.) para asegurarse de su integridad.

Del ultrasonido se han obtenido además otros resultados curiosos e interesantes :

la emulsificación de un líquido en otro (p. ej., aceite en agua); y a la inversa, la coagulación de los humos contenidos en un gas;

la reunión en grandes burbujas (coalescencia) y, por ende, la expulsión fácil de las burbujas gaseosas de un metal fundido, haciendo en esta forma mucho más estimable la fundición obtenida con metal degasado ;

la ruptura de macromoléculas (despolimerización) ;

la producción de emulsiones fotográficas de grano finísimo ;

la realización de retículos de difracción para la luz (véase tomo II) dotados de propiedades especiales ;

la realización de interruptores periódicos de un haz luminoso, con la frecuencia del ultrasonido empleado, es decir, con una frecuencia que puede exceder los 10^6 hertz ;

. . . . . .

Sin embargo, no es fácil juzgar cuáles de estas ingeniosas aplicaciones de las ondas elásticas, y en especial de los ultrasonidos, podrán salir del círculo de los laboratorios especializados para consolidarse en el campo de la práctica.

CUARTA PARTE

Calor

CAPÍTULO I

Termometría

§ 286. Temperatura. Cantidad de calor. El estudio de los fenómenos caloríficos conduce a la introducción de estos dos conceptos físicos fundamentales, que se admiten, en primera aproximación, como conocidos por física elemental. Previos los oportunos convenios (§§ 288 y 314) se llega a la definición cuantitativa de *temperatura* y de *cantidad de calor ;* éstas se convierten en magnitudes físicas, medibles, respectivamente, con el *termómetro* y con el *calorímetro*.

Estas dos magnitudes constituyen ejemplos clarísimos de entes físicos utilísimos, cuyo contenido real (§ 4) consiste solamente en la posibilidad de establecer para ellos normas lógicas y cómodas de medida.

La temperatura θ y la cantidad de calor Q se presentan, inicialmente, con el carácter de magnitudes fundamentales ; pero luego, por lo menos una de ellas, la cantidad de calor, pasa a ser definida (§ 326) como magnitud derivada de otras puramente mecánicas, aunque sigue siendo muy útil su empleo como magnitud de referencia dimensional (§ 7).

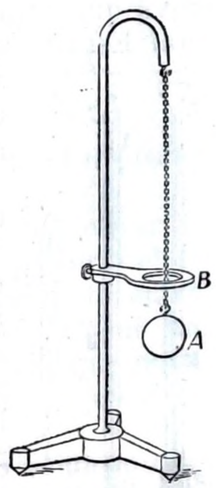


Fig. 606

§ 287. Temperatura. La experiencia enseña que el volumen de un cuerpo, mantenido a presión constante, por ejemplo, a la presión atmosférica, supuesta invariable durante el experimento, no es determinado. Se observan *dilataciones* (positivas o negativas) de los cuerpos.

a] **Sólidos.** Una esfera metálica que cuando está «fría» puede pasar justamente por un anillo, no pasa cuando está «caliente» (*anillo de* GRAVESANDE, fig. 606).

Una varilla de cobre AB (fig. 607) tiene una longitud variable : cuanto más caliente está más larga es.

b] **Líquidos.** El *termoscopio* de la figura 608 demuestra que no es determinado el volumen del líquido (mercurio, p. ej.). También es mayor el volumen del líquido cuanto más caliente está.

Nótese que en dicho termoscopio se observa la dilatación aparente, porque también se dilata el recipiente.

Más frecuentemente, el extremo A está cerrado y en el tubo MA hay (prácticamente) el vacío o un gas químicamente inerte respecto al líquido, a la presión de varias atmósferas. En este último caso, el termoscopio termina con una cámara C [fig. 608, c)] de paredes robustas; el líquido puede llevarse a una temperatura mucho más elevada que la normal de ebullición sin que ésta se produzca y pueda impedir el funcionamiento del termoscopio.

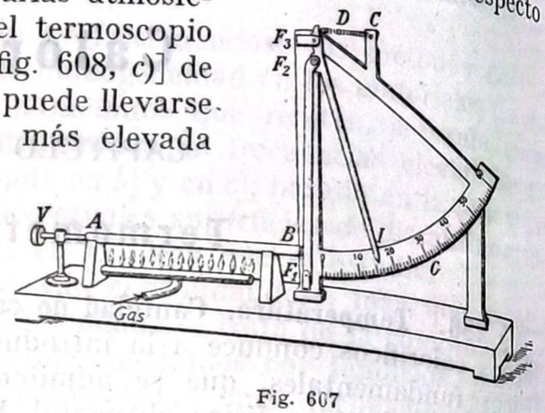


Fig. 607

c] **Gases.** En fin, el termoscopio de gas (fig. 609) indica la dilatabilidad del gas en el depósito B por el corrimiento de la gota G.

Esta sirve de índice para la dilatación, a la vez que de émbolo móvil que impide que el gas contenido en B se difunda en la atmósfera. Esta vez, A debe estar abierto, en comunicación libre con la atmósfera, y basta tocar el depósito B con la mano caliente para obtener corrimientos notables de G en el capilar del termoscopio.

Fig. 608

El termoscopio de gas presupone que la presión atmosférica ha permanecido constante durante el experimento; constituye a la vez un *baroscopio* y un *termoscopio*: una disminución de la presión exterior da el mismo resultado que un aumento de la temperatura del gas contenido en B. No sucede esto en el termoscopio de líquido, gracias a la pequeñísima compresibilidad de los líquidos.

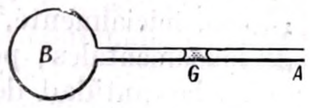


Fig. 609

En compensación, la dilatación del recipiente es despreciable respecto a la dilatación de los gases; prácticamente puede confundirse la dilatación aparente con la dilatación real.

Se conviene en atribuir al termoscopio un estado térmico o *temperatura* determinada por el volumen de la substancia termométrica (líquido o gas) que lo llena a presión constante. El termoscopio indica la temperatura de su substancia termométrica.

Un termoscopio metido en hielo fundente indica un *estado térmico* o *temperatura* fijo y constante. El hielo machacado debe rodear bien el depósito, y el agua de fusión debe escurrirse por el fondo agujereado del recipiente (fig. 610). El aparato constituye un *termostato*, y se admite que la temperatura fija que toma el termoscopio es igual

a la temperatura (también fija) del hielo fundente. Alcanzado el *equilibrio térmico*, el hielo, el vidrio del depósito y el líquido termométrico tienen la misma temperatura.

El termoscopio es capaz de indicar la temperatura de los cuerpos con los que está en contacto.

Esta temperatura debe ser constante con el tiempo, o variar lentamente, para que el termoscopio pueda encontrarse siempre en condiciones de equilibrio térmico con el cuerpo que lo rodea. Aun siendo constante la temperatura respecto al tiempo, puede ser la misma en todos los puntos del cuerpo o variar de unos puntos a otros. Obsérvese que «un punto de un cuerpo» significa un volumen del cuerpo que resulte grande respecto al depósito del termoscopio.

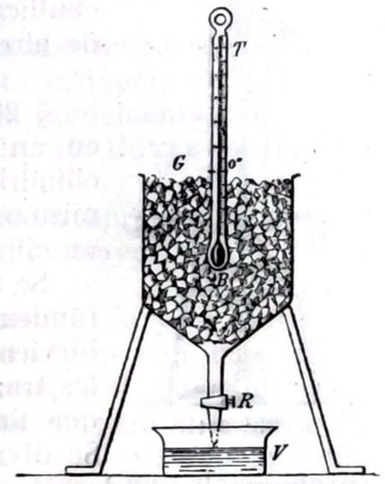


Fig. 610

Este depósito va sumergido en el cuerpo cuya temperatura se busca, lo cual es fácil en el caso de flúidos (o sólidos triturados). Para un sólido en bloque, es preciso practicar una cavidad capaz de contener el depósito del termoscopio, y asegurar el contacto térmico entre el mismo y las paredes de la cavidad, llenando con mercurio, que es buen conductor del calor, el espacio comprendido entre el depósito y las paredes de la cavidad.

A menudo se compara la temperatura con el potencial electrostático de un conductor. Ahora bien, en el caso del equilibrio electrostático, se tienen diferencias de potencial en cada contacto entre conductores heterogéneos (*efecto* Volta); pero ningún fenómeno ha inducido a pensar que ocurra aquí algo semejante, es decir, que haya diferencias de temperatura en la zona de contacto entre dos cuerpos distintos cuando hay equilibrio térmico.

El experimento del hielo fundente (fig. 610) no es el único que puede proporcionar una temperatura fija y constante. Cada cuerpo químicamente definido y puro, cuando no se altera químicamente por las variaciones de temperatura, tiene una *temperatura de fusión* fija y constante, que coincide con la temperatura de solidificación; más exactamente, tiene una temperatura de equilibrio entre la fase sólida y la líquida (§ 312). La presión influye muy poco en esta temperatura.

Análogamente, cada líquido químicamente definido y puro, si no experimenta alteraciones químicas al variar la temperatura, tiene una *temperatura de ebullición* fija y constante, bajo la presión normal de 760 mm_{Hg}. Esta temperatura es la de equilibrio entre la fase líquida y el vapor, cuando la presión es de 760 mm_{Hg}. La temperatura de ebullición depende notablemente de la presión a que está sometido el líquido, la cual, por lo tanto, debe indicarse siempre.

En la figura 611 se representa el aparato con el que se observa que el *vapor* que se desprende del agua hirviendo a la presión atmosférica tiene una temperatura fija y constante.

Así como en la figura 610 el depósito no queda en contacto con el agua resultante de la fusión, en la figura 611 *no* debe hallarse sumergido en el agua hirviente, la cual podría elevarse a una temperatura más alta que la normal de ebullición, debido a impurezas disueltas o a falta de aireación.

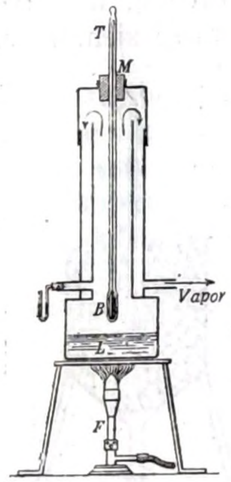


Fig. 611

§ 288. **Escala de temperaturas.** Compruébese en un termoscopio (de mercurio, p. ej.) la forma cilíndrica del tubo haciendo correr a lo largo del mismo una gota de mercurio, que debe constituir un cilindro líquido de longitud constante.

Se atribuye el valor 0 a la temperatura del hielo fundente, y el valor 100 a la del vapor del agua hirviendo a la presión normal. Se señalan en el tubo los trazos 0 y 100, que corresponden con los puntos que limitan el menisco M a dichas temperaturas. Se divide el intervalo en 100 partes iguales y se prolonga la graduación debajo del 0 (temperaturas *bajo cero* o negativas) y más allá del 100. El termoscopio se ha convertido en un *termómetro*, graduado en *grados centesimales* o *grados Celsius* (°C; A. CELSIUS, 1742); cualquier físico puede construirse el termómetro indicado.

Recuérdese que, por convenio, el trazo 100 °C se ha obtenido con el aparato de la figura 611, en el cual prácticamente toda la parte del tubo llena de líquido termométrico se encuentra dentro de los vapores de agua hirviente.

Si el termómetro, sumergido en un cuerpo, indica después de algún tiempo (necesario para alcanzar el equilibrio térmico) una temperatura fija y constante, ésta, leída en °C sobre la escala, será la temperatura del cuerpo.

Pero observemos que:

1.° Al graduar el termómetro como se ha dicho, se ha escogido el cero de una manera convencional, de donde resulta establecido sólo lo que se entiende por «diferencia de temperatura» a partir del cero convencional, y lo que se entiende por *salto* o *intervalo* de temperatura doble que otro; y esto sería suficiente para una medición de temperaturas en el sentido establecido en el § 5. Es lo mismo que ocurre en el caso de los «niveles» cuya medición es, en realidad, una determinación de «diferencias de nivel».

2.° Mucho más grave es la observación de que la temperatura así indicada depende de la *substancia termométrica* empleada: dos termómetros, uno de mercurio y otro de tolueno, en los cuales se han determinado el 0 y el 100 por el método indicado, y se ha dividido en 100 partes iguales el intervalo entre los puntos fijos, indican temperaturas que difieren en ≈ 3 °C hacia los 50 °C.

Las diferencias entre los termómetros con diferente líquido termométrico pueden llegar a decenas de grados para temperaturas muy inferiores a 0 °C o muy superiores a 100 °C.

En dos termómetros de mercurio construídos con vidrio de distinta clase, se observan divergencias hacia los 50 °C que pueden llegar casi a 0,1 °C.

Un termómetro de gas es de empleo mucho menos cómodo que otro de líquido, porque es preciso vigilar la constancia de la presión exterior, pero, en cambio, tiene una ventaja fundamental: los gases perfectos, es decir, los que obedecen a la ley de BOYLE (§ 185, *c*]), se dilatan todos igualmente.

En realidad, los gases reales sólo obedecen aproximadamente a la ley de BOYLE, con una aproximación tanto mayor cuanto menos comprimidos y menos fríos se hallen

El nitrógeno, el oxígeno, y especialmente el helio y el hidrógeno, a la presión y temperatura corrientes, satisfacen con muy buena aproximación la ley de BOYLE. Los termoscopios llenos de estos gases, calibrados en grados, como se ha indicado para el termómetro de mercurio, se encuentran de acuerdo hacia los 50 °C, con una diferencia menor que 0,01 °C. Estos gases, calentados desde 0 a 100 °C, a presión constante, aumentan de volumen en un valor que, al tender hacia cero la presión constante p_0 a que se experimenta, tiende al valor común $\dfrac{366{,}09_5 \pm 0{,}01}{1\,000} = \dfrac{100}{273{,}15 \pm 0{,}01}$ (¡más de un tercio!) del volumen inicial v_0 a 0 °C.

Dividir el tubo cilíndrico en grados de igual longitud equivale a suponer que la variación de temperatura es proporcional a la variación de volumen $v - v_0$.

Luego el aumento de volumen es de $\dfrac{1}{273{,}15} \cdot v_0$ por cada grado; y la temperatura leída en el termómetro es por convenio:

$$\theta = \frac{v - v_0}{\dfrac{1}{273{,}15}\, v_0} \qquad \theta \text{ en } ^\circ\text{C} \qquad [1]$$

o sea,

$$v = v_0\,(1 + \alpha\theta) \qquad \alpha = \frac{1}{273{,}15}\ ^\circ\text{C}^{-1}; \qquad [2]$$

$\alpha = \dfrac{1}{v_0}\dfrac{v - v_0}{\theta}$ es el *coeficiente de dilatación térmica* (1) del gas a

(1) En contraposición a la «dilatación mecánica», como la descrita en el § 187 *a*].

presión constante, común a todos los gases perfectos e independiente de la presión constante p_1 a la cual se experimenta. Se tiene

$$[\alpha] = [\theta^{-1}]. \qquad [3]$$

La [1] es, pues, la definición de una *temperatura centesimal, centígrada celsius*, independiente ahora de la naturaleza de la substancia termométrica y de p_0 con tal que se trate de un gas perfecto. En la práctica, el gas perfecto se sustituye por un gas real suficientemente caliente y a presión p_0 suficientemente baja.

Aunque se varíen las unidades fundamentales de medida (de longitud, masa y tiempo), no cambia la medida de la temperatura definida por la [1]. En este sentido podrá escribirse en dimensiones:

$$[\theta] = [l^0 \cdot m^0 \cdot t^0]; \qquad [4]$$

es decir, la definición de temperatura que hemos dado es independiente de las magnitudes fundamentales de la Mecánica. La temperatura toma el carácter de una nueva magnitud física fundamental, de manera que ha de escribirse más bien:

$$[\theta] = [l^0 \cdot m^0 \cdot t^0 \cdot \theta^1]. \qquad [5]$$

La unidad $[\theta]$ no aparece en ninguna ecuación dimensional de las magnitudes mecánicas por estar éstas definidas con independencia de la temperatura. En rigor, en todas estas ecuaciones debiera aparecer también el factor constante $[\theta^0]$; por ejemplo: $[a_c] = [l^1 \cdot m^0 \cdot t^{-2} \cdot \theta^0]$; pero esto es inútil y por esto se omite:

§ 289. Estado de un cuerpo. Transformación. Para caracterizar las condiciones en que se encuentra cierto cuerpo (es decir, *cierta masa material, de cierta naturaleza química*, o todavía, *cierto número de gramos de un cuerpo de composición química determinada)*, damos el valor de cierto número de *variables*: la *presión* en cada punto del cuerpo, la *temperatura* en sus diversos puntos, el *volumen*, su *estado eléctrico, magnético...* En el caso de cuerpos sólidos, indica la experiencia que esto no basta aún; es necesario conocer también el estado cristalino, y a veces la historia del cuerpo; así, en un pedazo de cobre se habrá de saber si ha sido trabajado, y en un pedazo de hierro, si ha sido imanado o no...

El conjunto de los valores que toman todas estas variables determina el *estado interior* del cuerpo.

Si algunas de las variables cambian de valor, y la experiencia enseña que este cambio generalmente se realiza con continuidad, se dirá que el cuerpo experimenta una *transformación* o un *proceso*.

Cuando, al terminar la transformación, el estado interno del cuerpo coincide con el estado inicial, de modo que todas las variables han vuelto a tomar el valor primitivo, se dice que el cuerpo ha recorrido una *transformación cíclica* o, simplemente, un *ciclo*.

En lo sucesivo *nos limitaremos al caso en que el estado de un cuerpo homogéneo esté determinado por las tres variables: volumen v, temperatura* θ, constante en todos los puntos del cuerpo (1), y *presión* específica p, también constante en todos los puntos, y que satisface las condiciones impuestas en los §§ 199 y 200; esto sucede en los flúidos homogéneos, de naturaleza química determinada, en equilibrio, contenidos en un recipiente en reposo, no electrizados ni imanados, cuando se supone despreciable la acción de la gravedad (principio de PASCAL).

En fin, observemos que, en el caso de un cuerpo homogéneo, el volumen v dividido por la masa m da el volumen específico: $\frac{v}{m} = \frac{1}{\mu}$ en donde μ es la masa específica, constante en todos los puntos del cuerpo, por ser éste homogéneo. Por consiguiente, puede convenir dejar indeterminada la masa del cuerpo homogéneo y caracterizar su estado interno por las tres variables: volumen específico, presión y temperatura, siendo cada una de ellas constante en todos sus puntos.

La sustitución del volumen total v del cuerpo por la variable $\frac{1}{\mu}$ (volumen específico) permite extender los conceptos anteriores al caso de cuerpos o de sistemas de cuerpos que no sean homogéneos ni se hallen en equilibrio mecánico o térmico. Cada elemento dv del cuerpo o del sistema contiene la masa dm y tiene un estado determinado por las tres variables: temperatura θ, presión p y volumen específico $\frac{dv}{dm} = \frac{1}{\mu}$. Pero ahora éstas pueden variar de un punto del cuerpo a otro. Según los casos, convendrá tomar a v como el volumen total o como el volumen específico del cuerpo.

Esta ambigüedad, una vez advertida, no conduce a graves inconvenientes; pero si no se tuviere en cuenta el doble significado concedido a v, podría sentirse uno inducido a declarar dimensionalmente equivocadas muchas de las relaciones que siguen.

§ 290. Ejemplos de transformaciones.

a] **Transformación isotérmica.** Es la que se realiza a temperatura constante; por ejemplo, la fusión lenta del hielo a presión constante.

En las transformaciones isotérmicas se logra la constancia de la temperatura mediante los dispositivos llamados *termostatos*. Son termostatos:

1.º un recipiente de paredes conductoras (de plata, cobre, aluminio) rodeado por un sólido fundente. Por ejemplo: el hielo fundente da un termostato a 0 °C;

(1) En los cuerpos en equilibrio térmico, o sea cuando no se propaga calor de unos puntos a otros, es el único caso posible.

2.º un recipiente de paredes conductoras rodeado por los vapores de un líquido que hierve a presión constante. Por ejemplo: el agua hirviendo a la presión normal da un termostato a 100 °C;

3.º un recipiente de paredes conductoras rodeado por una masa grandísima de agua a temperatura constante;

4.º en recipientes mantenidos a una temperatura más elevada que el ambiente, y en los cuales es posible que baje la temperatura por dispersión de calor, puede lograrse la constancia de temperatura si se suministra el calor perdido mediante un manantial de calor dotado de un *regulador de temperatura.*

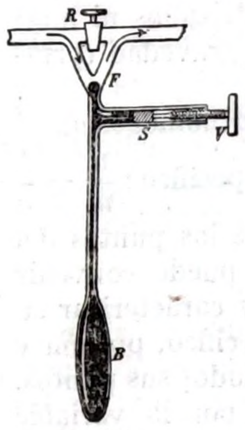


Fig. 612

Sirve, por ejemplo, un mechero de gas provisto de un termorregulador. En la figura 612 se representa el regulador de temperatura de REICHERT. Este instrumento es un termómetro cuyo depósito va volcado dentro del termostato y en el que el mercurio funciona en *F* como llave para el gas. Si disminuye la temperatura del termostato, aumenta la sección libre del conducto para el gas en *F*, y la acción del mechero se vuelve más enérgica. Por el contrario, si aumenta la temperatura en *B*, disminuye la corriente de gas que pasa por *F*. El tornillo *V* gobierna un émbolo con el cual se varía la temperatura de régimen constante mantenida en el termostato por medio del regulador.

También puede servir una estufa eléctrica como manantial de calor, y entonces sirve de regulador de temperatura una fina lámina bimetálica colocada en el termostato (compárese § 304, *b*]). Si disminuye la temperatura, la lámina bimetálica se curva y cierra el circuito de la estufa, abriéndolo cuando se ha alcanzado la temperatura suficiente.

Pueden imaginarse tipos análogos para regular corrientes frías de aire o de agua en un termostato del tipo tercero, en donde se suponga que la temperatura tiende a aumentar.

En los termostatos puede lograrse que la temperatura oscile menos de 0,01 °C, y con el hielo fundente menos de 0,001 °C.

En todos los casos, *los procesos isotérmicos deben conducirse muy lentamente* para dar tiempo a que la temperatura alcance el equilibrio en todos los puntos del cuerpo.

b] **Transformación isobárica.** Es una transformación a presión constante. Todas las transformaciones que se realizan en recipientes abiertos, esto es, bajo la presión atmosférica, son prácticamente isobaras; solamente se debe tener en cuenta la eventualidad de que pueda variar la presión cuando duran algunas horas o son extremadamente rápidas (explosiones).

c] **Transformación isocora o isométrica.** Es una transformación a volumen constante. Las combustiones y, en general, las reacciones químicas que se producen entre gases contenidos en un recipiente herméticamente cerrado, constituyen los ejemplos más corrientes de transformaciones isocoras.

d] **Transformación adiabática.** Es una transformación que se realiza sin cambio de calor entre el cuerpo considerado y el exterior. Se podrá explicar mejor después de haber definido la cantidad de calor. Ahora digamos solamente que son adiabáticos los procesos y los fenómenos que se realizan en un recipiente cuyas paredes conducen mal el calor (vidrio, madera o corcho) y en un tiempo suficientemente pequeño para que no sea posible un cambio sensible de calor entre el cuerpo que se estudia y el exterior, debido a la naturaleza de las paredes y a la rapidez de la transformación. Se dice que el cuerpo está *aislado térmicamente.*

Fig. 613

También se hablará de *paredes adiabáticas*, es decir, impermeables para el calor.

Los *termos (vasos* DEWAR) son los mejores recipientes de paredes adiabáticas que se conocen.

Están constituídos por un recipiente de vidrio de doble pared (fig. 613), cuyas dos paredes están plateadas interiormente, habiéndose efectuado el vacío entre ellas.

De este modo, el calor no puede atravesar las paredes de estos recipientes ni por conducción ni por convección, ya que estos procesos son irrealizables a través del vacío. Tampoco puede haber intercambio de energía térmica entre el exterior y el interior del termos por emisión de energía radiante; ésta, como la luz, se refleja casi completamente en el espejo de plata. Únicamente puede efectuarse un cambio de calor con el exterior a través de la boca del vaso, y como ésta debe ser más bien ancha para poder introducir los cuerpos o aparatos que se estudian, los vasos DEWAR han de ser muy profundos.

Un proceso que se desarrolla en el interior de un termos bien cerrado es sensiblemente adiabático, aunque dure algunos centenares de segundos.

En otros casos, como en los choques, y en las compresiones y enrarecimientos del aire que constituyen las ondas sonoras, el fenómeno es adiabático en virtud de la rapidez con que se efectúa.

§ **291. Ecuación de estado.** En el caso de los líquidos y de los gases que se utilizan como substancia termométrica, es evidente que de las tres variables, v, p, θ, sólo dos son independientes. Basta pensar que la temperatura viene definida por el volumen de un líquido (a presión constante) y que, por tanto, es función de v (a presión constante); análogamente, la temperatura está definida mediante el volumen de un gas (a presión constante).

Afirmar que la temperatura es función de p y de v, es decir, escribir

$$\theta = \theta\,(v,\ p) \qquad [1]$$

o más generalmente,

$$F\,(v,\,p,\,\theta) = 0$$

es recordar que la temperatura ha sido definida en función de la presión y del volumen de la substancia termométrica.

Pero una vez obtenida así la posibilidad de medir la temperatura mediante las variaciones de volumen de cierta substancia termométrica, confirma la experiencia que para cualquier cuerpo homogéneo, químicamente definido, en el estado líquido o en el estado gaseoso, están relacionadas las tres variables v, p, θ, por una función implícita

$$F\,(v,\,p,\,\theta) = 0 \qquad [2]$$

que se llama *ecuación de estado* del cuerpo considerado.

Cada una de las tres variables v, p, θ, puede considerarse como función (generalmente de un solo valor) de las otras dos.

Todos los estados de un cuerpo semejante pueden, por tanto, representarse por una superficie en el espacio cartesiano $(v,\,p,\,\theta)$. Cada transformación es una sucesión continua de valores v, p, θ, que satisfacen la ecuación de estado, y, por tanto, una línea trazada sobre dicha superficie. Conocida la ecuación de estado $F\,(v,\,p,\,\theta) = 0$, para determinar una transformación será suficiente dar, sobre uno cualquiera de los tres planos coordenados, la proyección de la línea que representa dicha transformación y que se encuentra, efectivamente, sobre la superficie $F = 0$.

Así, una curva

$$p = p\,(v) \qquad [3]$$

en el plano cartesiano $(v,\,p)$ *(diagrama de* CLAPEYRON) determina una transformación ; para cada valor v_1 de v, la [3] da el valor correspondiente p_1 de p, y la ecuación de estado [2] da, finalmente, el correspondiente valor θ_1 de θ.

Alguna vez convendrá determinar la transformación dando en forma paramétrica la ecuación de la curva [3], tomando un parámetro como el tiempo t; se tiene entonces :

$$v = v\,(t)\,; \qquad p = p\,(t). \qquad [4]$$

En el caso de un *ciclo*, la curva [3] es cerrada.

Análogamente, una transformación se supondrá determinada por una curva en el plano $(v,\,\theta)$

$$\theta = \theta\,(v)$$

o en el plano $(\theta,\,p)$

$$p = p\,(\theta).$$

Admitida la existencia de la ecuación de estado [2], las derivadas parciales de la función F se prestan a representar con exactitud algunas magnitudes físicas. Estas derivadas son :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)_{p,\,\theta\ \text{constantes}}\,; \quad \left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_{\theta,\,v\ \text{constantes}}\,; \quad \left(\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)_{v,\,p\ \text{constantes}} \qquad [5]$$

Ahora, la [2] determina, bajo forma implícita, las tres funciones explícitas :

$$v = v\,(p,\,\theta)\,; \qquad p = p\,(\theta,\,v)\,; \qquad \theta = \theta\,(v,\,p). \qquad [6]$$

Se obtienen éstas a partir de la [2], resolviéndola sucesivamente respecto a v, a p o a θ.

De las [6] se obtienen seis derivadas parciales :

$$\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_{\theta\,=\,\text{const.}},\ \left(\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)_{p\,=\,\text{const.}};\ \left(\frac{\partial p}{\partial \theta}\right)_{v\,=\,\text{const.}},\ \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{\theta\,=\,\text{const.}};$$
$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial v}\right)_{p\,=\,\text{const.}},\ \left(\frac{\partial \theta}{\partial p}\right)_{v\,=\,\text{const.}}; \qquad [7]$$

y la regla de derivación de las funciones implícitas enseña aquí a expresar estas seis derivadas parciales mediante las tres derivadas [5].

Por ejemplo, para $\theta = \text{const.}$, diferenciando la [2], se tiene :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)_{p,\,\theta\ \text{constantes}} \cdot dv_{\theta\,=\,\text{const.}} + \left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_{\theta,\,v\ \text{constantes}} \cdot dp_{\theta\,=\,\text{const.}} = 0, \qquad [8]$$

de donde

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v_{\theta\,=\,\text{const.}}}{\partial p_{\theta\,=\,\text{const.}}} &= \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_{\theta\,=\,\text{const.}} = -\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_{\theta,\,v\ \text{constantes}}}{\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)_{p,\,\theta\ \text{constantes}}}\,; \\ \frac{dp_{\theta\,=\,\text{const.}}}{dv_{\theta\,=\,\text{const.}}} &= \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{\theta\,=\,\text{const.}} = -\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)_{p,\,\theta\ \text{constantes}}}{\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_{\theta,\,v\ \text{constantes}}} = \frac{1}{\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_{\theta\,=\,\text{const.}}} \end{aligned}\right\} \qquad [9]$$

Análogamente :

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)_{p\,=\,\text{const.}} &= \frac{1}{\left(\frac{\partial \theta}{\partial v}\right)_{p\,=\,\text{const.}}} = -\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)_{v,\,p\ \text{constantes}}}{\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)_{\theta,\,p\ \text{constantes}}} \\ \left(\frac{\partial p}{\partial \theta}\right)_{v\,=\,\text{const.}} &= \frac{1}{\left(\frac{\partial \theta}{\partial p}\right)_{v\,=\,\text{const.}}} = -\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)_{v,\,p\ \text{constantes}}}{\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_{\theta,\,v\ \text{constantes}}} \end{aligned}\right\}. \qquad [10]$$

Por fin, se tiene :

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial \theta}\right)_{v\,=\,\text{const.}} = \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)_{p\,=\,\text{const.}}}{\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_{\theta\,=\,\text{const.}}} \qquad [11]$$

y dos análogas.

Es preciso fijar la atención en estas seis derivadas, de las cuales sólo dos son independientes ; y que, bajo una aparante complicación simbólica, representan otros tantos coeficientes físicos fundamentales en termodinámica.

Por ejemplo :

$$\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_{\theta\,=\,\text{const.}}$$

mide la razón entre la variación ∂v del volumen de un cuerpo a temperatura constante y el aumento de presión ∂p que la ha producido. Aproximadamente (compárese con la [10], § 55), esta derivada da la variación de volumen producida por un aumento isotérmico de presión igual a la unidad ($\partial p = 1$). Ahora bien :

$$-\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_{\theta\,=\,\text{const.}} = \frac{1}{\varepsilon} \qquad [12]$$

es el coeficiente de compresión isotérmica del cuerpo (§ 185, [2]) a la temperatura θ y para el valor de la presión p alrededor de la cual se ha efectuado la derivación.

También

$$\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)_{p\,=\,\text{const.}}$$

mide la razón entre la variación ∂v de volumen del cuerpo bajo presión constante y la variación de temperatura $\partial \theta$ que la ha producido; y el *coeficiente de dilatación* del cuerpo a presión constante

$$\frac{1}{v_0}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)_{p\,=\,\text{const.}} = \alpha \qquad [13]$$

expresa la variación de volumen, *referida al volumen* v_0 *a* 0 °C, producida por un aumento isobaro de temperatura de 1 °C en torno a la temperatura θ a que se refiere dicha derivada.

Análogamente:

$$\frac{1}{p_0}\left(\frac{\partial p}{\partial \theta}\right)_{v\,=\,\text{const.}} = \beta \qquad [14]$$

define el *coeficiente término de aumento de presión* a volumen constante, es decir, la variación de presión *referida a la presión* p_0 a 0 °C, debida al aumento isocoro de temperatura de 1 °C a la temperatura de derivación θ.

Y la [11] advierte que la ecuación de estado conduce a la relación

$$\beta p_0 = \frac{\varepsilon \alpha v_0}{v}; \qquad [15]$$

alrededor de los 0 °C, en donde se puede poner $v = v_0$, tenemos :

$$\varepsilon \alpha = \beta p_0 \qquad [16]$$

Esto es : sólo dos de los tres coeficientes α, β, ε, son indispendientes entre sí.

§ **292. Trabajo externo por expansión.** Supongamos que durante la transformación el cuerpo haya experimentado una variación de volumen venciendo (aumento de volumen) o secundando (disminución de volumen) la presión que *se le aplica desde el exterior*.

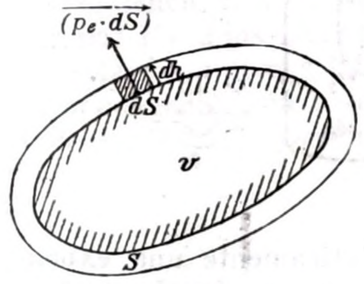


Fig. 614

El cuerpo efectúa un *trabajo externo* $\Delta \mathfrak{L}$, siendo en el primer caso $\Delta \mathfrak{L} > 0$, y en el segundo $\Delta \mathfrak{L} < 0$.

Este trabajo lo realiza el *cuerpo sobre el exterior*,

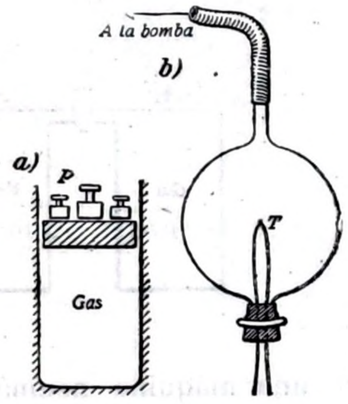


Fig. 615

y por ello se llama *trabajo externo*, o también *trabajo de expansión* y tiene importancia en las transformaciones de los gases y vapores, ya que éstos son susceptibles de variaciones macroscópicas de volumen.

Por el principio de acción y reacción, dicho trabajo es igual y opuesto al que *ejecutan sobre el cuerpo las fuerzas externas* de las que se ha hablado en los §§ 124 y 194.

Conviene distinguir tres casos :

1.er caso. Considérese la variación de volumen de cierta masa de gas, que está encerrada, por ejemplo, en el cilindro con émbolo de la figura 615. Si el cuerpo aumenta (por ej.) de volumen, y si cada elemento dS (fig. 614) de la superficie del cuerpo se eleva en dh, el trabajo realizado por el cuerpo (sobre dS) vale.

$$p_e \cdot dS \cdot dh, \qquad [1]$$

siendo p_e la presión (específica) *que el cuerpo ejerce sobre el exterior*,

que no debe confundirse con la presión p en el cuerpo. Basta, en efecto, imaginar los dos siguientes procedimientos de expansión de un cuerpo, por ejemplo, de un gas.

a] El gas está encerrado en un cilindro por un émbolo [fig. 615, *a*)] cargado de pesos P suficientes para equilibrar la presión interior del gas; el émbolo puede deslizar sin rozamiento sensible; toda disminución gradual de los pesos o todo aumento de la presión interna, obliga al émbolo a moverse, pudiendo suponerse en cada instante que la presión interior p, constante en todos los puntos del gas, es igual a la presión exterior p_e.

Se tiene *expansión con trabajo externo*, y es $p = p_e$.

Para que p_e y p coincidan, es prácticamente suficiente que el émbolo se levante o baje con una velocidad que sea pequeña en comparación con la velocidad de propagación de una compresión o enrarecimiento en el gas, esto es, respecto a la velocidad del sonido en este gas. En un matraz [fig. 615, *b*)] del que se extrae el aire mediante una máquina neumática, se realiza prácticamente una expansión del gas cuya presión interna p puede suponerse igual a la presión p_e que el gas ejerce contra las paletas o el émbolo de la máquina neumática, coadyuvando a su movimiento.

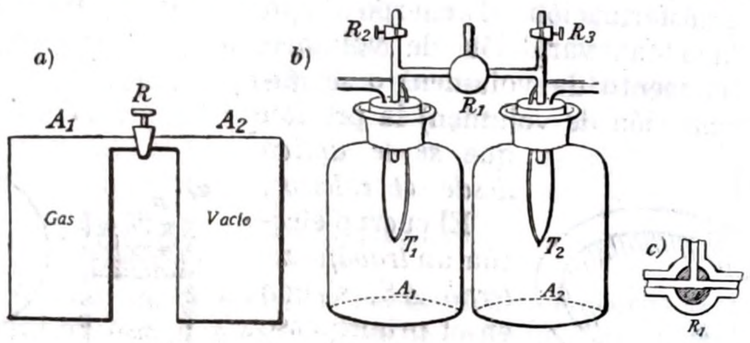


Fig. 616

b] El gas encerrado en A_1 [fig. 616, *a*)] se deja expansionar bruscamente hacia el recipiente vacío A_2, abriendo la llave de comunicación R.

En la práctica, el experimento se realiza con dos frascos unidos por tubos provistos de espitas, según la fig. 616, *b*).

En estas condiciones, durante la expansión, p no tiene un valor definido, sino que varía bruscamente de un punto a otro del flúido hasta alcanzar un nuevo valor final de equilibrio al terminar la expansión. En conjunto, durante esta expansión, el gas no ha producido trabajo externo, porque ha presionado siempre las paredes en reposo, de un modo no bien definido. Se tiene *expansión sin trabajo externo* (expansión de JOULE).

Ahora bien, en el instante inicial de abrir la llave R, la presión preexistente en A_1 es p; pero la presión p_e que el gas A_1 ejerce sobre el vacío en A_2 es nula.

Volviendo a la [1], se tiene, pues, en general (supuesto p_e constante en toda la superficie S):

$$d\mathcal{L} = p_e \int_S dh \cdot dS = p_e \cdot dv, \qquad [2]$$

en donde dv es el aumento brusco de volumen experimentado por el cuerpo durante una transformación infinitesimal. Si, por ejemplo, se emplea el sistema cm, g_m, seg se medirán p_e en $\frac{\text{dinas}}{\text{cm}^2}$ (barías), dv en cm^3, $d\mathcal{L}$ en erg; en el sistema m, kg_m, seg, se medirán p_e en newton por m^2, dv en m^3, $d\mathcal{L}$ en joule.

Para una transformación finita entre los estados extremos A_1 (v_1, p_1, θ_1) y A_2 (v_2, p_2, θ_2), se tiene:

$$\Delta\mathcal{L} = \int_1^2 d\mathcal{L} = \int_1^2 p_e \cdot dv \qquad [3]$$

siendo p_e variable en general, y para mayor sencillez en la integral se indican por 1 y 2 los estados extremos.

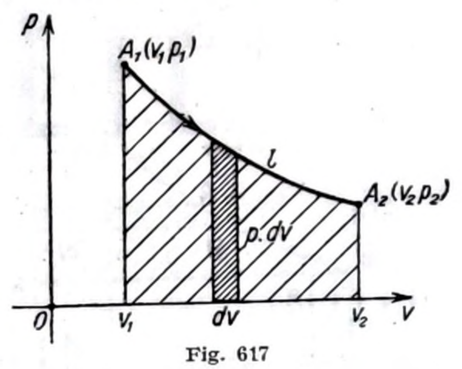


Fig. 617

Solamente si nos limitamos a variaciones de volumen suficientemente lentas puede suponerse $p_e = p$, y las fórmulas se convierten en

$$d\mathcal{L} = p \cdot dv \qquad [4]$$

$$\Delta\mathcal{L} = \int_1^2 p \cdot dv. \qquad [5]$$

En tales condiciones, v y p se toman como variables independientes, aptas para caracterizar el estado del cuerpo. En el plano cartesiano v, p (*plano de* CLAPEYRON, fig. 617), tal estado está caracterizado por un punto; puesto que v es siempre positivo, y también lo es p, por lo menos en los gases y vapores, el punto se encuentra en el primer cuadrante. Una transformación suficientemente lenta es una sucesión de estados cada uno de los cuales está definido por los valores correspondientes de v y de p (y, por lo tanto, de θ); dicha transformación está representada por una curva descrita en un sentido determinado; por ejemplo, la curva A_1 $(v_1\, p_1)$, l, A_2 $(v_2\, p_2)$; A_1 y A_2, en este orden, son los (*estados*) *extremos* de la *transformación*.

Esta transformación está ligada a la producción de un trabajo externo $\Delta\mathcal{L}$ representado, a escala conveniente, por el área rayada que es positiva si se tiene $v_2 > v_1$.

2.º *caso*. Se dispone de un cuerpo gaseoso, a presión constante p_1, comprimido en un recipiente; con raciones sucesivas del cuerpo

gaseoso, se alimenta una máquina apta para utilizar la expansión del mismo ; por ejemplo, el vapor de agua de una caldera que alimenta una máquina de vapor, el aire comprimido de un recipiente que alimenta un motor de aire comprimido.

En oposición al primer caso, en este dispositivo, al final de la utilización de cada una de las sucesivas raciones del cuerpo gaseoso comprimido, la máquina ha de volverse a encontrar en las mismas condiciones iniciales, es decir, la máquina (¡ pero no el cuerpo gaseoso utilizado !) habrá recorrido un *ciclo* ; en cada ciclo, la porción de gas utilizado es expulsada para dejar lugar a la porción siguiente que fluye del depósito.

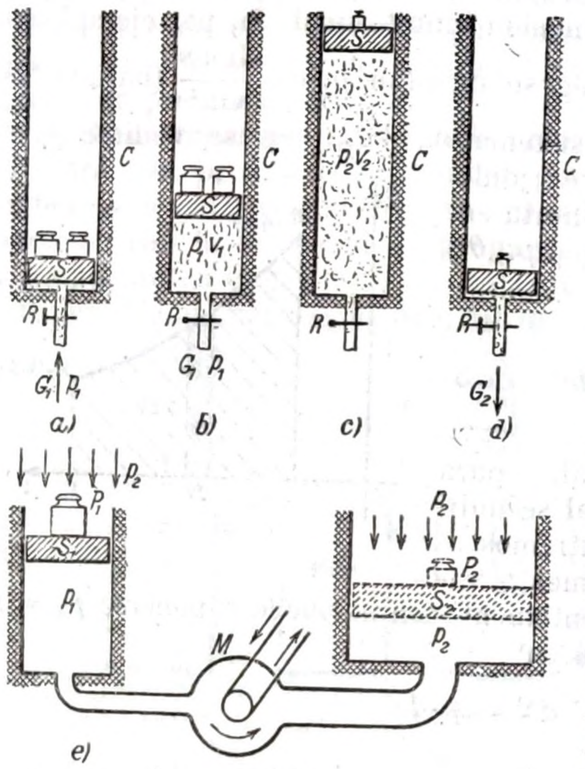


Fig. 618

En el caso más esquemático, la máquina está constituída por un cilindro C (fig. 618) en el que se desliza un émbolo S sin rozamiento ; la llave R establece la comunicación del cilindro con el depósito G_1 en donde está el gas a presión constante p_1, y con el depósito G_2 vacío.

El ciclo se inicia en la disposición de la fig. 618, *a*); abierta la llave R, el émbolo S, cuyo peso, junto con la carga sobrepuesta, equilibra justamente la presión p_1, se eleva hasta que el volumen v_1 se llena de gas a presión p_1 [fig. 618, *a*) → *b*)] ; cerrada R, se prosigue la expansión aligerando gradualmente la carga que actúa sobre S hasta que la presión en el cilindro baje al valor p_2 [fig. 618, *b*) → *c*)] ; finalmente, unido el cilindro a G_2 y abierta la llave R, se desliza el émbolo hacia abajo expulsando el gas [fig. 618, *c*) → *d*)]. El ciclo ha terminado.

Supongamos también ahora que las expansiones son suficientemente lentas para que valga la [5]. Representando las sucesivas fases del ciclo en el plano de CLAPEYRON (fig. 619), se advierte que los trabajos realizados sucesivamente por el gas sobre el émbolo S, que constituyen el *trabajo externo* que se obtiene ahora en cada ciclo, son en valor y signo :

$$+ p_1 v_1 + \int_{v_1\, p_1}^{v_2\, p_2} p \cdot dv - p_2 v_2 = - \int_{p_1}^{p_2} v \cdot dp.$$

El trabajo externo está representado, en definitiva, por el área rayada, y es positivo si se tiene $p_2 < p_1$; por el interés que presenta, en las máquinas de flúido se denomina *trabajo (externo) técnico* $(\Delta \mathfrak{L})_{técn.}$ y es

$$(\Delta \mathfrak{L})_{técn.} = - \int_{p_1}^{p_2} v \cdot dp. \qquad [6]$$

El trabajo técnico es el trabajo que puede obtenerse en un ciclo descrito por la máquina antes indicada ; en ella se ha supuesto que sobre S no obra la presión atmosférica, y en el descenso de S [figura 618. *c*) → *d*)] la llave R que pone en comunicación el gas de dentro del cilindro con la cavidad vacía G_2 se ha de suponer de paso tan estrecho que la presión p_2 de dentro del cilindro se conserve constante durante el descenso del émbolo.

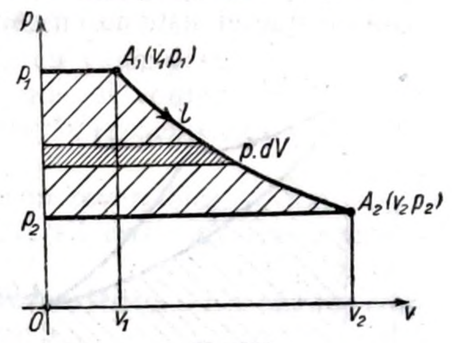


Fig. 619

Pero se obtiene el mismo trabajo técnico si, como ocurre en la práctica, sobre S, además de las cargas dibujadas, actúa una presión constante p_2 (por ejemplo, la presión atmosférica), con tal de suponer que también en G_2 interviene la presión constante p_2. En efecto, en tal caso el trabajo que se puede obtener durante la subida de S está disminuído en $p_2 \cdot v_2$, trabajo que el gas ha de efectuar para vencer la presión atmosférica ; pero, en compensación, durante el descenso de S [fig. 618, *c*) → *d*)], ahora que en G_2 existe también la presión p_2, no se restituye ningún trabajo al gas. El trabajo realizado por S sobre el gas es igual al que realiza el gas sobre la atmósfera al salir por G_2.

En realidad, un motor de esta clase, con un gas que sale de un recipiente a presión constante p_1, más bien ha de imaginarse que funciona según el esquema de la fig. 618, *e*). M es el motor, $P_2 = p_2 \cdot S_2$ es la carga que actúa sobre S_2 debida a la presión atmosférica p_2 ; en otros términos, S_2 puede faltar ; el gas que ha trabajado en M sale a la atmósfera libre. La presión p_1 es la debida a la carga P_1 y, además, a la carga $p_2 S_1$ debida a la presión atmosférica p_2 que obra sobre S_1.

3.er caso. El cuerpo gaseoso, al expansionarse, adquiere él mismo energía cinética sensible, mientras que ésta era despreciable en los dos casos precedentes. Es un «trabajo externo» (¡ !) que esta vez se vuelve a encontrar en la energía cinética del mismo cuerpo que lo ejerce.

Ejemplo : la expansión del gas cuando sale de un recipiente que lo contiene a presión estando abierta la llave.

293. Otros tipos de trabajo externo. Los casos más corrientes de «trabajo externo» son los de expansión debidos a la variación de volumen del cuerpo en estudio; pero existen otros tipos de trabajo externo. Por ejemplo, una pila voltaica, gracias a la transformación físicoquímica de los conductores de primera y segunda clase que la constituyen, es capaz de alimentar un motorcito eléctrico; el trabajo realizado por este último es «trabajo externo» efectuado por el sistema pila - conductores - motor.

De todos modos, en los ejemplos que seguirán nos limitaremos al caso en que el trabajo externo es debido exclusivamente a la variación del volumen del cuerpo.

294. Transformaciones reversibles e irreversibles. Supongamos primero que el sistema en estudio se reduce a un solo cuerpo homogéneo cuyo estado queda determinado por dos variables independientes, v y p, por ejemplo, o más concretamente (§ 289) $\frac{1}{\mu}$ y p.

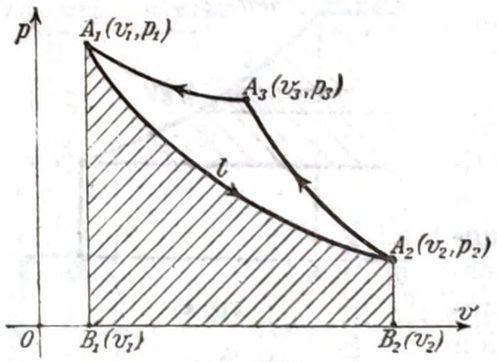


Fig. 620

Por lo tanto, θ es constante en todo punto del cuerpo. Ello significa, por consiguiente, que el cuerpo ha de considerarse en equilibrio mecánico y térmico tanto entre sus diversas partes como con el exterior.

Una transformación puede entonces considerarse como una sucesión de estados de equilibrio; la transformación ha de ser suficientemente lenta y queda determinada cuando se dan las funciones respecto al tiempo t:

$$v = v(t) \qquad p = p(t). \qquad [1]$$

Las [1] son las ecuaciones paramétricas de la transformación al aumentar el tiempo t desde t_1 a t_2. En el plano v, p (fig. 620), las [1] son las ecuaciones paramétricas de un arco de curva; por ejemplo, de la curva A_1 (v_1, p_1), l, A_2 (v_2, p_2). Las mismas funciones escritas en esta forma

$$v = v(t_0) \qquad p = p(t_0) \qquad [2]$$

o sea, como funciones del parámetro $t_0 = t_2 - t$, al aumentar el tiempo t desde $t = 0$ a $t = t_2 - t_1$, representan el mismo arco de curva recorrido en sentido contrario, o sea, desde el extremo (v_2, p_2) al extremo (v_1, p_1).

Físicamente, las ecuaciones [1] y [2] representan una misma transformación efectuada en uno o en otro sentido.

Esta transformación del cuerpo es matemáticamente *reversible* y lo es también físicamente, porque siempre es posible hacer experimentar al cuerpo la transformación a lo largo de la curva $A_1 A_2$, y también en sentido inverso a lo largo de la misma curva desde A_2 hasta A_1.

Conociendo la ley según la cual varía la presión p en función del volumen v durante la transformación, la [5], § 292, permitirá calcular el trabajo externo $\Delta\mathfrak{L}$. Así, por ejemplo, en una expansión isotérmica de un gas perfecto se tiene $pv = k$; luego la [5], § 292, da

$$\Delta\mathfrak{L} = k \cdot \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v} = k \cdot \log \frac{v_2}{v_1}. \qquad [3]$$

Si el cuerpo ha experimentado una transformación cíclica, la curva representativa es cerrada (fig. 620) y el área de la curva $A_1A_2A_3A_1$, representativa del ciclo, mide en valor y signo el trabajo exterior efectuado. Éste es positivo cuando el contorno $A_1A_2A_3A_1$ es recorrido en el *sentido de las agujas del reloj* por el punto que representa el estado del cuerpo.

Pero no todas las transformaciones son reversibles.

Así, la *experiencia indica* que son irreversibles las siguientes transformaciones:

1.ª **Cualquier transformación con rozamiento.** En efecto, considérese, como ejemplo, la acción del freno sobre un vehículo en movimiento. El vehículo pierde energía cinética y las zapatas de los frenos se calientan fuertemente. En la transformación inversa debería observarse un enfriamiento de los cuerpos que se calentaron por rozamiento durante la transformación directa, y la creación de una energía cinética correspondiente, igual y opuesta a la que se disipó en forma de calor durante la transformación directa. Una transformación de esta clase no se ha podido obtener nunca.

El movimiento de la corriente eléctrica en un conductor que ofrece resistencia eléctrica, también es irreversible (véase tomo II); es el análogo del movimiento de un flúido con rozamiento.

2.ª **Propagación de calor de un cuerpo caliente a otro frío.** Pónganse en presencia, en un recinto de paredes adiabáticas, un cuerpo caliente y otro frío; por ejemplo, una esfera de platino candente y otra fría: se excluye la eventualidad de reacciones químicas, cambios de estado de agregación, variaciones sensibles de presión, etc.; queda aún el fenómeno de *propagación de calor* desde el cuerpo caliente hacia el frío; demuestra la experiencia que disminuye la temperatura del cuerpo caliente y aumenta la del cuerpo frío hasta que se llega a un estado final en el que la temperatura es uniforme en todo el sistema. También el medio ambiente, por ejemplo, el aire, participa en general en este sencillo fenómeno de propagación de calor desde un cuerpo caliente a otro frío.

Jamás se ha observado que colocando dos cuerpos a la misma temperatura dentro de un recinto de paredes adiabáticas, uno de

ellos se caliente «espontáneamente» a expensas del otro, y que por tanto, este otro se enfríe.

3.ª **Expansión sin trabajo externo.** Es la descrita en el § 292 *b*]. La transformación inversa consistiría en acumularse espontáneamente en el recipiente A_1 todo el gas contenido en los recipientes A_1 y A_2 [fig. 616, *a*)], de modo que, cerrando después la llave R, quedase todo el gas recogido en A_1. Proponer solamente la posibilidad de tal fenómeno es ridículo.

Análogamente, es irreversible el fenómeno de la difusión mutua de dos gases. Si en A_1 [fig. 616, *a*)] hubiese oxígeno, por ejemplo, y en A_2 nitrógeno, en las mismas condiciones de temperatura y de presión, abriendo la llave R y esperando suficiente tiempo (varias horas), resultaría que los dos gases quedarían uniformemente mezclados, debido a su mutua difusión. Nunca se ha observado el fenómeno contrario, o sea, la separación espontánea de dos gases previamente mezclados.

Según la ley de DALTON (§ 296), el fenómeno de la difusión de un gas en otro debe considerarse equivalente al de una expansión del gas sin trabajo externo. Si A_2 [fig. 616, *a*)] no está inicialmente vacío, sino lleno del segundo de los dos gases, la expansión sin trabajo externo del gas que hay en A_1 resulta simplemente más lenta.

Son también irreversibles el fenómeno de difusión de dos líquidos miscibles, el de la disolución de un cuerpo en otro y, en particular, el de la difusión de un soluto desde los puntos en que es mayor su concentración a los puntos en que es menor. Es también irreversible la solidificación de un líquido sobrefundido, la condensación de un vapor sobresaturado y la cristalización de una solución sobresaturada. En fin, también deben considerarse irreversibles muchas reacciones químicas.

En todos los casos de irreversibilidad, particularmente en los tres casos antes indicados, resulta que *no es posible definir el estado del cuerpo o del sistema que efectúa la transformación, porque queda indeterminado por lo menos un parámetro. No es lícita la representación de una transformación irreversible en un diagrama como el de las figuras 617, 619 y 620.*

En la expansión de un gas sin trabajo externo (y en los casos análogos de difusión y de disolución) queda indeterminado, por ejemplo, el volumen específico $\frac{1}{\mu}$ del gas (o del soluto), que durante la expansión varía de un punto a otro.

En el paso de calor de un cuerpo caliente a otro frío queda indeterminada la temperatura del sistema, que varía de un punto a otro.

En fin, en el caso del rozamiento entre sólidos es también la temperatura la que queda indeterminada. En el rozamiento interno pueden imaginarse casos sencillos (p. ej., el de la fig. 375) en los que resulta uniforme la temperatura en todo el flúido ; pero entonces queda indeterminada la velocidad, que varía de unos puntos a otros.

Esto ha inducido a definir las transformaciones reversibles como transformaciones que consisten en una sucesión de estados de equilibrio mecánico y térmico ; en efecto, en este caso, las transformaciones 2.ª y 3.ª resultan irreversibles porque no constituyen sucesivos estados de equilibrio del sistema.

Una transformación con rozamiento puede ser una sucesión de estados de equilibrio, por ejemplo, descenso de un cuerpo por un plano cuya inclinación corresponde al ángulo límite de rozamiento (§ 134). Pero en este caso no basta variar infinitamente poco la fuerza motriz para obtener la transformación en sentido contrario.

En cambio, es posible esto en el equilibrio de un cuerpo sobre un plano inclinado cuando no hay rozamiento, pues basta variar infinitamente poco la fuerza $\vec{F}$ (fig. 180, *b*)] para obtener el corrimiento del cuerpo en uno u otro sentido.

Luego, en conclusión, *son transformaciones reversibles las que están constituídas por una sucesión de estados de equilibrio en ausencia de rozamiento.* La variación infinitesimal en uno u otro sentido de uno de los parámetros que definen cada uno de estos estados de equilibrio hace efectuar al cuerpo un elemento infinitesimal de transformación reversible, en uno o en otro sentido.

Las transformaciones reversibles resultan un caso límite ideal de las transformaciones reales, porque *no tiene que haber rozamiento,* porque *los intercambios de calor deben efectuarse entre cuerpos a temperaturas iguales* prácticamente (y, por tanto, con una extrema lentitud) y porque *las variaciones de volumen deben ser tan lentas que permitan que la presión p sea definida y constante en todos los puntos del cuerpo.*

Pero éste es también el caso en que son válidas las fórmulas [4] y [5] del § 292 para el trabajo externo, es decir, en que la expresión del trabajo externo contiene la presión p existente en el cuerpo, en lugar de la presión p_e que el cuerpo ejerce sobre la superficie que lo encierra ; entonces, el área $v_1A_1A_2v_2$ del diagrama de la figura 617 representa el trabajo externo durante la transformación.

Obsérvese, en fin, que, *dados los estados extremos de la transformación, pueden encontrarse transformaciones tanto reversibles como irreversibles* que lleven el cuerpo de uno a otro de dichos estados extremos.

Por ejemplo, un gas perfecto tiene que experimentar transformaciones entre los siguientes estados extremos :

1.º	p_0	v_0	θ_0
2.º	$\frac{p_0}{2}$	$2v_0$	θ_0

Puede lograrse esto ya sea con una expansión sin trabajo externo (fig. 616) irreversible, ya sea con una expansión isotérmica con tra-

bajo externo [fig. 615, *a*)] hasta el duplo del volumen inicial, obtenida levantando lentísimamente el émbolo del cilindro: esta transformación es reversible cuando es despreciable el rozamiento entre el émbolo y las paredes.

Otro ejemplo: supongamos que el estado inicial esté constituído por dos gases G_1 y G_2 contenidos en los dos recipientes A_1 y A_2 (figura 621), a la misma presión y separados por la pared B. El estado final lo suponemos constituído por la mezcla homogénea de los dos gases.

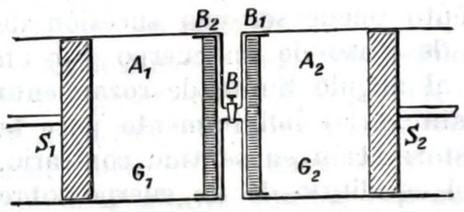


Fig. 621

Se pasa del estado inicial al estado final:

irreversiblemente, quitando la pared B (es decir, abriendo la llave B) y esperando a que se efectúe la difusión;

o reversiblemente, sustituyendo la pared B por dos paredes semipermeables (§ 226 *b*], al final); B_2 es sólo permeable para el gas G_1, y B_1 sólo es permeable para el gas G_2. Alejando lentamente B_1 de B_2, se forma un espacio entre las dos paredes en el cual los dos gases G_1 y G_2 se expansionan y mezclan efectuando en las respectivas paredes impermeables un trabajo de expansión. El movimiento de B_1 y de B_2 debe ser suficientemente lento para que pueda admitirse que, en todo instante, la presión p_1 del gas G_1 es la misma en las dos caras de B_2, y análogamente ocurre con la presión p_2 de G_2 y las dos caras de B_1. Así B_2 tiende a moverse hacia la izquierda sólo por efecto de la presión parcial del gas G_2, y B_1 tiende a moverse hacia la derecha por efecto de p_1. Al trasladarse B_2 hacia la izquierda, el gas G_2 efectúa un trabajo de dilatación $p_2 \cdot dv_2$, en donde dv_2 es el volumen descrito por B_2 en su movimiento. Análogamente, el trabajo efectuado por G_1 es $p_1 \cdot dv_1$. Se ha efectuado la mezcla por vía reversible; si B_1 y B_2 se aproximaran lentísimamente, efectuando desde el exterior el trabajo de compresión necesario, se separarían los gases G_1 y G_2.

Análogamente, la disolución de un cuerpo se efectúa por camino irreversible cuando se coloca el soluto (azúcar, p. ej.) en el disolvente (agua, p. ej.) y se espera a que se forme una solución homogénea. La misma disolución puede obtenerse de un modo reversible separando el azúcar del agua mediante una pared semipermeable que sólo deje pasar el disolvente. Moviendo lentísimamente esta pared, se proporciona continuamente nueva agua al azúcar, debiendo imaginarse tan lento el movimiento de la pared que permita que la solución de azúcar se conserve homogénea en todos sus puntos; la presión osmótica contra la pared semipermeable efectúa un trabajo externo enteramente análogo al trabajo de expansión de un gas. La disolución se efectúa entonces reversiblemente; en efecto, volviendo las paredes semipermeables a su posición inicial se separa

lentamente el disolvente de la solución, ésta aumenta de concentración hasta saturarse y entonces se inicia la separación por cristalización del soluto. El trabajo que debe efectuarse desde el exterior contra la presión osmótica durante esta compresión es equivalente al trabajo de compresión de un gas.

De manera análoga puede efectuarse también reversiblemente la evaporación de un líquido en el aire, la dilución de una solución, etc.

INSTITUTO NACIONAL DE BELLAS ARTES COLEGIO DE JESUS

§ 295. Ecuación de estado de los gases perfectos. Se ha dicho que un *gas perfecto* es el que satisface la *ley de* BOYLE, es decir, que para una temperatura constante (cualquiera que ésta sea) para una masa dada de gas se verifica

$$p \cdot v = c \qquad (\textit{ley de BOYLE}) \quad [1]$$

con c constante respecto a p y a v, pero dependiente de la temperatura; además v, y por tanto c, son proporcionales a la masa del gas considerado.

Un gas de esta naturaleza sirve para definir la temperatura (§ 288) mediante la fórmula:

$$v = v_0 (1 + \alpha\theta) \qquad (1.^{a} \textit{ ley de GAY-LUSSAC}) \quad [2]$$

con

$$\alpha = \frac{1}{273{,}14} \, {}^{\circ}C^{-1}$$

constante para todos los gases perfectos, y cualquiera que sea la presión (constante) a la que se produce el aumento de temperatura.

La 1.ª *ley de* GAY-LUSSAC dice en substancia que

la [2], *admitida para un gas perfecto* como definición de la temperatura, *es válida en todos* los gases perfectos;

el coeficiente de dilatación (térmica) α *es el mismo para todos los gases perfectos* y tiene por medida $\frac{1}{273{,}15 \pm 0{,}01}$ si se adopta como unidad el grado Celsius o centígrado.

La [1] y la [2] representan dos transformaciones particulares de un gas perfecto. La [1], cuando se conoce la constante c, permite obtener p para cada valor de v (o viceversa) *a temperatura constante* (transformación *isotérmica)*; la [2], cuando sean conocidos v_0 y α, da v en función de θ (o viceversa) *a presión constante.*

En una transformación más general de un gas perfecto se supone que el gas pasa del estado inicial

$$0 \quad p_0 \quad v_0$$

al estado final

$$\theta \quad p \quad v.$$

Para alcanzar este estado final puede suponerse:

1.º una transformación isotérmica desde el estado

$$0 \quad p_0 \quad v_0$$

al estado

$$0 \quad p \quad x.$$

Luego, aplicando la ley de BOYLE,

$$x = \frac{p_0 v_0}{p};$$

2.º una transformación isobárica desde el estado

$$0 \quad p \quad \frac{p_0 v_0}{p}$$

al estado definitivo

$$\theta \quad p \quad v.$$

Se aplica la [2], partiendo del volumen inicial

$$\frac{p_0 v_0}{p};$$

luego,

$$v = \frac{p_0 v_0}{p}(1 + \alpha\theta);$$

o sea,

$$\frac{pv}{1 + \alpha\theta} = p_0 v_0, \qquad [3]$$

siendo el producto $p_0 v_0$ una constante que, para un gas de composición química dada, sólo depende de la masa de gas que se considera; en efecto, a igualdad de presión inicial p_0, el volumen inicial v_0 es evidentemente proporcional a la masa del gas.

De la [3] se deduce:

$$pv = p_0 v_0 \cdot (1 + \alpha\theta) \qquad [4]$$

que es una de las formas de la *ecuación de estado de los gases perfectos.*

Conocido $p_0 v_0$ y conocida la constante α, la [4] es la relación que liga las tres variables p, v, θ. Dados los valores de dos de ellas, la [4] permite calcular el valor de la otra.

Si en la transformación permanece constante el volumen v_0 (transformación *isocora*), la [4] da:

$$\left.\begin{aligned} p &= p_0(1 + \alpha\theta) \\ \text{luego el } &\textit{coeficiente} \text{ (térmico) } \textit{de aumento} \\ \textit{de presión } \beta &\text{ (§ 291, [14]) es} \\ \beta &= \alpha = \frac{1}{273{,}15}\ ^{\circ}\mathrm{C}^{-1} \end{aligned}\right\} \text{(2.ª ley de GAY-LUSSAC)} \quad [5]$$

En todos los gases perfectos calentados a volumen constante varía la presión, en función de la temperatura, según la misma ley lineal [5], siendo en esta fórmula $\alpha = \frac{1}{273{,}15}\ ^{\circ}\mathrm{C}^{-1}$ el coeficiente térmico de aumento de presión del gas perfecto, o sea, el tanto por ciento de variación de la presión inicial por cada grado de temperatura, a volumen constante.

En los gases perfectos, el *coeficiente de dilatación* α es también el *coeficiente de aumento de presión* β.

Introduciendo en la [4] la *temperatura absoluta*

$$\Theta = \theta + \frac{1}{\alpha} = \theta + 273{,}15\ ^{\circ}\mathrm{C} \qquad [6]$$

se tiene

$$1 + \alpha\theta = \alpha\Theta \qquad [7]$$

y la [4] pasa a ser

$$pv = p_0 v_0 \alpha \cdot \Theta = C \cdot \Theta \qquad [8]$$

en donde $C = \alpha p_0 v_0$ depende de las unidades de medida de p y de v y es proporcional a la masa de gas que se considera.

De la [2] o de la [8] se obtiene a presión constante:

$$v = k \cdot \Theta, \qquad (k = v_0 \cdot \alpha),$$

resultando que la temperatura absoluta es simplemente una magnitud proporcional al volumen del gas perfecto (a presión constante), y la adopción de la unidad Celsius equivale a establecer que la constante de proporcionalidad se escoja de modo que el salto de temperatura entre el hielo fundente y los vapores de agua hirviendo en condiciones normales resulte igual a 100.

Además, la ley de los volúmenes que rige las reacciones químicas entre gases prácticamente perfectos, ha conducido a AVOGADRO a admitir la hipótesis de que volúmenes iguales de cualquier gas, en iguales condiciones de temperatura y de presión, contienen el mismo número de moléculas. Esta hipótesis tiene actualmente tal grado de certeza, que recibe el nombre de *ley de* AVOGADRO.

En particular, una molécula-gramo de cualquier gas a 0 °C y a la presión normal ($p_0 = 1$ atmósfera) ocupa siempre el mismo volumen. Luego el producto $p_0 v_0$ es constante para todos los gases con

tal que se tome para todos el mismo número de moléculas-gramo. Para *una* molécula-gramo de cualquier gas se tiene, pues,

$$\alpha p_0 v_0 = R, \text{ constante independiente de la naturaleza del gas,}$$

y la *ecuación de estado para 1 molécula-gramo de cualquier gas perfecto* es:

$$pv = R\Theta. \qquad [9]$$

La *constante de los gases* $R = \alpha p_0 v_0$ tiene el valor numérico:

$$R = \frac{1}{273{,}15}\cdot 1 \cdot 22{,}415 = 0{,}082\,07 \ \frac{\text{atm}\cdot\text{dm}^3}{{}^\circ\text{C}\cdot\text{mol-g}}$$
$$= 0{,}082\,07 \cdot 76 \ \frac{\text{cm}_{\text{Hg}}\cdot\text{dm}^3}{{}^\circ\text{C}\cdot\text{mol-g}}$$
$$= 8{,}315\cdot 10^7 \ \frac{\text{barías}\cdot\text{cm}^3}{{}^\circ\text{C}\cdot\text{mol-g}} \text{ o } \frac{\text{erg}}{{}^\circ\text{C}\cdot\text{mol-g}}$$
$$= 8315 \text{ MKS } {}^\circ\text{C o } \frac{\text{joule}}{{}^\circ\text{C}\cdot\text{mol-kg}}$$

El valor que en la actualidad se considera más probable es:

$$R = (8{,}31436 \pm 0{,}0004)\cdot 10^7 \ \frac{\text{erg}}{{}^\circ\text{C}\cdot\text{mol-g}}.$$

R depende también, como α, de la unidad fijada para las temperaturas. Si, por ejemplo, el intervalo entre la temperatura del hielo fundente y la del vapor de agua hirviendo se hubiese dividido en diez partes iguales, sería $\alpha = \frac{1}{27{,}315}$ y R resultaría multiplicado por 10.

Para n moléculas-gramo, la [9] se convierte en

$$pv = n \cdot R\Theta. \qquad [10]$$

La [9] es la forma más corriente de la ecuación de estado de los gases perfectos.

Pero, además de la [9], la [10] y la [4] son también formas útiles de dicha ecuación.

Considérese 1 g_m de un gas, de masa molecular m_{mol}, lo que constituye $n = \frac{1}{m_{mol}}$ moléculas-gramo, y la [10] se convierte en

$$pv = r \cdot \Theta, \qquad r = \frac{R}{m_{mol}} \qquad [11]$$

que es la ecuación de estado para 1 g_m de gas; la constante r varía entonces con la naturaleza del gas.

Tomemos ahora una masa m de gas, y sean μ_0 y μ las masas específicas en los dos estados $(0, p_0, v_0)$ y (θ, p, v) respectivamente. Se tiene:

$$m = \mu_0 \cdot v_0, \qquad m = \mu \cdot v.$$

Luego

$$\frac{v}{v_0} = \frac{\mu_0}{\mu}$$

y la [4] se convierte en

$$\frac{\mu_0}{\mu} = \frac{p_0}{p}(1 + \alpha\theta),$$

de donde se deduce

$$\mu = \frac{\mu_0}{p_0}\frac{p}{(1 + \alpha\theta)}. \qquad [12]$$

Esta fórmula sirve para obtener la masa específica μ del gas a la presión p y a la temperatura θ, cuando se conoce la masa específica μ_0 en las *condiciones normales:*

$$\theta = 0 \ {}^\circ\text{C}, \qquad p_0 = 1 \text{ atm}.$$

He aquí por qué en las tablas relativas a los gases prácticamente perfectos basta dar el *valor normal* μ_0 de la masa específica; por ejemplo:

en el oxígeno	$\mu_0 = 0{,}001\,429\,0$	en el helio	$\mu_0 = 0{,}000\,178\,6$	$\frac{g_m}{cm^3}$
en el nitrógeno	$\mu_0 = 0{,}001\,250\,7$	en el argón	$\mu_0 = 0{,}001\,783\,8$	
en el hidrógeno	$\mu_0 = 0{,}000\,089\,87$	en el CO	$\mu_0 = 0{,}001\,250\,4$	

Viceversa, la [12] permite también obtener la masa específica μ_0 en las condiciones normales cuando se conoce el valor de μ a la temperatura θ y a la presión p.

Sea v el volumen de una solución que contiene n moléculas-gramo de soluto no asociado ni disociado, de modo que el número de moléculas del soluto sea también el número de partículas que pululan por el disolvente: en este caso, la solución puede llamarse *ideal* o *perfecta*.

Las soluciones no conductoras de la electricidad y suficientemente diluídas son prácticamente soluciones ideales.

Si p es la presión osmótica (§ 226, *a*], 3.º) y Θ la temperatura absoluta de la solución, es todavía válida la [10] *con el mismo valor de la constante* R.

En el espacio ocupado por el disolvente, el soluto se comporta como un gas perfecto.

§ 296. Ley de Dalton. Se introducen en A_1 y A_2 (fig. 622), en donde B es un barómetro, mediante un juego conveniente de lla-

ves, dos volúmenes v_1 y v_2 de dos gases perfectos que no reaccionen químicamente entre sí (p. ej., oxígeno y nitrógeno), a la misma temperatura Θ y a la misma presión p. El desnivel $h = L_1L_0 = L_2L_0$ entre el mercurio de la cámara barométrica de B y el mercurio de A_1 y A_2 permite asegurarse de ello y, además, conocer p.

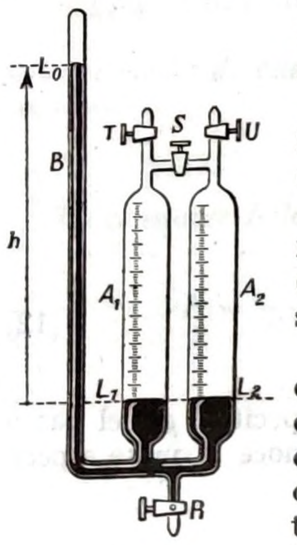


Fig. 622

Se abre la llave de comunicación S y se espera el tiempo conveniente (algunas horas) para que los dos gases se mezclen por difusión.

Demuestra la experiencia que si han permanecido sin variación Θ y $v = v_1 + v_2$, la presión de la mezcla es todavía p y el desnivel h subsiste sin alteración.

Entre gases no perfectos el resultado sería completamente distinto; es característico el caso en que A_1 y A_2 contienen dos vapores saturados, de líquidos no miscibles que no reaccionan químicamente; por ejemplo, cloroformo y agua. En tal caso, al principio del experimento el desnivel $h_1 = L_1L_0$ mediría la presión de vapor saturante en A_1; $h_2 = L_2L_0$ $(+ h_1)$ mediría la presión de vapor saturante en A_2 a la misma temperatura Θ. Abierta la llave S, y esperando un tiempo suficiente para que cada vapor se difunda en el otro alcanzando un equilibrio definitivo a la misma temperatura Θ, se observaría un desnivel $h = h_1 + h_2$.

Se obtienen resultados análogos con una mezcla de más de dos componentes.

Estos dos resultados, en apariencia distintos, pueden reunirse en un enunciado general (*ley de* DALTON; v. en el § 226, *b*], 2.º, la propiedad análoga para la difusión de los gases): En una mezcla de cuerpos gaseosos (gases perfectos o no perfectos, vapores saturantes), en ausencia de acciones químicas y de solubilidad en las fases líquidas eventualmente presentes, cada componente de la mezcla ejerce una presión parcial como si ocupara él solo el volumen entero concedido a la mezcla, y la presión total de la mezcla es la suma de las presiones parciales efectuadas por cada componente.

Es evidente que esta ley expresa el resultado experimental indicado para los vapores saturantes.

Para la mezcla de gases perfectos, sean n_1 las moléculas-gramo del primer gas contenidas en v_1, y n_2 las moléculas-gramo existentes en v_2. Se tiene, en las condiciones iniciales:

$$pv_1 = n_1 R\Theta, \qquad pv_2 = n_2 R\Theta.$$

Si hacemos que cada uno de estos gases ocupe isotérmicamente el volumen total, se tienen las presiones parciales p_1 y p_2 que se deducen de las igualdades:

$$p_1 (v_1 + v_2) = n_1 R\Theta = pv_1, \qquad p_2 (v_1 + v_2) = n_2 R\Theta = pv_2 \qquad [1]$$

La presión total, según la ley de DALTON, es

$$p_1 + p_2 = \frac{pv_1}{v_1 + v_2} + \frac{pv_2}{v_1 + v_2} = p$$

como dice precisamente la experiencia.

Se explican mediante la ley de DALTON, por ejemplo, los siguientes experimentos:

En un frasco póngase, una encima de otra, una capa de tetracloruro de carbono, que hierve a 76,7 ºC, y una capa de agua, que hierve a 100 ºC; caliéntese todo, lentamente, a baño maría. A los 65,5 ºC se inicia la ebullición *en la superficie de separación* de los dos líquidos; en efecto, en las burbujas que se forman en dicha superficie, existe una presión interna igual a la suma de las presiones de vapor saturante del tetracloruro (568 mm_{Hg}) y del agua (192 mm_{Hg}); es decir, en total, la presión de las burbujas es igual a la presión atmosférica; por esto se produce la ebullición.

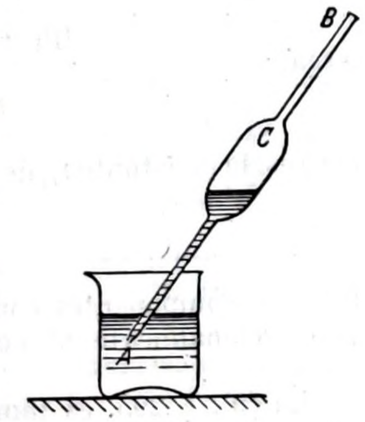


Fig. 623

Aspírese rápidamente mediante una pipeta un poco de éter etílico, hasta llenar aproximadamente una cuarta parte de la misma (fig. 623), y, una vez haya cesado la aspiración por B, levantado del éter el extremo A, tápese B con el dedo. El éter sale con fuerza por A.

En efecto, en C se va formando rápidamente vapor de éter, de manera que si A estuviese cerrado, la presión del vapor saturante del éter (≈ 442 mm_{Hg}, a 20 ºC) y la presión del aire se sumarían y darían una presión total de $\approx 1{,}5$ atm. Si A está abierto, el aumento gradual de la presión total debido a la evaporación del éter, provoca la salida violenta de este último.

Finalmente, el contenido de los apartados siguientes (§§ 297 y 298) también puede considerarse como dos aplicaciones de la ley de DALTON.

§ 297. Ecuación de estado de mezclas de gases perfectos. Puesto que

$$p = \frac{n_1 R\Theta}{v_1 + v_2} + \frac{n_2 R\Theta}{v_1 + v_2}$$

poniendo $v_1 + v_2 = v$, volumen total de la mezcla, se tiene:

$$pv = (n_1 + n_2) R\Theta. \qquad [1]$$

Si se indica con $n = n_1 + n_2$ el número total de moléculas-gramo presentes en la mezcla, la [1] coincide con la [10] del § 295.

Una mezcla de gases perfectos se comporta como un gas perfecto.

Para 1 g_m de mezcla que contenga las fracciones en masa c_1 y c_2 ($c_1 + c_2 = 1$) de los dos componentes, de masas moleculares respectivas $m_{mol,1}$, $m_{mol,2}$, se tienen las siguientes ecuaciones de estado de cada componente en el volumen total v:

$$p_1 v = \frac{c_1 R \Theta}{m_{mol,1}} = c_1 r_1 \Theta, \qquad p_2 v = \frac{c_2 R \Theta}{m_{mol,2}} = c_2 r_2 \Theta, \qquad [2]$$

y, por tanto, sumando

$$(p_1 + p_2)\, v = (c_1 r_1 + c_2 r_2)\, \Theta;$$

o sea,

$$pv = (c_1 r_1 + c_2 r_2)\, \Theta, \qquad [3]$$

esto es, la constante r_m de la unidad de masa de la mezcla viene dada por

$$r_m = c_1 r_1 + c_2 r_2; \qquad [4]$$

los dos componentes contribuyen con sus constantes relativas r_1, r_2, proporcionalmente al porcentaje en masa con que entran en la mezcla.

La [9], § 295, es también válida para una mezcla de gases perfectos con tal de que se le atribuya una masa molecular ficticia $\overline{m}_{mol}$ dada por

$$\frac{R}{\overline{m}_{mol}} = c_1 r_1 + c_2 r_2 = c_1 \frac{R}{m_{mol,1}} + c_2 \frac{R}{m_{mol,2}},$$

o sea,

$$\overline{m}_{mol} = \frac{1}{\dfrac{c_1}{m_{mol,1}} + \dfrac{c_2}{m_{mol,2}}}. \qquad [5]$$

Luego $\overline{m}_{mol}$ es el valor en gramos de la masa de 22,415 litros de la mezcla en condiciones normales.

En el aire seco puede tomarse $\overline{m}_{mol} = 28{,}96$.

La [12], § 295, sirve también para mezclas de gases perfectos. Así, para el aire seco, da la masa específica μ en condiciones cualesquiera de temperatura y presión a partir de la masa específica en condiciones normales $\mu_0 = 0{,}001\,292\,8 \dfrac{g_m}{cm^3}$.

§ 298. Higrometría. La higrometría se propone determinar la *humedad* del aire.

Se define la *humedad absoluta* del aire como el número de g_m de vapor de agua contenido en un metro cúbico del mismo. Si se hace pasar un metro cúbico de aire a través de una substancia capaz de absorber el vapor de agua (cloruro cálcico, ácido sulfúrico concentrado, o, todavía mejor, anhídrido fosfórico), se deduce fácilmente la humedad absoluta a base del aumento de peso que experimenta la substancia absorbente.

Para caracterizar el *estado higrométrico* del aire del ambiente es más apropiada la *humedad relativa* u:

$$u = \frac{m}{m_0}$$

o relación entre la masa m de vapor de agua que existe en cierto volumen del ambiente y la masa m_0 de vapor de agua que contendría este mismo volumen si estuviese saturado.

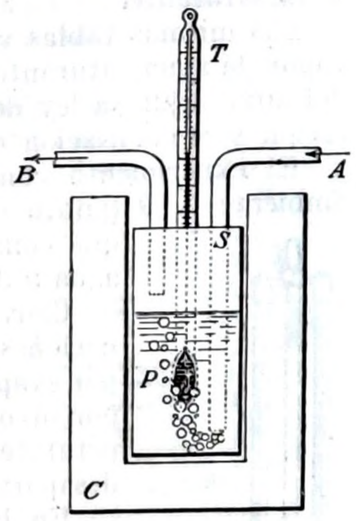


Fig. 624

Introduciendo las masas específicas μ y μ_0 del vapor efectivamente existente y del vapor que saturaría el ambiente, y admitiendo válida para el vapor de agua hasta el punto de saturación (!) la ley de BOYLE (§ 185, [7]), se tiene:

$$u = \frac{m}{m_0} = \frac{\mu}{\mu_0} = \frac{p}{p_0},$$

razón entre las presiones del vapor efectivamente existente y del que saturaría el ambiente a igualdad de temperatura.

a] **Higrómetro de condensación.** Conocida la temperatura ambiente θ, tablas adecuadas dan la presión de vapor de agua saturante p_0. Falta determinar p.

Esto se logra con buena aproximación mediante el higrómetro de condensación en la forma ideada por REGNAULT. Consiste en una cajita S (fig. 624) que contiene éter, el cual se hace evaporar rápidamente gracias a las burbujas de aire que penetran por A cuando se aspira por B. La pared P dirigida hacia el observador está formada por una lámina delgada de plata especular, siendo también especular la pared del contorno C, pero existe un aislamiento térmico entre P y C.

Al enfriarse el éter (1), se enfría P hasta alcanzar el *punto de rocío*: sobre la pared fría P se condensa el vapor de agua del aire ambiente que se ha saturado, debido al enfriamiento, en la capa in-

(1) A causa de su evaporación provocada por la corriente de aire. — *N. del T.*

mediata a P. El principio del empañamiento de P se determina muy bien por comparación con la parte no empañada C. Se lee en el termómetro T la temperatura θ del éter, se supone que ésta es también la temperatura de la pared P, y se tiene, por tanto, la temperatura θ a la cual la presión de vapor p que existe en el ambiente sería saturante.

Las mismas tablas ya indicadas dan el valor p de la presión de vapor de agua saturante a la temperatura observada θ. La presencia del aire, según la ley de DALTON, no modifica el fenómeno de saturación y condensación del vapor.

El experimento consiste, pues, en determinar θ_0 (temperatura ambiente) y θ (punto de rocío), y en buscar p_0 y p en las tablas que contienen las presiones saturantes del vapor de agua a distintas temperaturas.

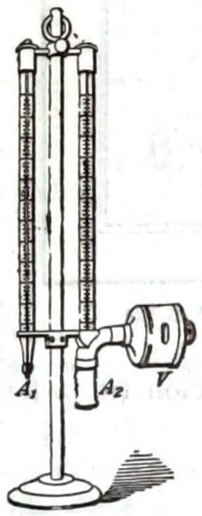


Fig. 625

Conviene obtener θ como media de dos determinaciones por lo menos: por un lado, enfriando el éter por evaporación hasta la formación del rocío en P, y, por otro lado, dejando que el éter vuelva a la temperatura ambiente y observando la temperatura de desaparición del rocío.

En las determinaciones de humedad atmosférica el observador deberá mantenerse suficientemente alejado del aparato para no perturbar la medida con la humedad de su aliento.

b] **Psicrómetro.** Para fines meteorológicos es de uso muy cómodo, y se halla muy difundido, el *psicrómetro* (fig. 625), constituído por dos termómetros, uno seco A_1, y otro, A_2, cuyo depósito está envuelto con muselina mojada en agua. Un aspirador V, que gira a una velocidad determinada, acelera la evaporación del agua. El termómetro seco marca la temperatura θ_1 del ambiente, y la temperatura θ_2 del termómetro húmedo es más baja que θ_1, debido al enfriamiento que produce la evaporación. A igualdad de θ_1, es más pequeña la diferencia $\theta_1 - \theta_2$ cuanto más húmedo está el ambiente y es, por tanto, menos eficaz la acción del aspirador para producir la evaporación del agua.

Tablas adecuadas dadas por el constructor, que ha graduado el aparato por comparación con un higrómetro de condensación, permiten obtener la humedad relativa u en función de θ_1 y de θ_2 [1].

---

[1] Sin embargo, para termómetro húmedo ventilado (aspiropsicrómetro) es válida con suficiente aproximación la fórmula de SPRUNG:

$$p = p_2 - \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)\frac{b}{755}, \quad \text{y} \quad u = \frac{p}{p_1}$$

p, presión de vapor existente en el aire; p_2, presión de vapor saturante a la temperatura θ_2; b, presión atmosférica; p_1, presión de vapor saturante a la temperatura θ_1.

Todas las presiones deben expresarse en milímetros — *N. del T.*

c] **Higrómetros registradores (higrógrafos).** La mayoría de ellos se construyen todavía aprovechando la propiedad que tienen los cabellos desengrasados de ser higroscópicos, es decir, de absorber vapor de agua del ambiente y variar de longitud según el grado de humedad de éste.

Un haz H de cabellos (fig. 626) regula con su alargamiento o acortamiento la posición de un índice X que escribe sobre el tambor registrador T.

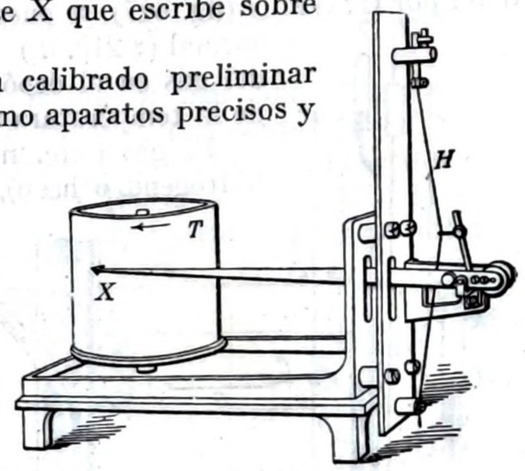


Fig. 626

Estos aparatos necesitan un calibrado preliminar y no pueden ser considerados como aparatos precisos y racionales.

§ 299. **Temperatura absoluta. Cero absoluto.** Se ha introducido la temperatura absoluta Θ mediante la [6], § 295, es decir, mediante una sustitución puramente matemática, útil para eliminar de la [4], § 295, el binomio $(1 + \alpha\theta)$.

Se dice a menudo que la temperatura Θ es la temperatura centesimal contada no desde el 0 °C arbitrario, constituído por la temperatura de fusión del hielo, sino desde el *cero absoluto* a 273,15 °C bajo el 0 °C ordinario; — 273,15 °C es la temperatura del cero absoluto.

El razonamiento que suele hacerse es el siguiente: Se deduce de la [2], § 295, que como v disminuye en $\frac{1}{273,15}\cdot v_0$ por 1 °C de enfriamiento, a — 273,15 °C el volumen inicial v_0 habrá disminuído en $273,15\cdot\frac{1}{273,15}\cdot v_0$, es decir, se habrá anulado; para valores de θ inferiores a — 273,15 °C, la [2], § 295, nos dice que el volumen inicial, después de anularse por enfriamiento, se vuelve negativo. Puesto que esto es físicamente absurdo, se deduce que no existen temperaturas inferiores a — 273,15 °C.

Este razonamiento supone la existencia de gases prácticamente perfectos a los que se pueda aplicar la [2], § 295, hasta temperaturas tan bajas. Todo esto es discutible, y la existencia del cero absoluto se prueba mejor mediante argumentos termodinámicos (§ 340).

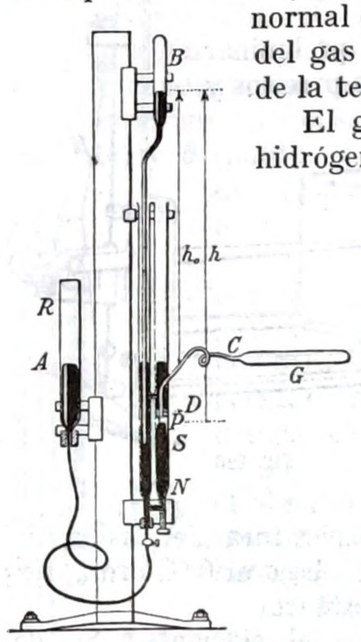
En lo que sigue se citarán a menudo temperaturas ordinarias y temperaturas absolutas, las cuales distinguiremos respectivamente mediante las abreviaturas °C *(Celsius)* y °K *(Kelvin)*; por ejemplo, 250 °C significa 250 grados Celsius, es decir, contados desde el cero ordinario (hielo fundente), y 250 °K significa 250 grados Kelvin.

Luego,

250 °K equivale a — 23,2 °C.

K (Kelvin) recuerda el nombre de LORD KELVIN, al cual se debe la introducción de la *escala absoluta termodinámica* de temperaturas (*temperaturas termodinámicas*, § 340), coincidente con la escala absoluta que da un termómetro ideal de gas perfecto.

§ 300. Termómetro de gas. El termómetro de gas, en la forma dada por CHAPPUIS (fig. 627), se puede considerar como un barómetro normal (§ 210, *a*]) *BS*, destinado a medir la presión del gas en el depósito termométrico *G*, en función de la temperatura a que se encuentra este depósito.



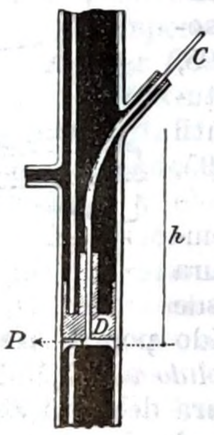


Fig. 627

El gas (aire, nitrógeno, neón, argón, o, mejor, hidrógeno o helio), *bien seco*, al variar la temperatura es obligado a ocupar siempre el mismo volumen, limitado por la puntita *P* en que termina el capilar *CD*; esto se logra levantando o bajando el recipiente *R*. En medidas de muchísima precisión se deberá también tener en cuenta la dilatación del depósito termométrico *G*.

El desnivel entre *S* y *B*, medido con el catetómetro, da en mm_{Hg}, con las correcciones acostumbradas (§ 210), la presión del gas. El desnivel *BA* da la presión atmosférica en el momento del experimento; pero esta medida es, en general, superflua. El aparato se llena y se maneja mediante llaves apropiadas.

Si el gas es perfecto es válida la [5] del § 295:

$$p = p_0 (1 + \beta \theta) \qquad [1]$$

$$\beta = \alpha = \frac{1}{273{,}15}\ ^{\circ}C^{-1}, \qquad v = \text{const.} = v_0.$$

Conocida una vez para todas p_0 (presión del gas a 0 °C), la [1] da θ cuando se ha medido p:

$$\theta = \frac{1}{p_0}\frac{p - p_0}{\beta}; \qquad \beta = \frac{1}{273{,}15}\ ^{\circ}C^{-1} \qquad [2]$$

θ en °C

Si, de acuerdo con la definición de temperatura, se quisiera emplear la [1] del § 288, sería necesario, maniobrando *R*, hacer de modo que la presión del gas en el depósito termométrico, o sea el

desnivel *SB*, permaneciese constante. Un calentamiento del gas a presión constante obligaría a bajar el nivel del mercurio en *S*; con el aumento de volumen, parte del gas del depósito *G* vuelve a *SP*, y si el tubo *NSP* está graduado, por ejemplo en cm^3, puede leerse el aumento de volumen en dicha graduación; pero ha de tenerse en cuenta que la parte de gas que ha salido de *G* ya no se encuentra a la temperatura de *G*. Además, debe conocerse entonces el volumen del depósito *G*.

Se comprende, en suma, que es mucho más cómodo el uso de la [2], o sea, efectuar la medida a volumen constante.

Más adelante veremos otro motivo que nos induce a proceder así.

Pero a temperaturas muy elevadas (hacia los 1000 °C), la presión interna en *G* puede elevarse a varias atmósferas. En efecto, ésta aumenta en p_0 para cada 273 °C de calentamiento, y p_0 es aproximadamente 1 atmósfera. En tal caso, la presión elevada, junto con la deformabilidad y la porosidad que se manifiestan a elevada temperatura para el material de que se ha confeccionado el depósito termométrico (porcelana, platino o cuarzo), hacen imposible el empleo del método de medida «a volumen constante». Es necesario usar el método a «presión constante».

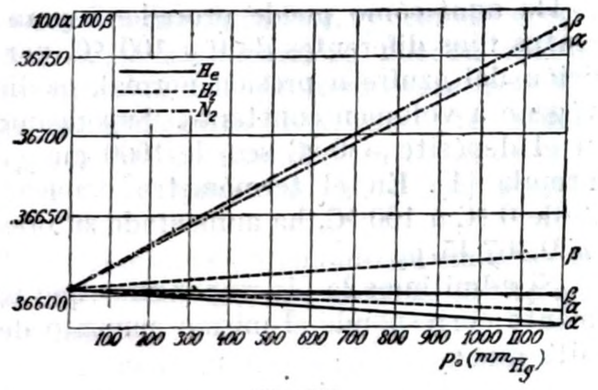


Fig. 628

Lo que precede es aún terriblemente teórico: ¿A qué gas real, es decir, proporcionado por la Naturaleza, haremos desempeñar el papel de gas perfecto?

Experimentando con el termómetro de gas lleno de hidrógeno, nitrógeno o helio (los tres gases más adecuados para servir como substancia termométrica), llevado desde 0 °C a 100 °C, se han determinado los tantos por ciento de aumento, o sea, el valor $\alpha \cdot 100$ del volumen (a presión constante) y los tantos por ciento de aumento $\beta \cdot 100$ de presión (a volumen constante). El resultado de un grupo de experimentos (HENNING y HEUSE) se indica en la figura 628.

$100 \cdot \alpha$ se ha determinado para cada gas, a presiones constantes p_0, variables desde 1100 a 200 mm_{Hg} en las determinaciones sucesivas.

$100 \cdot \beta$ ha sido determinado para cada gas, a partir de una presión inicial p_0 constante en cada determinación, pero variable, dentro de los límites antedichos, de una determinación a otra.

Resulta que ni α ni β tienen un valor constante y común para todos los gases; tampoco es $\alpha = \beta$; los gases reales sólo se comportan como gases perfectos, de un modo aproximado.

Pero los valores experimentales se encuentran en un haz de rectas que convergen en el punto de abscisa $p_0 = 0$ y de ordenada $100 \cdot \alpha = 100 \cdot \beta = 0{,}366\,04$; determinaciones más recientes han dado el valor:

$$100\,\alpha = 100\,\beta = 0{,}366\,09_5 \pm 0{,}000\,01 = \frac{100}{273{,}15 \pm 0{,}01}.$$

Una reciente proposición tiende a hacer aceptar en el campo internacional el valor $\frac{1}{\alpha} = 273{,}15$.

En fin, los gases considerados se aproximan tanto más al gas perfecto ideal cuanto menor es la presión a que están sometidos, como ya lo habíamos advertido en el § 288.

He aquí cómo puede procederse para la determinación de otros puntos fijos diferentes de 0 y 100 °C, por ejemplo del punto de ebullición del azufre a presión normal, mediante un termómetro de nitrógeno a volumen constante. Supongamos que la presión p_0 del gas en el depósito a 0 °C sea de 1000 mm_{Hg}. Se admite como cierta la fórmula [1]. En el termómetro empleado, el nitrógeno, calentado desde 0 °C a 100 °C, ha aumentado su presión inicial $p_0 = 1000$ mm_{Hg} en $0{,}367\,45 \cdot p_0$.

Si admitimos la [1], suponemos que para cada grado de calentamiento corresponde el mismo aumento de presión. Por tanto, se admite que:

$$\beta = 0{,}003\,674\,5\ ^\circ C^{-1} = \text{const. entre 0 y 100 °C.}$$

Poniendo ahora el depósito termométrico en un termostato y rodeándolo con los vapores de azufre hirviendo a la presión atmosférica, podremos determinar la temperatura $\theta_{s;\,1000}$ de dicho termostato. Resulta:

$$\theta_{s;\,1000} = 444{,}37\ ^\circ C.$$

Se repite la determinación reduciendo la presión inicial p_0 del nitrógeno a sólo 600 mm_{Hg}. Resulta:

$$\beta = 0{,}003\,669\,0\ ^\circ C^{-1}$$

y se encuentra para la temperatura de ebullición del azufre el valor:

$$\theta_{s;\,600} = 444{,}45\ ^\circ C.$$

Una nueva determinación con $p_0 = 200$ mm_{Hg} da $\beta = 0{,}003\,663\,0\ ^\circ C$ y

$$\theta_{s;\,200} = 444{,}51\ ^\circ C.$$

Un gráfico que represente θ_s en función de p_0 permite deducir por extrapolación que para $p_0 = 0$ (el nitrógeno del termómetro se comporta como un gas perfecto, ... pero el experimento ya no puede efectuarse), se obtendría (1):

$$\theta_{s;\,0} = 444{,}54\ ^\circ C.$$

Ésta es la temperatura verdadera de ebullición del azufre, la misma que se encontraría repitiendo las determinaciones anteriores empleando otro gas diferente del nitrógeno como substancia termométrica. La determinación efectuada con $p_0 = 1000$ mm_{Hg} tendría que *ser corregida* en + 0,17 °C (el signo + indica que tendría que aumentarse en 0,17).

Se comprende ahora cómo puede emplearse un gas real para la determinación de las *temperaturas termodinámicas*, y cómo, gracias a un trabajo minucioso, paciente y larguísimo, se pueden conocer tablas de corrección que permiten obtener la temperatura termodinámica que debería indicar un termómetro de gas perfecto, cuando se ha determinado la tempertura con un termómetro de gas real, a presión p_0 no nula, y admitiendo verdadera la [2], § 295, o la [1] de este apartado.

Las correcciones, en general, son menores cuando se emplea esta última fórmula, lo que constituye otra ventaja notable del termómetro de gas a volumen constante.

Como ejemplo, se dan a continuación las correcciones para los termómetros de helio y de nitrógeno a volumen constante, para $p_0 = 1000$ mm_{Hg}.

θ °C	— 250	— 190	— 150	— 100	— 50	0	+ 50	+ 100	+ 200	+ 300	+ 400
He	+ 0,037	+ 0,017	+ 0,008	+ 0,003	+ 0,001	0,000	— 0,001	0,000	+ 0,006	+ 0,018	+ 0,037
N_2	—	+ 0,420	+ 0,174	+ 0,051	+ 0,013	0,000	— 0,010	0,000	+ 0,02	+ 0,06	+ 0,12

§ 301. Escala práctica de temperaturas. En la práctica, la escala de las temperaturas con las cuales se puede calibrar cualquier dispositivo empleado para su medida (§§ 302 ÷ 305) está constituída por una escala de puntos fijos cuyos valores han sido determinados por los físicos una vez para siempre y por convenios hechos acerca de las fórmulas de interpolación adecuadas para obtener las temperaturas intermedias (§ 304, al final).

He aquí algunos de estos puntos fijos en °C ($p = 760$ mm_{Hg}) y los valores que les son atribuídos en la *escala internacional* de tempe-

(1) En la escala internacional de temperaturas (§ 304) se ha tomado como temperatura de ebullición del azufre (mejor, temperatura de equilibrio entre el azufre líquido y su vapor a la presión normal) la temperatura de 444,600 °C promedio (redondeado) de los resultados obtenidos por varios autores.

raturas (§ 304); los valores que figuran en negritas se refieren a los puntos fijos primarios:

Temperatura de ebullición del helio	—	268,7
» » » » hidrógeno	—	252,78
» » » » oxígeno	—	**182,970**
» » fusión del mercurio	—	38,86
» » » » hielo		0,000
» » » » $Na_2SO_4 \cdot 10H_2O$ en su agua de cristalización	+	32,38
» » ebullición del agua	+	**100,0000**
» » » de la naftalina	+	218,0
» » » del mercurio	+	356,58
» » fusión del zinc	+	419,5
» » ebullición del azufre	+	**444,600**
» » fusión de la plata	+	**960,80**
» » » del oro	+	**1 063,0**
» » » » platino	+	1 769 ± 5

Recordemos una vez más que «temperatura de fusión» quiere decir «temperatura de equilibrio entre la fase sólida y la fase líquida a la presión considerada», y que «temperatura de ebullición» significa «temperatura de equilibrio entre la fase líquida y la fase vapor a la presión considerada».

El punto de congelación del agua no está entre los puntos fijos primarios; fué definido como temperatura de equilibrio entre el hielo y el agua saturada de aire a la presión de 760 mm_{Hg}, y es un resultado reproducido con un error de unos 0,0001 °C; en cambio, el punto triple (§ 358) del agua puede reproducirse con mayor exactitud.

Por esto, se tiende en la actualidad a fijar dicho punto triple como punto fundamental, atribuyéndole el valor 0,0100 exacto; entonces el punto de hielo resulta ser $0{,}000 \pm \approx 0{,}001$ °C.

Se obtienen temperaturas bajísimas, ya sea con mezclas frigoríficas, ya con el enfriamiento producido por la expansión de los gases (máquinas de LINDE, CLAUDE, etc.), o bien con la evaporación de líquidos volátiles.

Se obtienen temperaturas elevadas mediante fenómenos químicos (combustiones) o eléctricos (hornos eléctricos de arco o de resistencia, calentamiento por choque de rayos catódicos, etc.).

A continuación se dan algunas temperaturas interesantes:

Temperatura mínima alcanzada mediante la rápida evaporación del helio, en el vacío (0,01 mm_{Hg})		0,71	°K
Mezcla frigorífica NaCl + nieve		— 21	°C
Calor rojo naciente		520	»
Mechero MECKER con gas del alumbrado		1 800	»
Llama oxhídrica		2 200	»
» oxiacetilénica		2 500	»
Temperamento del filamento de tungsteno de la lámpara de medio watt	2400 ÷	2 800	»
Punto de fusión del molibdeno		2 570	»
» » » » tungsteno		3 380	»
Arco eléctrico	3600 ÷	4 800	»
» » bajo presión: hasta unos		7 300	»
Fotosfera solar		5 700	»
Explosión de un hilo metálico mediante una descarga eléctrica		10 000	»

EDDINGTON calcula que la temperatura de algunas estrellas alcanza varios millones de grados.

Las temperaturas más bajas alcanzadas hasta ahora se han obtenido mediante el descenso de temperatura que acompaña a la desimanación adiabática de algunos cristales llevados previamente a temperatura bajísima *(fenómeno magnetocalorífico)*. W. J. DE HAAS calcula en 0,004 4 °K la temperatura mínima alcanzada de este modo con la desimanación del alumbre de cromo.

§ **302. Termómetros prácticos.** El termómetro de gas, preciso y sensible, pero embarazoso, de empleo incómodo y difícil, y de rapidez menos que mediana, tiene interés casi exclusivamente científico para la determinación de los puntos fijos necesarios para calibrar los otros termómetros.

Son empleadísimos los termómetros de líquido, en los cuales se aprovecha la dilatación de los líquidos, que precisamente es la que permite introducir del modo más elemental el concepto de temperatura.

De un modo más general, determinando una vez para siempre la dependencia de cierto fenómeno respecto a la temperatura, se puede medir ésta (más o menos cómodamente) utilizando dicha dependencia.

El ejemplo más interesante nos lo ofrece la resistencia eléctrica r de un hilo metálico; ésta depende de la temperatura θ. Para una substancia dada, bien definida, por ejemplo, para el platino, se conoce la relación

$$r = r(\theta) \qquad [1]$$

de donde, resolviendo con respecto a θ, se obtiene

$$\theta = \theta(r).$$

Determinando r, se puede deducir θ (*termómetros de resistencia*, § 304).

Naturalmente, tendrá más valor práctico el termómetro de resistencia cuanto más sencilla sea la relación [1] y más fácil la medida de r.

En los §§ 303 ÷ 305 describiremos los medio prácticos más corrientes destinados a la medición de temperaturas.

Terminamos advirtiendo que un termómetro, como todo aparato de medida, tiene cierta sensibilidad, cierta precisión y cierta rapidez. La *rapidez* de un termómetro, o sea, el tiempo necesario para que al ponerlo en contacto con un cuerpo indique su temperatura, depende de la capacidad calorífica del termómetro, o sea, de la cantidad de calor que necesita para cada aumento de temperatura de 1 °C. Así, esta capacidad calorífica es muy grande en el termómetro de gas, a causa de ser grande el depósito del mismo.

Una gran capacidad calorífica crea dos inconvenientes:

1.º la introducción del termómetro en el recinto cuya temperatura se busca puede modificar dicha temperatura ;

2.º es necesario un tiempo notable para que el termómetro indique la temperatura del recinto en que se ha colocado ; es decir, el termómetro no es rápido.

Si el ambiente es un gas, el termómetro va tomando lentamente la temperatura del gas, por ser éste poco conductor, y en general la capacidad calorífica del termómetro resulta excesiva.

Además, puede ocurrir que las indicaciones del termómetro queden completamente falseadas por la presencia de radiaciones electromagnéticas. Así, un termómetro colocado al sol, *no* mide la temperatura del aire que lo rodea, sino una temperatura notablemente superior. Para evitar esto es preciso hacer girar rápidamente el termómetro en el aire para que la violenta corriente de aire que recibe el termómetro sirva para igualar su temperatura con la del aire.

§ 303. Termómetros de líquido.

a] **Termómetro de mercurio.** Es el más empleado. El mercurio presenta dos ventajas :

1.ª Su ley de dilatación (aparente) con el calentamiento se aproxima notablemente a la de los gases, especialmente cuando el termómetro se ha construído con vidrio de calidad conveniente, puesto que el termómetro de mercurio con capilar bien cilíndrico, graduado de la manera corriente, es el que da las indicaciones más próximas a la temperatura centesimal termodinámico ; en realidad, la graduación indica la temperatura a partir del 0 ºC y no del cero absoluto. Sin embargo, a 300 ºC, la corrección es ya de ≈ 3 ºC.

2.ª El mercurio puede obtenerse fácilmente muy puro ; obsérvese que las pequeñas impurezas modifican notablemente la dilatabilidad de un líquido.

Los termómetros de mercurio sirven para temperaturas comprendidas entre — 38 ºC y, gracias a la presencia de un gas comprimido [fig. 608 *c*)], poco más de 550 ºC.

Se han hecho estudios especiales respecto a la calidad del vidrio que debe emplearse para el depósito termométrico, con el fin de evitar el inconveniente del « corrimiento del cero ». Este inconveniente es debido a lentas deformaciones del vidrio, que prosiguen durante muchos años después de la fabricación del termómetro y no desaparecen nunca por completo, a causa de que el vidrio presenta, con los cambios de temperatura, fenómenos de histéresis y de deformación subsiguiente análogos a los explicados en el § 196.

Entre los vidrios especiales en los que este inconveniente ha sido reducido al mínimo, recordemos el llamado *vidrio normal de Jena*.

Un termómetro de mercurio, calibrado con un número suficiente de puntos fijos, da la temperatura con error inferior a 0,01 ºC.

Sin embargo, la sensibilidad del termómetro puede llegar a 0,001 ºC cuando se emplean depósitos grandes y capilares muy finos ;

la escala, dividida en 0,01 ºC, permite apreciar aproximadamente una milésima de grado, pero no comprende más que un intervalo de 6 ó 7 grados, pues de otro modo resultaría exageradamente larga. La capacidad calorífica de un depósito grande es notable, por lo que un termómetro construído de este modo no es muy rápido y su precisión no es comparable a su sensibilidad ; basta notar que la forma del menisco en el capilar no es siempre la misma, siendo más convexa cuando sube la temperatura, por lo que el mercurio y el depósito están sometidos a una presión variable, de donde resulta un error en la lectura de la temperatura.

b] **Termómetros de líquido para temperaturas bajas.** Son :

1.º el termómetro *de alcohol etílico*, que sirve hasta ≈ -80 ºC ; pero el alcohol no tiene una dilatación tan regular (respecto a los gases) como el mercurio ; además, la ley de dilatación del alcohol varía notablemente con la presencia de impurezas, agua por ejemplo, y es difícil eliminar ésta del alcohol ;

Fig. 629

2.º el termómetro *de tolueno* también alcanza hasta unos — 80 ºC ;

3.º el termómetro *de pentano* mide temperaturas hasta — 200 ºC.

Estos termómetros son poco precisos, y las temperaturas extremas a veces resultan equivocadas en algunos grados.

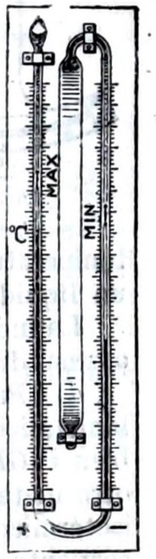


Fig. 630

§ 304. Otros termómetros. Escala internacional de temperaturas.

a] **Termómetros de máxima y mínima.** El termómetro de máxima más corriente es el *termómetro clínico*. Un estrechamiento *S* (fig. 629) al principio del capilar permite la salida del mercurio del depósito durante el calentamiento, pero produce la rotura de la columna de mercurio cuando, alcanzada la temperatura máxima, se enfría y empieza a contraerse el mercurio.

El termómetro de mínima es un termómetro de alcohol cuyo menisco arrastra consigo al retirarse (es decir, durante el enfriamiento) un cilindrito de acero colocado en el capilar y sumergido en el alcohol.

El termómetro de Six de máxima y mínima (fig. 630) funciona de un modo análogo. Es un termómetro de alcohol cuyo capilar está dos veces doblado y en el que la columna de alcohol está interrumpida por una columna de mercurio en cuyos extremos cabalgan dos cilindritos de acero destinados, respectivamente, a indicar la temperatura máxima y la mínima durante cierto intervalo de tiempo.

Un imán sirve para conducir los cilindritos de acero hasta tocar a los correspondientes meniscos de mercurio, al principiar cualquier experimento.

b] **Termómetros metálicos.** Aprovechan la diferente dilatabilidad de dos metales, como plata y platino, o hierro y cobre: una lámina bimetálica delgada está arrollada en forma de espiral, de modo que el metal más dilatable se encuentre en la parte exterior de la espiral, con lo cual ésta se encorva más o se desencorva, según que aumente o disminuya la temperatura ambiente (fig. 631). El aparato puede alcanzar una buena sensibilidad, unida a una gran rapidez.

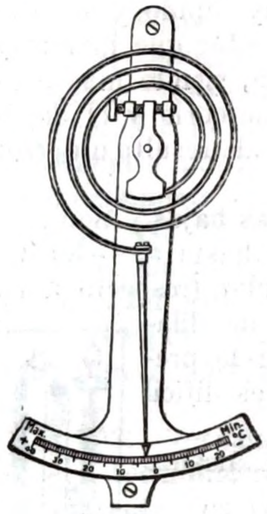


Fig. 631

c] **Termómetros de presión de vapor.** El depósito termométrico B (fig. 632) contiene vapor saturado del líquido L_1; el líquido L_2, no volátil y no miscible con L_1 (generalmente, mercurio), sirve para transmitir la presión del vapor saturante al manómetro metálico M. Para un líquido dado, la presión de vapor aumenta muy rápidamente con la temperatura; para cada intervalo de temperatura convendrá emplear un líquido L_1 conveniente.

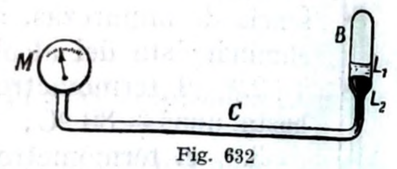


Fig. 632

La indicación en M de la temperatura puede llevarse de este modo a una distancia notable del depósito B (hasta de varios metros).

d] **Par termoeléctrico.** Sea AM_2BGA (fig. 633) un circuito bimetálico; M_1M_1, y, en el caso más simple, tambien P_1GP_2, son de un mismo metal, y M_2, es del otro metal (p. ej. cobre y hierro). Si el circuito es isotérmico, el galvanómetro G no revela ninguna corriente eléctrica; pero cuando la soldadura A entre los dos metales se encuentra a una temperatura Θ_A, diferente de la del resto del circuito Θ_B, el circuito es recorrido por una *corriente termoeléctrica*, indicada por G, y el dispositivo constituye una *pila* o *par termoeléctrico*. Fijada la naturaleza de los dos metales y fijado Θ_B, la fuerza electromotriz (f. e. m.) F_e, dada por la pila, es una función bastante sencilla de Θ_A (v. tomo II).

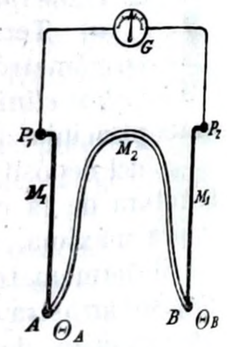


Fig. 633

La medida de la f. e. m. se efectúa fácilmente y con precisión (v. tomo II); el aparato, calibrado mediante un número suficiente de temperaturas Θ_A conocidas (puntos fijos), constituye un termómetro excelente por su sensibilidad y rapidez. El depósito está sustituído por la simple soldadura A entre dos finos hilos metálicos, cuyo diámetro puede reducirse a menudo a $\approx$ 0,1 mm. En casos especiales, los dos conductores, en el punto de la soldadura A, pueden reducirse a un diámetro de algunos μm, o pueden tener la forma de laminitas de 1 mm de anchura cuyo grueso puede reducirse a 1 μm o poco más.

Escogiendo un par conveniente de metales (o aleaciones) para cada intervalo de temperatura, con tal que no sea excesivamente amplio, puede lograrse que la función $\Theta_A = \Theta_A\,(F_e)$ sea lineal o casi lineal.

Lo único que limita el uso de la pila termoeléctrica, en el campo de las temperaturas elevadas, es la posibilidad de que los metales se oxiden o fundan. Con el par iridio-rutenioiridio se miden temperaturas hasta 2000 °C. El par platino-platinorrodio sirve perfectamente para medidas científicas o industriales entre 300 y 1600 °C.

Los pares que se emplean para temperaturas moderadas son innumerables. Es muy empleado el par hierro-constantán, que sirve hasta temperaturas de $\approx$ 900 °C (1).

Los pares cobre-constantán y oro-plata son especialmente adecuados para temperaturas bajas, hasta de pocas decenas de grados absolutos.

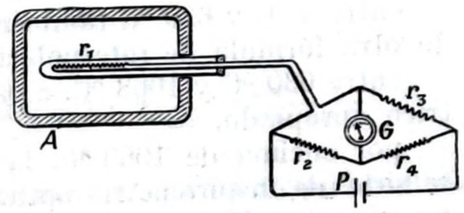


Fig. 634

e] **Termómetros de resistencia.** Se ha indicado ya su principio. La resistencia de los metales puros varía notable y regularmente con la temperatura. El platino es adecuadísimo.

La medida de la resistencia eléctrica de un hilo se efectúa de un modo fácil y extraordinariamente preciso mediante el puente de WHEATSTONE (v. tomo II). Funciona como substancia termométrica una pequeña espiral o una lámina finísima de platino, de resistencia r_1 (fig. 634).

Fijadas las resistencias r_3 y r_4, se gradúa la resistencia variable r_2 de modo que no pase corriente por el galvanómetro G. Esto ocurre cuando se tiene:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{r_3}{r_4}.$$

Conocidas r_3, r_4, r_2, se deduce el valor de r_1 que es función de la temperatura existente dentro de A. Se emplean industrialmente aparatos directamente calibrados en grados Celsius.

En estos termómetros son también notabilísimas la sensibilidad y la rapidez. La precisión depende de la bondad del calibrado mediante los puntos fijos; para las temperaturas intermedias se emplean fórmulas de interpolación, fruto de acuerdos internacionales.

El termómetro de resistencia de hilo de platino, así calibrado, constituye, después del termómetro de gas, el aparato más recomendado para medidas de precisión entre $\approx$ 200 °C y $\approx$ + 600 °C.

(1) El *constantán* es una aleación formada por 60 % de cobre y 40 % de níquel, cuya resistencia eléctrica es prácticamente constante al variar la temperatura, de donde viene su nombre.

§ 305

Estos termómetros eléctricos permiten, en casos especiales, alcanzar sensibilidades de 10^{-6} °C. Se prestan fácilmente (como también los termómetros bimetálicos) a construir aparatos registradores *(termógrafos)*; finalmente, se prestan, mucho mejor que el termómetro de presión de vapor, a señalar y registrar las temperaturas a distancia *(termómetros a distancia)*. En esto se basan los numerosos aparatos industriales para señalar la temperatura, que permiten a una sola persona, colocada en la cabina de gobierno, seguir la marcha de numerosos hornos, calderas, etc.

Una vez establecida la temperatura de los puntos fijos (§ 301), la medición de la temperatura θ en la *escala internacional de temperaturas* se obtiene mediante termómetros eléctricos y fórmulas de interpolación internacionalmente adoptadas, de las cuales puede inferirse θ:

entre —183 °C y 0 °C por la resistencia de un termómetro de resistencia apropiado,

entre 0 °C y 630 °C también con dicho termómetro, pero empleando otra fórmula de interpolación,

entre 630 °C y 1063 °C, a partir de la f. e. m. de un par termoeléctrico apropiado,

por encima de 1063 °C, la escala internacional de temperaturas se sirve de la pirometría óptica (§ 305) a base de la ley de PLANCK (véase tomo II).

§ 305. Pirómetros. En la industria se llama *pirómetros* a los termómetros que sirven para la medición de temperaturas elevadas, como las de los hornos de $\approx$ 500 °C en adelante.

Son pirómetros groseros el *pirómetro de arcilla de* WEDGWOOD, basado en la contracción que experimenta una pastillita de arcilla al calentarla, y el *pirómetro de conos normales de* SEGER, constituído por una serie de conos elaborados con arcillas de punto de fusión conocido y regularmente creciente (desde 600 a 2000 °C). Se introduce en el horno una serie de estos conos, y se observa cuáles funden (mejor dicho, se reblandecen y doblan) y cuáles no.

Los termómetros eléctricos, tanto los de resistencia como los termoeléctricos, son pirómetros muy buenos *(pirómetros eléctricos)* dentro de los límites máximos de temperatura ya indicados (§ 304).

Más allá de los 700 °C también se emplean mucho los *pirómetros ópticos*, que se prestan a medir temperaturas muy elevadas. Se basan en las leyes de emisión de energía electromagnética que se propaga por medio de ondas («radiantes») de los cuerpos negros (v. tomo II).

Aquí solamente diremos que un *cuerpo negro* se realiza mediante un horno isotérmico de paredes absorbentes para la energía radiante. Por un agujero pequeño practicado en la pared del horno sale energía radiante procedente de su interior, constituída por un conjunto de radiaciones visibles (luz) e invisibles (radiaciones infrarrojas y ultravioletas).

§ 305

El agujero debe ser suficientemente pequeño para que la energía emitida no perturbe sensiblemente el régimen isotérmico que tenía el horno con el agujero cerrado. En estas condiciones, la energía radiante que sale del horno es independiente de las paredes de éste y de su contenido; referida esta energía a la unidad de tiempo, a la unidad de superficie del agujero y a la unidad de ángulo sólido normal a la superficie del agujero, es solamente función de la temperatura absoluta del horno y mide el *esplendor* o *brillo energético* Σ del mismo (v. tomo II).

El operario que deduce a ojo la temperatura del horno basándose en su color (rojo, rojo cereza, rojo claro, blanco .....) y en su brillo más o menos elevado, efectúa ya *pirometría óptica*.

Puede calcularse la temperatura del horno a partir de la medición de la energía radiante. Tal es el principio de los pirómetros ópticos.

Se ha encontrado que el brillo energético Σ del cuerpo negro es *(ley de* STEFAN - BOLTZMANN):

$$\Sigma = a \cdot \Theta^4, \qquad a = (1{,}805 \pm 0{,}001) \cdot 10^{-5}, \ \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \cdot \text{seg} \cdot \text{esterad}^\circ \text{K}^4},$$

y de esta relación, conocido Σ, se determina Θ. La medición absoluta de Σ es muy difícil; por ello, los pirómetros ópticos industriales son todos aparatos calibrados.

Entre los más comunes se encuentran los dos siguientes:

1.º **Pirómetro de Féry.** Se dirige un anteojo a la abertura del horno por donde sale la energía radiante. La imagen de la misma se forma sobre la pequeña laminita A (figura 635), de plata ennegrecida, y esta imagen debe ser de un tamaño apropiado para cubrir enteramente dicha laminita: esta condición se asegura mediante el ocular O. La laminita A está soldada con el contacto hierro-constantán de un par termoeléctrico, cuya f. e. m. termoeléctrica, medida con el voltímetro V, es función de la energía radiante recibida por A, y, por tanto, de la temperatura del horno. El voltímetro V está calibrado directamente en grados.

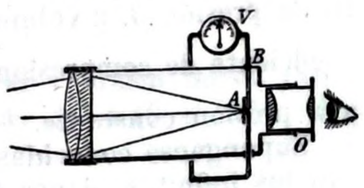


Fig. 635

2.º **Pirómetro de filamento en desaparición.** También se dirige un anteojo (fig. 636) al agujero de la pared del horno. Ahora en el plano donde se forma la imagen del agujero se encuentra el filamento de una lamparita de incandescencia que funciona como un retículo (§ 11). Se gradúa la corriente en el filamento hasta que éste adquiera el brillo del horno y resulte, por tanto, invisible, como representa la figura 636 *b*). La corriente necesaria para esto es función de la temperatura del horno, y el amperímetro que la mide está directamente calibrado en grados.

§ 306

§ 306. Determinación de la ecuación de estado de un cuerpo puro. Así como en el § 295 se ha obtenido la ecuación de estado para los gases perfectos, se puede tratar de obtener la ecuación para un gas real, para un líquido o para un sólido; nos limitaremos al caso de un cuerpo puro, es decir, integrado por moléculas todas iguales entre sí.

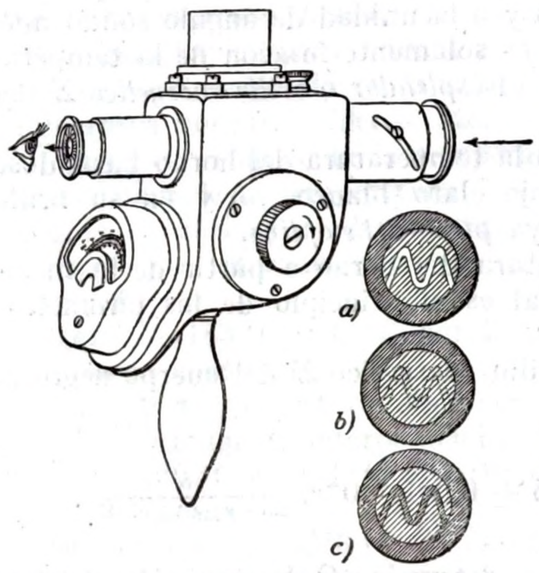


Fig. 636

El estudio de la compresibilidad uniforme (¡isotérmica!) de los cuerpos (§ 185) tiene por objeto dar la ley $p = p\,(v)$ que relaciona la presión y el volumen de un cuerpo *en una transformación isotérmica*.

El estudio de la dilatación de los cuerpos tiene por objeto dar la ley $v = v\,(\theta)$ que relaciona el volumen y la temperatura *en una transformación isobárica*.

En los sólidos y en los líquidos, ¿podrá variarse la temperatura a volumen constante? Las variaciones extraordinarias de presión que se engendran al impedir la dilatación libre (es decir, bajo la presión atmosférica) son causa de fenómenos bien conocidos.

Pero la [15], § 291, establece que el coeficiente (térmico) de aumento de presión β, a volumen constante, puede deducirse a partir del coeficiente de compresión isotérmica $\frac{1}{\varepsilon}$ y del coeficiente de dilatación α a presión constante.

Supónganse conocidas las secciones de la superficie $F\,(v, p, \theta) = 0$ con los infinitos planos $\theta = \text{const}$.

Estas secciones constituyen el *haz de las isotermas* $p = p\,(v)$ que determinan la superficie $F\,(v, p, \theta) = 0$, así como un plano topográfico determina la forma del terreno por medio de las curvas de nivel.

La investigación de la ecuación de estado de un cuerpo puro se reduce, pues, a la determinación experimental del haz de las isotermas.

En la práctica, tratándose de un cuerpo puro determinado, se halla ya sea el haz de las isotermas ya el de las isobaras $p = \text{const.}$, por lo menos en cierto intervalo de los valores de las variables. Se tiene de este modo cuanto es necesario para determinar, por lo menos en cierto campo, la superficie $F\,(v, p, \theta) = 0$. Pero no es fácil obtener, como para los gases perfectos, la forma analítica de la función F.

§ 306

Así como la forma [1], § 185, es común para todas las fórmulas de compresión, también las fórmulas de dilatación (para sólidos, líquidos y gases) son del mismo tipo

$$v = v_0\,(1 + \alpha\theta). \qquad [1]$$

En efecto, el volumen v a la temperatura θ es evidentemente proporcional al volumen v_0 a 0 °C.

Luego es cierto que

$$v = v_0 \cdot f\,(\theta) \qquad [2]$$

en donde $f\,(\theta)$ debe tomar el valor 1 para $\theta = 0$ °C. Pero entonces, la $f\,(\theta)$ desarrollada en serie de McLaurin hasta los términos de primer orden da:

$$f\,(\theta) = 1 + \alpha\theta + \ldots\ldots \qquad [3]$$

Análogamente, para la dilatación lineal de los sólidos (§ 308) se tiene siempre en primera aproximación:

$$l = l_0\,(1 + \lambda\theta) \qquad [4]$$

siendo λ el coeficiente de dilatación lineal.

Físicamente no debe sorprendernos la identidad de forma de todas las leyes de dilatación pensando que todas se han obtenido mediante experimentos que confirman que, en intervalos de temperatura no muy grandes, se verifica:

$$\Delta v = \alpha \cdot v_0 \cdot \Delta\theta\,; \qquad [5]$$

es decir, que la dilatación es proporcional al volumen inicial (volumen 0 °C) y al aumento de temperatura $\Delta\theta = (\theta + \Delta\theta) - \theta$. La constante

$$\alpha = \frac{1}{v_0}\frac{\Delta v}{\Delta\theta} \qquad [6]$$

es el coeficiente de dilatación *medio* entre θ y $\theta + \Delta\theta$; cuando $\Delta\theta$ tiende a cero se obtiene la [13], § 291, que da el coeficiente de dilatación *verdadero* a la temperatura θ.

Si el intervalo $\Delta\theta$ se extiende desde 0 a θ se tiene $\Delta\theta = \theta$ y la [5] da

$$\Delta v = \alpha \cdot v_0 \cdot \theta,$$

o sea,

$$v - v_0 = \alpha v_0 \theta$$

de donde se obtiene la [1].

Esta fórmula, como el desarrollo en serie [3], sólo es válida en un pequeño intervalo de temperatura alrededor de 0 °C, este inter-

valo puede ser, por ejemplo, de 0 a 100 °C, o bien de — 50 a + 50 °C, pero para mayores aproximaciones, puede incluso reducirse a unos pocos grados. En otro caso es preciso utilizar fórmulas del tipo

$$v = v_0 (1 + \alpha_1\theta + \alpha_2\theta^2 + \alpha_3\theta^3 + ...),$$

en donde se ha sustituído la $f(\theta)$ por un desarrollo en serie que contiene también los términos de orden superior al primero.

Trataremos de las dilataciones de los líquidos y de los sólidos, y de la compresibilidad isotérmica de los gases reales.

§ 307. Dilatación de los líquidos. Se estudia la dilatación *verdadera* o *real* de un líquido, independientemente de la dilatación de la vasija que lo contiene, mediante el ingenioso método de DULONG y PETIT. Las dos ramas A y B (fig. 637) de un tubo en U están llenas del líquido que se estudia, por ejemplo, mercurio. Los dos tubos M_A y M_B rodean a las dos ramas A y B, estando A lleno de hielo fundido y B lleno de agua hirviendo. Se puede suponer de este modo que A se encuentra a 0 °C y que B tiene una temperatura, θ próxima a 100 °C, que se determina con un termómetro. El tubo horizontal D, casi capilar, asegura el equilibrio hidrostático del mercurio entre los dos vasos comunicantes A y B, y determina también, con suficiente aproximación, el nivel de separación entre el mercurio caliente y el frío.

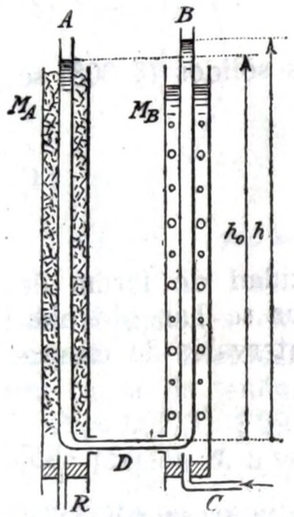


Fig. 637

Sean μ_0 y μ las masas específicas del mercurio a 0 °C y a la temperatura θ, respectivamente; el mercurio se dilata al calentarse, por lo que cierta masa m del mismo ocupa, respectivamente, los volúmenes v_0 y v a 0 °C y a θ, tales que se tiene:

$$m = \mu_0 \cdot v_0 = \mu \cdot v, \quad \text{o sea} \quad \frac{\mu_0}{\mu} = \frac{v}{v_0}.$$

Para que haya equilibrio hidrostático entre los dos líquidos en vasos comunicantes es preciso que se cumpla (§ 207, [7]):

$$\frac{h}{h_0} = \frac{\mu_0}{\mu},$$

Luego,

$$v = v_0 \frac{h}{h_0}. \qquad [1]$$

La función $f(\theta)$ de la [2], § 306, es la razón $\frac{h}{h_0}$. Con un catetómetro se determinan las alturas h_0 y h en función de θ; se obtiene así experimentalmente $\frac{h}{h_0} = f(\theta)$.

Si se admite como suficientemente aproximada la [3] del § 306, se tiene $\frac{h}{h_0} = \frac{v}{v_0} = (1 + \alpha\theta)$; es decir,

$$\alpha = \frac{h - h_0}{h_0\theta} \qquad [2]$$

es el coeficiente medio de dilatación (cúbica) verdadera del mercurio entre 0 °C y θ; h_0 sólo puede determinarse aproximadamente,

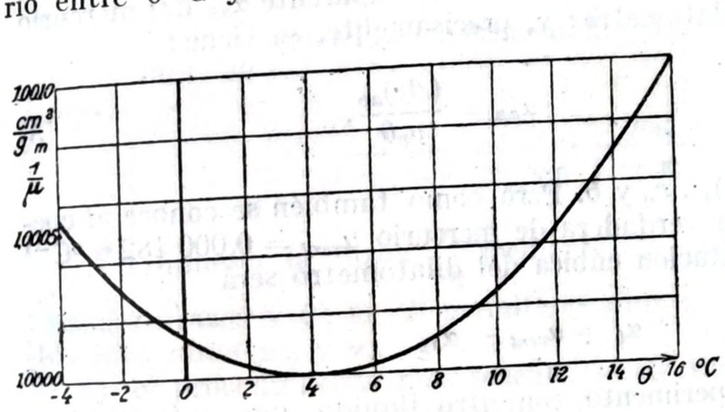


Fig. 638

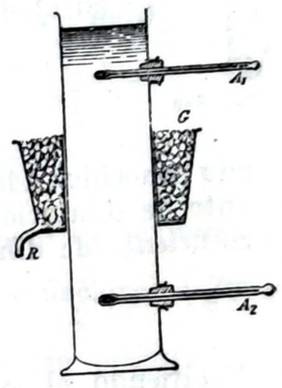


Fig. 639

mientras que θ y $(h - h_1)$ se determinan con mayor exactitud (compárese con el ejemplo del final del § 14).

En el mercurio, para 0 y 100 °C se tiene, por ejemplo, $h_0 = 100$ cm, $h - h_0 = 1{,}826$ cm, y resulta $\alpha = 0{,}000\,182\,6\ °C^{-1}$.

Repitiendo el experimento con aceite mineral lubricante y para la misma altura $h_0 = 100$ cm, $h - h_0$ rebasa los 3 cm.

El coeficiente de dilatación es diferente en los distintos líquidos.

Es interesante el comportamiento anormal del agua, que a 4 °C presenta un máximo en su masa específica, o sea, un mínimo de su volumen específico $\frac{1}{\mu}$ (fig. 638).

Con el aparato de la figura 639 se demuestra fácilmente que el agua enfriada por el hielo G desciende hasta que el termómetro A_2 señala 4 °C; después la temperatura de A_2 queda estacionaria, mientras que la de A_1 desciende hasta 0 °C.

El volumen específico mínimo del agua depende notablemente de las sales que tiene en disolución. Así, en el agua de mar dicho mínimo corresponde a — 3,7 °C.

Se determina la dilatación *aparente* mediante el *dilatómetro*. En su forma más simple está constituído por un grueso depósito R (figura 640) que termina en un capilar PQ de calibre bien uniforme, graduado en mm³, por ejemplo. El dilatómetro se llena con un líquido de coeficiente de dilatación verdadera conocido, por ejemplo, mercurio. La abertura A sirve para llenar fácilmente el dilatómetro, aspirando por Q. Después se cierra herméticamente.

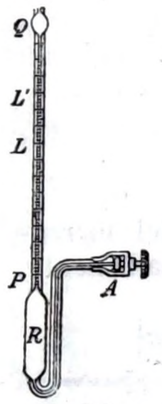


Fig. 640

Conocidas las masas del aparato vacío y del aparato lleno de mercurio hasta P, a 0 °C, y la masa específica del mercurio a 0 °C, se determina el volumen v_0 a 0 °C del depósito del dilatómetro desde A hasta P. Calentando el aparato hasta θ, se verá que el mercurio sube, por ejemplo, hasta L. La dilatación aparente $(\Delta v)_{ap}$, indicada por el corrimiento PL, permite determinar el coeficiente de dilatación cúbica aparente α_{ap} del mercurio en el dilatómetro; y, precisamente, se tiene:

$$\alpha_{ap} = \frac{(\Delta v)_{ap}}{v_0 \theta}, \qquad [3]$$

siendo conocidos $(\Delta v)_{ap}$, v_0 y θ. Pero como también se conoce el coeficiente de dilatación verdadera de mercurio $\alpha_{verd} = 0{,}000\,182\,6\ °C^{-1}$ el coeficiente de dilatación cúbica del dilatómetro será

$$\alpha_0 = \alpha_{verd} - \alpha_{ap} \qquad [4]$$

Repitiendo el experimento con otro líquido, que a 0 °C llega hasta P, y a θ alcanza hasta L', se tiene, análogamente a la [3]:

$$\alpha'_{ap} = \frac{(\Delta v)'_{ap}}{v_0 \theta'}$$

siendo α'_{ap} el coeficiente de dilatación aparente de este nuevo líquido. Por tanto, aplicando otra vez la [4] a este nuevo líquido, se tiene:

$$\alpha_0 = \alpha'_{verd} - \alpha'_{ap}. \qquad [5]$$

Puesto que ahora se conoce α_0 y ha sido determinado α'_{ap}, se puede calcular α'_{verd}. Luego el dilatómetro permite medir el coeficiente de dilatación verdadera de un líquido, cuando se conoce α_0, constante del aparato que se determina una vez para siempre mediante el mercurio.

§ 308. Dilatación de los sólidos. Se puede deducir el coeficiente de dilatación cúbica α_s de un sólido mediante el picnómetro (§ 46, *a*]) lleno de un líquido l del cual se conozca la masa específica μ_{l0} a 0 °C y su coeficiente de dilatación real α_l.

La masa específica μ_l de este líquido en función de la temperatura es:

$$\mu_l = \frac{\mu_{l0}}{1 + \alpha_l \theta}.$$

Para el sólido en estudio se tiene, análogamente.

$$\mu_s = \frac{\mu_{s0}}{1 + \alpha_s \theta}.$$

Por el método del picnómetro se determina para cada temperatura la razón entre las masas m_s y m_l de volúmenes iguales del sólido y del líquido en que se ha sumergido el sólido.

Se tiene:

$$\frac{m_s}{m_l} = \frac{\mu_s}{\mu_l} \text{ conocido experimentalmente, función de } \theta; \qquad [1]$$

luego:

$$\frac{\mu_{s0}}{1 + \alpha_s \theta} = \left(\frac{m_s}{m_l}\right)_\theta \cdot \frac{\mu_{l0}}{1 + \alpha_l \theta}. \qquad [2]$$

Determinada la razón $\frac{m_s}{m_l}$ mediante el picnómetro y para dos temperaturas θ y θ', la [2] permite escribir dos ecuaciones entre las dos incógnitas μ_{s0} y α_s.

En el procedimiento más sencillo, se efectúa una primera determinación a 0 °C, y la [2] se reduce a

$$\mu_{s0} = \left(\frac{m_s}{m_l}\right)_0 \cdot \mu_{l0}. \qquad [3]$$

Una segunda determinación a la temperatura θ da la [2]; de donde, eliminando μ_{s0} mediante la [3], se obtiene:

$$\frac{1 + \alpha_s \theta}{1 + \alpha_l \theta} = \frac{\left(\frac{m_s}{m_l}\right)_0}{\left(\frac{m_s}{m_l}\right)_\theta},$$

que permite calcular α_s.

Es más frecuente en los sólidos determinar su *dilatación lineal*. Se mide la longitud l_0 a 0 °C de una barra del material que se estudia, así como el alargamiento $l_\theta - l_0$ producido al calentarla hasta la temperatura θ; el coeficiente de dilatación lineal medio entre 0 °C y θ es:

$$\frac{l_\theta - l_0}{l_0 \theta} = \lambda.$$

Una vez conocido λ se tiene, en general,

$$l = l_0 (1 + \lambda\theta). \qquad [4]$$

Análogamente,

$$\frac{l_{\theta_2} - l_{\theta_1}}{l_0 (\theta_2 - \theta_1)}$$

define el coeficiente de dilatación lineal medio entre θ_1 y θ_2.

En dimensiones se tiene:

$$[\lambda] = [\theta^{-1}] = [\alpha];$$

es decir, los coeficientes de dilatación cúbica y lineal son equidimensionales.

λ es del orden de 0,000 01 $^oC^{-1}$.

Frecuentemente puede experimentarse sobre patrones constituídos por barras de unos 100 cm de longitud; l_0 puede determinarse aproximadamente (§ 14); el alargamiento $l_\theta - l_0$ para un calentamiento de 100 °C es del orden de $1 \div 3$ mm por metro, según la naturaleza de la substancia que se estudia y puede determinarse con mucha precisión. Sirve muy bien el comparador (§ 24).

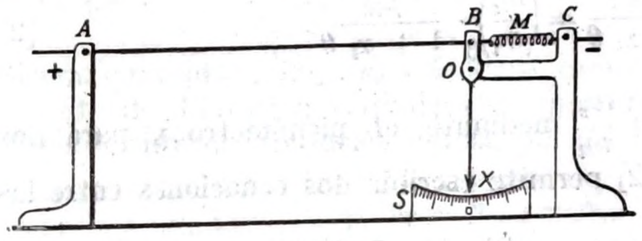


Fig. 641

Un experimento muy demostrativo sobre la dilatación es el de la figura 641. Un hilo fino AB de cromo-níquel, estirado por el resorte M entre A y C, se calienta hasta el rojo por medio de una corriente eléctrica. El calor produce el alargamiento de AB, y, bajo la acción del resorte M, se traslada al extremo B, moviendo el índice de palanca BX, que gira alrededor de O. En la escala S puede observarse, amplificada, la dilatación.

Se repite el experimento con un hilo de acero (diámetro aproximado, 1 mm). Lanzando la corriente y enrojeciendo el hilo hasta llegar a unos 900 °C, se interrumpe después la corriente. El enfriamiento dura algunos segundos, observándose durante el mismo que el índice se mueve de un modo irregular, incluso cambiando el sentido del movimiento.

En realidad, la longitud l de un hilo de acero no es función siempre creciente de la temperatura θ; la función $l = l(\theta)$ no es lineal, ni mucho menos, como requeriría la fórmula [4]. El experimento descrito se complica con la presencia del fenómeno de *recalentamiento* o desarrollo de calor análogo a un calor latente (§ 320), por lo cual la temperatura del hilo de acero que se está enfriando en el aire, no disminuye de un modo muy regular. Estas anomalías del acero se

presentan en el campo de temperaturas $770 \div 900$ °C y señalan variaciones de estructura del acero.

Las mediciones *dilatométricas* en las aleaciones, o sea el estudio de la fórmula de la función $l = l(\theta)$ y, en particular, de sus irregularidades, proporcionan uno de los criterios de la existencia de transformaciones de estructura de dichas aleaciones al variar su temperatura.

En los cuerpos homogéneos isótropos, admitida la validez de la [4], se deduce fácilmente que, con muy buena aproximación, es:

$$v = v_0 (1 + 3\lambda\theta) = v_0 (1 + \alpha_s \theta), \qquad \alpha_s = 3\lambda; \qquad [5]$$

es decir, el coeficiente de dilatación cúbica α_s de un sólido es el triplo del coeficiente de dilatación lineal. En efecto, un cubo de arista l_0 a 0 °C, supuesto isótropo, se convierte a θ °C en un cubo de arista l, Luego,

$$l^3 = l_0^3 (1 + \lambda\theta)^3$$

y despreciando, por su pequeñez, los términos en λ^2 y λ^3 resulta:

$$l^3 \doteq l_0^3 (1 + 3\lambda\theta), \quad \text{o sea,} \quad v \doteq v_0 (1 + 3\lambda\theta).$$

Análogamente se deduce que un recipiente, una botella de vidrio por ejemplo, se dilata como si estuviese lleno del material que forma sus paredes.

Los metales y las aleaciones pueden considerarse isótropos porque tienen estructura microcristalina; el vidrio y el cuarzo fundido son también sólidos isótropos.

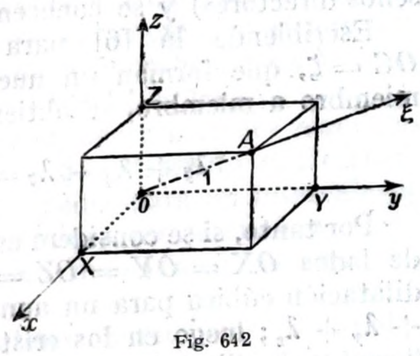


Fig. 642

Pero, rigurosamente, un «sólido» es un monocristal (§ 183), y en este caso es necesario determinar los coeficientes de dilatación en las diversas direcciones cristalográficas. Imagínense tres ejes cartesianos x, y, z unidos al cristal. Convendrá escogerlos en las posiciones más simétricas respecto al cristal; por ejemplo, en los sistemas regular, cuadrático y rómbico podrán ser los ejes cristalinos de referencia.

En general se tienen tres coeficientes de dilatación lineal diferentes λ_x, λ_y, λ_z, que pueden determinarse tallando barritas del cristal convenientemente orientadas para someterlas a mediciones de longitud en función de la temperatura, como se ha explicado en el caso de barras isótropas. Cualquier otra orientación ξ (fig. 642) viene determinada por un punto A a la distancia 1 del origen cuando el cristal se halla a 0 °C. Sea λ el coeficiente de dilatación lineal correspondiente a dicha orientación.

Demostremos que, conocidos λ_x, λ_y, λ_z, se puede calcular λ. En efecto, las coordenadas de A a 0 °C son cos $(x\xi)$, cos $(y\xi)$, cos $(z\xi)$, cosenos directores de ξ y también medidas respectivas de los segmentos OX, OY, OZ. Se tiene:

$$\cos^2(x\xi) + \cos^2(y\xi) + \cos^2(z\xi) = 1.$$

Al aumentar 1 °C la temperatura, se dilata el paralelepípedo OA y sus lados se convierten en:

$$\cos(x\xi)\cdot(1+\lambda_x); \qquad \cos(y\xi)\cdot(1+\lambda_y); \qquad \cos(z\xi)\cdot(1+\lambda_z).$$

La diagonal OA cambia ligeramente de orientación y su longitud se convierte en $1+\lambda$. Luego se tiene:

$$(1+\lambda)^2 = \cos^2(x\xi)\cdot(1+\lambda_x)^2 + \cos^2(y\xi)\cdot(1+\lambda_y)^2 + \cos^2(z\xi)\cdot(1+\lambda_z)^2.$$

Desarrollando, reduciendo y despreciando los cuadrados de los pequeños coeficientes de dilatación, se tiene:

$$\lambda = \lambda_x\cdot\cos^2(x\xi) + \lambda_y\cdot\cos^2(y\xi) + \lambda_z\cdot\cos^2(z\xi), \qquad [6]$$

que permite calcular λ cuando se da la dirección ξ (es decir, sus cosenos directores) y se conocen λ_x, λ_y, λ_z.

Escribiendo la [6] para tres direcciones $OA=\xi$, $OB=\eta$, $OC=\zeta$, que forman un nuevo triedro trirrectángulo, y sumando miembro a miembro, se obtiene:

$$\lambda_\xi + \lambda_\eta + \lambda_\zeta = \lambda_x + \lambda_y + \lambda_z = \text{const.}$$

Por tanto, si se considera en lugar del paralelepípedo OA, un cubo de lados $OX=OY=OZ=1$ a 0 °C, se deduce fácilmente que su dilatación cúbica para un aumento de temperatura de 1 °C es $\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z$; luego en los cristales es constante la suma de los coeficientes de dilatación lineal según tres direcciones mutuamente perpendiculares, y esta suma da el coeficiente de dilatación cúbica α_s del cristal:

$$\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z = \text{const.} = \alpha_s \qquad [7]$$

Por ejemplo, en el aragonito, rómbico, según los tres ejes cristalinos, se tiene, a la temperatura ordinaria:

$$\lambda_x = 0{,}000\,034\,6\ ^\circ\text{C}^{-1},\ \lambda_y = 0{,}000\,017\,2\ ^\circ\text{C}^{-1},\ \lambda_z = 0{,}000\,010\,16\ ^\circ\text{C}^{-1};$$

en el cuarzo, romboédrico, representando por x el eje de simetría ternaria, se tiene:

$$\lambda_x = 0{,}000\,007\,16\ ^\circ\text{C}^{-1},\quad \lambda_y = \lambda_z = 0{,}000\,013\,25\ ^\circ\text{C}^{-1};$$

y en la fluorina, cúbica, es:

$$\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = 0{,}000\,019\,1\ ^\circ\text{C}^{-1}.$$

En algunos casos rarísimos se han observado valores negativos de alguno de los coeficientes de dilatación; por ejemplo, en la calcita, romboédrica, indicando por x el eje de simetría ternaria, es:

$$\lambda_x = 0{,}000\,025\,6\ ^\circ\text{C}^{-1},\quad \lambda_y = \lambda_z = -\,0{,}000\,005\,5\ ^\circ\text{C}^{-1}.$$

Son ya conocidos por física elemental los muchos casos en que se tiene en cuenta la dilatación de los sólidos y los diversos aparatos basados en la misma: colocación de los carriles, de los hilos metálicos para las líneas eléctricas aéreas (de energía, telégrafo, teléfono), compensación térmica de los volantes y péndulos de reloj, avisadores de incendio y reguladores de temperatura fundados en la propiedad de las láminas bimetálicas ya explicada (fig. 631), colocación en caliente de las llantas de las ruedas y de los tirantes metálicos en las paredes en peligro, etc.

No puede efectuarse ninguna medición precisa de longitudes sin tener en cuenta la temperatura. Un metro patrón puede alcanzar fácilmente una precisión de 0,01 mm; pero para que esta precisión no sea ilusoria, es preciso que, si es de acero, mientras se emplea, su temperatura no llegue a diferir en 1 °C de la de calibrado. No siendo así, se tendrá que efectuar una corrección de temperatura basada en el coeficiente de dilatación del acero ($\lambda \approx 0{,}000\,01\ ^\circ\text{C}^{-1}$).

Los coeficientes de dilatación que se encuentran en los manuales técnicos se refieren a sólidos isótropos o de estructura microcristalina y son los coeficientes de dilatación media para un intervalo de temperatura de algunos centenares de grados por encima de 0 °C. En general, el coeficiente de dilatación real aumenta con la temperatura.

El aluminio es uno de los metales puros más dilatables ($\lambda = 0{,}000\,027\ ^\circ\text{C}^{-1}$); el platino es de los menos dilatables ($\lambda = 0{,}000\,009\ ^\circ\text{C}^{-1}$). En el vidrio se tiene aproximadamente el mismo valor $\lambda = 0{,}000\,009\ ^\circ\text{C}^{-1}$. Por esto, y por la fuerte adherencia entre los dos, el platino es indicadísimo para las soldaduras con vidrio, permitiendo así el paso de la electricidad a través de las paredes del vidrio, por ejemplo, en los tubos de vacío. Sin embargo, actualmente lo han sustituído completamente algunas aleaciones muy económicas, en la fabricación de lámparas eléctricas, válvulas termoelectrónicas, etc. Entre estas aleaciones se encuentra la *platinita* (véase el final de este apartado), que se halla en el comercio en hilos ramosos (hilo Fink o hilo *dumet*), con lo cual su adherencia con el vidrio es mayor.

De todos modos, un simple hilo de hierro recubierto por una envoltura de cobre de espesor conveniente puede también constituir

un conjunto cuyo coeficiente de dilatación medio sea igual al del vidrio, y puede, a su vez, sustituir a la platinita.

El vidrio de cuarzo (§ 11, nota) tiene un coeficiente de dilatación mínimo $\lambda = 0{,}000\,000\,6\ ^oC^{-1}$, de donde su empleo para la construcción de patrones de longitud (§ 22) y de recipientes irrompibles bajo la acción de variaciones bruscas de temperatura. Un matracito de vidrio de cuarzo calentado al rojo en un mechero Bunsen, ¡puede meterse impunemente en el agua!

Menos resistente, pero todavía más adecuado para fabricar vasijas de cocina que han de emplearse en contacto con la llama de los hornillos de gas, es el vidrio *pirex* (80,9 % de SiO_2; 12,6 % de B_2O_3; 4,4 % de Na_2O; 1,8 % de Al_2O_3; 0,3 % de OCa); su coeficiente de dilatación es $\lambda = 0{,}000\,003\,5\ ^oC^{-1}$.

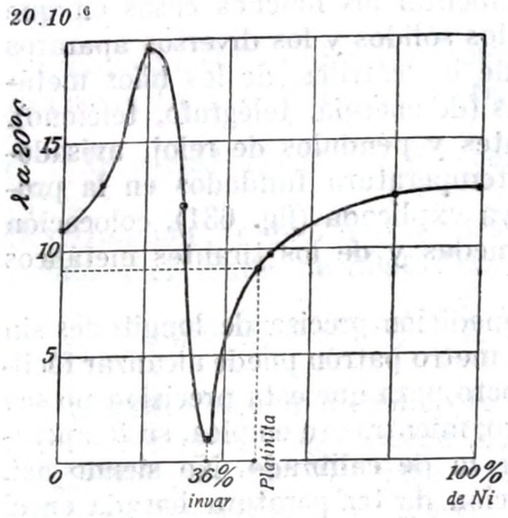


Fig. 643

Pélabon ha utilizado la débil dilatación del vidrio de cuarzo para producir corrimientos pequeñísimos que pueden calcularse fácilmente; se calienta una barrita de vidrio de cuarzo, fija por un cxtremo a lo largo de un centímetro de su longitud, con lo que es fácil deducir lo que se traslada el extremo libre de la misma: para un aumento de temperatura de 0,1 °C, el corrimiento es $0{,}000\,000\,6 \cdot 0{,}1$ centímetros $= 6 \cdot 10^{-8}$ cm (¡!).

Finalmente, la dilatabilidad de las aleaciones es función de su composición. Es interesantísimo el comportamiento de los aceros al níquel. En la figura 643 se indica la curva que da el valor medio de λ en torno a 20 °C en función del tanto por ciento de níquel de la aleación. Con un 48% de níquel se tiene $\lambda = 0{,}000\,009\ ^oC^{-1}$ como para el platino; la aleación se llama *platinita* (1); con un 36 % de níquel la aleación presenta un mínimo de dilatabilidad, $\lambda = 0{,}000\,000\,6\ ^oC^{-1}$ llamándose *invar* (Guillaume). Las proporciones de carbono en estos aceros son $0{,}3 \div 0{,}5$ % en el invar y aproximadamente 0,15 % en la platinita.

Se han llamado *superinvar* (Masumoto) unas aleaciones ternarias (63,5 % de Fe, 32,5 % de Ni, 4,0 % de Co, 36,5 % de Fe, 54,0 % de Co, 9,5 % de Cr) en las cuales λ, variable con la temperatura y con la composición de la aleación, no alcanza el valor $0{,}000\,000\,1\ ^oC^{-1}$

(1) Pero la longitud es función del tiempo y las deformaciones subsiguientes prosiguen durante muchos meses. Añadiendo un poco de cromo y mediante un tratamiento térmico conveniente se reduce el defecto hasta valores despreciables. Se pulimenta bien, y es prácticamente inoxidable; lo mismo ocurre con el invar.

y, pasando por un valor nulo, desciende hasta pequeñísimos valores negativos.

§ **309. Gases reales. Isotermas.** El estudio de los gases reales estriba asimismo en la determinación del haz de las isotermas. Se comprime en un termostato una masa dada de gas y se determina su presión en función del volumen, a temperatura constante. Se repite la determinación a diferentes temperaturas. El conjunto de los resultados se representa en un gráfico (fig. 644), en el que el haz de isotermas aparece como un haz de curvas del plano (v, p). Si la representación se efectúa en el espacio (fig. 645), el haz de las isotermas es un haz de curvas, cada una de las cuales está contenida en el plano $\Theta = \text{const}$ a que ella se refiere. Si este haz de curvas en el espacio es suficientemente espeso, representa bien la forma de la superficie $F(v, p, \Theta) = 0$.

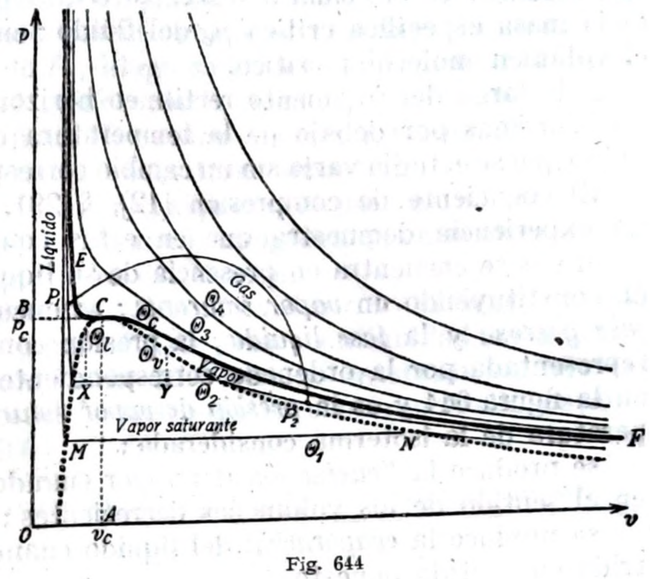


Fig. 644

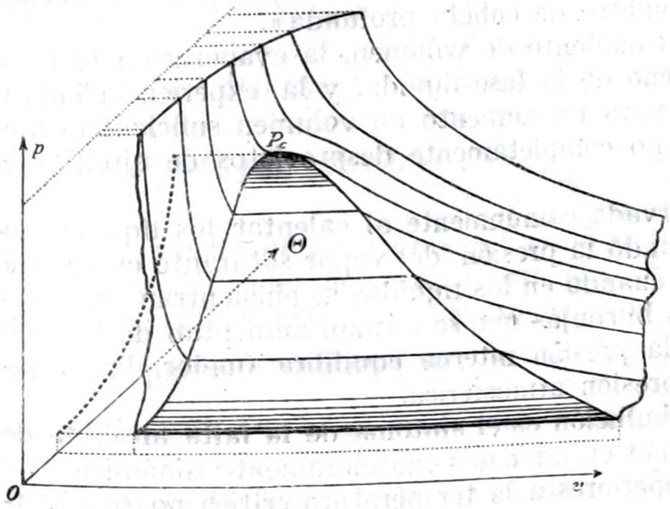


Fig. 645

En el plano (v, p) (fig. 644), las isotermas se dividen en dos clases:

isotermas que contienen un fragmento rectilíneo horizontal (la temperatura absoluta Θ_1, Θ_2, ... de la isoterma es inferior a una *temperatura crítica* Θ_c);

isotermas sin fragmento rectilíneo horizontal (la tempeatura Θ_3, Θ_4, ... de la isoterma es superior a dicha temperatura crítica Θ_c). La isoterma correspondiente a la temperatura crítica Θ_c *(isoter-*

ma crítica) presenta un punto de inflexión C con tangente horizontal: C es el *punto crítico*. La presión $AC = p_c$ se llama *presión crítica*. El volumen BC se llama *volumen crítico* y sólo tiene interés cuando la masa de gas considerada es la unidad, pues entonces dicho volumen es el *volumen específico crítico* v_c y su valor recíproco es la masa específica crítica μ_c del flúido; en el segundo caso v es el volumen molecular crítico.

A lo largo del fragmento rectilíneo horizontal que se observa en las isotermas por debajo de la temperatura crítica, el volumen del flúido que se estudia varía sin un cambio correspondiente en la presión.

El coeficiente de compresión [12], § 291, del flúido es infinito. La experiencia demuestra que en estas condiciones:

el gas se encuentra en presencia de su líquido y en equilibrio con él, constituyendo un *vapor saturante;* se encuentran en presencia la *fase gaseosa* y la *fase líquida;* la presión común a dichas fases está representada por la ordenada correspondiente al trayecto horizontal en la figura 644 y es la *presión de vapor saturante* relativa a la temperatura de la isoterma considerada;

se produce la *licuefacción* del vapor cuando se recorre la isoterma en el sentido de los volúmenes decrecientes;

se produce la *evaporación* del líquido cuando la isoterma es recorrida en sentido opuesto.

El tanto por ciento de substancia que existe en la fase líquida es tanto mayor cuanto más nos aproximamos a los puntos de la rama MC.

Nos hallamos en las condiciones del conocido experimento elemental llamado del «barómetro de cubeta profunda».

Cuando, durante el aumento de volumen, la evaporación se produce también en el seno de la fase líquida, y la experiencia indica que esto sólo sucede para un aumento de volumen suficientemente brusco y en líquidos no completamente desprovistos de aire [1], se tiene *ebullición*.

La ebullición observada comúnmente al calentar los líquidos en el aire se produce cuando la presión del vapor saturante es igual a la presión del aire, y cuando en los líquidos se encuentran gases disueltos. Entonces, las burbujas que se forman aumentan de tamaño rápidamente porque la presión interna equilibra (mejor dicho, supera ligeramente) la presión atmosférica.

En todo caso, la ebullición es el síntoma de la falta absoluta de equilibrio en el sistema: es un fenómeno claramente dinámico.

A temperaturas superiores a la temperatura crítica no se observa indicio de licuefacción en el flúido que se estudia, y falta el trozo horizontal de la isoterma.

Según que el punto representativo del estado de la masa flúida considerada se encuentre en una de las cuatro regiones en que di-

[1] O, más generalmente, no completamente *desgasados*.

viden al plano (v, p) las curvas MCN y ECF, el flúido es *gas, vapor no saturante (recalentado), vapor saturante* (el sistema ya no es homogéneo por encontrarse en presencia la fase líquida y la fase gaseosa) o *líquido*.

Las isotermas consideradas reproducen, pues, las propiedades del flúido, tanto en el estado gaseoso como en el estado líquido.

Un líquido en el estado P_1, al que se le hace experimentar la transformación indicada en el gráfico por la línea P_1 *gas* P_2, viene a encontrarse en un estado final P_2 gaseoso sin que ninguna de las variables (p, v, Θ) interesadas en la transformación haya señalado, con un comportamiento singular cualquiera, el paso de un estado de agregación al otro y sin que ninguna heterogeneidad en la masa flúida haya señalado una evaporación del líquido.

En este sentido se dice que hay *continuidad entre el estado líquido y el estado gaseoso*. En particular, se tiene continuidad en el paso desde la región del líquido a la del vapor no saturante cuando la transformación relativa a dicho paso sigue el contorno MCN, pasando así por el punto crítico C.

Los valores de las *constantes críticas* Θ_c, p_c, $\frac{1}{\mu_c} = v_c$ (temperatura, presión y volumen específico) varían de un gas a otro.

Por ejemplo:

en el H_2 $\theta_c = -240$; $p_c = 12{,}8$; $\mu_c = \frac{1}{v_c} = 0{,}0310$

en el O_2 $\theta_c = -118{,}8$; $p_c = 49{,}7$; $\mu_c = \frac{1}{v_c} = 0{,}430$

en el CO_2 $\theta_c = +31{,}1$; $p_c = 73{,}0$; $\mu_c = \frac{1}{v_c} = 0{,}460$

en el H_2O $\theta_c = +374{,}1$; $p_c = 218{,}6$; $\mu_c = \frac{1}{v_c} = 0{,}324$.

θ_c en °C

p_c en at $\approx 10 \frac{\text{newton}}{\text{cm}^2}$

μ_c en $\frac{g_m}{cm^3}$

En los gráficos de las figuras 644 y 645 se toman, en los diversos gases, como unidades de medida para v, p, Θ las correspondientes constantes críticas, esto es, se determina cada estado del flúido mediante un punto de coordenadas $\frac{v}{v_c} = \mathfrak{v}$, $\frac{p}{p_c} = \mathfrak{p}$, $\frac{\Theta}{\Theta_c} = \mathfrak{T}$ en un espacio cartesiano $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{T}$. El punto crítico será, para cualquier gas, el punto 1, 1, 1; y $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{T}$ se llaman variables *reducidas*. Se dice también que v, p, Θ han sido representadas gráficamente en la *escala reducida*.

La experiencia indica que en este caso la misma superficie $F(\mathfrak{v}, \mathfrak{p}, \mathfrak{T}) = 0$ (fig. 645) (o el mismo haz de curvas, fig. 644) representa, con discreta aproximación, la ecuación de estado (o el haz de isotermas) de la unidad de masa de cualquier gas real *(ley de los estados correspondientes)*.

Por tanto, una vez determinado el haz de isotermas correspondiente a un gas, es posible trazar el haz de curvas de la figura 644 con la escala reducida, y estas curvas servirán, por lo menos aproximadamente, para cualquier otro gas, con tal que se conozcan sus constantes críticas.

Fragmentos bastante largos de las isotermas correspondientes a temperaturas elevadas, y fragmentos de isotermas correspondientes a presiones suficientemente pequeñas, se pueden confundir con ramas de hipérbolas equiláteras que tienen los ejes como asíntotas; esto indica que es válida, aproximadamente, la ley de BOYLE.

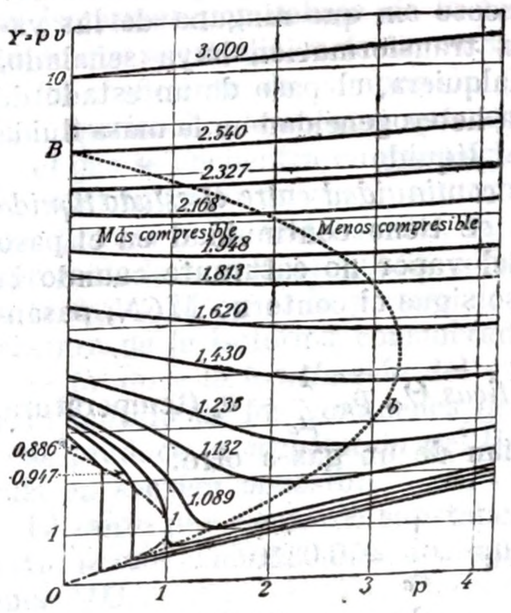


Fig. 646

Con el objeto de ver más fácilmente las desviaciones de un flúido real con respecto al comportamiento de un gas perfecto, es decir, las desviaciones de la ley de BOYLE, sirve mejor el haz de las isotermas $Y = pv = f(p)$. También esta vez un mismo haz sirve suficientemente para cualquier flúido, con tal de que se haya trazado en la escala reducida (fig. 646).

Para un gas perfecto ($p \cdot v =$ = const.), este haz estaría constituído por rectas paralelas al eje de las presiones. Para los gases reales, la isoterma crítica tiene ahora un punto de inflexión con tangente vertical, y son verticales los pedazos de isoterma correspondientes a la licuefacción (vapor saturante; es p = const. durante la licuefacción isotérmica); en los estados representados por los puntos de dichas ramas verticales, la fase gaseosa y la fase líquida del cuerpo se encuentran en presencia, en equilibrio una con otra.

Por encima de la temperatura crítica y para cualquier isoterma hasta cierta temperatura máxima, se tiene un punto de tangente horizontal *(punto de Boyle)*; para un intervalo de presiones alrededor de la que corresponde a este punto, el gas se comprime según la ley de BOYLE con muy buena aproximación.

La curva *b*, lugar de los puntos de BOYLE, divide los estados en los cuales el flúido es más compresible de aquellos en que el flúido es menos compresible de lo que exige esta ley.

A la temperatura ordinaria, todos los gases (salvo el hidrógeno, el helio y el neón) presentan isotermas que con un mínimo de la función $Y = pv = f(p)$; es decir, los gases, al aumentar esta presión son primeramente más compresibles, y después menos compresibles de lo que exige la ley de BOYLE. El neón, el helio y el hidrógeno, a la

temperatura ordinaria, son siempre menos compresibles de lo que corresponde a dicha ley; estos tres gases sólo presentan el comportamiento de los otros gases a temperaturas bajísimas: Debajo de los 19 °K en el caso del helio, de los 106 °K en el del hidrógeno, y de los 134 °K en el del neón.

310. Determinación de las constantes críticas. A causa de la ley de los estados correspondientes, la determinación de las constantes críticas toma una importancia fundamental.

1.º **Temperatura crítica.** Demos una idea sobre el método de los *tubos de* NATTERER. Un grueso tubo de vidrio, casi capilar (fig. 647), se llena con el flúido que se estudia, y gracias a la baja temperatura Θ a que se mantiene el tubo mientras se le llena, el flúido se condensa. El tubo, cerrado a la llama (1), contiene así en un volumen v, prácticamente constante, una porción líquida *(fase líquida)* y otra formada por vapor saturante *(fase gaseosa)*, a la temperatura inicial Θ. El estado inicial del flúido viene representado por un punto X en el campo «vapor saturante» (fig. 644).

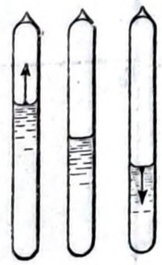


Fig. 647

El tubito así preparado se calienta lenta y uniformemente. El estado del gas varía: el volumen permanece constante, pero la temperatura y la presión crecen; la transformación viene representada por un segmento vertical en el diagrama de la figura 644. Supongamos que durante este calentamiento se ve correr el menisco que separa las fases líquida y gaseosa, indicando un aumento de volumen de la fase líquida; entonces, a cierta temperatura Θ_l el líquido acaba por ocupar todo el tubito y el menisco desaparece. Puede deducirse que la transformación se ha efectuado a lo largo de un segmento vertical situado *a la izquierda de AC*; Θ_l, determinada experimentalmente de este modo, es una temperatura inferior a la crítica.

Se repite el experimento preparando un segundo tubito con la misma temperatura inicial Θ, pero con una cantidad menor de fase líquida. Se verá correr el menisco indicando que, al aumentar la temperatura, la fase gaseosa acaba por ocupar todo el tubito, y podrá deducirse que la transformación se realiza a lo largo de un segmento $Y\Theta_v$ vertical, situado a la derecha de AC (fig. 644), y también la nueva temperatura Θ_v, de desaparición del menisco, es inferior a la temperatura crítica.

Se repite varias veces el experimento hasta determinar bastante bien el límite superior común de los valores Θ_l y Θ_v; este límite es la temperatura crítica Θ_c.

(1) Esto sólo es posible cuando la presión del flúido dentro del tubito es más pequeña que la presión exterior, que generalmente es la atmosférica. Luego debe mantenerse el tubito a una temperatura inferior a la de ebullición del flúido a la presión atmosférica; por ejemplo, en el caso del oxígeno, la temperatura debe ser inferior a — 183 °C.

Por tanto, una vez determinado el haz de isotermas correspondiente a un gas, es posible trazar el haz de curvas de la figura 644 con la escala reducida, y estas curvas servirán, por lo menos aproximadamente, para cualquier otro gas, con tal que se conozcan sus constantes críticas.

Fragmentos bastante largos de las isotermas correspondientes a temperaturas elevadas, y fragmentos de isotermas correspondientes a presiones suficientemente pequeñas, se pueden confundir con ramas de hipérbolas equiláteras que tienen los ejes como asíntotas; esto indica que es válida, aproximadamente, la ley de BOYLE.

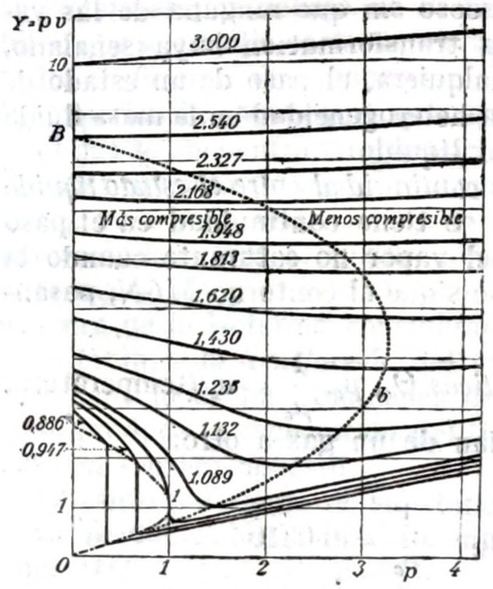


Fig. 646

Con el objeto de ver más fácilmente las desviaciones de un flúido real con respecto al comportamiento de un gas perfecto, es decir, las desviaciones de la ley de BOYLE, sirve mejor el haz de las isotermas $Y = pv = f(p)$. También esta vez un mismo haz sirve suficientemente para cualquier flúido, con tal de que se haya trazado en la escala reducida (fig. 646).

Para un gas perfecto ($p \cdot v =$ = const.), este haz estaría constituído por rectas paralelas al eje de las presiones. Para los gases reales, la isoterma crítica tiene ahora un punto de inflexión con tangente vertical, y son verticales los pedazos de isoterma correspondientes a la licuefacción (vapor saturante; es p = const. durante la licuefacción isotérmica); en los estados representados por los puntos de dichas ramas verticales, la fase gaseosa y la fase líquida del cuerpo se encuentran en presencia, en equilibrio una con otra.

Por encima de la temperatura crítica y para cualquier isoterma hasta cierta temperatura máxima, se tiene un punto de tangente horizontal *(punto de Boyle)*; para un intervalo de presiones alrededor de la que corresponde a este punto, el gas se comprime según la ley de BOYLE con muy buena aproximación.

La curva *b*, lugar de los puntos de BOYLE, divide los estados en los cuales el flúido es más compresible de aquellos en que el flúido es menos compresible de lo que exige esta ley.

A la temperatura ordinaria, todos los gases (salvo el hidrógeno, el helio y el neón) presentan isotermas que con un mínimo de la función $Y = pv = f(p)$; es decir, los gases, al aumentar esta presión son primeramente más compresibles, y después menos compresibles de lo que exige la ley de BOYLE. El neón, el helio y el hidrógeno, a la

temperatura ordinaria, son siempre menos compresibles de lo que corresponde a dicha ley; estos tres gases sólo presentan el comportamiento de los otros gases a temperaturas bajísimas: Debajo de los 19 °K en el caso del helio, de los 106 °K en el del hidrógeno, y de los 134 °K en el del neón.

310. Determinación de las constantes críticas. A causa de la ley de los estados correspondientes, la determinación de las constantes críticas toma una importancia fundamental.

1.º **Temperatura crítica.** Demos una idea sobre el método de los *tubos de* NATTERER. Un grueso tubo de vidrio, casi capilar (fig. 647), se llena con el flúido que se estudia, y gracias a la baja temperatura Θ a que se mantiene el tubo mientras se le llena, el flúido se condensa. El tubo, cerrado a la llama (1), contiene así en un volumen v, prácticamente constante, una porción líquida *(fase líquida)* y otra formada por vapor saturante *(fase gaseosa)*, a la temperatura inicial Θ. El estado inicial del flúido viene representado por un punto X en el campo «vapor saturante» (fig. 644).

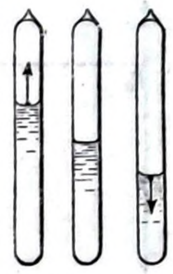


Fig. 647

El tubito así preparado se calienta lenta y uniformemente. El estado del gas varía: el volumen permanece constante, pero la temperatura y la presión crecen; la transformación viene representada por un segmento vertical en el diagrama de la figura 644. Supongamos que durante este calentamiento se ve correr el menisco que separa las fases líquida y gaseosa, indicando un aumento de volumen de la fase líquida; entonces, a cierta temperatura Θ_l el líquido acaba por ocupar todo el tubito y el menisco desaparece. Puede deducirse que la transformación se ha efectuado a lo largo de un segmento vertical situado *a la izquierda de AC*; Θ_l, determinada experimentalmente de este modo, es una temperatura inferior a la crítica.

Se repite el experimento preparando un segundo tubito con la misma temperatura inicial Θ, pero con una cantidad menor de fase líquida. Se verá correr el menisco indicando que, al aumentar la temperatura, la fase gaseosa acaba por ocupar todo el tubito, y podrá deducirse que la transformación se realiza a lo largo de un segmento $Y\Theta_v$ vertical, situado a la derecha de AC (fig. 644), y también la nueva temperatura Θ_v, de desaparición del menisco, es inferior a la temperatura crítica.

Se repite varias veces el experimento hasta determinar bastante bien el límite superior común de los valores Θ_l y Θ_v; este límite es la temperatura crítica Θ_c.

(1) Esto sólo es posible cuando la presión del flúido dentro del tubito es más pequeña que la presión exterior, que generalmente es la atmosférica. Luego debe mantenerse el tubito a una temperatura inferior a la de ebullición del flúido a la presión atmosférica; por ejemplo, en el caso del oxígeno, la temperatura debe ser inferior a — 183 °C.

Un tubo de NATTERER cuyo contenido estuviese tan acertado que la transformación se realizase según AC, daría como temperatura de desaparición del menisco la temperatura Θ_c, En este tubo, en lugar de correr el menisco hasta desaparecer, porque una de las fases hubiese ocupado todo el tubo, se corre ligeramente tendiendo a ocupar el punto medio del tubo (mitad del volumen *fase líquida* y la otra mitad fase *vapor saturante*) y entonces se detiene y desaparece. Pocos momentos antes de desaparecer, es decir, casi en la temperatura crítica, este menisco se presenta extraordinariamente movible, como en equilibrio inestable, y el flúido aparece frecuentemente turbio *(opalescencia crítica)*. Entonces, la determinación de Θ_c se efectúa con mucha precisión, hasta más allá de la décima de grado.

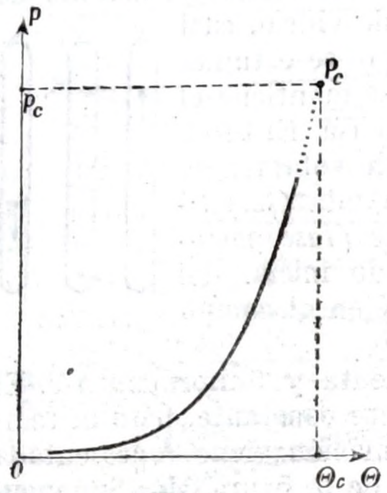


Fig. 648

2.º **Presión crítica.** Para determinar la presión de vapor saturante p_s (presión máxima de vapor) del flúido L_1 que se estudia, en función de la temperatura Θ del termostato, sirve un aparato no muy distinto del que representa la figura 632.

La curva $p_s = p_s(\Theta)$ tiene la misma forma, indicada en la figura 648, para todos los flúidos. Los experimentos se prosiguen hasta la temperatura más alta posible mientras el vapor permanezca saturante, es decir, mientras se vean en presencia las fases líquida y gaseosa. Naturalmente, esta temperatura es inferior a la temperatura crítica y se extrapola la curva hasta encontrar la recta $\Theta_c = \text{const}$. Se obtiene así p_c.

3.º **Masa específica crítica.** Se determina la masa m de flúido contenido en un tubo de Natterer que dé la opalescencia crítica, así como el volumen v de dicho tubo. La masa específica crítica $\mu_c = \frac{1}{v_c}$ vendrá determinada por

$$\mu_c = \frac{m}{v}.$$

Por brevedad pasaremos por alto otros métodos más precisos para determinar μ_c, pero que requieren la determinación de la masa específica de los vapores a diversas temperaturas.

§ 311. Ecuación de estado de los flúidos reales. Se ha intentado modificar la ecuación de estado de los gases perfectos para que pueda representar las propiedades de los gases reales.

La más conocida de las expresiones de este tipo es la *ecuación de* VAN DER WAALS, que para el caso de n moléculas-gramo, se escribe

$$\left(p + \frac{n^2 a}{v^2}\right)\cdot(v - nb) = n \cdot R\Theta, \qquad [1]$$

en donde a y b son dos constantes características del gas real. Se tiene :

$$[a] = \frac{[p]\,[v]^2}{(\text{mol-g})^2} = \frac{[l^5 \cdot m \cdot t^{-2}]}{(\text{mol-g})^2}$$

$$[b] = \frac{[v]}{\text{mol-g}} = \frac{[l^3]}{\text{mol-g}}$$

R es la misma constante de los gases del § 295.
Para una molécula-gramo, la [1] se reduce a :

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)\cdot(v - b) = R\Theta. \qquad [2]$$

En la teoría cinética de los gases (§ 373) se encontrará la justificación de los dos términos correctivos $+\frac{n^2 a}{v^2}$ y $-nb$, relativos a la presión y al volumen respectivamente, que sirven para pasar de la ecuación de estado de los gases perfectos a la [1].

La forma de las isotermas de VAN DER WAALS aparece en la figura 649.

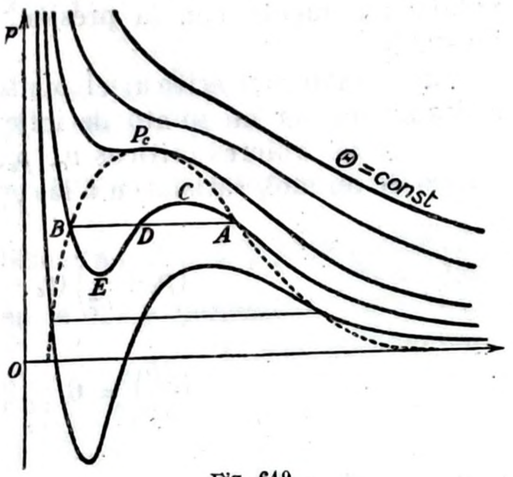


Fig. 649

El fragmento horizontal que en las temperaturas inferiores a la crítica corresponde al vapor saturado, es sustituído por una curva seguida.

El trayecto AC corresponde a vapor comprimido más allá de la saturación, sin que se inicie la condensación *(sobresaturación)*. Se realiza experimentalmente esta condición cuando faltan en el vapor sobrecomprimido núcleos de condensación, o sea, iones (es decir, partículas electrizadas en suspensión en el vapor o partículas activas química o higroscópicamente. He aquí, por ejemplo, cómo se procede :

A_1 (fig. 650) es un recipiente lleno de aire saturado de vapor de agua ; bajando A_3 mientras está cerrada la llave R, se puede hacer que, abriendo R, el aire de A_1 se expansione hacia A_2. La expansión va acompañada de enfriamiento, por lo que, en el depósito A_1,

se forma una niebla debida a la condensación del vapor de agua. Al caer la niebla elimina del ambiente los núcleos de condensación, y por ello, si se repite el experimento muchas veces, se llega por fin a producir la expansión y, por tanto, el enfriamiento del vapor saturante, sin que se produzca la condensación correspondiente.

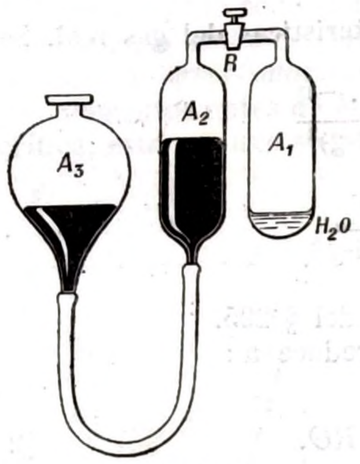


Fig. 650

También puede realizarse la rama *BE* (fig. 649), y en las isotermas más frías, ésta desciende por debajo del eje de los volúmenes: un corto barómetro de sifón, de unos 70 mm de altura, no tiene cámara barométrica, porque toda la rama cerrada está todavía llena de mercurio. Efectuando el vacío por la rama abierta se logra que el mercurio, por adherencia, permanezca «pegado» a las paredes del tubo, en donde debería formarse la cámara barométrica, y de este modo se encuentra en un estado de tracción a consecuencia de su peso. El experimento puede también efectuarse con otros líquidos. La rama *EDC*, en la que el volumen aumenta con la presión, representa estados de equilibrio inestable.

En la isoterma crítica, el punto crítico P_c (fig. 649) está caracterizado por ser un punto de inflexión de tangente horizontal.

Luego los valores críticos v_c, p_c, Θ_c, en donde v_c es el volumen crítico de un mol, satisfacen a las ecuaciones:

$$\left(p_c + \frac{a}{v_c^2}\right)(v_c - b) = R\Theta_c$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_c = 0 \qquad \left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right)_c = 0,$$

o sea, efectuando las derivaciones de la [1] y resolviendo respecto a v_c, p_c, Θ_c:

$$v_c = 3b\,; \qquad \Theta_c = \frac{8}{27}\frac{a}{Rb}\,; \qquad p_c = \frac{1}{27}\frac{a}{b^2} \qquad [3]$$

de donde:

$$a = 3p_c v_c^2\,; \qquad b = \frac{v_c}{3}\,; \qquad R = \frac{8}{3}\frac{p_c v_c}{\Theta_c}\,. \qquad [4]$$

Estas fórmulas permiten obtener las constantes R, a, b de la ecuación de Van der Waals en función de las constantes críticas (repetimos que v_c es el volumen crítico de una molécula-gramo).

Por ejemplo, para el óxigeno:

$$a = 135\cdot 10^{10}\,\frac{\text{cm}^5\cdot \text{g}_\text{m}\cdot\text{seg}^{-2}}{(\text{mol-g})^2} = 135\cdot 10^{10}\,\frac{\text{erg}\cdot\text{cm}^3}{(\text{mol-g})^2}\,, \qquad b = 38{,}1\,\frac{\text{cm}^3}{\text{mol-g}}\,.$$

Pero es más cómodo dar los valores de a y de b tomando como unidad de presión la atmósfera y como unidad de volumen el de un mol en condiciones normales, o sea, el volumen de 22 415 cm³; a y b toman entonces los siguientes valores:

	N_2	O_2	H_2	CO_2	H_2O	
$a =$	0,002 7	0,002 7	0,000 48	0,007 2	0,011	} [5]
$b =$	0,001 7	0,001 4	0,001 2	0,001 9	0,001 36 ;	} [5]

y como en tal caso p y v toman en la [2], en condiciones normales y para una molécula-gramo, el valor numérico 1, los valores [5] nos dan sin más una idea sobre el valor relativo de las correcciones que han de practicarse en p y en v cuando se considera un gas real en vez de un gas perfecto.

Téngase presente que con las unidades utilizadas para la [5], la constante R tiene el valor $p_0 v_0 \alpha = 1\cdot 1\cdot \alpha = \frac{1}{273}$.

Las [3] y [4] también dan una idea del grado de aproximación de la ecuación [2]. La constante R, deducida de las constantes críticas, varía entre $9{,}8\cdot 10^7\ \frac{\text{erg}}{{}^\circ\text{C}\cdot\text{mol-g}}$ para el hidrógeno y $4{,}75\cdot 10^7\ \frac{\text{erg}}{{}^\circ\text{C}\cdot\text{mol-g}}$ para el agua, mientras sabemos que $R = 8{,}314\cdot 10^7\ \frac{\text{erg}}{{}^\circ\text{C}\cdot\text{mol-g}}$.

Introduciendo los valores [4] en la [2] y poniendo

$$\frac{v}{v_c} = \mathfrak{v}\,; \qquad \frac{p}{p_c} = \mathfrak{p}\,; \qquad \frac{\Theta}{\Theta_c} = \mathfrak{T},$$

es decir, empleando la escala reducida, la ecuación de Van der Waals para una molécula-gramo se convierte en:

$$\left(\mathfrak{p} + \frac{3}{\mathfrak{v}^2}\right)\cdot\left(\mathfrak{v} - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}\,\mathfrak{T}, \qquad [6]$$

la cual no contiene ninguna constante característica del flúido considerado, de modo que esta *ecuación reducida de* Van der Waals obedece a la ley de los estados correspondientes.

En realidad, se demuestra que obedecería a esta ley cualquier ecuación de estado que sólo contuviese dos constantes características del gas real, además de la constante R de los gases, la cual, en

último análisis, es una constante proporcional a la masa del flúido considerado.

Una ecuación de estado con tan pocas constantes no puede representar más que aproximadamente las propiedades de los flúidos reales, y la ecuación de VAN DER WAALS es ya de las más acertadas. De conformidad con esto, la ley de los estados correspondientes no puede ser más que aproximada.

§ 312. Solidificación, fusión y sublimación. El haz de isotermas representado en las figuras 644 y 645 se ha limitado al campo de las fases líquida y gaseosa de un cuerpo puro.

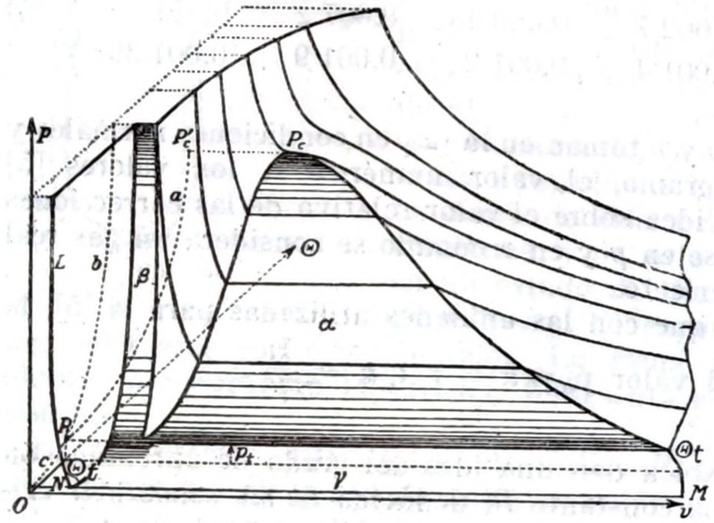


Fig. 651

Dicho haz puede extenderse y comprender también la fase sólida y los estados de equilibrio de ésta con las fases flúidas.

Supongamos, para mayor sencillez, que no exista más que una fase sólida, es decir, que no existan varias formas *alotrópicas*, como sucede a menudo. Por ejemplo, el azufre se presenta en dos formas: monoclínico y rómbico; el selenio en dos, por lo menos: gris metálico y rojo; etc. Supongamos, además, que el cuerpo se contrae durante la solidificación (como es el caso corriente).

El haz de isotermas da origen a una representación gráfica que conviene ver en el espacio v, Θ, p (fig. 651); las secciones de la superficie $p = p\ (v, \Theta)$ con los planos $\Theta = \text{const.}$ dan el haz de isotermas del cuerpo puro, y en particular las ramas ya indicadas en las figuras 644 y 645 relativas a las fases líquida y gaseosa.

A cada temperatura (por lo menos en cierto intervalo de valores) se puede obtener la solidificación de la fase líquida cuando se aplica una presión suficiente.

La temperatura de fusión es función de la presión y esta función es creciente en los cuerpos que se contraen por solidificación.

La *temperatura de fusión* de que se habla corrientemente, es la que corresponde a la presión normal de 1 atmósfera.

La fusión o la solidificación, en cada isoterma, vienen indicadas por una rama horizontal, lo mismo que la licuefacción.

Los puntos de dichas ramas horizontales corresponden a estados del sistema en los que pueden coexistir en equilibrio, a la temperatura considerada, las fases líquida y sólida.

Enfriemos con precaución un líquido en ausencia de gérmenes cristalinos de la fase sólida correspondiente; por ejemplo, enfriemos agua por debajo de 0 °C en ausencia de pedacitos de hielo. Sucede a menudo que puede sobrepasarse la temperatura de solidificación sin que ésta se efectúe. Se dice que el líquido está *sobrefundido*, y el fenómeno se llama *sobrefusión*. En estas condiciones, el líquido se encuentra en un estado de equilibrio que sólo es estable hasta que una causa cualquiera (un gérmen cristalino del sólido o de otro cuerpo isomorfo con él, o también un choque brusco, o una agitación violenta) inicia la cristalización.

Entonces, la cristalización se produce rápidamente con desprendimiento de calor (calor de solidificación igual y opuesto al de fusión) hasta que el cuerpo llega a la temperatura efectiva de equilibrio entre la fase sólida y la fase líquida; por ejemplo, cuando se alcanzan los 0 °C en el caso del agua.

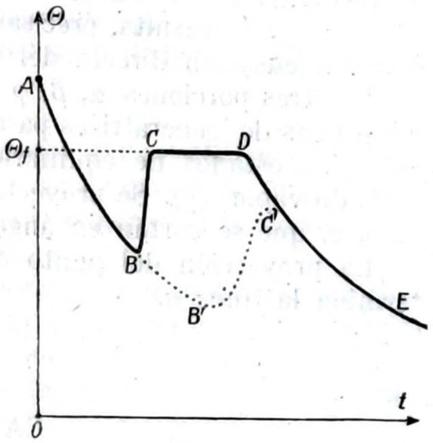


Fig. 652

Éste es el método más común para determinar la temperatura de fusión Θ_f de un cuerpo puro.

Si fundimos en un tubo de ensayo algunos gramos del cuerpo y después dejamos enfriar lentamente hasta debajo de la temperatura de fusión, agitando el líquido, o mejor sumergiendo un granito del sólido correspondiente, se produce la cristalización. Si determinamos la *curva de enfriamiento* $\Theta = \Theta\ (t)$ que da la temperatura Θ en función del tiempo t, encontramos una forma parecida a la de la figura 652. El recalentamiento brusco BC indica el fin de la sobrefusión. La rama horizontal CD señala la temperatura de fusión Θ_f. Si el enfriamiento preliminar ha sido demasiado fuerte, puede obtenerse la curva $ABB'C'E$, y el experimento ha fracasado en lo que respecta a la determinación de Θ_f.

Por lo tanto, si se ha rebasado demasiado la temperatura de solidificación, la cristalización, iniciada al introducir el germen cristalino, adelanta con suficiente lentitud para enmascarar el aumento correspondiente de temperatura.

Volvamos a la figura 651.

A una temperatura Θ_t bien determinada, la rama horizontal de la isoterma correspondiente a la licuefacción viene a constituir la prolongación de la rama horizontal correspondiente a la solidificación. La presión p_t, común a todos los puntos de esta rama horizon-

tal resulta también determinada, y es, a la vez, la presión del vapor saturante y la presión para la cual, a la temperatura Θ_t, y, se encuentran en equilibrio la fase líquida y la fase sólida.

Sólo a esta temperatura y bajo esta presión pueden coexistir en contacto y en equilibrio las tres fases sólida, líquida y gaseosa del cuerpo; Θ_t y p_t caracterizan el *punto triple* del cuerpo considerado.

Para el agua, el punto triple se halla a $+ 0{,}009\,9 \pm 0{,}000\,1$ °C, punto de fusión del hielo a la presión de su vapor saturante, es decir, de 4,579 mm_{Hg}.

En las isotermas correspondientes a temperaturas menores que Θ_t falta la fase líquida, y todo el fragmento horizontal MN corresponde a estados de equilibrio entre el sólido y el vapor saturante. Recorriendo la isoterma en el sentido NM se tiene el paso directo del estado sólido al de vapor; ocurre inversamente cuando la isoterma es recorrida en el sentido MN. Es el fenómeno de la *sublimación*.

La *escarcha* resulta, precisamente, a temperaturas inferiores a 0 °C por condensación directa del vapor de agua al estado sólido.

Las tres porciones α, β, γ de la superficie $p = p\,(v, \Theta)$ son áreas cilíndricas de generatrices paralelas al eje de los volúmenes y corresponden a estados de equilibrio líquido-vapor (α), sólido-líquido (β) o sólido-vapor (γ). Se proyectan en el plano p, Θ, según tres curvas a, b, c, que se cortan en ángulo en el punto triple P_t (§ 358).

La proyección del punto crítico P_c da un punto P'_c en donde termina la línea a.

CAPÍTULO II

Calorimetría

§ 313. Cantidad de calor. Cuando aumenta la temperatura de un cuerpo, se suele decir que el cuerpo «contiene» más calor que antes; decimos lo contrario cuando la temperatura disminuye. Así, cuando se habla de «calentar» un cuerpo, se quiere indicar o que se le da calor, o que se aumenta su temperatura, porque una cosa conduce a la otra.

Esto no es completamente exacto. Si se continúa dando calor con un mechero Bunsen al agua que hierve en una olla, la temperatura del agua y del vapor producido permanece constante.

Para explicar esto se han inventado los *calores latentes;* se dice que el agua a 0 °C y el hielo a 0 °C contienen distinta cantidad de calor; el calor suministrado al hielo para fundirlo, se encuentra allí escondido: es *calor latente* (§ 320).

Es importante dejar sentado sin ambigüedad que, para nosotros, «calentar» y «enfriar» un cuerpo significará, respectivamente, aumentar o disminuir su temperatura, independientemente del aporte simultáneo de calor.

La experiencia nos dice que, poniendo en contacto dos cuerpos a distinta temperatura, y no realizándose acciones físicoquímicas entre los dos (véase más adelante), disminuye la temperatura del cuerpo más caliente y aumenta la del más frío: decimos que pasa calor desde el cuerpo caliente hacia el frío *(propagación del calor)*.

¿Es el calor un flúido imponderable que se propaga de un cuerpo a otro, y cuya existencia pueda considerarse real, en cuanto goce, como la materia, de la indestructibilidad y pueda ser medido según el § 5?

Sólo podrá responderse a esta pregunta cuando se haya establecido bien el convenio en que se basa la medida de las cantidades de calor (§ 314).

Si se admite, en principio, que cada adquisición o pérdida de calor por parte de un cuerpo tenga necesariamente que producir una variación correspondiente de temperatura, debe deducirse que se crea calor en muchos fenómenos.

He aquí algunos:

a] compresión de un gas (experimento del eslabón neumático);

b] rozamiento (externo o interno; masa de plomo martillada, metal trabajado al laminador, a la hilera, al horno, a la sierra; mercurio lanzado contra un obstáculo, etc.);

c] cambios de estado: haciendo borbotar por agua fría un chorro de vapor de agua a 100 °C se logra calentarla en breve tiempo hasta 100 °C. Desde luego, el vapor, condensándose, no ha variado de temperatura, y no obstante, se ha calentado el agua que le rodea (calor latente de condensación);

d] reacciones químicas exotérmicas o fenómenos físicos especiales, como la interrupción de la sobrefusión;

e] acción de una corriente eléctrica (*efecto Joule;* v. tomo II).

En otros fenómenos desaparece calor:

α] expansión de un gas *con trabajo externo* (fig. 615): la temperatura del gas disminuye, luego el gas «contiene menos calor»; pero no se encuentra ningún cuerpo interesado en el fenómeno que haya adquirido el calor perdido por el gas;

β] cambios de estado: un gran trozo de hielo, sumergido en un poco de agua caliente, se funde en parte; la temperatura del agua ha disminuído, de modo que el agua suministra calor al hielo, pero éste no cambia de temperatura (calor latente de fusión); análogamente se tiene un calor latente de evaporación;

γ] reacciones químicas endotérmicas;

δ] mezclas frigoríficas;

ε] acciones de la corriente eléctrica (*efecto Peltier*, véase tomo II).

Solamente *cuando ningún otro fenómeno acompaña a la propagación de calor* (ni variación de estado de agregación, ni reacción química, ni fenómenos mecánicos, ni cambio de volumen, ni fenómenos

eléctricos o magnéticos, etc.), puede asegurarse que si un cuerpo aumenta de temperatura, «contiene más calor» porque lo ha recibido desde el exterior, y que si disminuye de temperatura, ha perdido calor por haberlo cedido a los cuerpos que le rodean.

Solamente en estas condiciones particularísimas puede decirse que el calor no se crea ni se destruye, sino que pasa simplemente de un cuerpo a otro.

Y tan sólo a través del enunciado del primer principio de la Termodinámica, aplicado a un ciclo, podrá esclarecerse en qué sentido cabe decir que «el calor puede ser creado o destruído».

§ 314. Medición de las cantidades de calor. El calor no es, pues, indestructible, y de ahí la dificultad de precisar el concepto del mismo y de establecer su medida. Nos hallamos frente a uno de los ejemplos más característicos, de ente físico suficientemente definido en cuanto se fije un procedimiento lógico, experimental y prácticamente conveniente, para efectuar su medición (compárese § 4).

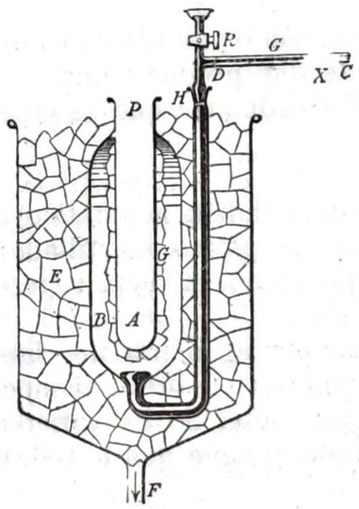


Fig. 653

Se medirá una cantidad de calor mediante un *calorímetro*, por ejemplo el calorímetro de hielo de Bunsen (fig. 653), procediendo como se ha indicado en el § 5; la cantidad de calor toma caracteres de magnitud física fundamental.

El calorímetro de Bunsen está constituído por un depósito de vidrio B que termina en el capilar graduado CD. En el depósito está soldado el tubo de ensayo PA. El espacio entre el tubo de ensayo y las paredes de B está lleno de agua bien privada de aire. Un poco de mercurio llena el conducto que conduce al capilar y termina en un menisco X, que constituye el índice de la escala. Introduciendo en A algunos centímetros cúbicos de éter y haciendo borbotar por dentro de éste una corriente de aire, se logra, por el enfriamiento que acompaña a la evaporación, formar una capa de hielo G alrededor del tubo de ensayo.

El aparato así preparado se sumerge en un gran recipiente que contiene hielo fundente,y de paredes prácticamente adiabáticas. Así, el aparato, después de varias horas, se encuentra completamente isotérmico, a 0 °C. El índice X queda prácticamente en reposo, indicando que no varía con el tiempo la cantidad de hielo G. Realmente, el aparato recibe un poco de calor del recinto en donde se halla, que está a la temperatura ordinaria (15 ÷ 20 °C), y el hielo G funde y disminuye de volumen, con lo que el índice X retrocede lentamente. Pero el calorímetro así preparado puede conservarse dispuesto para

el uso durante varios días. Mediante la llave R es fácil llevar la posición inicial del menisco X al punto más conveniente de la escala. Se introduce entonces en el tubo PA un cuerpo cuya temperatura sea superior a 0 °C y en el cual no se realicen los fenómenos indicados en el § 313. Después de algunos minutos, la temperatura del cuerpo introducido es de 0 °C. El cuerpo ha perdido calor. El menisco X del mercurio ha retrocedido cierto trayecto a causa de la fusión de cierta cantidad de hielo, el cual disminuye de volumen al fundirse.

Análogamente, si el cuerpo introducido tiene una temperatura inferior a 0 °C, aumenta de temperatura, adquiere calor y el índice X avanza un cierto espacio.

El aparato acusa las cantidades de calor que el cuerpo le suministra o la quita. Pero la temperatura del calorímetro es constantemente igual a 0 °C : el calorímetro de hielo es un *calorímetro isotérmico*.

Diremos que dos cuerpos colocados sucesivamente en A dan (o reciben) iguales cantidades de calor ΔQ si producen en el menisco X corrimientos idénticos.

Una cantidad de calor ΔQ_2 es doble de otra ΔQ_1, si produce por sí sola el mismo corrimiento de X que produciría la acción sucesiva de dos cantidades de calor iguales a ΔQ_1. Si el capilar CD está bien calibrado, el corrimiento de X es igualmente doble.

En fin, la unidad de medida $[Q]$ es la *caloría (cal)*, esto es, la cantidad de calor cedida al calorímetro por 1 g_m de agua introducida a 15,5 °C y dejado enfriar a la presión atmosférica normal hasta 14,5 °C (1). La contracción indicada por X corresponde entonces a *una* caloría, y el capilar DC podrá ser graduado directamente en calorías.

En la práctica, como frecuentemente se toma el kg_m como unidad de masa, se emplea a menudo como unidad de cantidad de calor la *kilocaloría (kcal)*; el antiguo nombre de *caloría grande* que se daba a esta unidad práctica fué abolido acertadamente por un convenio internacional (1940).

En la técnica de las instalaciones frigoríficas también se usa la *frigoría*; se dice, por ejemplo, que una máquina frigorífica da 1000 frigorías por segundo cuando puede retirar 1000 kcal por segundo de los cuerpos sobre los cuales actúa.

El calorímetro de Bunsen, graduado como se ha dicho, permite comprobar :

a] que 1 g_m de agua introducido en A pierde sensiblemente una caloría por cada grado de enfriamiento, y no sólo para el enfriamiento

(1) Ello equivale a establecer que el calor específico (§ 318) del agua, cuando la masa se mide en g_m, la temperatura en grados celsius, y la cantidad de calor en calorías, tenga por medida 1. Luego ha de establecerse que los cambios eventuales en las unidades de masa y de temperatura no influyan en la definición de caloría para que ésta conserve su carácter de unidad fundamental.

§ 315

desde 15,5 a 14,5 °C ; es decir, el calor específico (§ 318) del agua tiene sensiblemente el valor constante $1\ \frac{\text{cal}}{^{\circ}\text{C}\cdot g_m}$.

b] que m g_m de agua introducidos en A pierden m calorías por cada grado de enfriamiento (lo que por otra parte parece admisible *a priori*).

Luego :

$$\Delta Q = m\cdot\Delta\theta \qquad [1]$$

mide en *calorías* la cantidad de calor perdida por m *gramos-masa* de agua enfriada en $\Delta\theta$ *grados centesimales*. (Obsérvese que en dimensiones, la [1] es incorrecta ; véase § 315, *d*]).

Observemos finalmente que :

1.° El calorímetro de Bunsen solamente permite medir cantidades de calor en cuerpos cuya temperatura se aproxima a 0 °C durante la medición.

Se llena esta laguna admitiendo que si un cuerpo, en una transformación, disminuye de temperatura y cede ΔQ calorías, adquiere otras tantas *efectuando la misma transformación en sentido contrario*, y, por tanto, vuelve a la temperatura inicial.

2.° Nuestro calorímetro, como cualquier otro calorímetro, *mide la cantidad de calor* ΔQ que él mismo *ha cedido al cuerpo o ha recibido del cuerpo* que se estudia.

Convendremos en hablar siempre de la cantidad de calor ΔQ *dada* al cuerpo; entonces será $\Delta Q \gtrless 0$ según que el calorímetro dé calor al cuerpo o lo reciba de él.

Con este convenio, la [1] vale también en signo, ΔQ se llama a menudo *calor* que el cuerpo ha recibido o ha *adquirido* (en valor y signo) *del exterior*.

Por las causas indicadas en el § 313 no debe pretenderse que a consecuencia del calor ΔQ *recibido* del exterior, el cuerpo tenga necesariamente que variar su temperatura proporcionalmente.

Los cambios de calor ΔQ ahora introducidos no pueden identificarse con las variaciones de cantidad de calor « contenido » en los cuerpos (§ 313), y particularmente en el cuerpo que se estudia ; estas variaciones sólo se indentifican con ΔQ y tienen interés en el caso de los últimos párrafos del § 313, porque, utilizando el agua como cuerpo sobre el que se experimenta, nos permiten realizar, como se ha visto, una medida de ΔQ.

Una vez fijados mediante el primer principio de la termodinámica los conceptos de variación de la energía interna (§ 327) y de la entalpía (§ 330, *b*]) de un cuerpo, se verá con claridad que es esta energía intensa, y no la cantidad de calor, la que debe imaginarse « contenida » en los cuerpos.

§ 315. Calorímetros. Además del de Bunsen, se emplean otros muchos calorímetros. Todos sirven para medir las cantidades

§ 315

de calor ΔQ recibidas por un cuerpo y procedentes del mismo calorímetro, o, viceversa, cedidas al calorímetro por el cuerpo ($\Delta Q < 0$).

Lo mismo que en el calorímetro de hielo se admite que el calorímetro no puede ceder ni recibir calor del cuerpo que se estudia sin que lo indique el índice X (fig. 653), esto es, sin que se funda o se forme el hielo correspondiente. En los otros calorímetros se utiliza para la medida de la cantidad de calor un fenómeno que indique fielmente, esto es, sin las excepciones indicadas en el § 313, la adquisición o pérdida de calor *por parte del calorímetro*.

Además del *calorímetro isotérmico* de Bunsen, se tienen calorímetros análogos basados en otros cambios de estado, por ejemplo en la ebullición isotérmica de un líquido. Recientemente se ha construído un excelente calorímetro tipo Bunsen en el que el agua se ha sustituído por difenilmetano, que funde a 26 °C ; con él ha sido posible medir el desprendimiento lento de calor que acompaña al fraguado de un cemento durante varios días.

Otro grupo de calorímetros es del tipo llamado *de calentamiento*, porque en ellos la cantidad de calor proporcionada o recibida por el calorímetro se deduce mediante una variación equivalente de su temperatura.

Citamos los aparatos más representativos de este tipo.

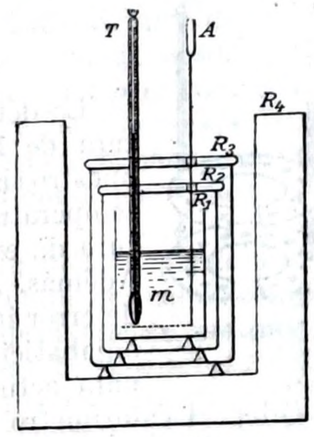


Fig. 654

a] **Calorímetro de las mezclas de Regnault.** Una masa conocida de agua (fig. 654) recibe o da calor al cuerpo que se estudia, que se sumerge en ella. Se eliminan todas las causas de creación o destrucción de calor reseñadas en el § 313 ; entonces, por definición de caloría, análogamente a la [1], § 314, la cantidad de calor ΔQ que la masa m del agua del calorímetro da al cuerpo sumergido, se determina a partir de la variación de temperatura $\Delta\theta$ que el agua experimenta :

$$\Delta Q = -m\cdot\Delta\theta. \qquad [1]$$

El calorímetro está esencialmente constituído por esta masa de agua, por el recipiente que la contiene, por un termómetro T de gran precisión y por un agitador A (fig. 655) que asegura la uniformidad de temperatura en todo el líquido.

Toda variación de temperatura del agua va acompañada de otra variación igual de temperatura en todos estos accesorios. Luego la [1] no es exacta. Es como si a los m g_m de agua efectiva se hubiese añadido cierto número m_c de g_m de agua *(equivalente en agua del calorímetro)*. En general, m_c se determina experimentalmente : si el calorímetro está a la temperatura θ_1, se vierten en él m_1 g_m de agua

a $\theta_2 > \theta_1$, ($\theta_2 - \theta_1$ es del orden de $2 \div 3$ °C), y se observa la temperatura final θ_3 de la mezcla. Solamente se ha producido un paso de calor desde el agua caliente al calorímetro, y la cantidad de calor m_1 $(\theta_2 - \theta_3)$ perdida por el agua caliente es igual a la cantidad de calor $(m + m_c)$ $(\theta_3 - \theta_1)$ adquirida por el calorímetro:

$$m_c\,(\theta_2 - \theta_3) = (m + m_c)\,(\theta_2 - \theta_1).$$

En esta ecuación, la única incógnita es m_c, que se puede, por tanto, determinar.

En general, m_c es muy pequeño respecto a m.

Conocidos m y m_c, y midiendo las variaciones $\Delta\theta$ de temperatura del agua del calorímetro, puede servir este instrumento para medir la cantidad de calor cedida por el cuerpo sumergido:

$$\Delta Q = -(m + m_c)\,\Delta\theta. \qquad [2]$$

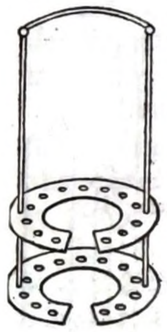


Fig. 655

La determinación se efectúa alrededor de la temperatura de 15 °C, porque el calor específico del agua, en nuestro sistema de medidas, sólo tiene el valor 1, a dicha temperatura, de modo que la [2] sólo a esta temperatura da exactamente el número de calorías transmitidas. Además, $\Delta\theta$ debe ser muy pequeño, porque una causa de error importante y difícil de eliminar es la imperfecta adiabaticidad de las paredes del calorímetro. En efecto, para actuar racionalmente, todo calorímetro y en particular el calorímetro de calentamiento debe ser *adiabático;* de lo contrario no puede asegurarse que la cantidad de calor [2] cedida al calorímetro sea recogida íntegramente por el cuerpo que se estudia, pues puede haberse producido un cambio con el exterior. Este cambio de calor es tanto más pequeño cuanto más rápida es la determinación calorimétrica, y es nulo cuando el exterior se encuentra a la misma temperatura que el líquido calorimétrico.

Por esto, las determinaciones calorimétricas más cómodas y precisas son las que pueden efectuarse rápidamente y alrededor de la temperatura del ambiente; a menudo se emplean termómetros eléctricos (§ 304, *d*], *e*]).

Durante una determinación rápida también es despreciable el error debido a la lenta evaporación del agua del calorímetro.

Para evitar el intercambio de calor con el exterior, el vaso calorimétrico, de plata o de lámina delgada de latón plateado (para que emita poca energía radiante), va dentro de otro recipiente mayor, apoyándose en él por soportes de corcho, y, por fin, está colocado dentro de una vasija más grande de doble pared, con agua entre sus dos paredes.

Con dispositivos convenientes (añadiendo agua fría o calentando mediante una resistencia eléctrica sumergida en el agua), se logra

mantener el recipiente exterior, durante el experimento, a una temperatura sensiblemente igual a la del calorímetro. Frecuentemente, por determinaciones preliminares se logra obtener el valor de las correcciones que deben aplicarse a las medidas para compensar la imperfecta adiabaticidad del aparato.

Un vaso Dewar (§ 290, *d*]) constituye un excelente recipiente adiabático, y actualmente se coloca el vaso calorimétrico dentro de un vaso DEWAR hondo. Falta sólo precaverse de los intercambios de calor a través de la boca del vaso, y de la evaporación.

En mediciones precisas no conviene emplear el mismo vaso Dewar como vaso calorimétrico, porque el vidrio que forma sus paredes es mal conductor del calor y, por tanto, no es fácil determinar con qué rapidez y hasta qué punto siguen las paredes del vaso las variaciones de temperatura del líquido calorimétrico.

Las determinaciones calorimétricas a temperaturas muy diferentes de la temperatura ambiente, o muy lentas, como sucede, por ejemplo, cuando el cuerpo sumergido en el calorímetro es mal conductor del calor, son siempre muy laboriosas y poco precisas.

Por otro lado, una precisión del 1 ‰ en la determinación de la cantidad de calor, solamente puede lograrse en condiciones particularmente favorables.

El líquido calorimétrico puede no ser agua; incluso puede sustituirse por un bloque de cobre, muy buen conductor del calor, como en el *calorímetro de* NERNST *y* LINDEMANN, especialmente indicado para determinaciones a temperaturas muy bajas o muy altas.

Introduciendo en el líquido calorimétrico un recipiente de plata finísimo, adecuado para recibir otro líquido, el aparato de la figura 654 sirve también para determinaciones con líquidos.

Y si el recipiente de plata es cerrado y puede contener un gas, pueden verificarse determinaciones calorimétricas con gases, a volumen constante. Sin embargo, una determinación de esta clase resulta poco precisa a causa de la pequeñísima cantidad de calor que tiene que apreciarse en la medición.

Sustituyendo el recipiente por un serpentín de plata de paredes delgadas y haciendo pasar por el mismo una corriente de gas previamente calentado, o un flujo de vapor que se condense en el serpentín, o efectuando en él una combustión mediante el aporte de una corriente de aire o de oxígeno (calorímetro de JUNKER), se tienen calorímetros destinados a la determinación del calor específico de los gases a presión constante, del calor latente de vaporización, o de la potencia calorífica a presión constante (la presión atmosférica).

Finalmente, el recipiente puede ser una *bomba calorimétrica D* (fig. 656), de paredes robustas y de cierre hermético, adecuada para contener algunos gramos de combustible, y el oxígeno necesario para su combustión, y provista de un medio (eléctrico) para encender el combustible. Entonces, el calorímetro sirve para medir

la cantidad de calor producido en una combustión, o, más generalmente, en una reacción química a volumen constante.

En este caso es necesario tener en cuenta el equivalente en agua de la bomba.

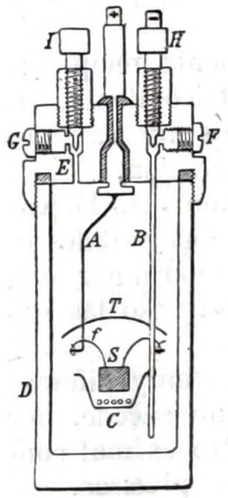


Fig. 656

Existe también un tipo de aparato en el cual la bomba está contenida en un recinto sensiblemente adiabático, y la medida de la cantidad de calor se deduce del calentamiento de la misma pared de la bomba, que sustituye entonces al líquido calorimétrico.

La figura 656 da la sección de una bomba calorimétrica. *S* es la «pastilla» de combustible, que a veces va mezclado con una substancia sólida oxidante, capaz de proporcionar al combustible el oxígeno necesario para su combustión. Pero también puede producirse la combustión directamente con oxígeno gaseoso, cuyo gas debe entonces llenar la bomba a una presión conveniente. El hilo *f*, comprimido dentro de la pastilla, se pone incandescente mediante una corriente eléctrica e inicia así la combustión.

La figura 657 representa la fotografía de una bomba calorimétrica y el calorímetro de REGNAULT correspondiente.

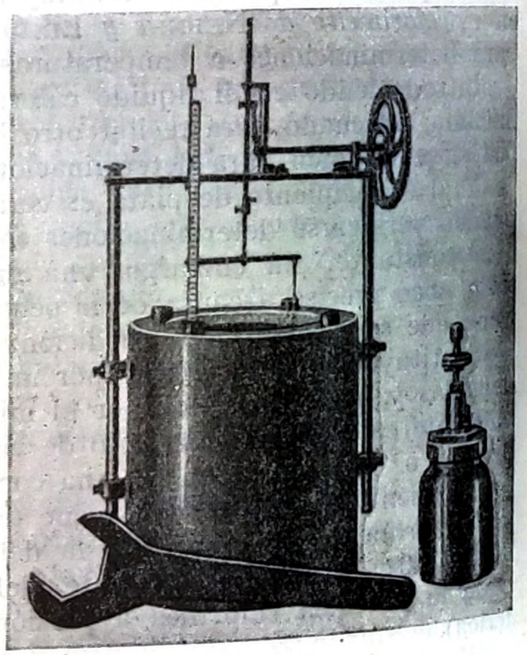


Fig. 657

b] **Calorímetro de Favre y Silbermann.** Es como un calorímetro de Bunsen en el cual el agua y el hielo en contacto con el tubo de ensayo *A* (fig. 653) se han sustituído completamente por mercurio (fig. 658). En esencia, este calorímetro es un termómetro calibrado en calorías, como el calorímetro de Bunsen. Pero el de Bunsen es isotérmico, y éste es de calentamiento, debiendo ser adiabáticas sus paredes.

c] **Calorímetros eléctricos.** En estos calorímetros se *proporciona* calor al cuerpo que se estudia (generalmente flúido, pero a veces sólido), mediante el efecto JOULE, es decir, con una bobina de resistencia conocida, recorrida por una corriente eléctrica también conocida. Sabemos calcular la cantidad de calor ΔQ desarrollada por una

corriente eléctrica i durante un tiempo t en una resistencia r. Efectivamente, los experimentos realizados con un calorímetro de las mezclas han dado (ley del *efecto* JOULE, v. tomo II):

$$\Delta Q = 0{,}238\,9 \cdot i^2 \cdot r \cdot t \qquad \begin{matrix} \Delta Q \text{ calorías} \\ i \text{ ampère} \\ r \text{ ohm} \\ t \text{ segundos} \end{matrix} \qquad [3]$$

Y, puesto que se determinan fácilmente i, r y t, la [3] permite calcular la cantidad de calor proporcionado al cuerpo en el que se ha introducido la resistencia r.

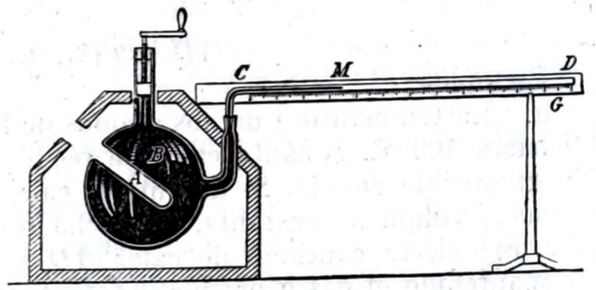


Fig. 658

d] Obsérvese que las fórmulas precedentes [1] ÷ [2] no concuerdan dimensionalmente. En efecto, el calor específico del agua c_{H_2O} en nuestro sistema de medidas es $c_{H_2O} = 1\ \dfrac{\text{cal}}{g_m \cdot {}^oC}$ y no 1.

La [2], ecuación entre magnitudes, se escribe:

$$\Delta Q = c_{H_2O} \cdot (m + m_c) \cdot \Delta\theta \qquad [4]$$

válida en todo sistema de medidas, y análogamente va completada la [1]. Poniendo en evidencia medidas y unidades (§ 5) la [4] da:

$$\Delta Q \cdot [Q] = c_{H_2O} \cdot (m + m_c) \cdot \Delta\theta\ \frac{[Q]}{[m]\ [\theta]} \cdot [m] \cdot [\theta]. \qquad [5]$$

En nuestro sistema de medidas es $c_{H_2O} = 1$, y la ecuación entre medidas se reduce a la [2]. Por el contrario, la ecuación entre magnitudes es la [4] y la ecuación entre unidades queda:

$$[Q] = \frac{[Q]}{[m] \cdot [\theta]} \cdot [m] \cdot [\theta] = \frac{\text{cal}}{g_m \cdot {}^oC} \cdot g_m \cdot {}^oC,$$

que, evidentemente, es correcta dimensionalmente.

§ 316. dQ no es una diferencial exacta. Sea un cuerpo a temperatura inicial θ_1, que se calienta hasta $\theta_1 + d\theta$ (el cuerpo está, por tanto, sometido a una transformación). Sea dQ el calor *tomado del exterior* (§ 314), es decir, comunicado desde el exterior al cuerpo mediante un calorímetro adecuado.

En una transformación no infinitesimal entre θ_1 y θ_2, el calor adquirido es :

$$\Delta Q = \int_{\theta_1}^{\theta_2} dQ.$$

Fijado el cuerpo, ¿puede suponerse que el calor ΔQ es solamente función de θ_1 y θ_2?

No. Es decir, no se puede escribir :

$$\Delta Q = f(\theta_1, \theta_2).$$

Ejemplos :

a] La temperatura de dos gramos de hidrógeno ha variado desde 20 hasta 100 °C. ¿Cuánto calor ha recibido el gas desde el exterior? No es posible decirlo. Si durante el calentamiento se ha mantenido el gas a volumen constante, el gas ha tenido que adquirir del exterior una cierta cantidad de calor $\Delta Q > 0$ (≈ 400 cal) ; pero si se ha mantenido el gas a presión constante, y, por tanto, se ha expansionado durante el calentamiento, la experiencia nos prueba que ha tenido que adquirir del exterior una cantidad de calor $\Delta Q'$ mayor (≈ 550 cal) ; esto es :

$$\Delta Q' > \Delta Q.$$

Y si el gas se comprime fuertemente (eslabón neumático), puede ser calentado desde 20 hasta 100 °C sin necesidad de darle calor desde el exterior :

$$\Delta Q'' = 0.$$

Es más ; si la compresión fuese suficientemente enérgica, el gas se calentaría tanto, que para pasar de 20 a 100 °C aun tendría que *ceder* calor al exterior :

$$\Delta Q''' < 0 \ (¡!).$$

b] La temperatura de un gramo de agua varía de 10 a 20 °C ; ¿cuánto calor ha adquirido el agua desde el exterior? Si se trata de agua líquida y a presión constante (la atmosférica), se han cedido al agua 10 calorías ; si se trata de vapor saturante que estaba a 10 °C y ha pasado a 20 °C, permaneciendo en el mismo estado, se han gastado unas 3 calorías ; se habrán gastado unas 600 calorías si se la ha transformado de agua líquida a 10 °C, a vapor saturante a 20 °C ; etcétera.

Luego ΔQ no es sólo función de θ_1 y θ_2.

¿Puede suponerse que ΔQ es solamente función de los estados inicial (p_1, v_1, θ_1) y final (p_2, v_2, θ_2) de la transformación?

No. Tampoco es :

$$\Delta Q = f(p_1, v_1, \theta_1 ; p_2, v_2, \theta_2)$$

(recordemos que de las tres variables p, v, θ, se supone generalmente que una es función de las otras dos).

Ejemplos :

α] Un gramo de mercurio a 0 °C, bajo la presión atmosférica normal p_0, y, por tanto, al estado líquido y ocupando cierto volumen v_0, es transformado de modo que su temperatura final sea 1 °C, siendo la presión final la misma p_0, de modo que el mercurio es todavía líquido y ocupa un volumen final $v = v_0 (1 + \alpha)$, siendo $\alpha = 0{,}000\,182\,6$ el coeficiente de dilatación del mercurio.

¿Cuánto calor ha adquirido del exterior? No se puede saber ; tal vez ninguno si el mercurio ha sido fuertemente agitado durante la transformación, porque el mercurio agitado se calienta sin necesidad de recibir calor del exterior.

β] Es muy instructivo el caso de la expansión de un gas con o sin trabajo exterior (figs. 615 y 616).

Un volumen v_1 de gas, prácticamente perfecto, a la temperatura θ_1 y a la presión p_1, se deja expansionar adiabáticamente sin producir trabajo exterior (fig. 616). Para satisfacer estas condiciones, basta que la expansión se efectúe con suficiente rapidez. Dos pares termoeléctricos T_1 y T_2 (fig. 616), colocados « en paralelo » para que se pueda conocer la temperatura media en A_1 y en A_2, advierten que *la temperatura media del gas no ha cambiado*.

Por lo tanto, el estado final del gas es :

$$v_2 = 2 v_1 ; \qquad p_2 = \frac{1}{2} p_1 ; \qquad \theta_2 = \theta_1,$$

y la transformación se ha producido sin cambio de calor con el exterior :

$$\Delta Q = 0.$$

El fenómeno es, pues, adiabático e isotérmico a la vez (*experimento de la expansión de* JOULE).

Se repite el experimento de expansión del gas, pero en las condiciones de la figura 615, es decir, con trabajo externo. El par termoeléctrico T [fig. 615, *b*)], que funciona como termómetro, indica que el gas disminuye notablemente de temperatura al expansionarse.

Si se detiene la expansión cuando el volumen final es $v_2 = 2v_1$, es necesario dar desde el exterior el calor

$$\Delta Q > 0,$$

para que la temperatura final sea $\theta_2 = \theta_1$, con lo cual se tiene $p_2 = \frac{1}{2} p_1$.

En los dos casos (expansión sin o con trabajo externo) la transformación se efectúa entre los mismos estados extremos :

$$(v_1, p_1, \theta_1) ; \qquad \left(v_2 = 2 v_1, \ p_2 = \frac{1}{2} p_1, \ \theta_2 = \theta_1\right);$$

pero ΔQ es nulo en el primer caso y positivo en el segundo.

En los §§ 292, 294 se han considerado estos dos tipos de expansión como ejemplos de transformación irreversible y de transformación reversible entre los mismos estados extremos.

Para que la temperatura final del gas sea igual a la inicial, en el primer caso *no se debe* suministrar ni quitar calor al gas, y en el segundo *se* le *debe* suministrar calor.

Luego *ΔQ no depende sólo de los estados inicial y final de la transformación, sino de toda la transformación.*

En la definición de la caloría (§ 314) es preciso advertir que el gramo de agua, que cede una caloría al calorímetro de Bunsen, se enfría de 15,5 a 14,5 °C bajo la presión atmosférica normal, constante; de este modo, la transformación experimentada por este gramo de agua queda completamente determinada. Por otra parte, veremos (§ 330, *b*]) que en las transformaciones isóbaras ΔQ depende solamente del estado inicial y del estado final de la transformación.

Supóngase, como de costumbre, que las dos variables independientes v y p, junto con la ecuación de estado $\theta = \theta\ (v, p)$, determinen el estado del cuerpo. Esto no sucede en la expansión sin trabajo exterior, porque entonces ocurre que ni p ni θ son constantes en toda la masa del gas. Sucede lo contrario cuando la transformación es reversible.

El calor absorbido durante la transformación

$$\Delta Q = \int_{p_1\ v_1}^{p_2\ v_2} dQ \qquad [1]$$

depende no sólo de los estados inicial y final, sino de toda la transformación.

Para una transformación infinitesimal que supone el paso desde el estado v, p, al estado $v + dv$, $p + dp$, la cantidad dQ es función de v, p, dv, dp, porque v, p, dv, dp determinan completamente una transformación infinitesimal (regular), así como un elemento de curva regular infinitésimo (por tanto, que se puede considerar rectilíneo) queda completamente determinado en el plano cartesiano por las coordenadas x, y, $x + dx$, $y + dy$, de los extremos. Se puede escribir:

$$dQ = M\ (v, p) \cdot dv + N\ (v, p) \cdot dp \qquad [2]$$

pero *dQ no es una diferencial exacta* respecto a las variables v, p.

Análogamente, tomando θ y v como variables independientes, puede ponerse:

$$dQ = M'\ (\theta, v) \cdot d\theta + N'\ (\theta, v) \cdot dv. \qquad [3]$$

o bien, si las variables independientes son θ y p,

$$dQ = M''\ (\theta, p) \cdot d\theta + N''\ (\theta, p) \cdot dp \qquad [4]$$

pero en ningún caso es dQ una diferencial exacta.

Veremos que dQ sólo es diferencial exacta cuando el trabajo externo efectuado por el cuerpo durante la transformación es independiente de ésta y sólo depende de sus estados extremos (§§ 327 y 330, *a*]).

§ **317. Otra propiedad de los gases perfectos.** El experimento de expansión sin trabajo externo, efectuado con el dispositivo de la figura 616, *b*), permite, efectuado con mucho cuidado, deducir que en los gases reales la expansión adiabática va acompañada en realidad de un pequeño enfriamiento.

El experimento se efectúa más cómodamente y con sensibilidad mucho mayor mediante un dispositivo que veremos en el § 352.

Ahora bien, cuanto más se aproximan los gases reales a las condiciones de gas perfecto $\left(\text{obediencia a la ley de BOYLE, y coeficientes } \alpha = \beta = \frac{1}{273{,}15}\ ^{\circ}\text{C}^{-1}\right)$, tanto más insignificante resulta el mencionado enfriamiento.

He aquí, pues, una nueva propiedad característica de un gas perfecto e independiente de su naturaleza química: *la expansión de un gas perfecto, adiabática y sin trabajo externo (expansión de* JOULE*), es también isotérmica.*

§ **318. Calores específicos.** Las [2], [3] y [4], § 316, permiten definir coeficientes diferenciales que no pueden considerarse matemáticamente como derivadas parciales de una función de varias variables, porque dQ no es una diferencial exacta, de modo que no existe una función Q definida exclusivamente por las variables que fijan el estado del cuerpo. En cambio, ocurre lo contrario con los cocientes diferenciales [5], [9] y [10] del § 291, deducidos de la ecuación de estado.

Pero, a pesar de ello, dichos coeficientes diferenciales, para los cuales se emplean a menudo los símbolos de las derivadas parciales, tienen un importante significado físico. Así, por ejemplo, se escribe a veces:

$$M\ (v, p) = \left(\frac{\partial Q}{\partial v}\right)_{p\ =\ const.};$$

$M\ (v, p)$ expresa la cantidad de calor que el cuerpo debe recibir del exterior para aumentar en una unidad su volumen, a presión constante.

Si el cuerpo considerado tiene la masa unidad, esta cantidad $M\ (v, p)$ es una especie de calor específico, que puede definirse ele-

mentalmente como el calor necesario para aumentar en una unidad de volumen la unidad de masa del cuerpo, a presión constante.

Análogamente para las otras funciones que entran en las [2], [3] y [4] del § 316.

En particular,

$$M'(\theta, v) = \left(\frac{\partial Q}{\partial \theta}\right)_{v = const.},$$

puede definirse elementalmente como la cantidad de calor que debe recibir el cuerpo para elevar su temperatura en 1 °C a volumen constante ;

$$M''(\theta, p) = \left(\frac{\partial Q}{\partial \theta}\right)_{p = const.},$$

es la cantidad de calor que debe recibir para elevar su temperatura en 1 °C, a presión constante.

Se define elementalmente el calor específico de un cuerpo como la cantidad de calor que debe recibir un gramo del mismo para que su temperatura aumente en 1 °C.

Según lo dicho en el § 316, esta cantidad de calor no está definida; el calor específico es indeterminado, o, si se prefiere, existen infinitos calores específicos.

Debe perfeccionarse la definición elemental anterior.

1.º **Caso de los líquidos y de los sólidos.** Se supone siempre que los líquidos y los sólidos experimentan variaciones de temperatura a presión constante, y que no sufren cambios de estado, ni reacciones químicas, ni movimientos demasiado prolongados y violentos (como en el caso del mercurio que se calienta al agitarlo).

Entonces, ΔQ (calor cedido al cuerpo desde el exterior) sólo es función de las temperaturas inicial θ y final $\theta + \Delta\theta$.

El cuerpo en estudio, colocado en un termostato a la temperatura conocida θ_1, se vierte bruscamente en el calorímetro. Así su temperatura θ_1 cambia hasta un valor final θ_2 determinado. En general, es $\theta_2 < \theta_1$; en el calorímetro de hielo θ_2 es igual a 0 °C, mientras que en el calorímetro de las mezclas es la temperatura final del agua. Quedan de este modo determinados $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ e ΔQ.

Los experimentos calorimétricos indican que para cualquier cuerpo y para pequeños intervalos de temperatura (ordinariamente, algunas decenas de grados), la cantidad de calor ΔQ dada al cuerpo es proporcional al calentamiento producido $\Delta\theta$:

$$\Delta Q = C_p \cdot \Delta\theta.$$

La constante de proporcionalidad

$$C_p = \frac{\Delta Q}{\Delta\theta}$$

se llama *capacidad calorífica media* (a presión constante) del cuerpo entre las temperaturas θ y $\theta + \Delta\theta$.

Se tiene :

$$[C_p] = \frac{[\Delta Q]}{[\theta]};$$

en nuestro sistema de medidas es $[C_p] = \frac{\text{cal}}{\text{°C}}$; es decir, la capacidad térmica se mide en «calorías por grado Celsius».

Cuando $\Delta\theta$ tiende a cero, esto es, cuando $\theta + \Delta\theta$ tiende a θ,

$$C_p = \left(\frac{\partial Q}{\partial \theta}\right)_{p = const.} \qquad [1]$$

es la *capacidad calorífica verdadera* del cuerpo a la temperatura θ, y *representa* (con muy buena aproximación) *el calor que es necesario dar al cuerpo*, cuya temperatura es θ, para calentarlo 1 °C (a presión constante) : así se encuentra de nuevo la definición elemental de capacidad calorífica.

Si el cuerpo es homogéneo, evidentemente la capacidad calorífica es proporcional a su masa m :

$$C_p = c_p \cdot m;$$

por tanto :

$$\Delta Q = m \cdot c_p \cdot \Delta\theta \qquad [2]$$

y dimensionalmente :

$$[\Delta Q] = [m] \cdot [c_p] \cdot [\theta];$$

la relación :

$$c_p = \frac{\Delta Q}{m \cdot \Delta\theta}$$

es el *calor específico medio a presión constante* del cuerpo entre θ y $\theta + \Delta\theta$.

Éste es el calor específico que se determina corrientemente con los calorímetros.

Tenemos :

$$[c_p] = \frac{[\Delta Q]}{[m] \cdot [\theta]};$$

en nuestro sistema de medidas es $[c_1] = \frac{\text{cal}}{\text{°C} \cdot \text{g}_m}$; esto es, el calor específico se mide en calorías por grado Celsius y por gramo de masa.

En el límite, para $\theta + \Delta\theta$ tendiendo a θ y, por tanto, tendiendo a cero $\Delta\theta$, se tiene :

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial \theta}\right)_{p = const.} = m \cdot c_p \qquad [3]$$

o también

$$c_p = \frac{1}{m}\left(\frac{\partial Q}{\partial \theta}\right)_{p\,=\,const.} = \frac{1}{m}\cdot M''\,(\theta,\,p)\,; \qquad [4]$$

c_p se llama *calor específico verdadero a presión constante* y a la temperatura de θ °C.

Este último es, en general, función de θ y de p; con muy buena aproximación, puede definirse como el calor que es necesario dar a la unidad de masa ($m = 1$) del cuerpo considerado para elevar su temperatura en 1 °C (a presión constante), que es la definición elemental del calor específico.

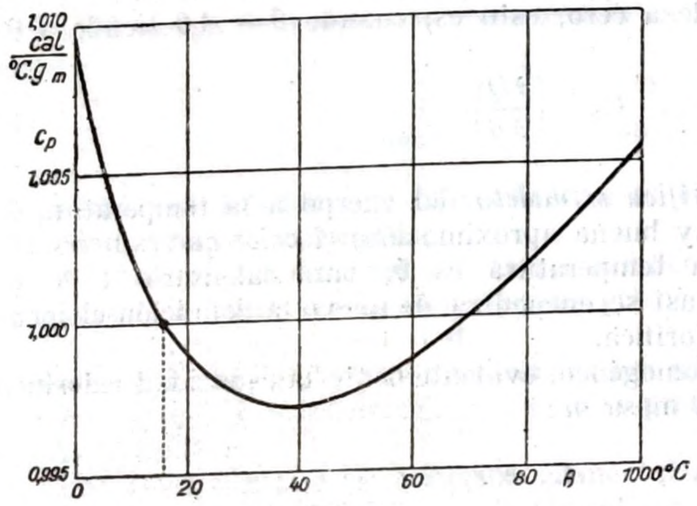


Fig. 659

Para el agua, en particular, según la definición dada para la caloría y atendiendo a los resultados experimentales citados en el § 314, *a*], se tiene $c_p = 1\ \frac{\text{cal}}{°\text{C}\cdot \text{g}_\text{m}}$, valor que es exacto a 15 °C, y, muy aproximado a las demás temperaturas.

En la figura 659 se ha dibujado la curva que da c_p en función de la temperatura, para el agua. Pero en los otros cuerpos, en general, c_p es función creciente de la temperatura. Para intervalos grandes de temperatura debe escribirse, pues:

$$(\Delta Q)_{p\,=\,const.} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} (dQ)_p = m\cdot\int_{\theta_1}^{\theta_2} c_p\cdot d\theta. \qquad [5]$$

Aunque en los sólidos y en los líquidos casi siempre se considera tan sólo el calor específico *a presión constante* c_p, hasta el punto de que a él nos referimos tácitamente al tratar del calor específico, y a pesar de que los sólidos y los líquidos son poco dilatables, no se crea que es despreciable la diferencia entre el calor específico *a presión constante* c_p, ahora definido, y el calor específico *a volumen constante* c_v:

$$c_v = \frac{1}{m}\left(\frac{\partial Q}{\partial \theta}\right)_{v\,=\,const.} = \frac{1}{m}\cdot M'\,(\theta,\,v). \qquad [6]$$

Pero este último es de difícil determinación con experimentos directos. Es más fácil, por ejemplo, calcular termodinámicamente $c_p = c_v$ (§ 350, [10]), y conocida esta diferencia y conocido c_p, se deduce c_v.

Este calor específico a volumen constante tiene mucho menos interés, porque raramente se realizan transformaciones, a volumen constante, de sólidos y de líquidos.

En los metales sólidos, $\frac{c_p}{c_v}$ es aproximadamente 1,05; en el mercurio, 1,14; el valor $\frac{c_p}{c_v} = 1{,}2$ es corriente en muchos líquidos; no es raro, en fin, el valor 1,5, y en el bromuro de etilo se tiene $\frac{c_p}{c_v} = 1{,}87$.

2.º **Caso de los gases.** Con las suposiciones indicadas en 1.º, es de advertir que hasta en la física elemental se distingue el caso en que la presión del gas permanece constante, de aquél en que permanece constante el volumen. Pueden así definirse dos calores específicos principales:

c_p, *calor específico a presión constante*, cantidad de calor necesario para calentar en 1 °C un g_m del gas a presión constante:

c_v, *calor específico a volumen constante*, cantidad de calor necesario para calentar en 1 °C un g_m del gas a volumen constante.

En rigor, estos calores específicos son los cocientes diferenciales, correspondientes a las expresiones [4] y [6].

Como ya se ha indicado (§ 315), las determinaciones calorimétricas a volumen constante se efectúan mal con los métodos corrientes; sin embargo, se han propuesto diversos dispositivos que se prestan a esta medición. Remitimos al lector a los tratados especiales.

Más frecuentemente se deduce c_v de la medida de c_p y de la razón $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ (§ 335).

§ 319. Resultados sobre los calores específicos. Además de los resultados relativos al agua, de importancia especial por su uso frecuente como líquido calorimétrico, se dan a continuación otros resultados notables.

a] **Regla de Dulong y Petit.** Señalemos, ante todo, que llamando $m_{át}$ a la masa atómica de un elemento químico, $m_{át}$ gramos de tal elemento constituyen 1 átomo-gramo del mismo; $m_{át}$ es la relación entre los gramos y los átomos-gramos de una masa dada del elemento; por consiguiente $m_{át}$ está expresado en $\frac{\text{g}_\text{m}}{\text{át-g}}$, o sea, dimensionalmente:

$$[m_{át}] = \frac{\text{g}_\text{m}}{\text{át-g}}\,;\ \text{análogamente}:\ [m_{mol}] = \frac{\text{g}_\text{m}}{\text{mol-g}}\,,$$

en donde m_{mol} es el peso molecular de una substancia químicamente definida.

Ahora bien: el *calor atómico* es el producto del *calor* específico por la masa atómica, y como se tienen dos calores específicos c_p (a presión constante) y c_v (a volumen constante), también se tienen por ello dos valores atómicos $c_p \cdot m_{át}$ (a presión constante) y $c_v \cdot m_{át}$ (a volumen constante). Para ambos es:

$$[c_p \cdot m_{át}] = [c_v \cdot m_{át}] = \frac{\text{cal}}{\text{g}_\text{m} \cdot {}^\circ\text{C}} \cdot \frac{\text{g}_\text{m}}{\text{át-g}} = \frac{\text{cal}}{\text{át-g} \cdot {}^\circ\text{C}}.$$

Elementalmente: el calor atómico es el número de calorías necesarias para aumentar en 1 °C la temperatura de un átomo-gramo del elemento.

La *regla de* Dulong *y* Petit nos dice que a la temperatura y presión ordinarias, el calor atómico es sensiblemente constante para casi todos los elementos químicos en estado sólido.

En la tabla que sigue se han recogido algunos valores numéricos.

Elementos	$m_{át}$ $\frac{\text{g}_\text{m}}{\text{át-g}}$	c_p $\frac{\text{cal}}{\text{g}_\text{m} \cdot {}^\circ\text{C}}$	$c_p \cdot m_{át}$ $\frac{\text{cal}}{\text{át-g} \cdot {}^\circ\text{C}}$	$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$	$c_v \cdot m_{át}$ $\frac{\text{cal}}{\text{át-g} \cdot {}^\circ\text{C}}$
Aluminio	27,0	0,227	6,14	1,044	5,88
Sodio	23,0	0,283	6,51	1,067	6,10
Potasio	39,0	0,166	6,48	1,087	5,96
Hierro	55,9	0,114	6,36	1,014	6,17
Níquel	58,6	0,108	6,39	1,017	6,28
Cobre	63,2	$0,093_5$	5,91	1,026	5,76
Cinc	65,1	$0,093_5$	6,10	1,039	5,87
Plata	107,68	$0,057_0$	6,13	1,037	5,91
Cadmio	111,5	$0,054_8$	6,11	1,052	5,81
Estaño	118,8	$0,055_9$	6,63	1,039	6,19
Platino	194,3	0,0324	6,29	1,019	6,17
Oro	196,7	0,0324	6,36	1,031	6,17
Plomo	206,4	0,0314	6,48	1,055	6,14
Bismuto	208,4	0,0308	6,42	1,012	6,34
Mercurio	199,8	0,0333	6,65	1,14	5,83
Helio	4,00	1,248	4,993	1,66	3,008
Hidrógeno	1,008	3,41	3,44	1,405	2,437

El calor atómico de los elementos sólidos, a presión constante, oscila alrededor de 6,3 $\frac{\text{cal}}{{}^\circ\text{C} \cdot \text{át-g}}$; *el calor atómico a volumen constante oscila alrededor de* 6 $\frac{\text{cal}}{{}^\circ\text{C} \cdot \text{át-g}}$.

Veremos en seguida que es conveniente referir la regla de Dulong y Petit a los calores específicos a volumen constante.

Téngase presente que, si bien la sensibilidad puede alcanzar valores muy notables en las mediciones calorimétricas, la precisión en la determinación de calores específicos alcanza raramente el 1 %; entre los resultados de los diversos experimentadores, en condiciones aparentemente iguales, se tienen diferencias hasta del 5 %.

La regla de Dulong y Petit presenta excepciones; a la temperatura ordinaria, se tiene:

		$c_p \, m_{át}$	
para el carbono:	carbón de madera	3,13	$\frac{\text{cal}}{\text{át-g} \cdot {}^\circ\text{C}}$
	grafito	2,42	
	diamante	1,35	
para el silicio:	grafítico	5,12	
	cristalino	4,67	
	fundido	3,89	
para el boro:	grafítico	2,56	
	cristalino	2,51	
	amorfo	2,77	

b] **Regla de F. Neumann y Kopp.** Se llama *calor molecular* el producto del calor específico por la masa molecular m_{mol}; esta regla establece que el calor molecular de un compuesto en estado sólido es la suma de los calores atómicos de los átomos que constituyen su molécula.

Los calores atómicos de los átomos que forman la molécula son los mismos que se consideran en la regla de Dulong y Petit para los elementos en estado sólido; para los otros elementos que en las condiciones ordinarias no son sólidos, el calor atómico que satisface a la regla de F. E. Neumann y Kopp se deduce, una vez para siempre, a partir del calor molecular.

Por ejemplo, he aquí los valores numéricos para el óxido cúprico C u O:

$$m_{mol} = (63{,}2 + 16) \, \tfrac{\text{g}_\text{m}}{\text{mol-g}} = 79{,}2 \, \tfrac{\text{g}_\text{m}}{\text{mol-g}} \quad c_p \, m_{mol} = 10{,}68 \, \tfrac{\text{cal}}{\text{mol-g} \cdot {}^\circ\text{C}};$$

para el Cu, $c_p \, m_{át} = 5.91 \, \tfrac{\text{cal}}{\text{mol-g} \cdot {}^\circ\text{C}}$,

luego para el O $c_p \, m_{át} = 4{,}77 \, \tfrac{\text{cal}}{\text{mol-g} \cdot {}^\circ\text{C}}$.

Mediante la regla de Neumann y Kopp se podrá entonces calcular el calor molecular del Cu_2O, por ejemplo:

$$c_p \, m_{mol} = 2 \cdot (c_p \, m_{át})_{\text{cobre}} + (c_p \, m_{át})_{\text{oxígeno}} =$$

$$= (2 \cdot 5{,}91 + 4{,}77) \, \tfrac{\text{cal}}{\text{mol-g} \cdot {}^\circ\text{C}} = 16{,}6 \, \tfrac{\text{cal}}{\text{mol-g} \cdot {}^\circ\text{C}}$$

La experiencia da 16,41.

Análogamente se calculará el calor molecular, del PbO, por ejemplo :

$$(c_p\, m_{mol})' = (c_p\, m_{át})_{\text{plomo}} + (c_p\, m_{át})_{\text{oxígeno}} =$$
$$= (6{,}48 + 4{,}77)\ \frac{\text{cal}}{\text{mol-g}\cdot{}^{\circ}\text{C}} = 11{,}25\ \frac{\text{cal}}{\text{mol-g}\cdot{}^{\circ}\text{C}}$$

La experiencia da 11,34.

Esta regla, aunque útil para la determinación de las masas moleculares, es menos precisa que la de DULONG y PETIT, tanto que frecuentemente no vale la pena distinguir entre c_p y c_v.

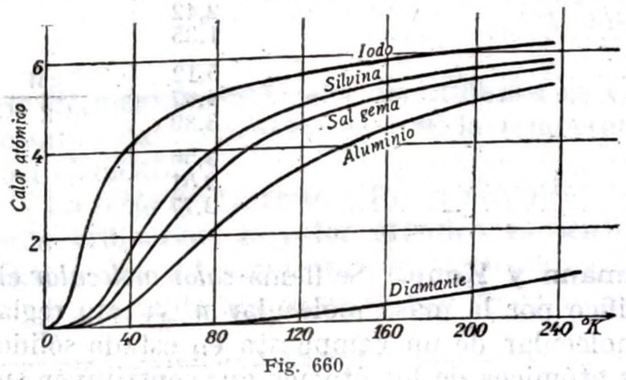


Fig. 660

c] Los números anteriores se refieren a la presión y temperatura ordinarias. Ahora bien, los calores específicos varían con la presión y con la temperatura.

Las variaciones con la presión son tanto mayores cuanto más baja es la temperatura y no siguen las leyes generales sencillas. Sin embargo, para presiones suficientemente pequeñas (por ejemplo, del orden de algunas atmósferas) y a temperaturas no demasiado bajas, la variación de los calores específicos con la presión es muy pequeña; en tales condiciones puede también suponerse constante $\frac{c_p}{c_v}$.

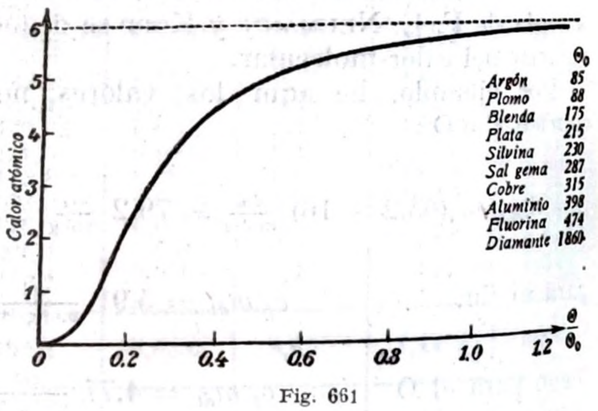


Fig. 661

Es más interesante la variación de los calores específicos con la temperatura. En general, los calores específicos aumentan con la temperatura.

El mercurio es una excepción, y también hemos visto que el agua (fig. 659) tiene un comportamiento anómalo desde este punto de vista.

Pero el resultado experimental más notable es que al tender la temperatura al cero absoluto, el calor específico tiende también a cero (fig. 660).

Más exactamente : si se elige una escala conveniente en el eje de las temperaturas Θ, diferente de un cuerpo a otro, la curva del calor atómico de los elementos *a volumen constante*, en función de la temperatura absoluta Θ, es la misma para todos ellos (fig. 661).

En la figura se indica para cada cuerpo el intervalo de temperatura Θ_0 que ha de tomarse como unidad; entonces, en el eje de las temperaturas viene representada la relación $\frac{\Theta}{\Theta_0}$.

El valor asintótico del calor atómico a volumen constante es aproximadamente el mismo para todos los elementos y se aproxima al valor 6 $\frac{\text{cal}}{{}^{\circ}\text{C}\cdot\text{át-g}}$. Por lo tanto, la regla de DULONG y PETIT debe suponerse válida no a la temperatura ordinaria, sino a aquellas temperaturas, diferentes de un elemento a otro, para las cuales la curva del calor atómico ha alcanzado ya sensiblemente dicho valor asintótico. De esta manera el carbono, el silicio y el boro entran también en el dominio de la regla de DULONG y PETIT.

Pero no faltan elementos para los cuales el calor atómico, al aumentar la temperatura, crece hasta 8 $\frac{\text{cal}}{{}^{\circ}\text{C}\cdot\text{át-g}}$ aproximadamente.

Además, definido el *calor atómico de un compuesto* que contiene en su molécula n átomos, como el cociente del calor molecular por n, también el calor atómico de algunos compuestos (NaCl, KCl, KBr, $CaFl_2$, FeS_2, ...) varía con la temperatura según la curva de la figura 661.

Sin embargo, la extensión efectuada a los compuestos en el estado sólido solamente es lícita para compuestos de estructura química sencilla y que cristalizan en el sistema regular. Estos compuestos suelen llamarse *térmicamente simples*.

d] En los cambios de estado y en las modificaciones alotrópicas, el calor específico cambia a veces bruscamente de un modo notable; otras veces no se observa ninguna variación sensible del mismo.

e] **Gases.** Mientras que en los gases reales, y aún más en los vapores, c_p y c_v varían con la temperatura y con la presión, de un modo no sencillo, en los gases prácticamente perfectos la determinación de los calores específicos c_p y c_v, y, por tanto, de su razón $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ y la consideración de los calores moleculares $C_p = c_p\, m_{mol}$; $C_v = c_v\, m_{mol}$ ha conducido a los siguientes valores sensiblemente constantes con la temperatura, expresados en cal por °C y por mol·g :

gases monoatómicos.....	(ej., He, A, Ne)	$C_p = 5$,	$C_v = 3$,	$\gamma = 1{,}66$;
gases biatómicos.....	(ej., H_2, N_2, O_2, CO)	$C_p = 7$,	$C_v = 5$,	$\gamma = 1{,}40$;
gases triatómicos.....	(ej., CO_2)	$C_p \approx 9$,	$C_v \approx 7$,	$\gamma \approx 1{,}3$.

Por primera vez encontramos una propiedad que no es común a todos los gases prácticamente perfectos; es preciso distinguir los gases perfectos en mono-, bi-, tri-, ... atómicos.

§ 320. Calores latentes. Son las cantidades de calor aparentemente creadas o destruídas durante los cambios isotérmicos de estado ; es decir que no se ponen de manifiesto en forma de variaciones de temperatura.

Los dos ejemplos más comunes son el calor latente de vaporización y el de fusión.

a] **Vaporización.** Auméntese el volumen concedido a un vapor saturante en presencia de cierta cantidad de su líquido. Para el experimento conviene emplear un líquido muy volátil, por ejemplo el éter. Parte del líquido pasa al estado de vapor. Si la experiencia se efectúa rápidamente, la evaporación es adiabática y va acompañada de una fuerte disminución de temperatura. Este fenómeno se emplea mucho para obtener bajas temperaturas, sea para fines industriales (máquinas frigoríficas), sea con fines científicos.

La evaporación *isotérmica* (y, por tanto, también isobárica, porque la presión del vapor saturante de una substancia determinada solamente es función de la temperatura, y, por consiguiente, si ésta es constante, también lo es la presión) de una masa Δm del líquido necesita que se le suministre desde el exterior una cantidad apreciable de calor ΔQ. La medida de ΔQ se puede efectuar fácilmente a 0 °C mediante un calorímetro de Bunsen. Se pone en A (fig. 653) una masa conocida del líquido que se estudia, éter por ejemplo, y se espera a que haya alcanzado la temperatura de 0 °C. Entonces se produce su evaporación haciendo burbujear aire enfriado previamente a 0 °C en un serpentín suficientemente largo, rodeado de hielo fundente. La evaporación, siempre que sea suficientemente lenta, es isotérmica en estas condiciones, y el corrimiento de X (fig. 653) indica que la evaporación va acompañada de congelación de agua del calorímetro, esto es, de absorción de calor por parte del cuerpo que se evapora ; si el calorímetro está calibrado, se puede obtener ΔQ ; la masa m es conocida. ΔQ resulta proporcional a m :

$$\Delta Q = c_e \cdot m.$$

El coeficiente de proporcionalidad c_e es el *calor latente de vaporización* del líquido, y depende del líquido y de la temperatura.

Es :

$$[c_e] = \frac{[\Delta Q]}{[m]};$$

en particular, c_e se mide en $\frac{\text{cal}}{\text{g}_\text{m}}$; representa el número de calorías que deben suministrarse a 1 g_m de líquido a cierta temperatura para transformarlo en vapor saturante a la misma temperatura.

También se prestan a la medida de c_e los calorímetros eléctricos de paredes adiabáticas. Basta determinar el calor de Joule que es necesario suministrar eléctricamente al líquido para mantenerlo isotermo durante la evaporación de una masa m del mismo.

Durante la condensación *(licuefacción)* isotérmica, el cuerpo restituye una cantidad igual de calor.

El calor latente de vaporización disminuye al aumentar la temperatura de evaporación y tiende a cero cuando esta temperatura tiende a la temperatura crítica de la substancia.

Por ejemplo, el calor de vaporización del agua para temperaturas θ comprendidas entre 0 y 100 °C viene dado con suficiente exactitud por la relación numérica :

$$c_e = 606{,}5 - 0{,}695 \cdot \theta \qquad \begin{matrix} c_e \text{ en } \frac{\text{cal}}{\text{g}_\text{m}} \\ \theta \text{ en } ^\circ\text{C} \end{matrix}$$

Luego, para la simple evaporación isotérmica a 0 °C de una masa de agua, se necesita una cantidad de calor unas seis veces mayor que el preciso para calentar dicha masa líquida desde 0 a 100 °C.

b] **Fusión.** Análogamente se tiene en la fusión

$$\Delta Q = c_f \cdot m$$

y c_f es el *calor latente de fusión* ; es : $[c_f] = \frac{[\Delta Q]}{[m]}$; en particular, c_f se mide en $\frac{\text{cal}}{\text{g}_\text{m}}$ como c_e.

El calor latente de fusión c_f depende también de la substancia y de la temperatura de fusión, ya que ésta varía con la presión.

Este calor latente es a veces muy grande. Para el agua a 0 °C (y, por tanto, bajo presión normal) es $c_f = 79{,}67 \frac{\text{cal}}{\text{g}_\text{m}}$.

Siempre se sobreentiende que la fusión se produce a presión constante, y, por tanto, con variación de volumen.

c] Análogamente se tienen calores latentes de sublimación, de disolución, de dilución, etc.

§ 321. Poder calorífico. Puede imaginarse el poder calorífico como un calor latente de reacción química, durante una combustión. Recuérdese, sin embargo, que los cambios de estado son fenómenos reversibles, mientras que no se puede decir lo mismo de las combustiones.

Se procura efectuar la combustión isotérmicamente, para lo cual es necesario quitar el calor que se va formando durante la reacción. Para la masa m de combustible, se tiene :

$$\Delta Q = -c_r \cdot m. \qquad [1]$$

Lo mismo que $[c_e]$, $[c_f]$, es también $[c_r] = \frac{[\Delta Q]}{[m]}$; en particular, c_r se mide en $\frac{\text{cal}}{\text{g}_\text{m}}$, como c_e y c_j.

Introducido el signo —, la constante de proporcionalidad c_r tiene el significado de calor *desarrollado* en la combustión de la unidad de masa de combustible y se llama *poder calorífico* del combustible.

El poder calorífico de los buenos combustibles industriales es de varios miles de calorías por g_m; se expresa así siempre en $\frac{\text{kcal}}{\text{kg}_\text{m}}$ valor que coincide con el precedente.

Más generalmente, la [1] es válida para cualquier reacción química; si es $c_r > 0$ ($\Delta Q < 0$), la reacción se llama *exotérmica*, mientras que si es $c_r < 0$, se llama *endotérmica*.

El proceso puede desarrollarse a volumen constante en las bombas calorimétricas, o a presión constante como en el calorímetro de JUNKER (§ 315, *a*]).

Para las determinaciones industriales, que no son muy precisas, la distinción es generalmente superflua, y c_r se puede suponer que sólo es función de la naturaleza del combustible.

Suelen distinguirse industrialmente dos poderes caloríficos.

El *poder calorífico superior* viene dado por el calor obtenido en la combustión de la unidad de masa de combustible, cuando los productos de la combustión se enfrían casi hasta la temperatura ordinaria, con lo que se recoge y se engloba en c_r todo el calor de condensación del vapor de agua, siempre presente en cantidades notables en los productos de la reacción.

El *poder calorífico inferior* viene dado por el calor que se obtiene en la combustión cuando los productos de ésta no se enfrían por debajo de los 100 °C.

La diferencia entre ambos poderes caloríferos puede llegar al 10 %.

§ 322. Propagación del calor. Supóngase que nos hallamos en las condiciones fijadas al final del § 313. La experiencia cotidiana nos enseña que al colocar un cuerpo caliente en un recinto más frío, disminuye su temperatura mientras aumenta la de los cuerpos que lo rodean. Ha habido paso de calor desde el cuerpo caliente a temperatura más elevada hacia los otros de temperatura más baja.

Se tiene *conducción* cuando el calor pasa de un sitio caliente a otro frío a través de una cadena no interrumpida de medios materiales, que toman temperaturas intermedias, no observándose, sin embargo, ningún movimiento de materia.

Colocando un extremo de una barra de cobre en un mechero Bunsen, aumenta sensiblemente la temperatura por *conducción* hasta una distancia notable del extremo que está en la llama.

La conducción, característica de los sólidos, se observa también en los líquidos y en los gases; pero para observarla es preciso precaverse de la influencia de la *convección*, lo que se logra generalmente aumentando con cautela la temperatura del líquido o del flúido solamente en las capas más altas del mismo.

La *convección*, característica de los flúidos, consiste en la propagación del calor acompañada por un movimiento de materia: el calor se propaga desde las partes calientes a las frías porque se trasladan porciones de flúido caliente hacia las partes frías, mezclándose con éstas o substituyéndolas, y viceversa. Las *corrientes convectivas* espontáneas son debidas a las diferencias de densidad creadas en un flúido a causa de las diferencias de temperatura, porque las partes más calientes son más ligeras y se elevan.

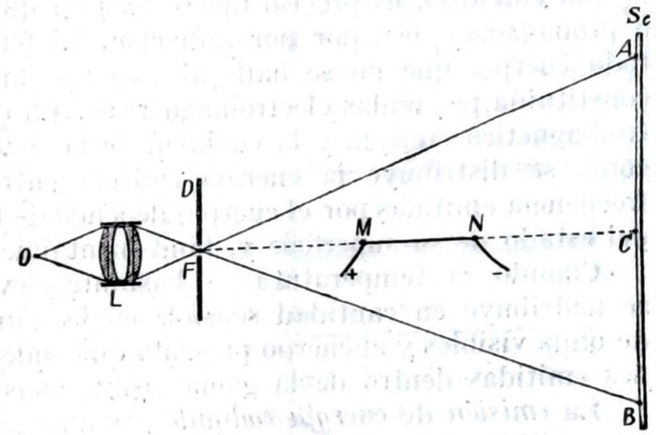


Fig. 662

Estas corrientes pueden ponerse en evidencia, en el aire, mediante el dispositivo de la figura 662. Un objetivo L concentra el haz luminoso, procedente de una lámpara de proyección O, sobre el pequeño orificio F del diafragma D. El cono de rayos AFB, que sale del orificio F, es proyectado sobre la pantalla S_c. Si dentro de este cono se coloca en MN un hilo fino de nicromo, se verá su sombra proyectada en C, sobre la pantalla. Haciendo pasar una corriente eléctrica por MN para ponerlo incandescente, las corrientes convectivas de aire se ven proyectadas en la pantalla en forma de densos penachos de «humo», que parten de la sombra de MN, elevándose. El aire caliente, que se eleva, tiene un índice de refracción distinto del aire frío, y la luz se desvía al pasar del aire caliente al frío, y viceversa, y de ahí procede el aspecto del fenómeno.

Si se sustituye MN por una vela encendida, se observarán las corrientes convectivas que se levantan de la llama.

Las corrientes convectivas en los líquidos, por ejemplo en el agua de una olla calentada en un hornillo, se observan muy bien poniendo en suspensión en el agua semillas de limón, serrín de madera densa, etc.

La convección tiene una importancia fundamental en la vida práctica. A ella se deben los movimientos atmosféricos, el tiro de las chimeneas, el funcionamiento de los radiadores de automóvil, termosifones, radiadores de calefacción, etc.

Sin embargo, se trata aún de un problema extremadamente mal definido y sobre el cual no insistiremos.

Finalmente, se habla a menudo del calor propagado por *radiación*, como sucede, por ejemplo, con el calor que recibimos del sol. Este *calor radiante* se propaga también en el vacío, y todavía mejor en el vacío que en cualquier medio material, sin que el medio se caliente a una temperatura intermedia entre la del cuerpo radiante y la del que recibe la radiación.

Sin embargo, es preciso fijarse bien en que no hay calor radiante o propagación de calor por radiación. El fenómeno consiste en que todo cuerpo, que no se halle al cero absoluto, emite una *radiación* constituída por ondas electromagnéticas. La cantidad de energía electromagnética emitida y la cualidad de las ondas (es decir, la manera cómo se distribuye la energía emitida entre las ondas de diversa frecuencia emitidas por el cuerpo) depende de la naturaleza del cuerpo, del estado de su superficie y, fundamentalmente, de su temperatura.

Cuando la temperatura es bastante elevada, la energía emitida se distribuye en cantidad sensible en la gama de las longitudes de de onda visibles y el cuerpo presenta «incandescencia». Las radiaciones emitidas dentro de la gama visible constituyen *luz*.

La *emisión* de *energía radiante* por un cuerpo, es decir, de energía transmitida por ondas electromagnéticas, constituye la *radiación*, y es un fenómeno más bien óptico que térmico, del cual hablaremos repetidas veces en el tomo II. Evitaremos la palabra «irradiación» para que no haya confusión con el término «irradiar», generalmente empleado hoy en día para indicar flujo de radiación (cualquiera que sea su naturaleza) sobre la unidad de superficie; por ejemplo, la irradiación de una superficie mediante la luz es su «iluminación».

Cuando el cuerpo caliente, a pesar de encontrarse en el vacío, va enfriándose, nos hallamos frente a otro de los fenómenos en los que desaparece el calor (§ 313).

Pero si la radiación emitida al incidir sobre un cuerpo se destruye, decimos que el cuerpo es *absorbente* para la radiación; en los casos más corrientes, el cuerpo absorbente se calienta en proporción con la energía radiante destruída: esto sucede, por ejemplo, cuando la luz incide sobre un cuerpo cuya superficie está ennegrecida con negro de humo. La energía electromagnética de la radiación incidente ha desaparecido y un cuerpo se ha calentado. Es un caso de creación de calor.

En conclusión, el único caso físicamente bien definido de propagación del calor es el de la *conducción*.

§ 323. Conductibilidad interna. Problema del muro. Se tiene un *muro*, es decir, una placa homogénea $ABCD$ [fig. 663, *a*)] muy extensa, de caras planas y paralelas. Aplíquese a una cara AB un termostato, a la temperatura θ_1; por ejemplo, póngase la pared AB en contacto con agua hirviendo.

En la cara CD aplíquese un termostato-calorímetro a temperatura θ_2; por ejemplo, un calorímetro de hielo.

Se espera el tiempo suficiente para llegar a un régimen estacionario de distribución de temperaturas dentro de la placa. Diversos termómetros, cuyos depósitos se encuentran empotrados en la pared, darán las temperaturas, constantes con el tiempo, en sus diversos puntos. Los termómetros más convenientes para este uso son pares termoeléctricos. Alcanzado el régimen estacionario, la temperatura θ es solamente función de la distancia x a la cara AB; si $(\theta_2 - \theta_1)$ no vale más que algunas decenas de grados, θ es función lineal de x, con buena aproximación. Además, en las condiciones de régimen estacionario, cualquier sección S del muro es atravesada, en igualdad de tiempo Δt, por una misma cantidad de calor ΔQ: cada capa infinitesimal de espesor dx recibe en el tiempo Δt la cantidad de calor ΔQ por una cara, y pierde otra cantidad igual por la otra cara. ΔQ puede medirse mediante el calorímetro conectado con CD, y resulta, según los experimentos,

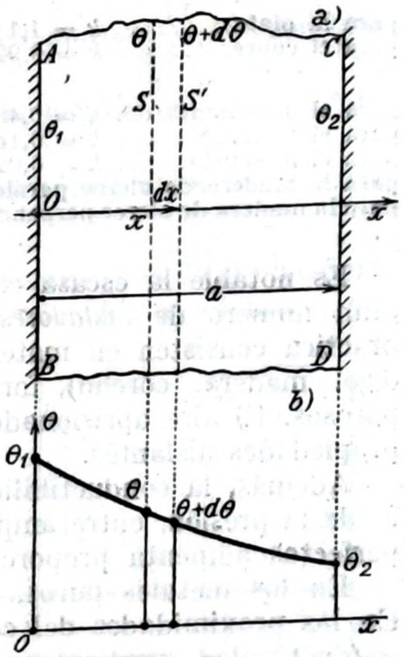


Fig. 663

$$\Delta Q = -k\frac{S\cdot\Delta\cdot(\theta_2-\theta_1)}{a}; \qquad [1]$$

siendo a el espesor del muro y k una constante positiva característica del material y de la temperatura media $\theta_m = \frac{\theta_1+\theta_2}{2}$ del muro, de modo que su valor numérico depende de las unidades de medida escogidas para ΔQ, a, S, Δt, y θ.

Se introduce el signo — porque considerando positivo el flujo de calor en el sentido de las x crecientes, la [1] también sea válida en signo.

k se llama *coeficiente de conductibilidad interna* y se toma como medida de la *conductibilidad* de la substancia de que está hecha la placa; se tiene:

$$[k] = \frac{[\Delta Q]\,[l]}{[S]\cdot[t]\,[\theta]} = \frac{[\Delta Q]}{[l]\cdot[t]\cdot[\theta]};$$

con las unidades de medida acostumbradas, k se mide en $\frac{\text{cal}}{\text{cm}\cdot\text{seg}\cdot{}^{o}\text{C}}$ y expresa el número de calorías que atraviesan, en el sentido de las temperaturas decrecientes, 1 cm^2 del muro, en 1 seg, a la tempera-

tura θ_m del experimento, cuando el gradiente de temperatura $\frac{\theta_2-\theta_1}{a}$ es de 1 °C por centímetro.

Alrededor de la temperatura ambiente, se tiene:

para la plata	$k = 1{,}1$	para el vidrio	$k = 0{,}001\,5$	$\left.\begin{matrix}\\\\\\\\\\\\\\\\\end{matrix}\right\}$ $\frac{\text{cal}}{\text{cm}^2\,\text{seg}\,\frac{°C}{\text{cm}}} = \frac{\text{cal}}{\text{cm}\cdot\text{seg}\cdot°C}$
para el cobre	$k = 0{,}92$	para el corcho	$k = 0{,}000\,1$ (mínimo entre los sólidos)	
para el aluminio	$k = 0{,}48$	para el agua	$k = 0{,}001$	
para el hierro	$k = 0{,}16$	para el hidrógeno.	$k = 0{,}000\,4$	
para el mercurio	$k = 0{,}02$	para el nitrógeno.	$k = 0{,}000\,06$	
para la madera de alerce paralelamente a las fibras	$k = 0{,}000\,86$			
para la madera de alerce perpendicularmente a las fibras	$k = 0{,}000\,36$			

Es notable la escasa conductibilidad calorífica de los gases; un gran número de *aisladores térmicos* o *calorífugos* empleados en la práctica consisten en materiales aislantes (p. ej.: lana, lana de vidrio, madera, corcho), formando fieltros, tejidos, placas o ladrillos porosos. El aire aprisionado dentro de estos materiales aumenta sus propiedades aislantes.

Además, la conductibilidad térmica en los gases es independiente de la presión, entre amplios límites, y en los gases prácticamente perfectos aumenta proporcionalmente a la temperatura absoluta.

En los metales puros, k aumenta al disminuir la temperatura. En las proximidades del cero absoluto se acentúa este aumento de conductividad, particularmente en algunos metales. Así, en el oro se tiene:

para $\theta = 0$ °C	$k = 0{,}74$	$\left.\begin{matrix}\\\\\end{matrix}\right\}$ $\frac{\text{cal}}{\text{cm}\cdot\text{seg}\cdot°C}$.
para $\theta = -183$ °C	$k = 0{,}77$	
para $\theta = -253$ °C	$k = 3{,}4$	

En el diamante y en el vidrio, k es prácticamente independiente de la temperatura; en varias substancias amorfas, k aumenta con θ.

En realidad, en los cristales que no pertenecen al sistema regular, la conductibilidad depende de la dirección. Si en el centro de una lámina de cuarzo, de caras paralelas al eje de simetría ternaria, recubierta de una capa delgada de parafina, se apoya la punta de un hilo grueso de cobre caliente, la parafina se funde según una área elíptica, en cuyo centro se apoya la punta.

Volviendo a la [1], si, alcanzado el régimen estacionario, θ no es función lineal de x, es decir, si el gráfico $\theta = \theta\,(x)$ no es una recta, se podrá repetir el razonamiento hecho aplicándolo sólo a una capa bastante delgada del muro dx (fig. 663), y, en el límite, para dx tendiendo a cero, se tiene:

$$k = -\frac{\Delta Q}{\Delta t \cdot \frac{d\theta}{dx} \cdot S}. \qquad [2]$$

Esta fórmula define el *coeficiente k de conductibilidad verdadera* de la substancia de que está construído el muro, a la temperatura θ de la capa dx, mientras que la [1] da el *coeficiente medio* entre las temperaturas θ_1 y θ_2.

Puesto que en las condiciones de régimen estacionario ΔQ es el mismo a través de cualquier sección S del muro, $\frac{\Delta Q}{\Delta t \cdot S}$ es constante y k resulta inversamente proporcional a la pendiente $\frac{d\theta}{dx}$ de la curva $\theta = \theta\,(x)$, o sea, el gradiente $\frac{d\theta}{dx}$ de la temperatura en la capa infinitesimal dx.

La determinación experimental de la curva $\theta = \theta\,(x)$, mediante un número suficiente de termómetros introducidos en el muro, permite, pues, establecer la ley de variación de k de una capa del muro a otra. Si el muro es homogéneo, la variación de k de una capa a otra, sólo se debe a que la temperatura varía de una capa a otra. Si el muro está compuesto de capas sucesivas de diversas substancias, por ejemplo mitad de cobre y mitad de hierro, la curva $\theta = \theta\,(x)$ presenta la forma de la figura 664; la pendiente (por tanto, k) cambia bruscamente en la superficie S de contacto entre cobre y hierro. Un contacto térmico imperfecto entre los dos metales (p. ej., una capa delgada de aire entre las dos placas de cobre y de hierro) se manifiesta con un brusco salto de la temperatura en A.

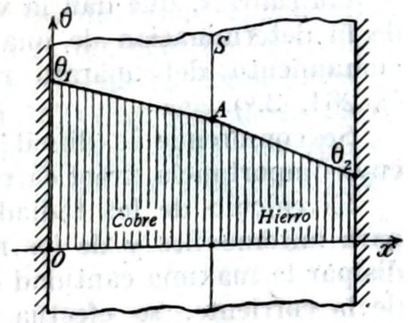


Fig. 664

§ 324. **Conductibilidad externa.** Uno de los casos más corrientes de paso de calor de un medio a otro se tiene en el enfriamiento de un cuerpo sumergido en un flúido, el aire por ejemplo. El calor se pierde a través de la superficie del cuerpo, y cooperan a esta pérdida la conducción, la convección y la emisión de energía radiante.

Entre las numerosas leyes propuestas, basta recordar solamente la ley de NEWTON del enfriamiento:

$$\Delta Q = h \cdot S \cdot \Delta\theta \cdot \Delta t \qquad [1]$$

en cuya fórmula ΔQ es la cantidad de calor perdido, S es la superficie dispersante, Δt es la duración del experimento, $\Delta\theta$ es la diferencia entre la temperatura del cuerpo en los puntos próximos a su superficie S y la temperatura del ambiente (supuesto isotermo) en los puntos tan lejanos del cuerpo como para no sentir sensiblemente la introducción del cuerpo caliente en el mismo ambiente.

La [1] sólo es aceptablemente aproximada cuando $\Delta\theta$ se reduce a poquísimas decenas de grados.

h se llama *coeficiente de conductibilidad externa*, y depende de las unidades de medida fijadas para ΔQ, S, $\Delta\theta$ y Δt, y de la naturaleza y del estado brillante, mate, oxidado, etc., de la superficie del cuerpo; depende también de la naturaleza y de las condiciones del ambiente en que está sumergido el cuerpo, y depende muchísimo de las condiciones de calma o agitación del flúido que rodea al cuerpo.

Un hilo fino de nicromo, tendido en el aire y llevado al rojo, se «extingue» con sólo agitar con una mano el aire que le rodea, lo cual indica que la conducción externa ha sido aumentada.

Se ha dicho ya (§ 302) que la resistencia eléctrica de un hilo es función de la temperatura. Ahora bien, a igualdad de corriente, esta temperatura depende del estado de reposo o de movimiento del aire circundante: he aquí el principio en que se basan los *anemómetros de hilo caliente*, que dan la velocidad de una corriente de aire a base de la determinación de una resistencia eléctrica. Es análogo el funcionamiento del aparato receptor de ondas sonoras de TUCKER (§ 264, 3.º).

Se comprende lo difícil que es fijar el valor de la constante h, cuya importancia práctica es, sin embargo, considerable.

El cálculo de los radiadores para calefacción, de los radiadores para automóviles y de los reostatos, en los cuales conviene siempre disipar la máxima cantidad del calor de Joule producido por el paso de la corriente, se efectúa tomando como base los valores experimentales de h.

Ordinariamente, el problema está tan mal determinado, que obliga a que, en la mayor parte de los casos, se busque una solución empírica.

En cambio, es determinado el problema del enfriamiento de un cuerpo en el vacío, en cuyo caso el enfriamiento solamente se debe a la emisión de energía radiante.

La ley de STEFAN, que regula estos cambios para los cuerpos negros, se ha indicado ya en el § 305.

§ 325. Problema de la barra. Se tiene una barra (fig. 665) larga y delgada: S es su sección; P es el perímetro de la sección, y l es la longitud de la barra. Un extremo se encuentra a temperatura constante θ_1, y el ambiente tiene la temperatura θ_2 (supondremos $\theta_1 > \theta_2$). Espérese a que se haya establecido el régimen estacionario. Termómetros T introducidos a lo largo de la barra indicarán cuándo se ha llegado a dicho estado.

Supóngase l suficientemente grande para que el otro extremo tenga sensiblemente la temperatura θ_2 del ambiente. La temperatura θ varía a lo largo de la barra desde el valor θ_1 al valor θ_2; se busca la función $\theta = \theta(x)$.

Esta función se obtiene experimentalmente con el aparato de WIEDEMANN y FRANZ (fig. 665), que consiste esencialmente en una

barra que lleva termómetros iguales cuyos depósitos se encuentran introducidos en unos pocitos equidistantes abiertos a lo largo de la barra que están llenos de mercurio, para asegurar un buen contacto térmico entre los termómetros y la barra. La pared E sirve para

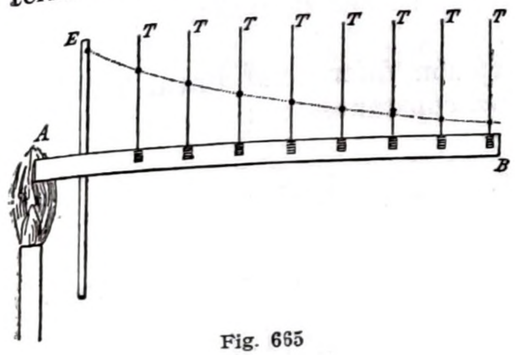


Fig. 665

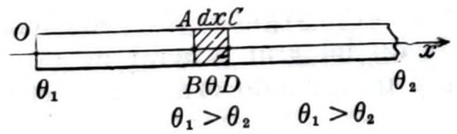


Fig. 666

eliminar las perturbaciones producidas por la llama.

Los sucesivos meniscos del mercurio de los termómetros dibujan bastante bien una curva $\theta = \theta(x)$ de forma exponencial.

Esto puede deducirse del cálculo. Sea x (fig. 666) un eje coincidente con el eje de la barra. Puesto que se está en condiciones de régimen estacionario, un elemento $dx = ABCD$ (fig. 666) de la barra no acumula ni pierde calor; el calor $(\Delta Q)_{AB}$ que entra por AB es igual a la suma del $(\Delta Q)_{CD}$ que sale por CD y del ΔE emitido lateralmente, o sea:

$$(\Delta Q)_{AB} = (\Delta Q)_{CD} + \Delta E.$$

Pero (§ 323, [2]):

$$(\Delta Q)_{AB} = -k \cdot S \cdot \Delta t \cdot \left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{AB}$$

$$(\Delta Q)_{CD} = -k \cdot S \cdot \Delta t \cdot \left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{CD};$$

además, se tiene (§ 324, [1]):

$$\Delta E = h \cdot P \cdot dx \cdot \Delta t \cdot (\theta - \theta_2).$$

Luego:

$$k \cdot S \cdot \Delta t \left[\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{CD} - \left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{AB}\right] = h \cdot P \cdot dx \cdot \Delta t \cdot (\theta - \theta_2)$$

y puesto que

$$\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{CD} - \left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{AB} = \frac{d^2\theta}{dx^2} \cdot dx = \frac{d^2(\theta - \theta_2)}{dx^2} \cdot dx,$$

se tiene :

$$k \cdot S \cdot \frac{d^2 (\theta - \theta_2)}{dx^2} = h \cdot P \cdot (\theta - \theta_2).$$

Ésta es la condición a que debe satisfacer la función $\theta = \theta(x)$ cuando el régimen sea estacionario.

La integral general de esta ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden de coeficientes constantes es :

$$\theta - \theta_2 = C_1 \cdot e^{\sqrt{\frac{h \cdot P}{k \cdot S}} \cdot x} + C_2 \cdot e^{-\sqrt{\frac{h \cdot P}{k \cdot S}} \cdot x}$$

y las constantes C_1 y C_2 vienen fijadas por las condiciones iniciales :

$$\text{para } x = 0 \text{ es } \theta = \theta_1 \qquad \text{para } x = \infty \text{ es } \theta = \theta_2.$$

Luego :

$$C_1 = 0 \qquad C_2 = (\theta_1 - \theta_2).$$

Y la distribución de temperaturas a lo largo de la barra será, pues :

$$\theta - \theta_2 = (\theta_1 - \theta_2) \cdot e^{-\sqrt{\frac{h \cdot P}{k \cdot S}} \cdot x} \qquad [1]$$

Esta fórmula precisa la ley exponencial que debe indicar el aparato de Wiedemann y Franz si es legítima la deducción teórica, es decir, si son aplicables a las leyes [1], § 324, y [2], § 323, con k constante a lo largo de toda la barra.

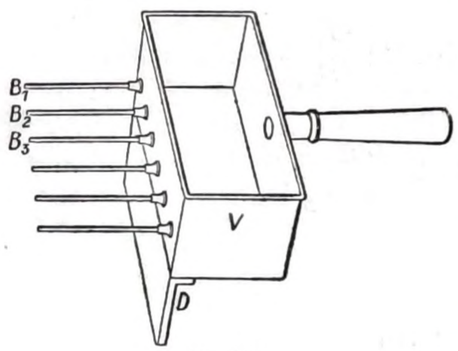


Fig. 667

Como caso particular, para dos barras de distinta conductibilidad interna k_1 y k_2, pero de iguales dimensiones, con superficies iguales (p. ej., ambas plateadas y brillantes), con iguales temperaturas iniciales θ_1, se tiene la misma temperatura θ a distancias x_1 y x_2 tales que sea :

$$(\theta_1 - \theta_2) \cdot e^{-\sqrt{\frac{h \cdot P}{k_1 \cdot S}} \cdot x_1} = (\theta_1 - \theta_2) \cdot e^{-\sqrt{\frac{h \cdot P}{k_2 \cdot S}} \cdot x_2},$$

es decir, tales que :

$$\frac{x_1}{x_2} = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}; \qquad \frac{k_1}{k_2} = \frac{x_2^1}{x_2^2}.$$

Para obtener las distancias x_1 y x_2, se recubren las dos barritas de una delgada capa de parafina y se las fija con un extremo en el agua hirviente (fig. 667, *cajita de* INGENHOUSZ). El límite de fusión de la parafina en las dos barras indica puntos de igual temperatura θ. Así se miden x_1 y x_2 ; si se conoce k_1, se puede deducir fácilmente k_2. Se obtiene de este modo una medida relativa muy rápida de los coeficientes de conductibilidad interna.

CAPÍTULO III

Termodinámica

A. — PRIMER PRINCIPIO DE LA TERMODINÁMICA

§ 326. Principio de la equivalencia. El teorema de la conservación de la energía, en la forma simple con que se ha enunciado en mecánica, no corresponde a los hechos experimentales. Así, por ejemplo, un péndulo debería continuar indefinidamente sus oscilaciones, y, en cambio, éstas se amortiguan a causa de los rozamientos. Después de algún tiempo desaparecen la energía cinética y la energía potencial del péndulo.

Por otra parte, hemos advertido en § 313 que el calor puede ser creado o destruído, y se deduce de todos los ejemplos allí citados que cuando esto sucede se logra siempre descubrir un fenómeno enérgético simultáneo, que es una modificación de la energía de los cuerpos interesados en el fenómeno, o un trabajo efectuado.

Un gas comprimido se calienta, pero entretanto los pesos P (figura 615, *a*)] que lo comprimían han perdido energía de posición ; y viceversa, un gas que se expansiona con trabajo externo se enfría, pero sólo mientras levanta los pesos.

Los frenos que actúan sobre un vehículo desarrollan calor por rozamiento, pero el vehículo pierde energía cinética. Al hacer girar con movimiento uniforme una rueda frenada, ésta se calienta, pero entretanto la fuerza motriz efectúa un trabajo que no corresponde a un aumento equivalente de energía cinética, como debería suceder según el teorema de las fuerzas vivas (§ 126).

En los cambios de estado y en las reacciones químicas se tiene creación o desaparición de calor en el sentido ya indicado otras veces ; pero varía la energía de posición entre moléculas o entre átomos.

¿Es posible revalidar el teorema de conservación de la energía, suponiendo que el calor sea una forma de energía que pueda medirse en *calorías* o, todavía mejor, en *erg* o en *joule*?

Es posible. Pero es preciso, antes que todo, establecer que las únicas cantidades de calor ΔQ de que será lícito hablar son las que el cuerpo, o el sistema de cuerpos con que se experimenta, recibe de

un calorímetro ($\Delta Q > 0$) o proporciona a éste ($\Delta Q < 0$); este calorímetro da, en valor y signo, la medida de las cantidades de calor recibidas por el cuerpo (o por el sistema).

La confirmación más inmediata de la hipótesis de la *equivalencia* entre calor y energía se logra mediante experimentos en los que desaparezca una cantidad $\Delta \mathfrak{L}$ de energía mecánica, y un calorímetro indique la creación simultánea de una cantidad de calor ΔQ, mientras que al terminar el experimento *todos los cuerpos interesados se encuentren en el mismo estado inicial*, es decir, que no hayan experimentado ninguna transformación o que ésta haya sido una transformación cíclica.

Es fundamental esta limitación relativa al estado final del cuerpo o del sistema interesado en el experimento.

Comprímase un gas en un calorímetro isotermo, por ejemplo, en el tubo del calorímetro de Bunsen. El calor producido es absorbido y medido por el calorímetro. ¿Se podrá pensar, sin más, que este calor es el equivalente del trabajo de compresión? *No*. La variación de volumen así experimentada isotérmicamente por el gas constituye un cambio en el estado (interno) del gas, y no estamos todavía en condiciones de decidir si va acompañado de un almacenamiento en el cuerpo de una parte más o menos apreciable de la energía correspondiente al trabajo de compresión.

Si se comprimiera en el calorímetro un resorte de buen acero, la compresión no vendría acompañada de desprendimiento de calor; y con esto no quiere decirse que la energía correspondiente al trabajo de compresión se haya perdido. Esta energía queda escondida en el resorte, isotérmico, en forma de energía elástica de posición, y es recuperada en la expansión del resorte. No se puede excluir *a priori* que también en el gas suceda un hecho análogo.

He aquí, pues, la necesidad de recurrir a experimentos en los que coincidan el estado inicial y el estado final de los cuerpos interesados, es decir, en que estos cuerpos efectúen un *ciclo*.

Durante una transformación de esta clase, el calorímetro va proporcionando y midiendo las cantidades de calor dQ necesarias para la transformación; y al final de ésta el calor proporcionado por el calorímetro se indicará en valor y signo por el símbolo

$$\oint dQ,$$

esto es, integral, extendida al ciclo, de las cantidades elementales de calor que se han ido proporcionando a los cuerpos con que se experimenta.

Análogamente, el trabajo efectuado por los cuerpos sobre el exterior durante el ciclo se indicará así:

$$\oint d\mathfrak{L}.$$

Ahora bien, en experimentos de este tipo, efectuados con variadísimos dispositivos y en los cuales se efectúa en general la comparación entre un trabajo mecánico efectuado sobre un cuerpo $\left(\oint d\mathfrak{L} < 0\right)$ y la cantidad concomitante de calor desarrollada por rozamiento y

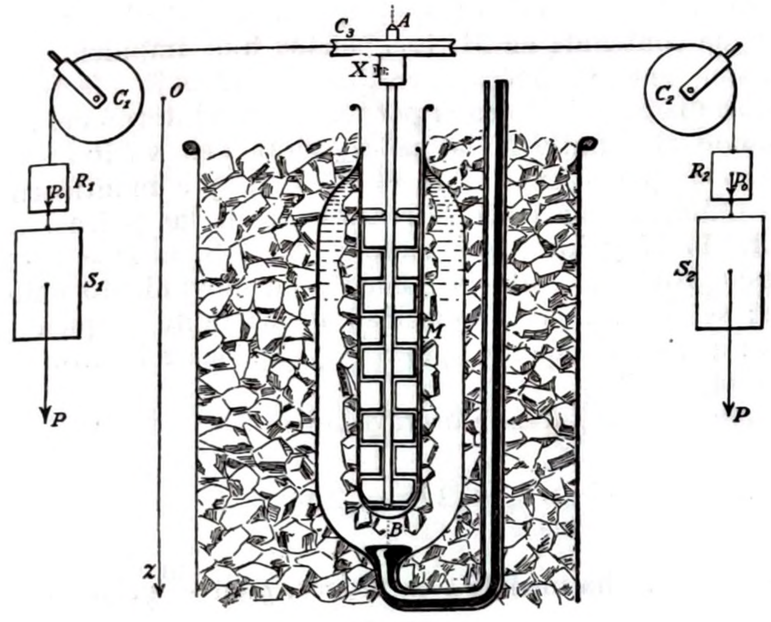


Fig. 668

recibida por un calorímetro adecuado $\left(\oint dQ < 0\right)$, ha dado siempre:

$$\frac{\oint d\mathfrak{L}}{\oint dQ} = J \text{ constante positiva,} \qquad [1]$$

o sea:

$$\oint d\mathfrak{L} = J \cdot \oint dQ\,; \qquad [2]$$

es decir: para toda cantidad de trabajo desaparecido $\oint d\mathfrak{L}$ (< 0), se obtiene una cantidad equivalente de calor $\oint dQ$ (< 0), o viceversa (*principio de la equivalencia de* MAYER).

J se llama *equivalente mecánico de la caloría* y mide el trabajo equivalente a la unidad de cantidad de calor; el valor de J depende, por tanto, de las unidades de medida escogidas para $\oint dQ$ y para el trabajo $\oint d\mathfrak{L}$; pero es una *constante universal*, es decir, tiene el mismo valor cualquiera que sea el experimento efectuado, siempre que sea del tipo indicado antes, es decir, cíclico.

El más sencillo de estos experimentos es el de JOULE; pero conviene sustituir el calorímetro de las mezclas, empleado por JOULE, por un calorímetro de Bunsen. En el tubo M (fig. 668) hay algunos centímetros cúbicos de agua salada, y en ella se halla sumergido un molinete que puede girar alrededor del eje AB. Puesto en movimiento el molinete mediante los pesos $S_1 = S_2 = P$ y las poleas C_1, C_2, C_3, se agita el agua contenida en M. Las paletas fijas impiden que el agua adquiera una energía cinética sensible; el trabajo efectuado sobre el líquido se disipa todo en calor por rozamiento interno del agua.

Aflojando el tornillo X las poleas giran «en vacío»; se pueden determinar los pesos motores $R_1 = R_2 = P_0$ que mantienen el movimiento uniforme venciendo el rozamiento de las poleas. Accionando el tornillo X y los pesos motores $S_1 = S_2 = P = m \cdot g$, se obtiene, después de una corta fase inicial, un movimiento uniforme del molinete; se determina la velocidad u, bastante pequeña y constante, con que descienden los pesos S_1 y S_2. Sea z la altura de caída de los pesos.

El trabajo de la fuerza de gravedad es:

$$\mathfrak{L}_1 = 2Pz = 2mgz;$$

si, por ejemplo, se ha medido z en metros, g en $\frac{\text{m}}{\text{seg}^2}$, m en kg_m y, por tanto, resulta P medido en newton ($= 10^5$ dinas) y $\mathfrak{L}_1$ resulta medido en joule ($= 10^7$ erg).

Solamente los pesos S_1 y S_2 poseen al final una energía cinética sensible que vale

$$\mathfrak{E} = 2\,\frac{1}{2}\,mu^2;$$

para la coherencia con las unidades precedentes se medirá u en $\frac{\text{m}}{\text{seg}}$ y $\mathfrak{E}$ resulta medido también en joule.

Luego es conocido el trabajo mecánico perdido:

$$-\oint d\mathfrak{L} = |\Delta\mathfrak{L}| = \mathfrak{L}_1 - \mathfrak{E} = 2mgz - 2\cdot\frac{1}{2}\,mu^2,$$

y el calorímetro indica la adquisición de la cantidad de calor $|\Delta Q| = -\oint dQ$, que supondremos que está medida, por ejemplo, en calorías.

El estado final del cuerpo con que se experimenta (el agua contenida en el tubo M) es igual al estado inicial: agua líquida a 0 °C, y a la presión atmosférica. Por lo tanto, el experimento permite la

medida de $|\Delta\mathfrak{L}|$ y de $|\Delta Q|$ en las condiciones convenientes para comprobar el principio de la equivalencia.

CALLENDAR ha efectuado determinaciones muy exactas de J. Su aparato consta de un tambor de latón A (fig. 669), que funciona como vaso calorimétrico y puede girar alrededor de un eje horizontal. El tambor contiene una masa conocida de agua y se conoce el equivalente en agua del tambor. El movimiento de rotación del tambor es frenado por una cinta de seda que rodea el cilindro del tambor y que mantiene tensa el peso P.

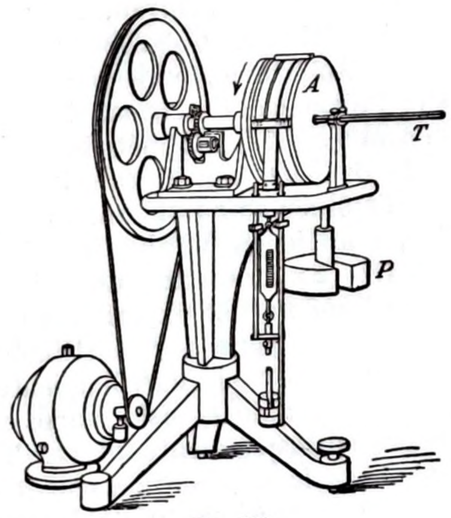


Fig. 669

Se regula la velocidad de rotación del tambor de modo que, por rozamiento de la cinta que resbala sobre él, el peso P quede exactamente en equilibrio bajo las acciones contrarias de la gravedad y de la cinta que por rozamiento tiende a levantar el peso.

El aparato es un *freno dinamométrico*, en el que se pierde la energía mecánica (trabajo) necesaria para mantener el tambor en movimiento uniforme; en compensación, el calorímetro revela la adquisición de cierta cantidad de calor $|\Delta Q|$. Ésta se determina fácilmente conociendo la cantidad de agua m contenida en el calorímetro, y el equivalente en agua m_c del vaso calorimétrico y del termómetro; si $\Delta\theta$ es el aumento de temperatura, leído en el termómetro T, se tiene:

$$|\Delta Q| = c_{\text{H}_2\text{O}} \cdot (m + m_c) \cdot \Delta\theta.$$

La cantidad de trabajo $|\Delta\mathfrak{L}|$ disipado se calcula a partir del número n de vueltas, del radio r del tambor y del peso P. Se tiene:

$$|\Delta\mathfrak{L}| = n \cdot 2\pi r \cdot P;$$

adoptando las unidades antes indicadas, r ha de medirse en metros.

El valor de J obtenido mediante estos experimentos, y generalmente aceptado, es:

$$J = \frac{\oint d\mathfrak{L}}{\oint dQ} = 4.186\ \frac{\text{joule}}{\text{cal}} = \frac{1}{0{,}238\,9}\ \frac{\text{joule}}{\text{cal}}. \qquad [3]$$

Si se miden los espacios en m y las fuerzas en kg_p, los trabajos se han de medir en *kilográmetros;* y como es $1\ \text{kg}_\text{p} = 9{,}806\,65$ new-

ton, resulta 1 kilográmetro = 9,806 65 joule ; por lo tanto, se tiene :

$$J \approx 427 \ \frac{\text{kilográmetros}}{\text{kilocaloría}} \qquad [4]$$

En realidad, el experimento de CALLENDAR no deja a los cuerpos interesados en un estado final igual al inicial : la cinta, el recipiente y el agua se encuentran, finalmente, a una temperatura más elevada que la inicial. Esto se debe al empleo del calorímetro de Regnault, que no es isotérmico, para la medida de $|\Delta Q|$, y a la utilización, como substancia calorimétrica, de la misma agua sobre la cual se disipa el trabajo $|\Delta \mathfrak{L}|$. El método es lícito en cuanto sea aceptable la medida de $|\Delta Q|$ con el calorímetro de Regnault.

También se ha obtenido J mediante los dos experimentos siguientes, que tienen notable interés histórico :

1.º **Experimento de Hirn.** Se calienta un pedazo de plomo, martillándolo. El experimento es legítimo gracias a que el plomo puro no se agria por martillado ; de otro modo, parte de la energía realizada por el martillamiento, en lugar de convertirse en calor, hubiera podido transformarse en energía potencial atómica y molecular correspondiente al cambio de contextura del plomo, análogamente a lo que sucede con los cambios de estado (1).

2.º **Experimento de Mayer.** Se comprime un gas (fig. 615) en un calorímetro isotérmico. Éste señala la adquisición de cierta cantidad de calor $|\Delta Q|$ porque el gas se calienta al comprimirlo. Se lleva de nuevo el gas a las condiciones iniciales haciéndole expansionar sin trabajo externo (fig. 616) hasta darle de nuevo el volumen inicial. En esta fase de la transformación, el intercambio de calor con el calorímetro es sensiblemente nulo (§ 317). El calor $|\Delta Q|$ equivale al trabajo efectuado sobre el gas durante la compresión.

En todos los experimentos descritos se ha disipado trabajo efectuado desde el exterior sobre el cuerpo o sobre el sistema, y éste ha cedido una cantidad equivalente de calor.

El experimento inverso es mucho más difícil, aunque económicamente sea más interesante. Se efectúa en todas las *máquinas térmicas*, en las cuales parte del calor suministrado a la máquina desaparece como tal, mientras ésta, en compensación, realiza una cantidad equivalente de trabajo sobre el exterior. Según los convenios adoptados por nosotros (§ 326), en este experimento son positivos $\oint dQ$ y $\oint d\mathfrak{L}$.

(1) Por ejemplo : para evaporar isotérmicamente 1 g_m de agua a 100 °C, es preciso proporcionar al agua 535 cal ; el aumento de volumen debido al paso del líquido al estado de vapor va ligado a unos 160 joule de trabajo externo. J resultaría $\frac{160}{535} \approx 0{,}31 \ \frac{\text{joule}}{\text{cal}}$, en lugar de 4,186. Pero la transformación efectuada *no* es un ciclo : en el estado inicial se tiene agua líquida, y en el estado final, el agua ha pasado a vapor saturante.

En conclusión : *el principio de la equivalencia establece que en una transformación cíclica el calor dado al cuerpo que efectúa el ciclo y el trabajo externo efectuado por el cuerpo satisfacen a la condición :*

$$J \cdot \oint dQ - \oint d\mathfrak{L} = 0, \qquad [5]$$

siendo J una constante universal, independiente del tipo de transformación, y que sólo depende de las unidades de medida de $d\mathfrak{L}$ y de dQ.

Como J tiene el carácter de constante universal, *parece legítima la hipótesis según la cual el calor es una forma de energía.*

Toda cantidad de calor ΔQ suministrada por un calorímetro a los cuerpos en estudio, ha de considerarse como una cantidad de energía que, en unidades mecánicas, se expresa por $J \cdot \Delta Q$.

La unidad *caloría* ya no tiene razón de ser ; pero es muy cómoda : con esta unidad, el calor específico del agua tiene, en torno a 15 °C, el valor 1 $\left(\frac{\text{cal}}{{}^{\circ}\text{C} \cdot g_m}\right)$. Ahora bien, un convenio internacional (1940), invirtiendo el proceso histórico, ha establecido la siguiente definición : *caloría* es la energía (térmica) de $\frac{3600}{860} = 4{,}186\ 05$ joule (1) ; en otros términos, se conviene en que 1 watt-hora, es decir, 3600 joule, equivalen exactamente a 860 calorías. Se comprende la oportunidad de esta definición considerando que se difunden cada vez más los calorímetros eléctricos por un lado y la calefacción eléctrica por otro.

Todo esto conduce de la manera más natural a tomar como definición de la cantidad de calor, la ecuación base (§ 6) :

$$Q = \mathfrak{L}, \text{ o sea, } Q \cdot [Q] = \mathfrak{L} \cdot [\mathfrak{L}] \ \textit{ecuación entre magnitudes} \qquad [6]$$

Entonces, en unidades coherentes, se deducen de la [6] las dos ecuaciones :

$$[Q] = [\mathfrak{L}] \ \textit{ecuación entre unidades,} \qquad [7]$$

por ejemplo, joule en ambos casos, o erg (o incluso calorías), en ambos casos :

$$Q = \mathfrak{L} \ \textit{ecuación entre medidas.} \qquad [8]$$

Si se midiesen las energías mecánicas, por ejemplo en *joule*, y se quisiera conservar, sin embargo, la unidad *caloría*, tan difundida y tan cómoda, para las energías que se manifiestan como cantidades

(1) En espera de la desaparición definitiva del llamado « joule internacional » (tomo II), es oportuno advertir que se trata del joule « absoluto », igual a 10^7 erg.

de calor, ello será perfectamente posible, pero tales unidades ya no son «coherentes» entre sí (§ 6) a base de la [6]; será menester desdoblar la [6] ([18], § 6) en:

$$[Q'] = n\cdot[\mathfrak{L}], \qquad Q' = \frac{1}{n}\,\mathfrak{L} \qquad [9]$$

y precisamente:

$$\text{caloría} = \frac{3600}{860}\ \text{joule}; \qquad Q' = \frac{860}{3600}\,\mathfrak{L}. \quad \begin{matrix} Q' \text{ en cal} \\ \mathfrak{L} \text{ en joule} \end{matrix} \qquad [10]$$

En lo sucesivo nos serviremos siempre de la [6]; la [5] se reduce a:

$$\oint dQ - \oint d\mathfrak{L} = 0 \quad \textit{ecuación entre magnitudes} \qquad [11]$$

y mediremos siempre Q y $\mathfrak{L}$ en unidades coherentes, que, por la [7], son iguales entre sí; *si se midiesen las cantidades de calor en unidades mecánicas*, ello significaría que $[Q]$ se identifica con la unidad escogida para la energía mecánica (por ejemplo, joule); entonces, además de la (11), será también válida la:

$$\oint dQ - \oint d\mathfrak{L} = 0 \quad \textit{ecuación entre medidas} \qquad [12]$$

Si se continúa empleando a la vez la caloría y el joule, la [11] puede considerarse totalmente válida, pero en las ecuaciones entre medidas, necesarias en todos los cálculos numéricos, figurará el coeficiente $J = \dfrac{3600}{860}$.

En los experimentos descritos, el trabajo externo $\oint d\mathfrak{L}$ consistía siempre en el levantamiento o en el descenso de pesos. Éste es el caso más común. Pero la [5] sirve también para cualquier forma de trabajo externo efectuado (§ 293), o, más justamente, para cualquier forma de *energía* que el cuerpo ha restituído al exterior a cambio de la energía calorífica recibida $\oint dQ$.

Así, en una máquina eléctrica, por ejemplo en una pila termoeléctrica, podrá convenir considerar el circuito de utilización de la corriente como circuito *exterior* al sistema de la máquina eléctrica. En este caso $\oint dQ$ es la suma algebraica de las cantidades de calor suministradas a la máquina hasta sus «bornes», por ejemplo suministradas al trayecto P_1ABP_2 de una pila termoeléctrica (fig. 633), y en particular a las soldaduras, con tal que el estado de dicho trayecto, y también la temperatura, permanezcan constantes; $\oint d\mathfrak{L}$

comprende también la energía eléctrica suministrada por la máquina eléctrica al circuito exterior.

§ 327. Primer principio de la termodinámica. Imagínese ahora una transformación del cuerpo desde un estado inicial A_1 (v_1, p_1, θ_1) a un estado final A_2 (v_2, p_2, θ_2), distinto del estado inicial. Tomemos v y p como variables independientes.

Es cómodo tener a la vista una representación gráfica de la transformación, y supondremos, por tanto, que la transformación que se estudia viene representada por la línea $A_1a_1A_2$ (fig. 670), lo cual es ciertamente posible en las transformaciones reversibles (§ 294).

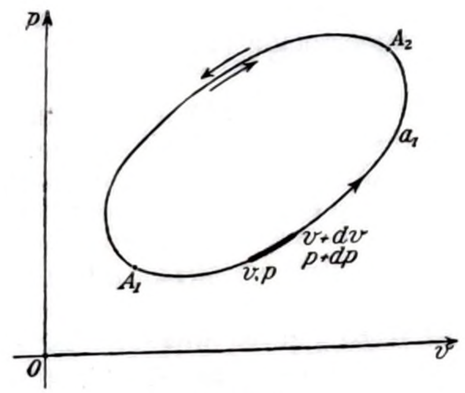


Fig. 670

Durante cada una de las transformaciones elementales (v, p; $v + dv$, $p + dp$) que constituyen la transformación supuesta, sea dQ el calor proporcionado, *expresado en unidades mecánicas*, y sea $d\mathfrak{L}$ el trabajo externo efectuado por el sistema. Al final de la transformación, la expresión $\int_1^2 (dQ - d\mathfrak{L})$ da la diferencia entre la energía calorífica proporcionada al sistema mediante calorímetros adecuados y el trabajo externo efectuado por el sistema. En las integrales se han indicado brevemente los estados extremos A_1 y A_2 por los números 1 y 2.

Se podrá también escribir:

$$\int_1^2 (dQ - d\mathfrak{L}) = \int_1^2 dQ - \int_1^2 d\mathfrak{L},$$

con tal que se entienda que las dos integrales son tomadas a lo largo de la misma transformación $A_1a_1A_2$.

Entre los estados A_1 y A_2 pueden imaginarse infinitas transformaciones reversibles (§ 294); sea $A_1a_2A_2$ una de ellas.

Con la transformación en estudio $A_1a_1A_2$ y la transformación $A_2a_2A_1$ (es preciso fijarse en el sentido) se constituye un ciclo.

Según la [11], § 326, se tiene:

$$\oint (dQ - d\mathfrak{L}) = \int_{A_1a_1A_2} (dQ - d\mathfrak{L}) + \int_{A_2a_2A_1} (dQ - d\mathfrak{L}) = 0$$

o también, puesto que $A_2a_2A_1$ es una transformación reversible,

$$\int_{A_1a_1A_2} (dQ - d\mathfrak{L}) = \int_{A_1a_2A_2} (dQ - d\mathfrak{L}). \qquad [1]$$

El razonamiento puede repetirse para cualquier transformación entre los dos extremos fijos A_1 y A_2 y utilizando siempre la misma transformación reversible $A_1a_2A_2$.

Se puede, pues, generalizar la [11], § 326 y decir que para una transformación cualquiera no cíclica $\int_1^2 (dQ - d\mathfrak{L})$ es en general $\neq 0$, pero independiente de la transformación, es decir, que sólo depende de los extremos de la misma.

Análogamente a cuanto se ha dicho para el potencial en los campos de fuerza (§ 89), puede expresarse este hecho diciendo que

$$dQ - d\mathfrak{L} \text{ } \textit{es una diferencial exacta.} \qquad [2]$$

Existe, pues, una función U de las variables que fijan el estado interno del sistema (p. ej., v, p) tal que:

1.º, *para una transformación infinitesimal se tiene:*

$$dQ - d\mathfrak{L} = dU. \qquad [3]$$

2.º, *para una transformación finita se tiene:*

$$\int_1^2 (dQ - d\mathfrak{L}) = \int_1^2 dQ - \int_1^2 d\mathfrak{L} = \int_1^2 dU = U_2 - U_1. \qquad [4]$$

La función U viene definida por las [3] y [4], salvo una constante aditiva, como sucede también para el potencial $\mathfrak{V}$ o para la energía potencial $\mathfrak{W}$ en los campos de fuerza conservadores.

$U = U(v, p)$ se llama *energía interna* del sistema en el estado caracterizado por los valores (v, p) de las variables.

A veces convendrá escoger como variables independientes p y θ, o v y θ, y a menudo se toma también como variable la temperatura absoluta Θ en lugar de la temperatura ordinaria θ.

Entonces, dQ, $d\mathfrak{L}$ y dU pueden imaginarse funciones de p, θ, dp, $d\theta$, o de v, θ,, dv, $d\theta$ respectivamente. U será entonces función de p, θ o de v, θ.

La [4] comprende, evidentemente, como caso particular, a la [11], § 326. En efecto, aplicando la [4] a un ciclo, coinciden los estados final e inicial, siendo $U_2 = U_1$, y, por tanto,

$$\oint dQ - \oint d\mathfrak{L} = 0. \qquad [5]$$

El primer principio de la termodinámica está contenido en las [2], [3] y [4], que representan la generalización a las transformaciones abiertas de la expresión [5] relativa a los ciclos *(principio de* MAYER).

§ **328. Energía interna.** Se puede decir también que el primer principio de la termodinámica generaliza el teorema de conservación de la energía para la energía calorífica, *inventando* una variación conveniente de energía interna U que venga a ser el saldo entre la energía calorífica $\int_1^2 dQ$ proporcionada al sistema y el trabajo $\int_1^2 d\mathfrak{L}$ efectuado por este sistema sobre el exterior.

Este modo de salvar el teorema de conservación de la energía no podría considerarse como satisfactorio, y la invención de la energía interna sería un recurso formal de valor mezquino, si no interviniera una afirmación que tiene un contenido muy profundo. Esta afirmación asegura que la energía interna U *sólo* es función del estado *interno* del cuerpo y no de su historia anterior. Cada vez que el cuerpo o el sistema toma de nuevo un determinado estado interno, U *debe tomar* otra vez su valor.

Se han indicado ya (§ 313) los peligros que se corren al hablar de «calor contenido» en un cuerpo o «poseído» por un cuerpo. Estas expresiones, por desgracia todavía demasiado difundidas en la física elemental, no son aceptables.

Se puede hablar, en cambio, de *energía interna poseída* o *contenida* en un cuerpo en cierto estado suyo, aunque en realidad ésta sólo queda determinada salvo una constante aditiva, puesto que sólo se conocen las variaciones de energía interna, dadas por la [4], § 327.

Sólo en algunos casos se pueden confundir las variaciones de energía interna con las variaciones de calor «poseído» por un cuerpo (§ 330, *a*]), o es lícito hablar, después de una definición conveniente, de «calor contenido en un cuerpo» [§ 330, *b*) y § 331].

No ha de maravillarnos el que un cuerpo posea energía interna en cualquiera de sus estados, pues basta imaginarlo en presencia de otro cuerpo más frío y considerar la propagación de calor que resulta, a volumen constante.

Ésta se presenta como un paso de energía calorífica desde el cuerpo caliente al cuerpo frío. Luego, en general, el cuerpo de que hablamos posee cierta cantidad de energía, que, cedida al exterior, se manifiesta como energía calorífica.

Claro está que U debe ser función de la temperatura del cuerpo, atendiendo a que cuanto más caliente se encuentra éste, consideramos que contiene más calor; pero, generalmente, también depende U de otros parámetros (p. ej., de v).

Sin embargo, obsérvese que no forman parte de la energía interna de un cuerpo ni su energía cinética ni su energía de posición macroscópica.

Además, para cualquier cuerpo homogéneo, si Θ, p, y, por tanto, el volumen específico $\frac{1}{\mu}$ son constantes en todos los puntos, la energía interna debe imaginarse uniformemente repartida en el cuerpo. Indicando por u la energía interna de la unidad de masa, se podrá escribir:

$$U = m \cdot u, \qquad [1]$$

en donde m es la masa total del cuerpo.

Cuando Θ, p, y, por tanto, $\frac{1}{\mu}$, varían de un punto a otro del cuerpo, solamente se podrá escribir:

$$dU = u \cdot dm. \qquad [2]$$

En la teoría cinética de la materia (§§ 179 y 367) se da fácilmente la razón de la existencia de una energía interna en los cuerpos; en efecto, según esta teoría, las moléculas de un cuerpo tienen energía cinética porque no están quietas, y energía de posición porque en general existen fuerzas mutuas entre las moléculas (cohesión). Análogamente ocurre en los átomos de la molécula, en los electrones dentro del átomo, etc.

§ 329. Comprobación y generalización del primer principio. Puesto que dQ y $d\mathfrak{L}$ deben suponerse experimentalmente medibles (§§ 314 y 292), se conoce la diferencial total de la función U, o sea, $dU = dQ - d\mathfrak{L}$. Como se ha indicado, esta diferencial puede determinar U salvo una constante aditiva, como sucede con la energía potencial en un campo de fuerzas conservador.

En realidad, lo que se mide experimentalmente son las magnitudes finitas de la [4], § 327:

a] $\int_1^2 dQ$ (calor proporcionado al cuerpo y expresado en unidades mecánicas) mediante un calorímetro;

b] $\int_1^2 d\mathfrak{L}$ (trabajo efectuado por el cuerpo) mediante mediciones de presión y de volumen (compárese con § 292).

Se llega a una comprobación directa del primer principio efectuando una transformación *entre los mismos extremos* A_1 y A_2 de distintos modos y midiendo el valor de la expresión:

$$\int_1^2 dQ - \int_1^2 d\mathfrak{L} \qquad [1]$$

correspondiente a estos diversos procedimientos. Este valor debe resultar igual para todas las transformaciones entre los extremos mencionados.

Ahora bien, el primer principio resulta válido para todas las transformaciones naturales reversibles e irreversibles, incluso si interesan sistemas de cuerpos, y no un sólo cuerpo, hasta en el caso en que se produzcan cambios de estado, reacciones químicas, fenómenos eléctricos y magnéticos, etc.

Pero obsérvese que en estos casos más complicados, el número de coordenadas que determinan el estado interno del sistema se multiplica y tal vez puede llegar a ser infinito.

Efectivamente, cualquier coordenada podrá resultar, en un estado del sistema, una función de punto del sistema, y, por tanto, sólo será conocida cuando lo sea dicha función. Tal es el caso de la temperatura de una barra calentada por un extremo.

En casos más sencillos, el sistema puede dividirse en un número finito de *fases* (§ 216), es decir, de partes *físicamente* homogéneas, separadas por superficies de contacto bien definidas. (No sería éste el caso para la superficie de separación de dos líquidos miscibles.)

El sistema puede ser *químicamente* homogéneo, o no serlo. Por ejemplo, el agua en presencia de su vapor constituye un sistema homogéneo químicamente, pero no físicamente. Se tiene entonces un sistema constituído por dos *fases*, la líquida y la gaseosa, cada una homogénea por su parte, y con un solo *componente*, el agua.

La homogeneidad física puede establecerse con relativa facilidad, observando a simple vista, con el microscopio o con el ultramicroscopio, si existe superficie de separación entre las diversas fases.

La homogeneidad química es mucho más difícil de establecer. Así, en el ejemplo citado no es fácil asegurar que las moléculas sean todas iguales en la fase gaseosa y en la fase líquida, y que correspondan, por ejemplo, todas a la fórmula H_2O.

Ahora bien, demostremos que el primer principio es válido para un sistema complejo cualquiera, bajo una de las tres formas

$$dQ - d\mathfrak{L} = dU \qquad [2]$$

$$\int_1^2 dQ - \int_1^2 d\mathfrak{L} = U_2 - U_1 \qquad [3]$$

$$\oint dQ - \oint d\mathfrak{L} = 0. \qquad [4]$$

Basta que dQ represente *la suma algebraica de los calores suministrados desde el exterior del sistema a las diversas partes de éste* durante una transformación infinitesimal, y que $d\mathfrak{L}$ represente *la suma algebraica de los trabajos efectuados sobre el exterior del sistema por las*

diversas partes del mismo; la energía interna U del sistema es la energía interna total y se imagina como función aditiva de las partes que lo constituyen. Para cada parte r se calculará, salvo una constante aditiva, la energía interna U_r, mediante la [4], § 327, y se tiene por definición:

$$U = \sum_r U_r. \qquad [5]$$

En efecto, aplicada la [4], § 327, a cada una de las partes r, se suman término a término las r ecuaciones así obtenidas. En el segundo miembro se tiene:

$$\sum_r (U_{r2} - U_{r1}) = \Big(\sum_r U_r\Big)_2 - \Big(\sum_r U_r\Big)_1 = U_2 - U_1.$$

En el primer miembro, los cambios de calores *internos* dQ_i entre las varias fases del sistema dan una suma nula: el término $\int_1^2 (dQ_r)_i$, positivo para la parte que lo recibe, es negativo para la parte que lo suministra.

Luego $\sum_r \int_1^2 dQ_r$ se reduce solamente a $\int_1^2 (dQ)_e$ de los calores recibidos desde el exterior del sistema:

$$\int_1^2 (dQ)_e = \int_1^2 \sum_r (dQ_r)_e = \sum_r \int_1^2 (dQ_r)_e$$

Análogamente, los trabajos *internos* se neutralizan mutuamente, y, por tanto, se tiene:

$$\int_1^2 d\mathfrak{L} = \int_1^2 (d\mathfrak{L})_e = \int_1^2 \sum_r (d\mathfrak{L}_r)_e = \sum_r \int_1^2 (d\mathfrak{L}_r)_e.$$

Para recordar esto se podrán escribir, en lugar de las expresiones [4], las siguientes:

$$\left.\begin{gathered} (dQ)_e - (d\mathfrak{L})_e = dU \\ \int_1^2 (dQ)_e - \int_1^2 (d\mathfrak{L})_e = \int_1^2 \sum_r (dQ_r)_e - \int_1^2 \sum_r (d\mathfrak{L}_r)_e = \Big(\sum_r U_r\Big)_2 - \\ - \Big(\sum_r U_r\Big)_1 = U_2 - U_1 \\ \oint (dQ)_e - \oint (d\mathfrak{L})_e = \oint \sum_r (dQ_r)_e - \oint \sum_r (d\mathfrak{L}_r)_e = 0 \end{gathered}\right\} \qquad [6]$$

Luego, de la [4], § 327, valedera para cada parte del sistema, se llega a las [2], [3], [4] y [6] aplicables al sistema total.

Los tres hechos experimentales más importantes que establecen la validez del primer principio en una forma generalizada son los siguientes:

1.º **Ley de Hess.** Esta ley de termoquímica, llamada también *de los estados inicial y final*, establece que la suma algebraica de las cantidades de calor desprendidas en las sucesivas reacciones que conducen las substancias reaccionantes de un estado inicial a otro final, es independiente del número y de la naturaleza de las reacciones producidas.

Ejemplo: Al quemar el carbono, o sea, al combinarse con el oxígeno para producir anhídrido carbónico, puede efectuarlo en una sola reacción o en dos sucesivas:

$$C + O_2 \longrightarrow CO_2; \qquad C + O \longrightarrow CO \qquad CO + O \longrightarrow CO_2.$$

Estas tres reacciones son exotérmicas, y en termoquímica se atribuye signo positivo a los correspondientes calores de reacción q, al contrario de lo que hemos admitido al enunciar el primer principio.

Medidos estos calores mediante la bomba calorimétrica, o sea, a volumen constante y sin producir trabajo externo, las calorías para cada átomo - gramo de carbono (diamante) son:

$$q_1 = 94\,500; \qquad q_2 = 26\,100; \qquad q_3 = 68\,200 \qquad \frac{\text{cal}}{\text{át-g}}$$

Resulta exactamente (salvo los errores experimentales):

$$q_1 = q_2 + q_3,$$

de conformidad con lo que se ha dicho para la (1).

2.º **Constancia de J.** Cualquier transformación cíclica utilizada para la determinación del equivalente mecánico ha dado siempre el mismo valor de J. Es decir que la [11], § 326, se verifica experimentalmente en un ciclo cualquiera, no solamente cuando el ciclo es efectuado por un cuerpo homogéneo, sino también si se trata de un sistema complejo cualquiera; esta fórmula coincide con la [4]. Ahora bien, ésta, como la [5], § 327, equivale precisamente al primer principio.

3.º **Imposibilidad del móvil perpetuo de primera especie.** Si se tiene una máquina que evoluciona según un ciclo, repitiéndolo sucesiva y continuamente, si no se le proporciona (ni se le quita) energía calorífica, se tiene $\oint dQ = 0$, y, según la [4], también es $\oint d\mathfrak{L} = 0$.

Durante una parte del ciclo, la máquina puede efectuar trabajo sobre el exterior, pero, para cerrar el ciclo, será necesario que desde el exterior se efectúe sobre la máquina una cantidad igual de trabajo.

No es posible hacerse ilusiones sobre la obtención de trabajo. Han fracasado todos los ensayos realizados para obtener una máquina que trabaje sin recibir energía procedente del exterior, ni mecánica, ni calorífica. Estos fracasos constituyen otras tantas confirmaciones del primer principio.

§ 330. Ejemplos de aplicaciones del primer principio. A continuación damos algunos ejemplos, el último de los cuales demuestra el valor práctico más frecuente del primer principio: este principio permite *calcular los valores numéricos de ciertas magnitudes termodinámicas, en función de otras ya medidas, o que pueden medirse más fácilmente.*

a] **Transformaciones isocoras.** Como el volumen permanece constante, por hipótesis, es nulo el trabajo externo (§ 292). Aplicando el primer principio a una transformación finita, tenemos:

$$\left(\int_1^2 dQ\right)_{v=\text{const.}} = U_2 - U_1. \qquad [1]$$

El calor suministrado durante una transformación a volumen constante sólo depende de los estados inicial y final de la transformación, y mide, *en calorías* por ejemplo, la variación de energía interna U del sistema. Esto explica por qué *muy a menudo se expresa la energía interna en calorías.*

Efectivamente, la [1] no sólo es válida para las transformaciones isocoras, sino, en general, siempre que sea nulo el trabajo externo.

En el caso de transformaciones experimentadas por sólidos o líquidos, a la presión ordinaria, el trabajo $\int_1^2 p \cdot dv$ es, en general, despreciable por ser despreciables las variaciones de volumen; todavía es válida la [1]:

$$\left(\int_1^2 dQ\right)_{p=\text{const.}} \approx \left(\int_1^2 dQ\right)_{v=\text{const.}} = U_2 - U_1.$$

Esto explica por qué se habla tan a menudo de «calor contenido en los cuerpos» en lugar de hablar de energía interna: el calor suministrado mide, sin más, la variación de la energía interna.

Las variaciones de energía interna por unidad de maas vienen dadas entonces sencillamente por la expresión:

$$u_2 - u_1 = \int_1^2 (dQ)_{m=1}.$$

Si nos hallamos, pues, en las condiciones del § 318, 1.º], es decir, si es válida la [5], § 318, en la que suponemos en particular $m = 1$, se tiene:

$$\int_1^2 (dQ)_{m=1} = (\Delta Q)_{\substack{p=\text{const.}\\ m=1}} = \int_1^2 c_p d\theta,$$

y, por tanto,

$$u_2 - u_1 = \int_1^2 c_p d\theta. \qquad [2]$$

c_p y $u_2 - u_1$ deben expresarse en unidades coherentes; por ejemplo, respectivamente en:

$$\frac{\text{erg}}{\text{g}_\text{m} \cdot {}^\circ\text{C}} \text{ y } \frac{\text{erg}}{\text{g}_\text{m}}, \text{ o bien } \frac{\text{joule}}{\text{g}_\text{m} \cdot {}^\circ\text{C}} \text{ y } \frac{\text{joule}}{\text{g}_\text{m}}, \text{ o bien } \frac{\text{cal}}{\text{g}_\text{m} \cdot {}^\circ\text{C}} \text{ y } \frac{\text{cal}}{\text{g}_\text{m}}.$$

b] **Transformaciones isobáricas.** Supondremos que las transformaciones son suficientemente lentas para que se pueda escribir (§ 292):

$$d\mathcal{Q} = p \cdot dv.$$

Teniendo en cuenta que p es constante, puede escribirse el primer principio:

$$dQ = dU + p \cdot dv = dU + d(pv) = d(U + pv). \qquad [3]$$

$U + pv$ sólo es función del estado del cuerpo. Luego $d(U + pv)$ es una diferencial exacta. En este caso también lo es dQ.

Para una transformación finita se tiene:

$$\int_1^2 (dQ)_{p=\text{const.}} = (U_2 + pv_2) - (U_1 + pv_1). \qquad [4]$$

La cantidad de calor absorbida durante una transformación isobárica depende únicamente de los estados inicial y final, y mide (en joule, p. ej.) la variación de la función $(U + pv)_{p=\text{const.}}$ del estado del cuerpo.

La función $(U + pv) = W$) se llama *entalpía* (§ 331) del cuerpo, y viene definida, como U, salvo una constante aditiva.

c] **Variación del calor de reacción con la temperatura, a volumen constante.** Considérese una reacción suficientemente lenta para que, realizándose en un calorímetro isotérmico, pueda suponerse que se efectúa a temperatura constante θ.

Sean C la capacidad calorífica de los cuerpos que han de reaccionar, C' la capacidad calorífica de los productos de la reacción, q el calor desprendido durante la reacción a la temperatura θ, y $q + dq$ el calor desprendido durante la reacción a la temperatura $(\theta + d\theta)$.

Se puede pasar del estado inicial (temperatura θ y reacción no efectuada todavía) al estado final (temperatura $\theta + d\theta$ y reacción ya terminada) de las dos maneras siguientes:

1.º, efectuar la reacción isotérmica a la temperatura θ, y después llevar los productos de esta reacción a la temperatura $\theta + \theta d$;

2.º, calentar los cuerpos que han de reaccionar desde θ hasta $\theta + d\theta$ y después efectuar la reacción isotérmicamente a la temperatura $\theta + d\theta$.

Se supone siempre que se opera a volumen constante para excluir la existencia de un trabajo externo.

Por el primer principio se tiene (1):

$$-q + C' \cdot d\theta = -(q + dq) + C \cdot d\theta.$$

Luego:

$$\frac{dq}{d\theta} = -(C' - C). \qquad [5]$$

§ 331. Entalpía. Limitémonos al caso de transformaciones experimentadas por una masa m de substancia homogénea.

Suponemos que los únicos trabajos externos ejecutados por tal substancia, son los que se deben a variaciones eventuales de su volumen.

En uno de sus estados, determinado por los valores de dos de las tres variables p, v, θ, dicha substancia tiene cierta energía interna U (§ 328) y cierta energía interna específica $u = \frac{U}{m}$, determinadas, salvo una constante aditiva. Análogamente, posee cierta *entalpía* $W = U + pv$, y cierta entalpía específica $w = \frac{W}{m}$, que también están determinadas, salvo la misma constante aditiva.

Tanto la energía interna U como la entalpía $W = U + pv$ precisan, de acuerdo con el primer principio, los conceptos de energía y de calor «contenidos» en un cuerpo.

De conformidad con la [1], § 330:

la cantidad de calor suministrada a un cuerpo *a volumen constante* mide la variación $U_2 - U_1$ de la energía interna;

(1) Recuérdese que, con nuestros convenios, los calores de reacción positivos corresponden a desprendimiento de calor por el sistema; es decir, que es $q = -\int_1^2 dQ$.

el calor específico *a volumen constante* $c_v = \frac{du}{d\theta}$ mide la variación de la energía interna de la substancia, referida a la unidad de masa y a la unidad de temperatura;

la capacidad calorífica *a volumen constante* $C_v = mc_v = \frac{dU}{d\theta}$ mide la variación de la energía interna del cuerpo referida a la unidad de temperatura.

De acuerdo con la [4], § 330:

la cantidad de calor suministrada a un cuerpo *a presión constante* mide la variación $W_2 - W_1$ de la entalpía; el calor específico *a presión constante* $c_p = \frac{dw}{d\theta}$ es la variación de la entalpía referida a la unidad de masa y a la unidad de temperatura;

la capacidad calorífica *a presión constante* $C_p = m \cdot c_p = \frac{dW}{d\theta}$ es la variación de la entalpía del cuerpo, referida a la unidad de temperatura.

Como los valores ordinarios de los calores específicos se definen suponiendo constante la presión, expresan también las variaciones de la entalpía específica, referidas a la unidad de temperatura, para cada substancia.

A la entalpía se le da también el nombre de *calor total* o *contenido térmico* del cuerpo.

De acuerdo con la [3], § 329, en una transformación adiabática ($dQ = 0$), el *trabajo de expansión* obtenible $\int_1^2 p \cdot dv$ da la disminución $U_1 - U_2$ de la energía interna del sistema.

Además, se tiene:

$$\begin{aligned} dQ &= dU + p \cdot dv + v \cdot dp - v \cdot dp \\ &= d(U + pv) - v \cdot dp \\ &= dW + d\mathfrak{L}_{técn.} \end{aligned}$$

en donde $d\mathfrak{L}_{técn.}$ es el *trabajo técnico* (§ 292, 2.º).

Luego, en una transformación finita es:

$$\int_1^2 dQ = W_2 - W_1 + \left(\int_1^2 d\mathfrak{L}\right)_{técn.}$$

En una transformación adiabática ($dQ = 0$) el *trabajo técnico* obtenible es:

$$\left(\int_1^2 d\mathfrak{L}\right)_{técn.} = W_1 - W_2;$$

es decir, equivale a la disminución de entalpía del sistema.

Ahora bien, entre los procedimientos que permiten obtener trabajo de la efusión de un gas comprimido, existe también el que consiste en dotar de energía cinética al mismo gas que fluye (§ 293, 3º). En este caso, la disminución de la entalpía del gas en efusión adiabática coincide con el valor de la energía cinética adquirida por el gas.

B. — APLICACIÓN DEL PRIMER PRINCIPIO A LOS GASES PERFECTOS

§ 332. Energía interna de un gas perfecto. La energía interna de un gas es función de dos de las tres variables v, p, Θ; por ejemplo, puede escribirse $U = U\ (v,\ \Theta)$; en lo sucesivo usaremos por regla general la temperatura absoluta Θ.

Apliquemos el primer principio al experimento de JOULE (fig. 616).

En este experimento se tiene expansión adiabática sin trabajo externo; luego:

$$\int_1^2 d\mathfrak{L} = 0 \quad \text{y} \quad \int_1^2 dQ = 0\,.$$

La [4], § 327, da, pues:

$$U_2 = U_1\,. \qquad [1]$$

Es decir, que en el experimento de JOULE, adiabático, permanece constante la energía interna.

Pero la experiencia nos enseña que en los gases prácticamente perfectos no varía la temperatura cuando la expansión se efectúa sin trabajo externo, siendo, pues, a la vez, adiabática e isotérmica. Durante la transformación no varía más que v, y a pesar de esta variación del volumen, se cumple la [1]. Luego U es constante cuando sólo varía v, y, por tanto, es independiente de v.

Los gases en los que el experimento de JOULE da este resultado obedecen a la ley de BOYLE y se dilatan todos igualmente; esto es, son gases perfectos.

En los gases perfectos, U sólo es función de la temperatura.

Si ahora efectuamos una expansión *isotérmica* de un gas perfecto con trabajo externo (fig. 615), se tiene $dU = 0$ y el primer principio da:

$$dQ = d\mathfrak{L}\,; \qquad \int_1^2 dQ = \int_1^2 d\mathfrak{L}\,. \qquad [2]$$

Y si se mide el calor en calorías y el trabajo en unidades mecánicas:

$$J \cdot \int_1^2 dQ = \int_1^2 d\mathfrak{L}, \quad \text{o sea,} \quad J = \frac{\int_1^2 d\mathfrak{L}}{\int_1^2 dQ}\,; \qquad [3]$$

es decir, el calor absorbido es equivalente al trabajo efectuado. Queda justificado el método de MAYER (§ 326, 2º]) en la forma simple originaria: se deja expansionar un gas en un cilindro, con trabajo externo, y se mide la cantidad de calor que se le ha tenido que suministrar para que no se enfríe: el calor suministrado es el equivalente del trabajo de expansión efectuado por el gas, *si bien éste no recorre un ciclo.*

Además, el primer principio permite también expresar la energía interna U de un gas perfecto en función de la única variable de que depende: la temperatura.

Calculemos, en efecto, la variación de energía interna para una transformación entre los estados extremos:

$$v_1,\ p_1,\ \Theta_1 \quad \text{y} \quad v_2,\ p_2,\ \Theta_2,$$

en donde Θ_1 y Θ_2 son las temperaturas absolutas de dichos estados.

Supongamos primero que $v_1 < v_2$:

Se tiene (§ 327, [4]):

$$U_2 - U_1 = \int_1^2 dQ - \int_1^2 d\mathfrak{L}\,,$$

valor que no depende de la transformación, sino sólo de sus estados extremos.

Escojamos la transformación del modo más conveniente. Caliéntese el gas a volumen v_1 constante, desde Θ_1 a Θ_2 (y si se tiene $\Theta_2 < \Theta_1$, se tratará de un enfriamiento); después hagámosle expansionar adiabáticamente *sin trabajo externo* desde el volumen v_1 al volumen v_2. De conformidad con el experimento de JOULE, esta expansión es también isotérmica, y así se alcanza el estado final

$$v_2,\ \Theta_2\,.$$

Por la ecuación de estado, p toma también el valor final p_2.

Durante las operaciones efectuadas no se ha producido trabajo externo, por lo cual es $\int_1^2 d\mathfrak{L} = 0$; pero se ha dado al gas cierta

cantidad de calor ΔQ (positiva o negativa) *a volumen constante*.

Si es m la masa del gas, y c_v su calor específico a volumen constante, medido también, como ΔQ, en unidades mecánicas, se tiene:

$$\Delta Q = \int_1^2 dQ = m \cdot \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} c_v \, d\Theta.$$

Luego la [4], § 327, da

$$U_2 - U_1 = m \cdot \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} c_v \, d\Theta, \qquad [4]$$

que es la expresión buscada de la energía interna (más exactamente, de sus variaciones) en función de la temperatura.

Conocido c_v, la [4] permite determinar la energía interna U_2 en función de la temperatura Θ_2, salvo una constante aditiva U_1.

Si es $v_2 < v_1$, no puede efectuarse la transformación imaginada porque no es posible efectuar la contracción de un gas sin trabajo externo.

Supóngase ahora la transformación inversa, o sea, desde (v_2, p_2, Θ_2) a (v_1, p_1, Θ_1), que va acompañada de una variación de energía interna igual y contraria a la buscada, y a la que es posible aplicar el razonamiento anterior. También en este caso se obtiene la [4].

Para una transformación elemental cualquiera entre dos estados extremos infinitamente próximos, la [4] se escribe más simplemente:

$$dU = m \cdot c_v \cdot d\Theta \qquad [5]$$

Para la unidad de masa:

$$du = c_v d\Theta\,; \qquad u_2 - u_1 = \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} c_v \, d\Theta \qquad [6]$$

Puesto que U en los gases perfectos solamente es función de Θ y no depende de v, de estas fórmulas se deduce que lo mismo debe ocurrir con c_v: *en los gases perfectos el calor específico a volumen constante es independiente del volumen, siendo solamente función de la temperatura.*

Ninguna de las propiedades de los gases perfectos consideradas hasta ahora permite establecer *a priori* cómo depende c_v de la temperatura. Es preciso recurrir a la experimentación. Ésta demuestra que en los gases prácticamente perfectos puede suponerse c_v constante entre extensos límites de temperatura (¡pero no hacia el cero absoluto!).

Así, la [4] se convierte en:

$$U_2 - U_1 = m c_v \, (\Theta_2 - \Theta_1). \qquad [7]$$

En particular, se ve que un aumento de temperatura ($\Theta_2 - \Theta_1 > 0$) va ligado a un aumento de energía interna ($U_2 - U_1 > 0$). En el intervalo de temperatura en que se considera válida la [7], se puede suponer

$$U = m \cdot c_v \cdot \Theta\,; \qquad u = c_v \Theta. \qquad [8]$$

(Compárese la suposición análoga para el potencial, § 96, [3].)

Puesto que no es posible experimentar con gases reales a baja temperatura y pretender que éstos se comporten entonces como gases perfectos, es imposible decidir con experimentos directos si es constante o no el calor específico c_v de los gases perfectos hasta el cero absoluto. Se prefiere hoy en día admitir que también este calor específico, como el de los cuerpos sólidos, tiende a cero con la temperatura absoluta.

§ 333. Los dos calores específicos de los gases perfectos. Cuando un gas, al ser calentado, varía de volumen con bastante lentitud y, por tanto, el trabajo elemental externo es $p\,dv$, como sucede particularmente cuando la transformación es reversible, se tiene, en general (como de costumbre, en unidades «mecánicas»):

$$dQ = dU + d\mathfrak{L} = m \cdot c_v \, d\Theta + p\,dv). \qquad [1]$$

Supongamos, en particular, que el gas experimente una transformación *a presión constante*: dQ representa el calor suministrado al gas por el calentamiento $d\Theta$, a presión constante. Por tanto, por la definición de calor específico a presión constante, se tiene:

$$dQ = m \cdot c_p \, d\Theta,$$

y la [1] da:

$$m \cdot c_p d\Theta = m \cdot c_v \, d\Theta + p\,dv. \qquad [2]$$

Por otra parte, la ecuación de estado de los gases perfectos es $pv = R\Theta$ para una molécula-gramo. Si m_{mol} es la masa molecular del gas, su masa m en g_m equivale a $n = \dfrac{m}{m_{mol}}$ moléculas-gramo; por tanto:

$$pv = \frac{m}{m_{mol}} R\Theta\,;$$

de esta expresión, diferenciando *a presión constante*, se obtiene:

$$p\,dv = \frac{m}{m_{mol}} R\,d\Theta.$$

Luego la [2] da:

$$c_p - c_v = \frac{R}{m_{mol}} \ (> 0, \text{ por tanto, es } c_p > c_v). \qquad [3]$$

Introduciendo los calores moleculares $C_p = c_p\, m_{mol}$, $C_v = c_v\, m_{mol}$ y recordando los valores de R (§ 295) y de J (§ 326) se tiene:

$$\left.\begin{aligned} C_p - C_v = R &= 8{,}314 \cdot 10^7 \ \frac{\text{erg}}{°\text{C}\cdot\text{mol-g}} \\ &= 1{,}986 \quad \frac{\text{cal}}{°\text{C}\cdot\text{mol-g}} \end{aligned}\right\}. \qquad [4]$$

Ahora bien, c_p es medible (calorímetros de serpentín), no ocurriendo lo mismo con c_v, a causa de la pequeña capacidad calorífica del gas respecto a la del recipiente que lo debe contener.

Puede obtenerse c_v en unidades mecánicas, o en calorías, a partir de la medida c_p, de R y de m_{mol}.

Pero es mejor calcular c_v a partir del valor encontrado para c_p y de la razón $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ (§ 335).

R, m_{mol} y c_v son constantes respecto al volumen. También lo será, por tanto, c_p por depender sólo de la temperatura del gas perfecto, como c_v; R y m_{mol} son constantes; luego $c_p - c_v$ es constante tanto respecto al volumen como respecto a la temperatura Θ. En fin, c_p podrá considerarse constante, en el mismo intervalo de temperatura en que pueda admitirse la constancia de c_v.

§ 334. Ecuación de la transformación adiabática reversible de un gas perfecto. Nos referiremos a una molécula-gramo de gas. También ahora, suponiendo el proceso reversible, se tendrá el trabajo externo $p\,dv$. En la práctica bastará que el proceso adiabático no sea excesivamente rápido. Supondremos, además, que c_v es constante respecto a Θ.

Puesto que es $dQ = 0$, el primer principio da:

$$0 = m_{mol} \cdot c_v\, d\Theta + p\, dv. \qquad [1]$$

Por otro lado, a partir de la ecuación de estado, se obtiene:

$$p = \frac{R\Theta}{v},$$

valor que sustituído en la [1] y recordando la [3], § 333, da:

$$c_c \frac{d\Theta}{\Theta} = -\frac{R}{m_{mol}} \frac{dv}{v} = -(c_p - c_v) \frac{dv}{v}.$$

Poniendo

$$\frac{c_p}{c_v} = \gamma > 1, \qquad [2]$$

se tiene

$$\frac{d\Theta}{\Theta} = (1 - \gamma) \frac{dv}{v}.$$

Integrando resulta:

$$\log \Theta = \log v^{(1-\gamma)} + \log K,$$

y pasando a los números,

$$\Theta = K \cdot v^{(1-\gamma)},$$

o sea,

$$\Theta v^{\gamma-1} = K = \Theta_0 v_0^{\gamma-1}, \qquad [3]$$

que es una de las formas de la ecuación de la adiabática reversible.

La ecuación de estado $pv = R\Theta$ permite eliminar v o Θ de esta ecuación, haciendo aparecer en su lugar la variable p.

Resultan de este modo las otras formas de la ecuación de la adiabática:

$$\frac{\Theta^\gamma}{p^{\gamma-1}} = K' = \frac{\Theta_0^\gamma}{p_0^{\gamma-1}} \qquad [4]$$

$$pv^\gamma = K'' = p_0 v_0^\gamma. \qquad [5]$$

Ésta es la forma más corriente de la ecuación de la transformación adiabática reversible. La [3], la [4] o la [5] valen para cualquier masa de gas y cualquiera que sea el estado inicial.

Si la transformación adiabática es una expansión, se tiene $v > v_0$ y puesto que es $\gamma - 1 > 0$, también será $v^{\gamma-1} > v_0^{\gamma-1}$, y, por tanto, $\Theta < \Theta_0$. Esto es: la expansión adiabática considerada por nosotros (con trabajo externo) se produce con enfriamiento. Éste es muy notable. El experimento de la figura 615, *b*) pone en evidencia este enfriamiento.

En una compresión adiabática debida a un aumento de presión en la relación de 1 a 10, para un gas biatómico ($\gamma = 1{,}4$; véase § 319, *e*]), la temperatura del gas se eleva, por ejemplo, desde 20 a ≈ 450 °C *(eslabón neumático)*. Y si un gas biatómico, que inicialmente se halla a 20 °C, se expansiona desde 2 atm a 1 atm, experimenta un enfriamiento de ≈ 50 °C.

En el aire, un aumento de la presión, por vía adiabática, en la relación de 1 a 400, produce un aumento de temperatura que ya no es simplemente calculable con la [4], y que va desde la temperatura ordinaria a $\approx 10\,500$ °C; a este enorme aumento de tempera-

tura se debe en buena parte el fogonazo que acompaña al disparo de un arma de fuego.

La inflamación en los motores Diesel, y la inflamación prematura (detonación) en los motores de explosion, se debe, precisamente, a los grandes aumentos de temperatura que se producen en la compresión adiabática.

Para una masa dada de gas se tiene:

$$a] \qquad pv = p_0 v_0 = nR\Theta_0 \quad \text{(isoterma)} \qquad [6]$$

$$b] \qquad pv^\gamma = p_0 v_0^\gamma \quad \text{(adiabática reversible)} \qquad [7]$$

Para cada valor Θ_0 de la temperatura, se tiene la correspondiente isoterma. Resulta así, en el plano v, p, un haz de hipérbolas equiláteras que tienen como asíntotas los ejes v, p; sólo tienen interés físico las ramas comprendidas en el primer cuadrante (fig. 617). Para cada estado inicial (v_0, p_0), queda determinada la constante del segundo miembro de la [6], y, por tanto, queda caracterizada una isoterma; en otros términos, por cada punto del plano v, p pasa una isoterma, y sólo una. Análogamente, para cada estado inicial (v_0, p_0) queda determinada la constante del segundo miembro de la [7], y, por tanto, una curva adiabática; esto es, por cada punto del plano v, p pasa una adiabática, y sólo una. También las adiabáticas se hallan comprendidas en el primer cuadrante y tienen los ejes como asíntotas; en efecto, resulta de la [7] que para $p = \infty$ se tiene $v = 0$, y viceversa.

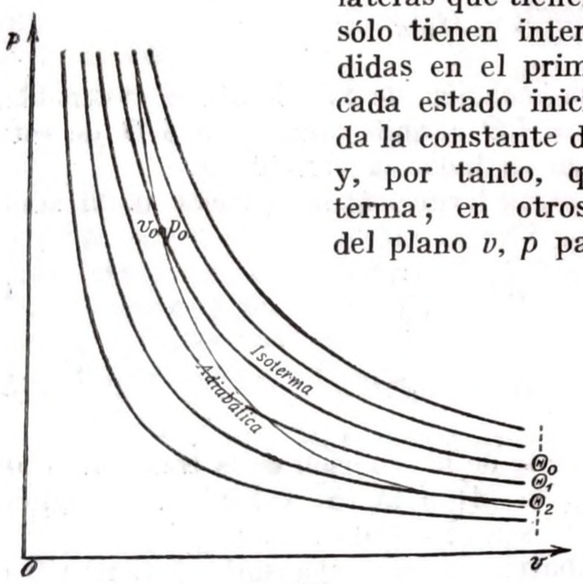


Fig. 671

Luego en cada punto v_0, p_0 se cortan una isoterma y una adiabática. Ambas decrecen al aumentar v; en efecto, se tiene:

$$p = \frac{p_0 v_0}{v} \text{ (isoterma)}; \qquad p = \frac{p_0 v_0^\gamma}{v^\gamma} \text{ (adiabática reversible)},$$

o sea, que son negativas $\left(\frac{dp}{dv}\right)_{iso}$ y $\left(\frac{dp}{dv}\right)_{adi}$.

Demostraremos que la adiabática desciende más rápidamente que la isoterma, para lo cual basta ver los valores de sus derivadas.

Se tiene:

$$\text{en la isoterma:} \left(\frac{dp}{dv}\right)_{v=v_0} = \left(\frac{d\frac{p_0 v_0}{v}}{dv}\right)_{v=v_0} = \left(-\frac{p_0 v_0}{v^2}\right)_{v=v_0} = -\frac{p_0}{v_0};$$

$$\text{en la adiabática:} \left(\frac{dp}{dv}\right)_{v=v_0} = \left(\frac{d\frac{p_0 v_0^\gamma}{v^\gamma}}{dv}\right)_{v=v_0} = -\gamma\left(\frac{p_0 v_0^\gamma}{v^{\gamma+1}}\right)_{v=v_0} = -\gamma\frac{p_0}{v_0}.$$

Y puesto que es $\gamma > 1$, se tiene:

$$-\gamma\frac{p_0}{v_0} < -\frac{p_0}{v_0} < -0.$$

La adiabática tiene pendiente negativa (curva decreciente, como la isoterma), pero más fuerte que la de la isoterma (fig. 671).

§ 335. Determinación de γ. En el método de CLÉMENT y DESORMES se emplea un gran balón A (figura 672) lleno del gas. El volumen del balón es el volumen inicial del gas v_0; la presión inicial es $p_0 = H_0 - h_0$, siendo H_0 la presión atmosférica y h_0 la depresión aplicada al gas, determinada mediante el manómetro M y expresada en la misma unidad adoptada para H_0. La temperatura inical Θ_0 es la del ambiente.

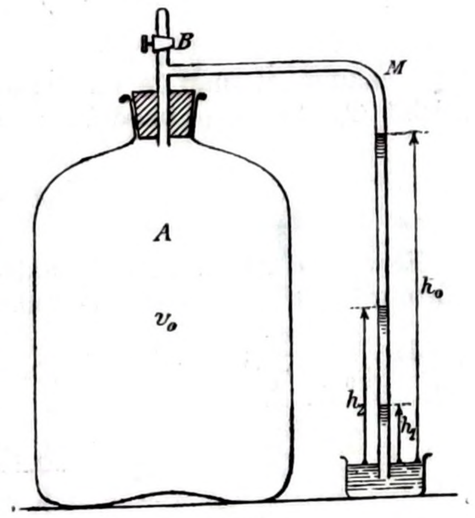


Fig. 672

Se abre por un instante la llave B; el gas de A se comprime (entra aire desde el exterior al balón), descendiendo bruscamente el desnivel del manómetro hasta señalar cierto valor h_1. Se ha producido una compresión que es adiabática a causa de su rapidez, pero que todavía es bastante lenta para permitir que el trabajo externo pueda expresarse por $d\mathfrak{L} = pdv$; por tanto, son válidas las fórmulas del § 334.

Al terminar la compresión adiabática, la presión es

$$p_1 = H_0 - h_1;$$

el volumen final del gas (que inicialmente ocupaba todo el balón) es desconocido y lo llamamos v.

La compresión adiabática va acompañada de calentamiento. Se espera a que la temperatura del gas vuelva a ser la Θ_0 del ambiente; entonces, el manómetro indica una depresión final h_2 ($> h_1$).

Se admite que todo el gas, es decir, el que se hallaba inicialmente en A y el que ha entrado durante la compresión, ha adquirido, inmediatamente después de ésta, la misma temperatura. Se supone despreciable el volumen del tubo manométrico. Se puede afirmar, por consiguiente, que después de la compresión adiabática se ha enfriado el gas a volumen constante.

Luego las condiciones finales del gas, que inicialmente ocupaba todo el balón A, son:

$$v\,;\quad p_2 = H_0 - h_2\,;\quad \Theta_0.$$

Los volúmenes inicial y final v_0 y v de la transformación adiabática vendrán relacionados por la fórmula

$$p_1 v^\gamma = p_0 v_0^\gamma\,;$$

pero cuando al final la temperatura ha tomado de nuevo el valor inicial Θ_0, también vendrán relacionados por la ley de Boyle:

$$p_2 v = p_0 v_0.$$

Elevando esta última igualdad a la potencia γ y dividiéndola miembro a miembro con la anterior, se eliminan los volúmenes y queda $\dfrac{p_1}{p_0} = \dfrac{p_2^\gamma}{p_0^\gamma}$; de donde:

$$\gamma = \frac{\log p_1 - \log p_0}{\log p_2 - \log p_0}. \qquad [1]$$

Se calcula γ a partir de las lecturas h_0, h_1 y h_2 del manómetro y de la lectura H_0 de un barómetro.

Para depresiones iniciales de algunos cm_{Hg}, los valores h_0, h_1, h_2 son pequeños respecto a H_0, y puede escribirse sensiblemente:

$$\log p_1 - \log p_0 = \log \frac{p_1}{p_0} = \log\left[1 + \frac{(h_0 - h_1)}{(H_0 - h_0)}\right] = \frac{h_0 - h_1}{H_0 - h_0}.$$

Análogamente ocurre con $\log p_2 - \log p_0$; y la [1] se reduce a:

$$\gamma = \frac{h_0 - h_1}{h_0 - h_2}. \qquad [2]$$

Para los gases ciertamente monoatómicos (vapor de mercurio, helio, argón, ...) la experiencia da:

$$\gamma = 1{,}66\,;$$

en los gases biatómicos (H_2, N_2, CO, HCl, ...) es;

$$\gamma = 1{,}40\,;$$

para los gases triatómicos (p. ej., CO_2) se tiene:

$$\gamma = 1{,}3.$$

Se ha visto (§ 250, [5]) que la velocidad de propagación **V** en un gas está relacionada con el valor de γ. Cuando se conoce $\dfrac{p}{\mu}$, la determinación de **V**, efectuada con el tubo de Kundt, es uno de los mejores métodos para determinar la razón γ en los gases prácticamente perfectos.

Conocido γ, y conocido experimentalmente c_p, se calcula c_v; éste es el método más frecuente para obtener los valores de c_v.

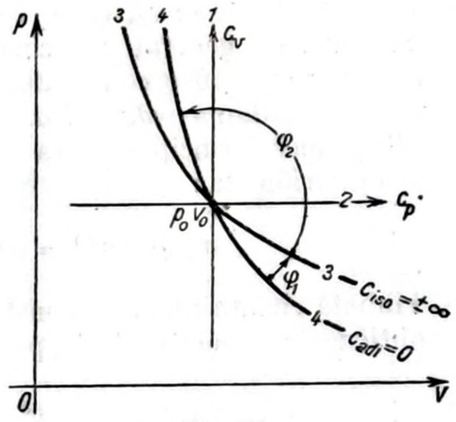


Fig. 673

§ **336. Politrópicas de un gas perfecto.** Supongamos que una masa determinada de un gas perfecto, por ejemplo un número de gramos igual a m_{mol}, es decir, una molécula-gramo, se encuentra inicialmente en el estado p_0, v_0 (figura 673); a partir de tal estado son posibles infinitas transformaciones reversibles, correspondientes a las infinitas líneas que pasan por p_0, v_0 con distinta pendiente.

He aquí las cuatro más características:

1.º *isocora* ($v = \text{const.} = v_0$); durante esta transformación, el gas está dotado de un calor específico $c_v > 0$ y constante (§ 332).

2.º *isobara* ($p = \text{const.} = p_0$); durante esta transformación, el gas está dotado de un calor específico c_p, también > 0 y constante (§ 333); se tiene:

$$\frac{c_p}{c_v} = \gamma > 1\,;$$

3.º *isoterma* $pv = \text{const.} = p_0 v_0$; durante la misma, en la expansión, se suministra calor al gas con el fin de que su temperatura

permanezca constante; el gas se comporta como si estuviese dotado de un calor específico cuyo valor, indeterminado, es $\pm\infty$; $+\infty$ si se considera que suministrando a la transformación una cantidad de calor ΔQ muy poco superior a la necesaria para la isoterma, se obtiene un ligero aumento $d\Theta$ de temperatura, de manera que el calor específico $\frac{1}{m_{mol}}\frac{\Delta Q}{d\Theta}$ es muy grande y positivo; en el límite, para $d\Theta = 0+$, se tiene la isoterma, y dicho calor específico tiende a $+\infty$; $-\infty$ si se considera que suministrando a la transformación una cantidad de calor ΔQ muy poco inferior a la necesaria para la isoterma, se obtiene una ligera variación $d\Theta < 0$ (disminución) de temperatura, de modo que entonces, en el límite, para $d\Theta = 0-$, la isoterma parece dotada de calor específico negativo e infinitamente grande;

4.º *adiabática* $pv^\gamma = \text{const.} = p_0 v_0^\gamma$; durante la misma se tienen variaciones de temperatura sin que se suministre calor al gas; es $c_{adi} = 0$.

Estas cuatro transformaciones son, pues, todas ellas «a calor específico constante»; c_p, c_v, $\pm\infty$, 0 respectivamente.

Se pide, en general, la ecuación de una transformación reversible, a calor específico constante c, de un gas perfecto. Una tal transformación se llama *politrópica*.

El primer principio, para una molécula-gramo y para dicha transformación da:

$$m_{mol}\cdot c\cdot d\Theta = m_{mol}\cdot c_v\cdot d\Theta + p\cdot dv. \qquad [1]$$

Habida cuenta que c es constante, se procede como en el § 334; se obtiene la ecuación de la politrópica en la forma:

$$p\cdot v^\delta = p_0\cdot v_0{}^\delta, \qquad [2]$$

con

$$\delta = \frac{c_p - c}{c_v - c}; \qquad [3]$$

o bien, resolviendo respecto a c:

$$c = \frac{\gamma - \delta}{1 - \delta}\cdot c_v. \qquad [4]$$

En la figura 673, las curvas representativas de las infinitas politrópicas que pasan por el punto v_0, p_0 poseen distinta pendiente según el valor de δ, y, por lo tanto, de c.

Al aumentar δ desde $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ hasta ∞, c crece desde 0 hasta c_v, la politrópica se vuelve cada vez más empinada, pasando desde la forma 4 hasta la forma vertical 1.

Al disminuir δ desde γ hasta 1, c es negativo y decrece desde 0 hasta $-\infty$; la politrópica pasa desde la forma 4 (adiabática) a la 3 (isoterma).

Finalmente, al disminuir δ desde $+1$ hasta $-\infty$, c es positivo y decrece de nuevo desde $+\infty$ hasta c_v; la politrópica pasa desde la forma 3 a la 2 ($\delta = 0$; $c = c_p$) y a la forma 1.

Son especialmente interesantes las politrópicas con $\delta > 1$ y ligeramente inferior a γ. Están representadas por curvas que se hallan comprendidas entre la isoterma 3 y la adiabática 4 de la figura 673, siendo próximas a la adiabática 4. Para ellas es $c < 0$; por ejemplo, podemos limitarlas a valores de δ tan próximos a γ, que se tenga $|c|$ pequeño respecto a c_v. Tales politrópicas tienen el carácter de transformaciones reversibles *imperfectamente adiabáticas*, por ejemplo, por defecto de aislamiento térmico entre el gas y el ambiente (en particular, el recipiente que lo contiene).

El trabajo externo durante la expansión politrópica de m_{mol} gramos de gas, desde el estado v_1, p_1, Θ_1 hasta el estado v_2, p_2, Θ_2 ($v_2 > v_1$, $\Theta_2 < \Theta_1$), es:

$$\Delta\mathfrak{L} = \int_{v_1,p_1}^{v_2,p_2} p\cdot dv = p_0 v_0{}^\delta \int_{v_1}^{v_2}\frac{dv}{v^\delta} = \frac{p_0 v_0{}^\delta}{-\delta+1}\left(v_2{}^{-\delta+1} - v_1{}^{-\delta+1}\right) =$$

$$= \frac{p_1 v_1 - p_2 v_2}{\delta - 1} = \frac{R(\Theta_1 - \Theta_2)}{\delta - 1} > 0. \qquad [5]$$

La cantidad de calor suministrada al gas durante dicha expansión es:

$$\Delta Q = m_{mol}\cdot c\,(\Theta_2 - \Theta_1) = m_{mol}\frac{\gamma - \delta}{1 - \delta}\cdot c_v\,(\Theta_2 - \Theta_1) > 0. \qquad [6]$$

La relación entre el calor suministrado y el trabajo obtenido es:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta\mathfrak{L}} = \frac{m_{mol}\frac{\gamma - \delta}{\delta - 1}\,c_v\,(\Theta_1 - \Theta_2)}{\frac{1}{\delta - 1}\,R\,(\Theta_1 - \Theta_2)}, \qquad [7]$$

o sea, con $\frac{R}{m_{mol}\cdot c_v} = \frac{c_p - c_v}{c_v} = \gamma - 1$:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta\mathfrak{L}} = \frac{\gamma - \delta}{\gamma - 1}, \qquad [8]$$

valor constante a lo largo de cualquier segmento de la politrópica considerada en cuanto a lo largo de ella es $\delta = \text{const.}$

Por lo tanto, para un gas ideal:

durante la expansión isoterma, la energía interna no varía; el trabajo de expansión es el equivalente del calor suministrado;

durante la expansión adiabática, el trabajo de expansión equivale a la disminución de la energía interna;

durante la expansión politrópica, el trabajo de expansión se obtiene a expensas del calor suministrado por la parte $\frac{\gamma - \delta}{\gamma - 1}$; por lo demás, éste se obtiene a expensas de la variación $U_2 - U_1 = m_{mol}\, c_v\, (\Theta_2 - \Theta_1) < 0$ de la energía interna del gas.

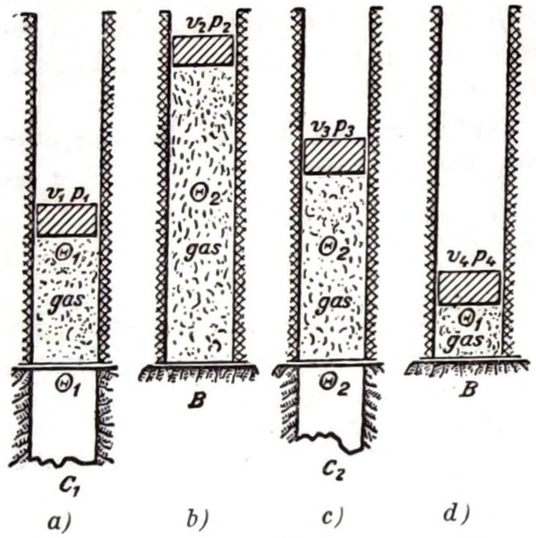


Fig. 674

§ 337. Ciclo de Carnot, efectuado por un gas perfecto. Supongamos un gas perfecto encerrado en un cilindro (fig. 674) de paredes laterales adiabáticas y comprimido por un émbolo también adiabático. En cambio, el fondo del cilindro está cerrado por una pared que conduce muy bien el calor. Se hacen seguir al gas las siguientes transformaciones reversibles y suficientemente lentas.

Se coloca el cilindro sobre el termostato C_1 a temperatura Θ_1, para que el gas tome esta temperatura, que será su temperatura inicial. Luego el gas se encuentra inicialmente en el

$$1.^{er}\ \text{estado}: \quad \Theta,\ v_1,\ p_1.$$

El cilindro se coloca después sobre la pared adiabática B y se hace expansionar el gas con trabajo externo, quitando gradualmente los pesos colocados encima del émbolo para equilibrar la presión interior del gas. Éste se enfría y llega así a un

$$2.^{o}\ \text{estado}: \quad \Theta_2,\ v_2,\ p_2,$$

siendo $\Theta_2 < \Theta_1,\ p_2 < p_1,\ v_2 > v_1$.

Luego se pone el cilindro encima del termostato C_2 a temperatura Θ_2 y se aumenta gradualmente la carga del émbolo para comprimir el gas isotérmicamente hasta un

$$3^{er}.\ \text{estado}: \quad \Theta_2,\ v_3,\ p_3.$$

Sigue un nuevo transporte sobre la pared adiabática B y una continuación de la compresión. Ésta va acompañada de calentamiento y se prosigue hasta obtener de nuevo la temperatura Θ_1, lo cual es ciertamente posible porque, de conformidad con la [3], § 334, la compresión adiabática del gas puede elevar su temperatura más allá de todo límite, ya que cuando v tiende a cero, Θ tiende a ∞. Así, el gas toma un

$$4.^{o}\ \text{estado}: \quad \Theta_1,\ v_4,\ p_4.$$

Se pone otra vez el cilindro sobre el termostato Θ_1 y se lleva de nuevo el gas isotérmicamente al volumen inicial v_1; por tanto, según la ecuación de estado, la presión también vuelve a tomar el valor inicial p_1 y el gas ha vuelto al estado inicial.

El gas ha efectuado un ciclo (*ciclo de* CARNOT), reversible, constituído por dos transformaciones isotérmicas alternadas con dos transformaciones adiabáticas.

Por la misma definición de la transformación adiabática, el gas sólo recibe calor del exterior (o cede calor, $dQ < 0$) durante las isotermas. Más concretamente, *recibe* una cantidad de calor $\Delta Q_1 > 0$ durante la expansión isotérmica a la temperatura Θ_1, y *cede* una cantidad de calor durante la compresión isotérmica a la temperatura Θ_2. Es decir, durante esta última el gas recibe una cantidad de calor $\Delta Q_2 < 0$.

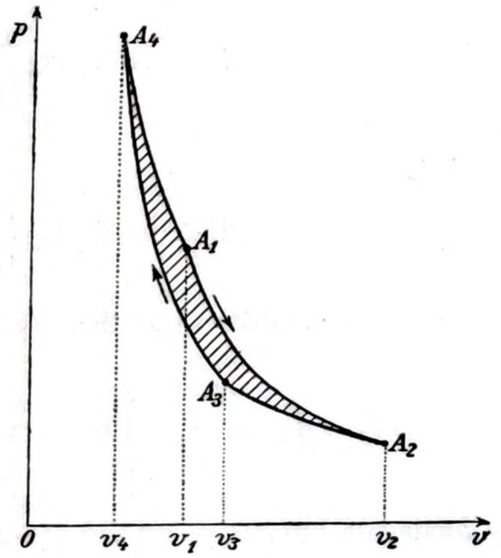


Fig. 675

El ciclo de CARNOT viene representado en el plano v, p por una línea cerrada constituída por cuatro lados: dos de los lados opuestos son ramas de hipérbolas equiláteras, según la ley de BOYLE, y los otros dos son ramas de adiabáticas reversibles de gas perfecto (fig. 675). Conocemos ya las ecuaciones de estas curvas (§ 334).

El trabajo obtenido durante el ciclo queda indicado gráficamente por el área que encierra el cuadrilátero curvilíneo $A_1A_2A_3A_4$, y es:

$$\mathfrak{L}_0 = \int_1^2 p\,dv + \int_2^3 p\,dv + \int_3^4 p\,dv + \int_4^1 p\,dv = \Delta\mathfrak{L}_1 + \Delta\mathfrak{L}_2 + \Delta\mathfrak{L}_3 + \Delta\mathfrak{L}_4.$$

Para la isoterma a Θ_2, si el cilindro contiene n moléculas-gramo de gas, se tiene:

$$\Delta \mathfrak{L}_2 = \int_2^3 p\,dv = nR\,\Theta_2 \int_{v_2}^{v_3} \frac{dv}{v} = nR\,\Theta_2 \log \frac{v_3}{v_2},$$

porque se cumple la ecuación de estado: $p = \frac{nR\Theta}{v}$. Pero en las isotermas de los gases perfectos se tiene $\Delta \mathfrak{L} = \Delta Q$ (§ 332, [2]); luego ($v_3 < v_2$):

$$\Delta \mathfrak{L}_2 = nR\,\Theta_2 \log \frac{v_3}{v_2} = \Delta Q_2 < 0.$$

Análogamente,

$$\Delta \mathfrak{L}_4 = nR\,\Theta_1 \log \frac{v_1}{v_4} = \Delta Q_1 > 0.$$

Para las adiabáticas se tiene (§ 334, [1]):

$$\Delta \mathfrak{L}_1 = \int_1^2 p\,dv = -\int_{\Theta_1}^{\Theta_2} nm_{mol} \cdot c_v \cdot d\Theta = -\,nm_{mol} \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} c_v \cdot d\Theta\,;$$

y análogamente:

$$\Delta \mathfrak{L}_3 = \int_3^4 p\,dv = -\int_{\Theta_2}^{\Theta_1} nm_{mol} \cdot c_v \cdot d\Theta = nm_{mol} \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} c_v \cdot d\Theta = -\,\Delta \mathfrak{L}_1,$$

porque c_v en los gases perfectos, sólo depende de la temperatura, y, por tanto, $\int_{\Theta_1}^{\Theta_2} c_v \cdot d\Theta$ tiene el mismo valor a lo largo de la rama de adiabática A_2A_1 que a lo largo de la rama A_3A_4.

El trabajo que puede obtenerse durante la expansión adiabática de una masa dada de gas perfecto sólo depende de las temperaturas extremas de la expansión.

Luego, siendo $\Delta \mathfrak{L}_3 = -\,\Delta \mathfrak{L}_1$, el trabajo externo efectuado por el gas durante el ciclo es:

$$\mathfrak{L}_0 = \Delta \mathfrak{L}_2 + \Delta \mathfrak{L}_4 = \Delta Q_1 + \Delta Q_2 = nR \left(\Theta_1 \log \frac{v_1}{v_4} - \Theta_2 \log \frac{v_2}{v_3} \right).$$

Por otro lado se pasa desde el volumen v_1 al volumen v_2 mediante una transformación adiabática; luego (§ 334, [3]):

$$\frac{v_1^{\gamma-1}}{v_2^{\gamma-1}} = \frac{\Theta_2}{\Theta_1};$$

y por la misma razón:

$$\frac{v_4^{\gamma-1}}{v_3^{\gamma-1}} = \frac{\Theta_2}{\Theta_1}$$

Es decir, resulta:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{v_4}{v_3}; \qquad \log \frac{v_1}{v_4} = \log \frac{v_2}{v_3},$$

y se tiene, por fin,

$$\mathfrak{L}_0 = nR\,(\Theta_1 - \Theta_2) \log \frac{v_1}{v_4}.$$

Resulta $\mathfrak{L}_0 > 0$; por lo tanto, durante el ciclo el gas ha efectuado efectivamente un trabajo sobre el exterior cuando es $\Theta_1 > \Theta_2$ y $v_1 > v_4$, esto es, cuando el gas ha efectuado una expansión a la temperatura del termostato más caliente, como habíamos supuesto precisamente.

En tal caso, el dispositivo imaginado constituye una *máquina térmica*, capaz de efectuar trabajo a expensas de la energía térmica absorbida. Durante el ciclo de CARNOT, el gas ha recibido el calor ΔQ_1 (> 0) del termostato más caliente y ha restituído el calor $|\Delta Q_2|$ ($\Delta Q_2 < 0$) al termostato más frío.

De conformidad con el primer principio (§ 327, [5]), el trabajo efectuado es equivalente a la suma algebraica de los calores absorbidos:

$$\mathfrak{L}_0 = \Delta Q_1 + \Delta Q_2\,; \qquad [1]$$

y, en cuanto es $\mathfrak{L}_0 > 0$, se tiene $\Delta Q_1 > -\,\Delta Q_2$.

Se tiene, pues, la relación:

$$\frac{\mathfrak{L}_0}{\Delta Q_1} = \varrho = \frac{\Delta Q_1 + \Delta Q_2}{\Delta Q_1} = \frac{nR\,(\Theta_1 - \Theta_2) \log \frac{v_1}{v_4}}{nR\,\Theta_1 \log \frac{v_1}{v_4}} = \frac{\Theta_1 - \Theta_2}{\Theta_1}\,; \qquad [2]$$

o también:

$$\frac{\Delta Q_1}{-\,\Delta Q_2} = \frac{\Theta_1}{\Theta_2}\,; \qquad [3]$$

$$\frac{\Delta Q_1}{\Theta_1} + \frac{\Delta Q_2}{\Theta_2} = 0. \qquad [4]$$

El primer miembro de la [2] es la razón ϱ entre el trabajo externo efectuado por el gas durante el ciclo de CARNOT y la cantidad de energía calorífica ΔQ_1 (en unidades mecánicas) que se debe suministrar al gas a la temperatura más elevada Θ_1. Esta razón ϱ se llama *rendimiento* del ciclo de CARNOT, porque en la práctica la cantidad de calor que se *paga*, ya que es proporcionada por un combustible, es precisamente la ΔQ_1.

La [2] establece que el *rendimiento del ciclo de Carnot reversible*, efectuado por un gas perfecto, es independiente de la naturaleza y de la masa de este gas, y sólo depende de las temperaturas extremas Θ_1 y Θ_2 entre las cuales evoluciona el ciclo.

La [3] precisa que la razón entre las cantidades de calor ΔQ_1 y $-\Delta Q_2$, respectivamente absorbidas y restituídas durante el ciclo, es, simplemente, la razón entre las temperaturas absolutas correspondientes a las dos isotermas.

C. — SEGUNDO PRINCIPIO DE LA TERMODINÁMICA

§ 338. Postulado de Clausius. Los fenómenos más comunes de propagación del calor prueban cuán fácil es el paso de calor desde un cuerpo caliente a un cuerpo frío. En el caso más sencillo (fig. 663), una cantidad de calor ΔQ es cedida por un termostato a temperatura Θ_1 y recibida íntegramente por un termostato a temperatura $\Theta_2 < \Theta_1$; Θ_1 y Θ_2 son temperaturas absolutas.

La irreversibilidad de esta propagación (§ 294, 2.º), comprobada experimentalmente, establece que no es posible que una cantidad de calor ΔQ sea cedida espontánea e íntegramente por un termostato frío a otro caliente.

Imagínese ahora el ciclo de CARNOT, reversible, seguido en sentido inverso al descrito en el § 337. El cuerpo recibe del termostato a la temperatura Θ_2 la cantidad de calor $-\Delta Q_2\ (>0)$; durante el ciclo, el gas *efectúa* el trabajo $-\mathfrak{L}_0 < 0$ (se debe efectuar trabajo desde el exterior sobre el gas); el cuerpo recibe el calor $-\Delta Q_1\ (<0)$ desde el termostato a Θ_1; es decir, el cuerpo da calor al termostato en cantidad mayor que la que había tomado del termostato frío, porque se ha visto que

$$|\Delta Q_1| > |\Delta Q_2|.$$

En conclusión, he aquí un dispositivo que constituye el ejemplo más sencillo de *máquina frigorífica;* con él, al término del ciclo, se encuentra el gas sin alteración y se ha obtenido un paso de calor desde un cuerpo frío (termostato a Θ_2) a otro caliente (termostato a Θ_1). *Pero se ha tenido que efectuar un trabajo sobre el gas;* entonces, de conformidad con el primer principio, el calor recibido por el cuerpo caliente es *mayor* que el calor cedido por el cuerpo frío.

Hasta ahora, ni mediante transformaciones de gas ni de cualquier otra manera se ha podido realizar dispositivo alguno que sea capaz de producir el paso de cierta cantidad de calor ΔQ desde el termostato frío al caliente, pura y simplemente (o, como suele decirse, «espontáneamente»), *esto es, sin algún otro resultado concomitante,* como se tendría, por ejemplo, en el ciclo de CARNOT invertido (máquina frigorífica); en efecto, en este caso se tiene la creación de una cantidad de calor $|\Delta Q_1| - |\Delta Q_2|$, vertida al termostato caliente, a expensas del trabajo externo $|\mathfrak{L}_0|$ que se ha tenido que efectuar sobre el gas.

La aceptación de esta imposibilidad constituye el *postulado de* CLAUSIUS.

§ 339. Teorema de Carnot. Admitido el anterior postulado, es fácil demostrar que el *rendimiento del ciclo de Carnot reversible es independiente de la naturaleza del cuerpo* (gas perfecto, gas real, vapor, líquido o sólido, homogéneo o heterogéneo) que experimenta las dos transformaciones isotérmicas y los dos adiabáticas que constituyen dicho ciclo.

Por lo tanto, el rendimiento ϱ viene siempre dado por:

$$\varrho = \frac{\Theta_1 - \Theta_2}{\Theta_1}. \qquad [1]$$

En efecto, si dos ciclos A y B de los indicados tuvieran rendimientos diferentes ϱ_A y ϱ_B, siendo, por ejemplo, $\varrho_A > \varrho_B$, funcionando los dos a expensas del calor cambiado con el mismo par de termostatos caliente y frío a las temperaturas respectivas Θ_1 y Θ_2, podríamos escribir:

$$\varrho_A = \left(\frac{\Delta Q_1 + \Delta Q_2}{\Delta Q_1}\right)_A. \qquad \varrho_B = \left(\frac{\Delta Q_1 + \Delta Q_2}{\Delta Q_1}\right)_B. \qquad [2]$$

Tomando masas convenientes de las substancias que evolucionan en uno y otro ciclo, se puede lograr que sean iguales los trabajos externos efectuados, y, por tanto (§ 337, [1]), que sea:

$$(\Delta Q_1 + \Delta Q_2)_A = (\Delta Q_1 + \Delta Q_2)_B. \qquad [3]$$

Si $\varrho_A > \varrho_B$, quiere decir que se tiene

$$(\Delta Q_1)_A < (\Delta Q_2)_B,$$

y, por la [3], resulta

$$(\Delta Q_1)_A - (\Delta Q_1)_B = -[(\Delta Q_2)_A - (\Delta Q_2)_B] < 0.$$

Hágase entonces funcionar A como máquina térmica y B como máquina frigorífica. Al final de una transformación constituída por la sucesión del ciclo A y del ciclo B así invertido (máquina frigorífica), las dos substancias que han efectuado los ciclos han adquirido de nuevo las condiciones internas iniciales; la suma algebraica de los trabajos externos obtenidos es nula. El termostato frío ha *proporcionado en total* la cantidad de calor $[(\Delta Q_2)_A - (\Delta Q_2)_B] > 0$ y una cantidad igual de calor $[(\Delta Q_1)_A - (\Delta Q_1)_B]$ ha sido *recibida* por el termostato caliente [en efecto, es: $(\Delta Q_1)_A - (\Delta Q_1)_B < 0$].

Se habría realizado un dispositivo que contradice el postulado de CLAUSIUS.

De ello se deduce, pues, que debe ser

$$\varrho_A = \varrho_B = \varrho_{rev} = \text{const.} \qquad [4]$$

para todos los ciclos de CARNOT reversibles que funcionan entre las mismas temperaturas Θ_1 y Θ_2.

Puesto que en los gases perfectos se tiene

$$\frac{\mathfrak{L}_0}{\Delta Q_1} = \varrho_{rev} = \frac{\Theta_1 - \Theta_2}{\Theta_1}, \qquad [5]$$

éste es también el rendimiento con otra substancia cualquiera.

En un ciclo de CARNOT *reversible*, realizado por cualquier substancia, es válida, por tanto, la [3], § 337:

$$\left(\frac{\Delta Q_1}{-\Delta Q_2}\right)_{rev} = \frac{\Theta_1}{\Theta_2};$$

luego también es:

$$\left(\frac{\Delta Q_1}{\Theta_1} + \frac{\Delta Q_2}{\Theta_2}\right)_{rev} = 0, \qquad [6]$$

en donde Θ_1, Θ_2 son temperaturas absolutas.

Del razonamiento anterior resulta asimismo que el rendimiento es constante para cualquier ciclo *reversible* durante el cual el sistema que evoluciona cambie calor *reversiblemente* sólo con un termostato a Θ_1 y con otro a Θ_2, incluso si las transformaciones del ciclo durante las cuales el gas (o, en general, el cuerpo) no está en comunicación con los termostatos son adiabáticas reversibles no simples, como las imaginadas en el § 337, sino tan complicadas como se quiera. Por ejemplo, el gas puede estar dividido en dos partes, cada una de las cuales está sometida a compresiones o expansiones diferentes hasta llevar la temperatura de las dos partes a valores extremos diferentes de Θ_1 y Θ_2, y asimismo variadamente diferentes para ambas partes.

Como es natural, para respetar la reversibilidad, estas dos partes tendrán que estar adiabáticamente aisladas entre sí, durante aquellas fases de su transformación en las cuales ambas partes tienen temperaturas diferentes.

De un ciclo de CARNOT *irreversible*, funcionando como máquina térmica entre los termostatos Θ_1 y Θ_2, tampoco puede esperarse un rendimiento superior al que corresponde a cualquier ciclo de CARNOT reversible entre las mismas temperaturas. Bastaría acoplar dicho ciclo irreversible A a un ciclo de Carnot reversible B, invertido, y repetir el razonamiento anterior; se tropezaría de nuevo con el postulado de CLAUSIUS.

Por el contrario, recordando las tres causas fundamentales de irreversibilidad (§ 294) se ve fácilmente que en un ciclo de CARNOT irreversible se tiene un rendimiento ϱ_{irr} menor que el rendimiento común a cualquier ciclo de CARNOT reversible ϱ_{rev} entre los mismos termostatos:

$$\varrho_{irr} < \varrho_{rev}. \qquad [7]$$

Luego:

$$\left(\frac{\Delta Q_1 + \Delta Q_2}{\Delta Q_1}\right)_{irr} < \frac{\Theta_1 - \Theta_2}{\Theta_1} \quad \text{y} \quad \left(\frac{\Delta Q_1}{\Theta_1} + \frac{\Theta Q_2}{\Theta_2}\right)_{irr} < 0 \qquad [8]$$

En efecto:

1.º El rozamiento impide que todo el trabajo externo que podría efectuar el ciclo sea recogido efectivamente como tal, porque parte de él se transforma en una cantidad equivalente de calor, del que sólo una parte, generalmente muy pequeña, es restituída al termostato caliente. En la expresión del rendimiento [5], el numerador ha disminuído y, aun en el caso más afortunado, ha disminuído lo mismo el denominador. El rendimiento (< 1) siempre resulta disminuído.

2.º La expansión irreversible sin trabajo externo, que en el ciclo de CARNOT podría sustituir a la expansión isotérmica reversible, anula la única fase útil del ciclo para los efectos de la producción de trabajo externo efectuado por la máquina ($\Delta\mathfrak{L}_4 > 0$). En tal caso sería $\Delta\mathfrak{L}_4 = 0$, y al fin del ciclo habríamos efectuado desde el exterior sobre la máquina el trabajo

$$\Delta\mathfrak{L}_1 + \Delta\mathfrak{L}_2 + \Delta\mathfrak{L}_3 + \Delta\mathfrak{L}_4 = \Delta\mathfrak{L}_2,$$

que es, precisamente, < 0, vertiendo así al termostato a Θ_2 la cantidad de calor equivalente. El rendimiento resultaría enormemente negativo.

3.º Si, en fin, la irreversibilidad fuese debida a que el intercambio de calor entre los termostatos y la substancia se produjese con saltos de temperatura, durante el ciclo se añadiría un paso de calor por conducción desde el termostato caliente al frío.

En este caso, cada una de las dos partes del cuerpo ejecuta ciertamente un ciclo (*¡reversible!*), pero durante tal paso recibe calor de la otra parte, o lo cede, realizándose esto, por lo general, a temperatura, diferente de Θ_1, Θ_2; de aquí que cada una de las partes del cuerpo ya no ejecuta necesariamente un ciclo de CARNOT. Para el cuerpo entero, la [8] es todavía verdadera, pero esto no quedará aclarado hasta el final del § 346, *d*).

Las expresiones [4] y [7] constituyen el *teorema de* CARNOT.

En conclusión: una máquina térmica que realice un ciclo de CARNOT, y que, por tanto, solamente cambie calor con el exterior a través de dos termostatos a las temperaturas Θ_1 y Θ_2, no puede nunca tener un rendimiento igual a la unidad, a no ser que sea $\Theta_1 = \infty$ o $\Theta_2 = 0$, lo que es prácticamente imposible. La parte $|\Delta Q_2|$ del calor tomado al hogar a temperatura Θ_1 resulta forzosamente perdida, porque es restituída por la máquina *a temperatura inferior* Θ_2, por lo que este calor $|\Delta Q_2|$ se ha *degradado* sin haber sido transformado en trabajo.

La energía calorífica tomada a un manantial de calor no puede transformarse completamente en trabajo durante el ciclo. En cambio, esto es posible con la energía cinética, potencial y eléctrica. La energía calorífica no es de tan buena calidad.

El teorema de CARNOT nos dice que en una máquina ideal, reversible, el rendimiento del ciclo de CARNOT sería

$$\varrho = \frac{\Theta_1 - \Theta_2}{\Theta_1},$$

pero este rendimiento es menor en las máquinas reales, irreversibles.

Por ejemplo, en una máquina de vapor de émbolo, Θ_1 es la temperatura del vapor en la caldera: unos 450 °K; Θ_2 es la temperatura del vapor a la salida: unos 320 °*K* si hay *refrigerante*. Luego el rendimiento teórico de esta máquina de vapor puede llegar a

$$\frac{450 - 320}{450} = 0{,}3 = 30\ \%.$$

El rendimiento práctico en la máquina de WATT era 0,013; ¡aproximadamente, sólo el 1 % del calor proporcionado al agua de la caldera se transformaba en trabajo! En las buenas máquinas modernas de vapor, el rendimiento puede acercarse al 20 %.

§ 340. Temperatura termodinámica. La expresión [6], § 339, permite definir y medir, teóricamente, una *temperatura absoluta termodinámica* independientemente de toda substancia termométrica, incluso del gas perfecto.

Para que esta temperatura resulte expresada en unidades coincidentes con el °C, bastará suponer que la temperatura absoluta termodinámica del hielo fundente tiene el valor 273,15.

En efecto, un calorímetro isotérmico (como el de Bunsen, a $\Theta_2 = 273{,}15$ °K) permite medir cantidades de calor en unidades arbitrarias independientemente de todo termómetro; basta un termoscopio de escala completamente arbitraria.

Para calibrar otro calorímetro isotérmico, con la misma unidad de medida, suponiendo que trabaje a una temperatura desconocida Θ_1, basta el mismo termoscopio de escala completamente arbitraria.

En efecto, basta que este termoscopio nos asegure que una misma masa m de agua introducida en el primer calorímetro para proceder al calibrado del mismo, e introducido luego en el segundo calorímetro con el mismo objeto, se ha enfriado en los dos casos desde el mismo estado térmico inicial θ al mismo estado térmico final θ'.

Por lo demás, se comprende pronto que el calibrado de un calorímetro no necesite el uso de un termómetro, observando que con el dispositivo de la figura 688 se puede graduar directamente el calorímetro de Bunsen en calor expresado en joule.

Entonces, un ciclo de CARNOT realizado entre Θ_1 y $\Theta_2 = 273{,}15$ °K permite determinar Θ_1 mediante la [6], § 339, midiendo ΔQ_1 y ΔQ_2.

La temperatura absoluta medida de este modo se llama *termodinámica*, y teniendo en cuenta la manera cómo se ha obtenido la [2], § 337, y, por tanto, la [6], § 339, resulta que coincide con la temperatura medida con un termómetro de gas perfecto (§ 300).

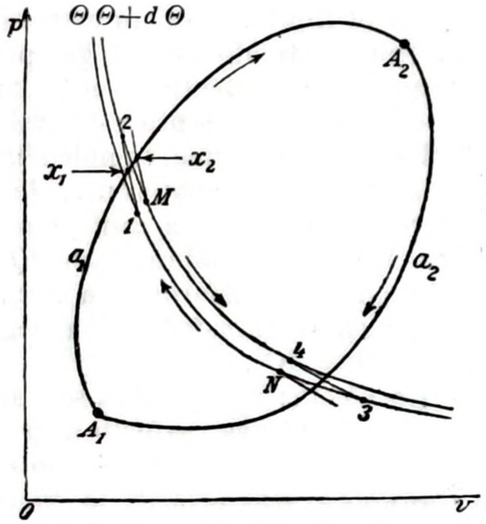


Fig. 676

§ 341. Segundo principio de la termodinámica. Supongamos una transformación reversible cualquiera $A_1a_1A_2a_2A_1$ recorrida, por ejemplo, por un gas perfecto, por ser en éste conocida la forma de los haces de isotérmicas y de adiabáticas, en el plano de CLAPEYRON (v, p).

Además, supongamos que la temperatura del cuerpo tenga en todas partes el mismo valor Θ.

Imagínese sustituída la transformación efectiva $A_1a_1A_2a_2A_1$ (figura 676) por una línea quebrada constituída por lados infinitesimales de isotermas y de adiabáticas, de modo que sigan lo mejor posible la curva efectiva de la figura. Con la prolongación de los elementos de estas líneas infinitésimas puede dividirse el ciclo total en infinitos ciclos de CARNOT; sea (1, 2, 4, 3, 1) uno de estos ciclos.

Para cada uno de ellos se tiene (§ 339, [6]):

$$\int_0 \frac{dQ}{\Theta} = \left(\frac{\Delta Q_1}{\Theta_1} + \frac{\Delta Q_2}{\Theta_2}\right)_{rev} = 0.$$

Luego, efectuando la suma para todos los ciclos elementales, resulta:

$$\oint \frac{dQ}{\Theta} = 0, \qquad [1]$$

en donde $\oint \frac{dQ}{\Theta}$ indica la suma de todas las infinitas integrales $\int_0 \frac{dQ}{\Theta}$ referentes a los sucesivos ciclos elementales de CARNOT.

Pero cada uno de los segmentos finitos, como *M4* y *N1*, está descrito dos veces, y en sentidos opuestos, en ciclos elementales contiguos; luego, a lo largo de estos segmentos, son iguales y opuestos los trabajos elementales y los calores absorbidos.

Por lo tanto, la [1] es también verdadera cuando $\oint \frac{dQ}{\Theta}$ se entiende extendida al contorno en zigzag que ha sustituído al contorno de la transformación efectiva.

En el límite, para un aserrado infinitamente pequeño, el trabajo externo efectuado por el gas perfecto a lo largo del ciclo efectivo es igual que el efectuado a lo largo del contorno festoneado, porque en ambos se representa este trabajo por la misma área.

Demostremos que también los sucesivos dQ relativos al contorno aserrado que aparecen en la [1] pueden confundirse con los sucesivos dQ relativos a cada elemento x_1x_2 de la transformación efectiva. En otras palabras, sea dQ el calor proporcionado al gas perfecto en la transformación x_1x_2, y dQ', el calor proporcionado al mismo en la transformación según la línea quebrada $x_1 2M x_2$; se tiene $dQ = dQ'$.

En efecto: $x_1 2$ y $M x_2$ son adiabáticas; luego dQ' es el calor proporcionado al gas perfecto a lo largo del segmento $2M$ de isoterma.

Este dQ' es un infinitésimo como $2M$ y x_1x_2; basta recordar las expresiones generales de la cantidad de calor [2], [3] y [4], § 316.

Considérese ahora el ciclo $x_1x_2 M2 x_1$. El primer principio de la termodinámica (§ 327, [5]) da en valor y signo:

$$dQ - dQ' = d\mathfrak{L},$$

en donde $d\mathfrak{L}$, trabajo externo efectuado durante el ciclo, viene dado en la figura 676 por el área que encierra la línea $x_1x_2 M2 x_1$ (dos triángulos de lados infinitesimales cuyas áreas tienen signo opuesto); por tanto, este trabajo es un infinitésimo de segundo orden respecto a $2M$ y a x_1x_2. La relación anterior entre un infinitésimo dQ' de primer orden y otro infinitésimo $d\mathfrak{L}$ de segundo orden sólo puede ser satisfecha cuando se tenga precisamente:

$$dQ - dQ' = 0.$$

En conclusión, la [1] también es válida cuando dQ representa el calor proporcionado a lo largo de la transformación reversible infinitesimal x_1x_2.

Como en esta demostración no se ha utilizado ninguna de las propiedades particulares de los gases perfectos, puede repetirse para otro cuerpo cualquiera que recorra un ciclo reversible.

Por tanto, se tiene en general:

$$\oint \frac{dQ}{\Theta} = 0 \textit{ en cualquier ciclo reversible.} \qquad [2]$$

Puede escribirse (comp. § 327):

$$\int_{A_1a_1A_2} \frac{dQ}{\Theta} + \int_{A_2a_2A_1} \frac{dQ}{\Theta} = 0,$$

o, también, por la reversibilidad del ciclo, y, por tanto, de la transformación $A_2a_2A_1$:

$$\int_{A_1a_1A_2} \frac{dQ}{\Theta} = \int_{A_1a_2A_2} \frac{dQ}{\Theta}.$$

En resumen, la integral

$$\left(\int_1^2 \frac{dQ}{\Theta}\right)_{rev},$$

extendida a una transformación entre los estados extremos A_1 (v_1, p_1) y A_2 (v_2, p_2), indicados abreviadamente en la integral por 1 y 2, *sólo depende de los extremos de la transformación, con tal que sea reversible;* en términos infinitesimales, podemos afirmar que:

$$\left(\frac{dQ}{\Theta}\right)_{rev} \textit{ es una diferencial exacta.} \qquad [3]$$

Análogamente, *limitándonos por ahora a los casos de irreversibilidad* 1.º y 2.º del § 339, es decir, suponiendo que en todo instante la temperatura tiene el mismo valor Θ en todo el cuerpo que efectúa

el ciclo, se demostraría, gracias a la [8], § 339, que se tiene:

$$\oint \frac{dQ}{\Theta} < 0 \text{ } \textit{en cualquier ciclo irreversible.} \qquad [4]$$

Sea ahora una transformación abierta irreversible $A_1 a_1 A_2$ y cerrémosla con otra reversible $A_2 a_2 A_1$, lo cual es, en general, posible (§ 294, final). El ciclo así obtenido es irreversible, por serlo una de las transformaciones que lo constituyen. La (4) da, por tanto, teniendo en cuenta la reversibilidad de la transformación que lo cierra:

$$\left(\int_1^2 \frac{dQ}{\Theta}\right)_{irr} < \left(\int_1^2 \frac{dQ}{\Theta}\right)_{rev}, \qquad [5]$$

y, mientras el segundo miembro de la desigualdad depende solamente de los extremos de la transformación reversible, no sucede así con el primer miembro.

En términos infinitesimales, tenemos:

$\left(\frac{dQ}{\Theta}\right)_{irr}$ *no es una diferencial exacta*, y se tiene $\left(\frac{dQ}{\Theta}\right)_{irr} < \left(\frac{dQ}{\Theta}\right)_{rev}$. [6]

Las igualdades [1] ÷ [6] contienen el *segundo principio de la termodinámica.*

Estas igualdades permiten establecer estos dos hechos fundamentales:

1.º Existe, de conformidad con la [3], una función S que sólo depende del estado interno del cuerpo; es decir, en el caso corriente de flúidos homogéneos, existe una función de dos de las tres variables v, p, Θ, tal que se tenga:

$$\left(\frac{dQ}{\Theta}\right)_{rev} = dS \qquad [7]$$

para una transformación *elemental reversible cualquiera* entre dos estados (v, p, Θ) y $(v + dv, p + dp, \Theta + d\Theta)$ infinitamente próximos.

Para una *transformación finita reversible* se tiene, integrando la [7]:

$$\left(\int_1^2 \frac{dQ}{\Theta}\right)_{rev} = S_2 - S_1 \qquad [8]$$

igual para todas las transformaciones reversibles entre los mismos extremos A_1 y A_2, indicados brevemente en la integral por 1 y 2.

2.º Sea una transformación *elemental irreversible* entre dos estados infinitamente próximos; comparada con una transformación *reversible entre los mismos extremos, se tiene:*

$$\left(\frac{dQ}{\Theta}\right)_{irr} < \left(\frac{dQ}{\Theta}\right)_{rev}; \quad \text{o sea,} \quad \left(\frac{dQ}{\Theta}\right)_{irr} < dS. \qquad [9]$$

En una *transformación finita irreversible* entre los estados extremos A_1 y A_2, comparada con una transformación reversible entre los mismos extremos, se tiene:

$$\left(\int_1^2 \frac{dQ}{\Theta}\right)_{irr} < \left(\int_1^2 \frac{dQ}{\Theta}\right)_{rev}; \quad \text{o sea,} \quad \left(\int_1^2 \frac{dQ}{\Theta}\right)_{irr} < S_2 - S_1. \qquad [10]$$

§ 342. Valor del segundo principio. Aparte de la dificultad de lograr determinaciones experimentales suficientemente precisas concernientes a una transformación infinitesimal, puede suponerse conocido $\frac{dQ}{\Theta}$ con tal de que se midan el calor elemental dQ proporcionado al cuerpo por un calorímetro adecuado durante dicha transformación y la temperatura Θ (supuesta constante en todo el cuerpo) a que se efectúa la transformación elemental.

Abora bien, $\left(\int_1^2 \frac{dQ}{\Theta}\right)_{rev}$, en una transformación reversible finita, debe resultar independiente de dicha transformación a igualdad de estados extremos.

Se tiene así, como con el primer principio, un medio de someter el segundo principio a una comprobación experimental aunque esta comprobación directa resultaría muy grosera. También en mecánica el principio de inercia y la misma ley de acción de las fuerzas reciben mayor confirmación por las comprobaciones indirectas que por una verificación experimental directa, porque ésta es poco satisfactoria a causa de los rozamientos y de la presencia continua de la fuerza de la gravedad.

El valor del segundo principio de la termodinámica se encuentra, precisamente, en el gran número de comprobaciones indirectas que se han obtenido de él.

La extensión práctica del segundo principio se verá claramente mediante algunas deducciones de que vamos a tratar pronto.

Puede decirse, en general, que el segundo principio:

a] aplicado a las transformaciones reversibles impone que

$$\frac{dQ}{\Theta}$$

sea una diferencial exacta. Esto equivale a escribir relaciones entre los coeficientes que sirven para formar $\frac{dQ}{\Theta}$, es decir, entre las propiedades térmicas del cuerpo o del sistema que se estudia (comp. §§ 316, 318, 350);

b] aplicado a las transformaciones irreversibles, fija su sentido (compárese con §§ 347, 348).

Luego puede decirse que el alcance del segundo principio es mayor que el del primero, pero éste sólo tiene el valor correspondiente al caso *a*].

§ **343. Entropía.** Puede también decirse que el segundo principio equivale en su primera parte a admitir una función S de las variables que determinan el estado interno del cuerpo, y cuya diferencial total es $\left(\frac{dQ}{\Theta}\right)_{rev}$, o también, por el primer principio,

$$\frac{dU + p\,dv}{\Theta}.$$

La función S del estado del cuerpo resulta determinada salvo una constante aditiva, lo mismo que el potencial $\mathcal{V}$ (§ 89), que la energía potencial $\mathcal{W}$ (§ 90) y que la energía interna U (§ 328); S se llama *entropía* del cuerpo.

Cada cuerpo, lo mismo que tiene cierta masa, cierto volumen, cierta temperatura y cierta energía interna U, tiene también cierta *entropía*, que sólo depende del estado interno del cuerpo.

Puesto que en un cuerpo homogéneo en el que p, Θ y, por tanto, el volumen específico $\frac{1}{\mu}$ son constantes en todos sus puntos, la cantidad de calor dQ que se le ha de dar durante una transformación elemental es proporcional a la masa del cuerpo; se tiene también:

$$S = m \cdot s,$$

siendo s la entropía específica del cuerpo homogéneo, es decir, la entropía referida a la unidad de masa. Cuando p, Θ y $\frac{1}{\mu}$ varían de un punto a otro, sólo se podrá escribir:

$$dS = s \cdot dm,$$

en donde dS es la entropía (infinitesimal) que corresponde al elemento de masa dm del cuerpo.

En las transformaciones reversibles infinitesimales se cumple la [7], § 341, y en las reversibles finitas la [8], § 341. Luego, tanto en

las transformaciones infinitesimales (elementales) como en las transformaciones finitas, aparecen siempre diferencias de entropía y la constante aditiva que queda indeterminada no produce perturbación. Lo mismo sucede con el potencial, con la energía potencial y con la energía interna U.

En definitiva, a cada estado de un cuerpo flúido homogéneo corresponde un valor para cada una de las cinco variables siguientes: $v_{sp} = \frac{1}{\mu}$ (volumen específico), p, Θ, u, s. Sólo dos de estas variables son independientes y bastan para determinar el estado del cuerpo.

En un gas perfecto, en un cuerpo sólido o en un cuerpo líquido, se puede expresar fácilmente la variación de entropía en función de magnitudes que se pueden medir experimentalmente.

En una molécula-gramo de gas perfecto, que sufre una transformación reversible, de modo que sea $d\mathcal{L} = p\,dv$, el primer principio da (§ 333 , [1]):

$$dQ = m_{mol} \cdot c_v d\Theta + p\,dv.$$

Luego:

$$dS = m_{mol} \cdot c_v \frac{d\Theta}{\Theta} + \frac{p}{\Theta}\,dv$$

y por la ecuación de estado se tiene:

$$\frac{p}{\Theta} = \frac{R}{v}.$$

Integrando, se obtendrá la variación de entropía desde un estado A_1 (v_1, p_1, Θ_1) a otro A_2 (v_2, p_2, Θ_2):

$$S_2 - S_1 = m_{mol} \int_1^2 c_v \frac{d\Theta}{\Theta} + R \int_1^2 \frac{dv}{v}. \qquad [1]$$

Y, por tanto, para la unidad de masa:

$$s_2 - s_1 = \int_1^2 c_v \frac{d\Theta}{\Theta} + \frac{R}{m_{mol}} \int_1^2 \frac{dv}{v}, \qquad [2]$$

o sea,

$$s = \int c_v \frac{d\Theta}{\Theta} + \frac{R}{m_{mol}} \int \frac{dv}{v} + s_0. \qquad [3]$$

S se mide en unidades térmicas, es decir, en *calorías por °K*, o en unidades mecánicas (p. ej.: joule por °K), según que dQ venga

medido en cal o en unidades mecánicas (joule, por ejemplo); s se mide, respectivamente, en $\frac{\text{calorías}}{{}^{o}\text{K}\cdot\text{g}_m}$ o en $\frac{\text{joule}}{{}^{o}\text{K}\cdot\text{g}_m}$.

En el campo en que c_v es constante con respecto a Θ, es:

$$s_2 - s_1 = c_v \log\frac{\Theta_2}{\Theta_1} + \frac{R}{m_{mol}}\log\frac{v_2}{v_1} \qquad [4]$$

$$s = c_v \log\Theta + \frac{R}{m_{mol}}\log v + s_0. \qquad [5]$$

Resulta, precisamente, que s queda determinada salvo una constante aditiva s_0, y solamente es función de las coordenadas que fijan el estado del cuerpo (en nuestro caso, v y Θ). Se obtiene s en función de v y p, o de p y Θ, eliminando en la [5] una de las tres variables v, p, Θ mediante la ecuación de estado, como de costumbre.

En los sólidos y en los líquidos se ha dicho ya (§ 330, *a*]) hasta qué punto es despreciable el trabajo externo $\int_1^2 p\,dv$, y se tiene para una transformación de la unidad de masa de un sólido o de un líquido, si se excluye que la transformación comprenda un cambio de estado de agregación:

$$(dQ)_{m=1} = c_p d\Theta. \qquad [6]$$

Luego

$$s_2 - s_1 = \int_1^2 c_p \frac{d\Theta}{\Theta} \qquad [7]$$

y, por tanto,

$$s = \int c_p \frac{d\Theta}{\Theta} + s_0. \qquad [8]$$

En el intervalo de temperatura en que pueda suponerse constante c_p es:

$$s_2 - s_1 = c_p \cdot \log\frac{\Theta_2}{\Theta_1}; \qquad [9]$$

$$s = s_0 + c_p \cdot \log\Theta. \qquad [10]$$

Tanto la [4] como la [9] darían variaciones infinitas de entropía para transformaciones hasta el cero absoluto. De hecho, de conformidad con los experimentos, los calores específicos de todos los cuerpos con que se ha podido experimentar, tienden a cero con la temperatura absoluta, de modo que la curva $c = c\,\Theta$ es tangente, en el origen, al eje de las temperaturas (fig. 661).

Por otro lado, los fenómenos en la proximidad del cero absoluto se producen de tal modo, que han inducido a NERNST no sólo a proponer la hipótesis de que los calores específicos de todos los cuerpos tienden a cero con la temperatura absoluta, sino, además, a fijar la imposibilidad de realizar un dispositivo que sea capaz de enfriar un cuerpo hasta el cero absoluto *(tercer principio de la termodinámica)*. Es notable el alcance de este principio: Permite establecer el valor de la constante s_0 en la expresión de la entropía y deducir que, hacia el cero absoluto, todas las magnitudes físicas se vuelven independientes de Θ.

§ **344. Generalización del segundo principio.** El segundo principio puede también generalizarse al caso de sistemas no homogéneos, en que no sean constantes ni Θ, ni p, como hemos hecho con el primer principio (§ 329).

Imagínese ahora dividido el sistema en partes, en cada una de las cuales Θ tenga el mismo valor, mientras que las temperaturas Θ_1, Θ_2, ..., Θ_r ..... de las distintas partes sean, por lo general, todas distintas. La entropía S_r de la parte r-ésima se calcula (salvo la consabida constante aditiva) mediante la [8], § 341, y la entropía total del sistema vendrá definida por:

$$S = \sum_r S_r, \quad \text{de donde} \quad dS = \sum_r dS_r; \qquad [1]$$

luego la entropía del sistema es función aditiva de sus partes.

1.º **Transformaciones reversibles.** Escrita la [8], § 341, para cada parte, en una transformación reversible que lleve el sistema completo desde el estado 1 al estado 2, se tiene:

$$\left(\sum_r \int_1^2 \frac{dQ_r}{\Theta_r}\right)_{rev} = \sum_r (S_{r2} - S_{r1}) = \left(\sum_r S_r\right)_2 - \left(\sum_r S_r\right)_1;$$

o sea,

$$\left(\int_1^2 \sum_r \frac{dQ_r}{\Theta_r}\right)_{rev} = S_2 - S_1; \qquad [2]$$

$$\left(\sum_r \frac{dQ_r}{\Theta_r}\right)_{rev} = dS. \qquad [3]$$

En estas fórmulas, dQ_r es lacantidad de calor recibida por la parte r-ésima del sistema, procedente del exterior del sistema, o bien de las otras $r-1$ partes restantes del mismo.

Pero si la transformación es reversible, los intercambios de calor interiores al sistema sólo se producen cuando las partes que se

hallan en comunicación térmica están a la misma temperatura, de manera que en la $\int_1^2 \sum_r \frac{dQ_r}{\Theta_r}$ los términos debidos a tales intercambios se anulan mutuamente dos a dos. En este caso, los primeros miembros de las [2] y [3] toman la forma [8], [7], § 341 ; es decir, la variación de entropía del sistema equivale a la integral $\int_1^2 \sum_r \frac{(dQ_r)_e}{\Theta_r}$ calculada solamente *a partir de las cantidades de calor* $(dQ_r)_e$ *que las distintas partes reciben del exterior del sistema.*

Por consiguiente, *en las transformaciones reversibles de un sistema*, se tiene :

$$\int_1^2 \sum_r \frac{(dQ_r)_e}{\Theta_r} = S_2 - S_1 ; \qquad [4]$$

la variación de entropía total del sistema puede calcularse exclusivamente a base de las aportaciones (también reversibles) *de calor procedente del exterior.*

Luego el segundo principio aplicado al sistema total está contenido en las fórmulas siguientes :

$$\left(\int_1^2 \sum_r \frac{dQ_r}{\Theta_r}\right)_{rev} = \left(\int_1^2 \sum_r \frac{(dQ_r)_e}{\Theta_r}\right)_{rev} = S_2 - S_1 = \left(\sum_r S_r\right)_2 - \left(\sum_r S_r\right)_1 \qquad [5]$$

$$\left(\sum_r \frac{dQ_r}{\Theta_r}\right)_{rev} = \left(\sum_r \frac{(dQ_r)_e}{\Theta_r}\right)_{rev} = dS = \sum_r dS = d\left(\sum_r S_r\right). \qquad [6]$$

2.º **Transformaciones irreversibles.** Se distinguen dos casos:

a] La irreversibilidad es debida solamente a las causas indicadas en el § 339, 1.º (rozamiento) y en el § 339, 2.º (expansión sin trabajo externo).

Ahora bien, en cada porción del sistema, la temperatura tiene en todas partes el mismo valor y, por lo menos en una de las partes, se tiene irreversibilidad, luego vale para ésta la [10], § 341, mientras que en las otras partes, en las cuales falta la irreversibilidad, vale la [8], § 341.

Sumando para las r partes del sistema, se tiene :

$$\left(\int_1^2 \sum_r \frac{dQ_r}{\Theta_r}\right)_{irr} < S_2 - S_1. \qquad [7]$$

Como queda excluída la tercera causa de irreversibilidad (paso de calor entre partes calientes y partes frías del sistema), también ahora los intercambios de calor interiores al sistema se efectúan tan sólo entre partes que poseen igual temperatura ; por lo tanto, también ahora en el primer miembro de la [7] se anulan dos a dos los términos debidos a tales intercambios ; la [7] se reduce a :

$$\left(\int_1^2 \sum_r \frac{(dQ_r)_e}{\Theta_r}\right)_{irr} < S_2 - S_1 ; \qquad [8]$$

es decir, sólo entran en juego las cantidades de calor $(dQ_r)_e$ que las distintas partes reciben *del exterior del sistema.*

En una transformación irreversible infinitésima se tiene :

$$\left(\sum_r \frac{(dQ_r)_e}{\Theta_r}\right)_{irr} < dS. \qquad [9]$$

b] La irreversibilidad es debida solamente a las causas indicadas en el § 339, 3.º (paso de calor desde partes calientes a partes frías del sistema). En tal caso, la temperatura tiene el mismo valor en todos los puntos de cada porción del sistema, y el ciclo recorrido por cada una de estas partes es irreversible. De manera que la [8], § 341, es válida en cada una de las partes. Sumando respecto a todas ellas, se tiene :

$$\left(\int_1^2 \sum_r \frac{dQ_r}{\Theta_r}\right) = S_2 - S_1 ; \qquad [10]$$

o bien, para una transformación infinitesimal :

$$\sum_r \frac{dQ_r}{\Theta_r} = dS. \qquad [11]$$

En estas fórmulas, dQ_r es la cantidad de calor recibida por la r - *ésima* parte del sistema procedente del exterior del sistema, o bien de las otras $r - 1$ partes del mismo.

Pero los intercambios de calor internos son, por lo menos en parte, irreversibles, es decir, se verifican entre una porción más caliente (a temperatura Θ_m) y una porción más fría (a temperatura $\Theta_n < \Theta_m$). Por lo tanto, en el primer miembro de la [10], los términos relativos a tales intercambios irreversibles son, dos a dos, del tipo

$$\frac{dQ_m}{\Theta_m}, \quad \frac{dQ_n}{\Theta_n}$$

y se tiene

$$\frac{dQ_m}{\Theta_m} + \frac{dQ_n}{\Theta_n} > 0, \qquad [12]$$

porque es $-dQ_m = dQ_n$ y $\Theta_m > \Theta_n$.

Suprimamos del primer miembro de la [10] todos los términos que se deben a tales intercambios internos de calor, porque *ahora también queremos una relación en la que sólo se tengan en cuenta las cantidades de calor* $(dQ_r)_e$ *que las partes individuales reciben del exterior del sistema.*

Como alguno, por lo menos, de estos intercambios es irreversible y por ello vale la [12], la [10] permite escribir:

$$\left(\int_1^2 \sum_r \frac{(dQ_r)_e}{\Theta_r}\right)_{irr} < S_2 - S_1. \qquad [13]$$

y la [11] nos da:

$$\sum_r \frac{(dQ_r)_e}{\Theta_r} < dS. \qquad [14]$$

Las [13] y [14] son idénticas a las [8] y [9].

Por consiguiente, *las expresiones* [8] y [9] *son válidas para toda transformación irreversible,* cualquiera que sea la causa de la irreversibilidad; *en el primer miembro de las mismas entran en juego solamente cantidades de calor que el sistema recibe del exterior.*

§ 345. Deducciones fundamentales del segundo principio. A) Transformaciones reversibles.

a] **Transformación adiabática reversible.** Se cumple la [4], § 344, pero son nulas todas las cantidades de calor $(dQ_r)_e$ recibidas del exterior. Luego:

$$0 = S_2 - S_1, \quad S = \sum_r S_r = \text{const.} \qquad [1]$$

Las transformaciones adiabáticas reversibles son isoentrópicas.

La ecuación $p \cdot v^\nu = \text{const.}$, encontrada para la adiabática reversible de un gas perfecto, es también la ecuación de la *isoentrópica*; los estados (v, p) (y, por tanto, Θ) que satisfacen a esta ecuación, tienen todos el mismo valor de la entropía.

b] **Transformación isotérmica reversible.** En una *transformación isotérmica reversible* cualquiera, siendo constante Θ, la [4], § 344, da:

$$\frac{1}{\Theta}\int_1^2 \sum_r (dQ_r)_e = S_2 - S_1; \qquad [2]$$

y, recordando la segunda de las [6], § 329, se tiene:

$$\int_1^2 (d\mathfrak{L})_2 = \int_1^2 \sum_r (d\mathfrak{L}_r)_e = (U_1 - \Theta S_1) - (U_2 - \Theta S_2) = F_1 - F_2. \qquad [3]$$

En los procesos isotérmicos reversibles, la función $F = U - \Theta S$ (determinable salvo una expresión aditiva del tipo $U_0 - \Theta S_0$) goza de la propiedad análoga a la de la energía potencial: su disminución mide el trabajo que puede efectuar el cuerpo sobre el exterior; luego $F_1 - F_2$ *es la energía utilizable en la transformación isotérmica reversible.*

$F = U - \Theta S$ se llama *energía libre,* poseída por el sistema, y sólo es función de su estado interno, como Θ, S y U.

Obsérvese que cuando el sistema considerado es un gas perfecto, en una transformación isotérmica se tiene $U_1 = U_2$ (§ 332), y, por tanto, la última fórmula se reduce a:

$$\int_1^2 (d\mathfrak{L})_e = \Theta\,(S_2 - S_1).$$

c] **Ciclo reversible.** En *cualquier ciclo reversible,* la [4], § 344, se reduce a:

$$\oint \sum_r \frac{(dQ_r)_e}{\Theta} = 0. \qquad [4]$$

Ésta, *en un ciclo isotérmico y reversible,* se convierte en

$$\oint \sum_r (dQ_r)_e = 0; \qquad [5]$$

es decir: al final del ciclo *se anula la suma algebraica de los calores absorbidos desde el exterior.* Y puesto que en un ciclo cualquiera es válida la tercera de las [6], § 329, se deduce que:

$$\oint (d\mathfrak{L})_e = \oint \sum_r (d\mathfrak{L}_r)_e = 0. \qquad [6]$$

La suma algebraica de los trabajos externos efectuados por el cuerpo o por el sistema que experimenta el ciclo isotérmico, es nula.

El cuerpo (o el sistema) puede hacer de intermediario entre una fuerza externa que efectúa trabajo sobre el sistema y una fuerza externa contra la cual trabaja este sistema, restituyendo la energía recibida. Es el caso de las máquinas de la mecánica, en particular de las máquinas simples (polea, plano inclinado, eje de la rueda, etc.), y de las máquinas dínamo-eléctricas, en las que el sistema consti-

tuído por tales máquinas, permaneciendo sensiblemente isotérmico (1), restituye, en forma de energía eléctrica, el trabajo mecánico efectuado por el agua en la turbina motriz.

Pero no es posible que un sistema isotérmico reversible de este tipo sea una *máquina térmica*, es decir, reciba calor de un termostato y lo restituya, al final del ciclo, en forma de trabajo externo efectuado. *No es posible realizar un motor térmico que evolucione puramente según un ciclo isotérmico reversible.*

Asimismo, también es válido el razonamiento cuando el ciclo no es completamente isotérmico, sino que el cuerpo (o sistema), al recorrer el ciclo reversible, cambia calor con el exterior a través de un solo termostato, a temperatura fija y constante Θ.

Es imposible realizar una máquina térmica que recorra un ciclo en el que se efectúe un trabajo absorbiendo calor de un termostato único a temperatura constante.

Una máquina de esta clase no contradice el teorema de la conservación de la energía, o sea el primer principio de la termodinámica: su imposibilidad queda determinada por el segundo principio.

Es enorme la trascendencia económica de dicha imposibilidad: nos impide esperar en una transformación de la inmensa cantidad de calor contenida en el agua del mar, si se prescinde del trabajo insignificante que pueda obtenerse aprovechando las diferencias de temperatura existentes entre las diversas capas de agua marina, o entre el aire y el agua, el agua y el suelo, etc.

Las tentativas de CLAUDE en las Antillas buscaban precisamente dar una solución práctica al problema del aprovechamiento de las pequeñas diferencias de temperatura entre las capas superficiales y las profundas en los mares ecuatoriales.

Han fracasado todos los intentos realizados para construir una máquina térmica isoterma (en el sentido antes indicado) y estos fracasos constituyen otras tantas confirmaciones de la validez del segundo principio.

Suele decirse que una máquina térmica de esta clase realizaría un *movimiento continuo de segunda especie*, porque la energía calorífica que permitiría aprovechar (la del mar, p. ej.), no costaría nada.

El segundo principio establece la imposibilidad del movimiento continuo de segunda especie.

El uso de ciclos irreversibles (§ 346) tampoco permite apartarse de esta imposibilidad.

§ 346. Deducciones fundamentales del segundo principio.—B) **Transformaciones irreversibles.**

a] **Transformaciones elementales.** Consideremos un cuerpo o un sistema cuya temperatura Θ tenga el mismo valor en todas sus

(1) Sin contar el desarrollo de calor por rozamiento, y por calentamiento de los conductores al ser recorridos por la corriente eléctrica.

partes. En dos transformaciones, una reversible y otra irreversible, entre los mismos estados extremos, infinitamente próximos, Θ es la misma; luego, según la [9], § 341, se tiene:

$$(dQ)_{irr} < (dQ)_{rev}. \qquad [1]$$

Entre todas las transformaciones elementales entre dos extremos fijos, las reversibles son las que absorben la máxima cantidad de calor, que es la misma para todas ellas (§ 342).

Pero recordando la [3], § 327, se tiene entonces:

$$(dU + d\mathfrak{L})_{irr} < (dU + d\mathfrak{L})_{rev}.$$

Por otra parte, puesto que los estados extremos de las dos transformaciones son idénticos, se tiene:

$$(dU)_{irr} = (dU)_{rev}.$$

En efecto, U, energía interna, sólo depende de los estados extremos de la transformación. Luego:

$$(d\mathfrak{L})_{irr} < (d\mathfrak{L})_{rev}. \qquad [2]$$

Las transformaciones reversibles entre dos estados extremos infinitamente próximos efectúan todas un mismo trabajo externo, mayor que el que realiza una transformación irreversible cualquiera entre los mismos extremos.

b] **Transformacionesa diabáticas irreversibles.** Es válida la [8], § 344, pero son nulas todas las cantidades de calor $(dQ_r)_e$ recibidas del exterior.

Por consiguiente, la [8], § 344, da:

$$0 < S_2 - S_1, \quad \text{o sea,} \quad S_2 > S_1; \qquad [3]$$

en una transformación adiabática que es irreversible, aunque sólo lo sea en alguna de sus partes, la entropía S del sistema aumenta.

En un sistema térmicamente aislado (§ 290, *d*]), *la entropía aumenta, o, como caso límite,* cuando no se efectúen transformaciones, o sean éstas reversibles, *permanece constante* (§ 345, [1]).

c] **Transformaciones isotérmicas irreversibles.** La [8], § 344, da:

$$\frac{1}{\Theta}\left(\int_1^2 \sum_r (dQ_r)_e\right)_{irr} < S_2 - S_1, \qquad [4]$$

en donde aparecen sólo los intercambios de calor $(dQ_r)_e$ de las partes

del sistema con el exterior. Además, la segunda de las [6], § 329, da:

$$\int_1^2 \sum_r (dQ_r)_e = \int_1^2 \sum_r (d\mathfrak{L}_r)_e + U_2 - U_1,$$

y, en fin, resulta:

$$\left.\begin{aligned} \left(\int_1^2 (d\mathfrak{L})_e\right)_{irr} = \left(\int_1^2 \sum_r (d\mathfrak{L}_r)_e\right)_{irr} < (U_1 - \Theta S_1) - (U_2 - \Theta S_2) \\ \text{o sea:} \qquad \left(\int_1^2 (d\mathfrak{L})_e\right)_{irr} < F_1 - F_2 \end{aligned}\right\} \quad [5]$$

Las transformaciones isotérmicas irreversibles se efectúan con menor trabajo externo que las transformaciones isotérmicas reversibles entre estados extremos iguales.

La energía utilizable $F_1 - F_2$ (§ 345, *b*]) sólo es completamente utilizada en forma de trabajo externo cuando la transformación es reversible.

d] **Ciclo irreversible.** En un *ciclo irreversible*, la [8], § 344, da:

$$\left(\oint \sum_r \frac{(dQ_r)_e}{\Theta_r}\right)_{irr} < 0. \quad [6]$$

En particular, en un ciclo de Carnot cuya irreversibilidad corresponde al caso 3.º, § 339, la [6] origina la [8], § 339, como se había previamente anunciado en el § 339, 3.º

En un *ciclo irreversible e isotérmico*, la [6] da:

$$\frac{1}{\Theta}\left(\oint \sum_r (dQ_r)_e\right)_{irr} < 0;$$

y, por tanto, por la tercera de las [6], § 329, se tiene:

$$\left(\oint (d\mathfrak{L})_e\right)_{irr} = \left(\oint \sum_r (d\mathfrak{L}_r)_e\right)_{irr} < 0.$$

Mediante un ciclo irreversible isotérmico, o en el que el sistema que lo recorre cambia calor con un solo termostato a temperatura fija y constante, no sólo no se puede pretender obtener trabajo externo, sino que se consume trabajo. Al término del ciclo, el cuerpo o el sistema que lo recorre ha *emitido* una cantidad de calor

$-\left(\oint \sum_r (dQ_r)_e\right)_{irr} < 0$, correspondiente a trabajo gastado desde el exterior sobre el cuerpo.

No se puede esperar la realización del movimiento continuo de segunda especie mediante el uso de ciclos isotérmicos irreversibles.

§ **347. Ley del incremento de la entropía.** La entropía de un cuerpo o de un sistema puede aumentar o disminuir al variar su estado.

Hemos visto que solamente es valedero lo que sigue *para los sistemas aislados térmicamente*, en los cuales es constantemente nulo el calor dQ recibido del exterior (§ 345, [1], y § 346, [3]:

1.º *En el caso de transformaciones reversibles, no varía la entropía total S del sistema.*

2.º *En el caso de transformaciones irreversibles* (en realidad lo son todas las transformaciones reales, aunque sólo sea por la presencia de rozamientos), *aumenta la entropía total S del sistema.*

Esta es la *ley del incremento de la entropía.*

Decir que la entropía de un cuerpo aumenta siempre, sin acordarse de las condiciones que limitan este enunciado, es incurrir en un error análogo al que se cometería asegurando que, existiendo la fuerza-peso, los cuerpos descienden siempre.

Puesto que todo sistema puede considerarse como térmicamente aislado, con tal de comprender en él un número suficiente de cuerpos, la ley anterior tiene un campo de aplicación mucho más extenso de lo que parece a primera vista.

El universo, o sólo el sistema solar (despreciando la emisión de energía radiante), puede imaginarse aislado térmicamente.

Por lo tanto, su entropía aumenta siempre, y en particular no pasa dos veces por un mismo valor; por consiguiente, tampoco el universo puede pasar dos veces por un mismo estado.

Se obtendrá el equilibrio estable, y cesarán, por tanto, todas las transformaciones, cuando se haya llegado al máximo valor de la entropía. Esto sucederá cuando todas las energías se hayan transformado en calor y se hayan igualado las temperaturas de todos los cuerpos.

§ **348. La irreversibilidad y el segundo principio de la termodinámica.** En el § 294 hemos hablado de los tres fenómenos fundamentales irreversibles: Desarrollo de calor por rozamiento, propagación de calor de un cuerpo caliente a otro frío y expansión sin trabajo externo.

Vamos a ver que el segundo principio de la termodinámica justifica estas irreversibilidades.

1.º **El desarrollo de calor por rozamiento tiene que ser irreversible.** En un experimento suficientemente rápido, en el que pueda admitirse que el calor desarrollado por rozamiento permanezca en los cuerpos que lo producen, el sistema está térmicamente aislado

y ha aumentado su entropía; por consiguiente, debe deducirse que el proceso es irreversible.

El cuerpo A (fig. 677) es arrastrado hasta B, rozando contra C. La transformación reversible entre los mismos extremos sería: levantamiento lentísimo de A, corrimiento hasta B, colocación sobre el plano C y después comunicación lentísima de calor a las partes de C y de B que por rozamiento, en la transformación efectiva, se hubieran calentado. La variación de entropía es:

Fig. 677

$$\int_1^2 \frac{dQ}{\Theta},$$

en donde dQ representa las cantidades sucesivas de calor que han debido así suministrarse a los diversos puntos de C y de B. Las dQ son todas positivas; luego la variación de entropía es ciertamente positiva. Por tanto, el proceso debe ser irreversible.

2.º **La simple propagación de calor desde un cuerpo caliente a un cuerpo frío debe ser irreversible.** Sean, por ejemplo, dos esferas A y B (fig. 678), a temperaturas Θ_1 y Θ_2, respectivamente; sea $\Theta_1 > \Theta_2$. Si el sistema de las dos esferas está aislado térmicamente y se efectúa una simple propagación de calor, A pierde calor a la temperatura Θ_1, el cual es adquirido íntegramente por B a la temperatura Θ_2. Se tiene, pues, una cantidad de calor $\Delta Q_1 < 0$ adquirido (!) por A, y otra igual y contraria

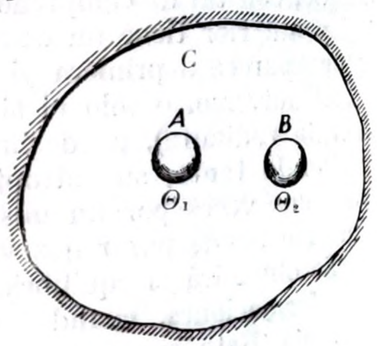


Fig. 678

$$\Delta Q_2 = -\Delta Q_1 > 0,$$

adquirida por B.

Calculemos la variación de entropía del sistema. Tómese la esfera A a la temperatura Θ_1, colóquese en un termostato a $\Theta_0 = \Theta_1$ y, disminuyendo lentísimamente esta temperatura Θ_0, tómese de A la cantidad $|\Delta Q_1|$ de calor (con lo que, en rigor, también habrán disminuído Θ_1 y Θ_0). El proceso es reversible, y la variación de entropía de A es:

$$\frac{\Delta Q_1}{\Theta_1}.$$

Procédase análogamente con B: la variación de entropía experimentada por B es:

$$\frac{\Delta Q_2}{\Theta_2} = -\frac{\Delta Q_1}{\Theta_2}.$$

Luego, la variación de entropía del sistema será:

$$\frac{\Delta Q_1}{\Theta_1} - \frac{\Delta Q_1}{\Theta_2} = \Delta Q_1 \left(\frac{1}{\Theta_1} - \frac{1}{\Theta_2}\right) > 0,$$

porque son negativos tanto ΔQ_1 como $\left(\frac{1}{\Theta_1} - \frac{1}{\Theta_2}\right)$.

La entropía ha aumentado en el sistema térmicamente aislado que hemos supuesto y, de acuerdo con el segundo principio, el fenómeno tiene que ser irreversible.

3.º **La expansión de un gas sin trabajo externo debe ser irreversible.** Para mayor sencillez supondremos que el gas es perfecto. La expansión efectuada adiabáticamente [fig. 616, a] tiene que ser también isotérmica. El sistema está aislado térmicamente.

La expansión se efectúa entre los estados

$$\text{inicial}: v_1,\ p_1,\ \Theta_1, \qquad \text{y final}: v_2,\ p_2,\ \Theta_1 \qquad (v_2 > v_1).$$

Es necesario buscar una transformación reversible entre tales estados. Se obtiene esta transformación haciendo expansionar el gas [fig. 615, a)] lenta e isotérmicamente desde el volumen v_1 al volumen v_2. Sabemos que durante esta transformación isotérmica es preciso proporcionar al gas la cantidad de calor $\Delta Q > 0$, equivalente al trabajo externo efectuado (§ 332, [2]).

La variación de entropía del gas en la expansión sin trabajo externo se calcula, pues, mediante la expansión con trabajo externo (porque ésta es reversible), y resulta:

$$\frac{\Delta Q}{\Theta_1} < 0.$$

La entropía ha aumentado y el proceso debe ser irreversible.

Si se lograra realizar la reversibilidad de uno de estos tres fenómenos, estaríamos autorizados para negar la validez del segundo principio de la termodinámica. Las continuas comprobaciones de dicha irreversibilidad son otras tantas pruebas de la validez del segundo principio.

§ **349. Equilibrio termodinámico.** Un estado interno de un sistema determina el valor de las variables p, v, Θ, U y S. En general, p y Θ son función de los puntos del sistema, mientras que v, U y S deben imaginarse como sumas de los valores que corresponden a tales magnitudes para cada parte constituyente del sistema. Si éste se conserva con una cierta configuración, es decir, si no varían con el tiempo las variables antes indicadas, está en *equilibrio termodinámico*.

§ 349

Estudiemos las condiciones de equilibrio termodinámico del sistema. Desde luego p y Θ deben tener el mismo valor en todos los puntos del sistema para que haya equilibrio.

Admitamos, para simplificar, que el trabajo $(d\mathfrak{L})_e$ efectuado por el sistema sobre el exterior se reduce a un trabajo de expansión. Para una transformación en torno a un estado de equilibrio éste vale $p \cdot dv$, en donde p es la presión que, en tal caso, es común a todos los puntos del sistema. Para una transformación cualquiera, el trabajo de expansión está expresado más bien por $p_e \cdot dv$ (§ 292, 1.º), puesto que la presión p_e, ejercida por el sistema sobre el exterior, puede no coincidir con la presión externa p.

Se tiene entonces, por la primera de las [6], § 329:

$$(dQ)_e = dU + (d\mathfrak{L})_e = dU + p_e\, dv, \qquad [1]$$

siendo $(dQ)_e$ el calor proporcionado al sistema desde el exterior; dU, la variación de energía interna del sistema entero, y $p_e\, dv$, el trabajo efectuado sobre el exterior por el sistema completo.

Para cualquier transformación del sistema, el segundo principio impone que sea (§ 344, [6] y [9]):

$$\left.\begin{array}{ll} dS - \dfrac{dU + p\,dv}{\Theta} = 0\,; & \text{transformación infinitesimal reversible; } p_e = p \\ dS - \dfrac{dU + p_e dv}{\Theta} < 0. & \text{transformación infinitesimal irreversible; eventualmente, } p_e \neq p \end{array}\right\} \qquad [2]$$

A diferencia de lo que hicimos en las [6] y [9], § 344, no utilizamos el símbolo sumatorio en el segundo término del primer miembro de las [2] porque nos limitamos al caso sencillo en que el calor $(dQ)_e$ esté suministrado desde el exterior a puntos del sistema que tengan todos ellos la misma temperatura Θ; por otra parte, buscamos las condiciones de equilibrio y, en tal caso, Θ tendrá ciertamente el mismo valor dondequiera que sea, y entonces, en todas partes, p_e coincidirá con p.

Supóngase el sistema en cierto estado interno inicial; en él son posibles, en general, infinitas transformaciones.

1.º **Equilibrio termodinámico con U y v constantes.** Entre todas estas transformaciones imaginemos que solamente puedan efectuarse aquellas para las cuales permanecen constantes U y v. Se tiene entonces, por la [1], $(dQ)_e = 0$. Las transformaciones supuestas son *adiabáticas-isocoras*.

Por la [2], en cada una de estas transformaciones que apartan el sistema del estado inicial considerado, se tiene

$$dS = 0 \qquad \text{o} \qquad dS > 0,$$

según que la transformación sea reversible o irreversible.

§ 349

La entropía aumenta o permanece constante (como caso límite). Luego si el estado del sistema es el de entropía máxima entre todos los estados compatibles con las ligaduras impuestas (U = const. y v = const.), no es posible transformación alguna en el sistema, compatible con dichas ligaduras.

El estado supuesto del sistema es de equilibrio estable, siendo solamente posibles las transformaciones reversibles, que no se llevan a término en la realidad porque las transformaciones reales son todas irreversibles en mayor o menor grado.

El sistema se halla en equilibrio termodinámico.

El estado de equilibrio *adiabático - isocoro*, es decir, aquel en que sólo son posibles en el sistema las transformaciones en que U y v son constantes, es el estado para el cual, en valor y signo,

— *S toma el valor mínimo.*

Ejemplo: En el sistema de la fig. 678, U y v son constantes; son posibles infinitos estados del sistema a medida que A se enfría y que, por consiguiente, se calienta B. Hasta que se tiene $\Theta_1 > \Theta_2$, al enfriarse A y calentarse consiguientemente B, la entropía total S del sistema crece (§ 348, 2.º): el sistema no está en equilibrio. La entropía S es máxima para $\Theta_1 = \Theta_2$ (por lo tanto — S es mínima) y entonces se está en condiciones de equilibrio.

2.º **Equilibrio termodinámico con v y Θ constantes.** Las [2] dan:

$$dS - \frac{dU}{\Theta} \geq 0\,;$$

o sea, por ser constante Θ:

$$d\,(U - \Theta\, S) \leq 0.$$

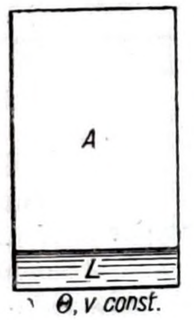


Fig. 679

El estado de equilibrio *isotérmico-isocoro* es aquel para el cual la energía libre

$$F = U - \Theta\, S \text{ toma el valor mínimo.}$$

Ejemplo: En el recipiente de la fig. 679, mantenido en un termostato y de volumen invariable, se ha introducido cierta masa de líquido L. Son posibles infinitos estados a medida que la substancia, supuesta inicialmente toda ella en la fase líquida (entonces en A hay el vacío), se va evaporando hasta que pasa toda al estado de vapor.

Si la masa de líquido introducida es suficiente, se tiene equilibrio cuando A está lleno de vapor saturante a la temperatura Θ en presencia de la fase líquida residual.

Procure convencerse el lector de que, en tal caso, $U - \Theta S$ ha tomado el valor mínimo.

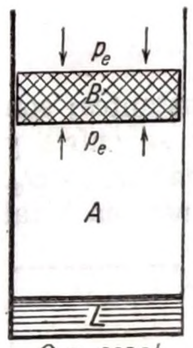
3.º **Equilibrio termodinámico con Θ y p_e constantes.** Las [2] dan:

$$d\,(U - \Theta S + p_e v) \leq 0.$$

El estado de equilibrio (tal que $p_e = p$) *isotérmico - isobárico* es aquel para el cual el potencial de Gibus

$$\Phi = U - \Theta S + pv \text{ toma el valor mínimo.}$$

Ejemplo: El cilindro de la fig. 680, mantenido en un termostato, está cerrado por un émbolo B sobre el cual el sistema AL presiona desde la parte inferior con la presión específica p_e, constante; para que haya equilibrio deberá ejercerse sobre el émbolo, desde el exterior, una presión igual y opuesta a p_e. Dentro del cilindro se ha introducido cierta masa de líquido L. Son posibles infinitos estados a medida que el émbolo B se levanta o desciende y a medida que la substancia, supuesta inicialmente toda en estado líquido, se va evaporando.



Θ, p_e const
Fig. 680

El equilibrio se tiene:

— cuando B ha bajado hasta ejercer una presión p_e sobre la substancia completamente líquida de L, si p_e es mayor que la presión de vapor saturante del líquido a la temperatura Θ;

— en cualquier posición de B, con tal que en A haya siempre vapor saturante, si p_e es igual a dicha presión de vapor saturante;

— cuando B ha subido hasta permitir la total evaporación del líquido y la expansión del vapor hasta la presión $p = p_e$, si p_e es menor que tal tensión de vapor saturante.

Intente demostrar el lector que a tal configuración de equilibrio le corresponde el valor mínimo de Φ.

4.º **Equilibrio termodinámico con S y p_e constantes.** Las [2] dan:

$$\frac{dU + d\,(p_e v)}{\Theta} \leq 0.$$

Pero se tiene $\Theta > 0$ y, por tanto, debe ser:

$$d\,(U + p_e v) \leq 0.$$

El estado de equilibrio (tal que $p_e = p$) *isoentrópico-isobárico* es aquel para el cual la *entalpía* o *calor total*

$$W = U + pv \text{ toma el valor mínimo.}$$

Y esta vez dejamos para el lector el trabajo de encontrar un ejemplo físico sencillo para convencerse de que el equilibrio termodinámico con S y p_e constantes se obtiene cuando es máxima la entalpía total del sistema.

Las funciones — S, F, Φ y W determinan, cada una para un tipo particular de transformaciones, la condición de equilibrio del sistema, de manera análoga a como la condición de equilibrio se expresa en mecánica mediante la energía potencial, si se trata de un punto ligado y sometido a un campo de fuerza (§ 103).

De ahí que dichas funciones reciban el nombre de *potenciales termodinámicas*.

D. — ULTERIORES APLICACIONES DE LA TERMODINÁMICA

Las propiedades de la energía interna y de los calores específicos, la ecuación de la *isoentrópica* (§ 334 y § 345, *a*]) de los gases perfectos y la imposibilidad de los movimientos continuos de primera y segunda especie dan ya una idea de la fecundidad de los principios de la termodinámica.

Siguen algunos ejemplos notables de resultados deducidos a partir de los dos principios, respecto al comportamiento termodinámico:

a] de cuerpos puros en una fase;

b] de cuerpos puros en varias fases (cambios de estado);

c] de cuerpos no puros (soluciones, etc.).

Se comprenderá así la importancia y el alcance de dichos principios.

§ 350. Coeficientes calorimétricos. En los §§ 316 y 318 se ha visto que la cantidad infinitésima de calor dQ que debe suministrarse durante una transformación infinitesimal determinada, aunque sea *reversible*, no es una diferencial exacta y puede expresarse en diferente forma, según las variables escogidas. Considerada la unidad de masa de un cuerpo homogéneo, puede expresarse de distintos modos la misma cantidad $dQ_{m=1} = dq$, necesaria para una transformación reversible:

1.º variables Θ y p:

$$dq = c_p d\Theta + h dp\,; \qquad [1]$$

2.º variables Θ y v:

$$dq = c_v d\Theta + l dv\,; \qquad [2]$$

3.º variables p y v:

$$dq = k dp + j dv\,; \qquad [3]$$

en donde c_p, c_v, h, l, k y j son *coeficientes calorimétricos*, funciones de

las coordenadas que fijan el estado del cuerpo, y c_p y c_v significan, respectivamente, los calores específicos a presión constante y a volumen constante.

Por el primer principio, se tiene: $dq = du$, en donde u es la energía interna referida a la unidad de masa, cuando es nulo dv; luego la [2] da siempre:

$$\left(\frac{dq}{d\Theta}\right)_{v=\text{const.}} = \left(\frac{dU}{d\Theta}\right)_{v=\text{const.}} = c_v.$$

Además, la ecuación de estado $p = p\ (v,\ \Theta)$ da:

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{\Theta=\text{const.}} \cdot dv + \left(\frac{\partial p}{\partial \Theta}\right)_{v=\text{const.}} \cdot d\Theta\,; \qquad [4]$$

por tanto, las [1], [2] y [3] se escriben también, eliminando, por ejemplo, dp:

$$dq = \left[c_p + h\left(\frac{\partial p}{\partial \Theta}\right)_{v=\text{const.}}\right] \cdot d\Theta + h\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{\Theta=\text{const.}} \cdot dv\,;$$

$$dq = c_v\, d\Theta + l\, dv\,;$$

$$dq = k\left(\frac{\partial p}{\partial \Theta}\right)_{v=\text{const.}} \cdot d\Theta + \left[j + k\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{\Theta=\text{const.}}\right] \cdot dv\,.$$

Estas tres expresiones deben ser idénticas. Luego:

$$\left.\begin{aligned} c_p + h\left(\frac{\partial p}{\partial \Theta}\right)_{v=\text{const.}} &= c_v = k\left(\frac{\partial p}{\partial \Theta}\right)_{v=\text{const.}} \\ h\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{\Theta=\text{const.}} &= l = j + k\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{\Theta=\text{const.}} \end{aligned}\right\}. \qquad [5]$$

Tenemos así cuatro relaciones entre los seis coeficientes calorimétricos. Luego, en particular, la existencia de la ecuación de estado nos lleva a deducir:

$$c_p - c_v = -\,h\left(\frac{\partial p}{\partial \Theta}\right)_{v=\text{const.}}. \qquad [6]$$

Eliminando h mediante la primera ecuación de la segunda terna de las [5] y recordando las fórmulas [11], § 291, que se cumplen también si se toma como variable la temperatura absoluta Θ en lugar de la temperatura ordinaria θ, se tiene asimismo:

$$c_p - c_v = -\,l\left[\left(\frac{\partial p}{\partial \Theta}\right)_{v=\text{const.}} : \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{\Theta=\text{const.}}\right] = l\left(\frac{\partial v}{\partial \Theta}\right)_{p=\text{const.}} \qquad [7]$$

En el caso especial de los gases perfectos resulta (§ 333, [1]):

$$l = p\,; \qquad \left(\frac{\partial v}{\partial \Theta}\right)_{p=\text{const.}} = \frac{\partial}{\partial \Theta}\left(\frac{R\Theta}{m_{mol}\, p}\right) = \frac{R}{m_{mol}\, p}.$$

y la [7] da la [3], § 333.

Tómense como variables Θ y v, por ejemplo.

El primer principio dice que para la unidad de masa es:

$$du = dq - dl = c_v d\Theta + l dv - p dv = c_v d\Theta + (l - p)\, dv$$

y esto es una diferencial exacta. Luego debe ser (véase § 88, [1]):

$$\left[\frac{\partial c_v}{\partial v}\right]_{\Theta=\text{const.}} = \left[\frac{\partial}{\partial \Theta}(l - p)\right]_{v=\text{const.}}$$

o sea:

$$\left(\frac{\partial c_v}{dv}\right)_{\Theta=\text{const.}} = \left(\frac{\partial l}{\partial \Theta}\right)_{v=\text{const.}} - \left(\frac{\partial p}{\partial \Theta}\right)_{v=\text{const.}}. \qquad [8]$$

Puesto que se ha dicho que las [1], [2] y [3] se emplean para expresar las cantidades de calor recibidas por el cuerpo por vía reversible, el segundo principio exige que

$$\frac{dq}{\Theta} = \frac{c_v d\Theta + l\, dv}{\Theta}$$

sea una diferencial exacta.

Luego:

$$\left(\frac{\partial \frac{c_v}{\Theta}}{\partial v}\right)_{\Theta=\text{const.}} = \left(\frac{\partial \frac{l}{\Theta}}{\partial \Theta}\right)_{v=\text{const.}};$$

o sea:

$$\frac{1}{\Theta}\left(\frac{\partial c_v}{\partial v}\right)_{\Theta=\text{const.}} = -\frac{1}{\Theta^2} + \frac{1}{\Theta}\left(\frac{\partial l}{\partial \Theta}\right)_{v=\text{const.}},$$

que, con la [8], da:

$$l = \Theta\left(\frac{\partial p}{\partial \Theta}\right)_{v=\text{const.}}. \qquad [9]$$

Se obtienen análogas relaciones aplicando los dos principios, cuando el par de variables independientes sea Θ y p, o v y p.

El uso del primero y del segundo principio, según este procedimiento matemático, excesivamente formal, y muy empleado especialmente por los termodinámicos franceses, expone al riesgo de oscurecer, bajo el algoritmo diferencial, el concepto físico o fenomenológico.

Lo que resulta bien claro es que se limita grandemente el número de los coeficientes calorimétricos independientes y su posibilidad de variación con el estado del cuerpo.

Así, la [7] y la [9] dan:

$$c_p - c_v = \Theta \left(\frac{\partial p}{\partial \Theta}\right)_{v=\text{const.}} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial \Theta}\right)_{p=\text{const.}}.$$

Ahora se tiene [§ 291, [14] y [13]; además, es $\frac{\partial}{\partial \Theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}$, porque $\Theta = \theta + \frac{1}{\alpha}$]:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \Theta}\right)_{v=\text{const.}} = \left(\frac{\partial p}{\partial \theta}\right)_{v=\text{const.}} = p_0 \cdot \beta;$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial \Theta}\right)_{p=\text{const.}} = \left(\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)_{p=\text{const.}} = v_0 \cdot \alpha,$$

en donde p_0, v_0 son la presión y el volumen de la unidad de masa del cuerpo considerado a 0 °C. Luego:

$$c_p - c_v = \Theta \cdot p_0 \cdot v_0 \cdot \alpha \cdot \beta,$$

y, en fin, alrededor de los 0 °C, en cuanto es aplicable la [16], § 291:

$$c_p - c_v = \Theta \cdot v_0 \cdot \alpha^2 \cdot \varepsilon, \qquad [10]$$

A 0 °C ($\Theta = 273$ °K), conocido el volumen v_0 de la unidad de masa, o sea el volumen específico $\frac{1}{\mu_0}$, y conocidos el coeficiente de dilatación α a presión constante y el coeficiente de compresión isotérmica $\frac{1}{\varepsilon}$, queda determinada la diferencia entre los dos calores específicos fundamentales; y, como se puede determinar experimentalmente c_p, podrá calcularse c_v.

Por ejemplo, en el mercurio, a $\Theta = 273$ °K se tiene:

$$v_0 = \frac{1}{13{,}59} \frac{\text{cm}^3}{\text{g}_\text{m}}; \qquad \alpha = 0{,}000\,18\ ^\circ\text{C}^{-1}; \qquad \frac{1}{\varepsilon} = 3{,}5 \cdot 10^{-12} \frac{\text{cm} \cdot \text{seg}^2}{\text{g}_\text{m}};$$

teniendo en cuenta que $J = 4{,}186 \cdot 10^7 \frac{\text{erg}}{\text{cal}}$, en unidades térmicas resulta:

$$c_p - c_v = 0{,}004\,44 \frac{\text{cal}}{\text{g}_\text{m} \cdot ^\circ\text{C}}.$$

Y puesto que $c_p = 0{,}033 \frac{\text{cal}}{\text{g}_\text{m} \cdot ^\circ\text{C}}$, resulta $\frac{c_p}{c_v} = \frac{33}{28{,}56} = 1{,}15$.

El valor experimental es 1,14.

Con más generalidad: el segundo miembro de la [10] es ciertamente positivo, y, por tanto, siempre, y no sólo en los gases, es

$$c_p > c_v. \qquad [11]$$

Pero en los sólidos y en los líquidos, la causa de esta diferencia ya no es el trabajo externo efectuado por el cuerpo al calentarlo a presión constante, pues este trabajo es despreciable.

El primer principio permite todavía escribir:

a v constante, $\quad c_v d\Theta = (du)_{v=\text{const.}} + 0$

a p constante, $\quad c_p d\Theta = (du)_{p=\text{const.}} + p dv.$

Pero $p\,dv$ es despreciable y de ello se deduce que, en los sólidos y en los líquidos, son bastante diferentes $(du)_{v=\text{const.}}$ y $(du)_{p=\text{const.}}$ debidos a la misma elevación de temperatura $d\Theta$, es decir, que u depende sensiblemente del volumen, a igualdad de temperatura.

Cuando $\alpha = 0$, como sucede en el agua a 4 °C, se tiene:

$$c_p = c_v.$$

Los dos calores específicos del agua a 4° C son iguales.

§ 351. Compresibilidades isotérmica y adiabática. En el § 185, *c*], se ha deducido ya de las ecuaciones

(*isoterma*) $pv = \text{const.}$; (*adiabática*) $pv^\gamma = \text{const.}$,

que los dos coeficientes de compresión isotérmica y adiabática $\frac{1}{\varepsilon_{iso}}$, $\frac{1}{\varepsilon_{adi}}$ son, para un gas perfecto: $\frac{1}{\varepsilon_{iso}} = \frac{1}{p}$ y $\frac{1}{\varepsilon_{adi}} = \frac{1}{\gamma \cdot p}$.

Luego:

$$\frac{\varepsilon_{adi}}{\varepsilon_{iso}} = \gamma = \frac{c_p}{c_v}. \qquad [1]$$

Para interesar al lector en el estudio de la termodinámica formal, desarrollamos a continuación uno de los n artificios de cálculo, demostrando que la [1] es valedera no sólo para los gases perfectos, sino para todos los cuerpos.

En efecto, las [5], § 350, dan:

$$k = c_v \left(\frac{\partial \Theta}{\partial p}\right)_{v=\text{const.}} \qquad [2]$$

y, por tanto,

$$j = l - c_v \left(\frac{\partial \Theta}{\partial p}\right)_{v=\text{const.}} \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{\Theta=\text{const.}}. \qquad [3]$$

La ecuación de estado $p = p\,(\Theta, v)$ da (véase § 291, [11]):

$$-\left(\frac{\partial \Theta}{\partial p}\right)_{v=\text{const.}} \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{\Theta=\text{const.}} = -\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{\Theta=\text{const.}}}{\left(\frac{\partial p}{\partial \Theta}\right)_{v=\text{const.}}} = \left(\frac{\partial \Theta}{\partial v}\right)_{p=\text{const.}}$$

y la [7], § 350, da l. De modo que la [3] se convierte en:

$$j = c_p \left(\frac{\partial \Theta}{\partial v}\right)_{p=\text{const.}}. \qquad [4]$$

Mediante las expresiones [2] y [4], y para una transformación adiabática (reversible), la [3], § 350, se convierte en:

$$0 = c_v \left(\frac{\partial \Theta}{\partial p}\right)_{v=\text{const.}} \cdot dp_{adi} + c_p \left(\frac{\partial \Theta}{\partial v}\right)_{p=\text{const.}} \cdot dv_{adi}.$$

Luego:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_{adi} = -\frac{c_v}{c_p} \cdot \frac{\left(\frac{\partial \Theta}{\partial p}\right)_{v=\text{const.}}}{\left(\frac{\partial \Theta}{\partial v}\right)_{p=\text{const.}}}.$$

La ecuación de estado, escrita en la forma $\Theta = \Theta\,(p, v)$, da todavía (véase § 291, [11]):

$$-\frac{\left(\frac{\partial \Theta}{\partial p}\right)_{v=\text{const.}}}{\left(\frac{\partial \Theta}{\partial v}\right)_{p=\text{const.}}} = \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_{\Theta=\text{const.}} = \left(\frac{dv}{dp}\right)_{iso}.$$

Luego:

$$-\frac{1}{v}\left(\frac{dv}{dp}\right)_{adi} = -\frac{1}{\gamma}\frac{1}{v}\left(\frac{dv}{dp}\right)_{iso}.$$

Y recordando la definición de ε (§§ 185 y 291) se tiene, por fin:

$$\frac{\varepsilon_{adi}}{\varepsilon_{iso}} = \gamma.$$

Pero $\frac{dp}{dv} = -\frac{\varepsilon}{v}$ es la pendiente de la curva que representa la transformación en el plano v, p. Luego la adiabática y la isoterma que pasan por un punto v_0, p_0 de este plano, tienen pendientes cuya relación es $\frac{\varepsilon_{adi}}{\varepsilon_{iso}} = \gamma$ en cualquier caso, y no sólo para los gases perfectos. Y como γ siempre es sensiblemente distinto de la unidad, se deduce que estas dos curvas se cortan siempre según un ángulo finito.

§ **352. Experimento de** JOULE-THOMSON. La expansión sin trabajo externo según el dispositivo de la figura 616, *a*), va acompañada en los gases reales de un enfriamiento, tanto más pequeño y difícil de observar cuanto menos se separa el gas del comportamiento del gas perfecto. Repetido el experimento colocando en A_1 un vapor saturante en presencia de unos cm³ de la fase líquida, al abrir la llave R se observa un enfriamiento brusco y notable: parte del líquido se evapora, y el experimento es una de tantas pruebas de que la evaporación adiabática de los líquidos va acompañada de enfriamiento. También ahora el vapor saturante se comporta de un modo absolutamente distinto que los gases perfectos.

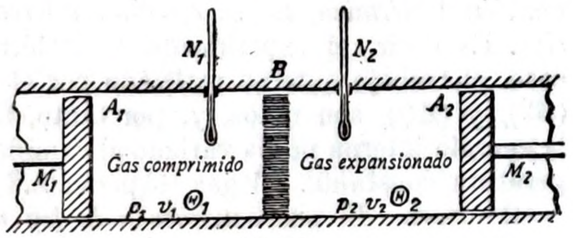


Fig. 681

En los gases reales, casi perfectos, el enfriamiento es levísimo, y el experimento de Joule se substituye ventajosamente por el *experimento de Joule-Thomson* (fig. 681).

En un tubo de paredes adiabáticas se coloca un tabique poroso B, que permite una expansión bastante rápida del gas, desde la cámara A_1, en donde está más comprimido, hacia la otra cámara A_2, pero sin dejar que el gas adquiera en la expansión una energía cinética sensible.

La teoría trata más simplemente el caso en que el tubo sea de paredes isotérmicas en comunicación con un calorímetro, pero sólo se efectúa fácilmente el experimento con paredes adiabáticas observando las variaciones de temperatura del termómetro N_2, mientras que N_1 debe permanecer estacionario. El gas comprimido en A_1 a presión constante p_1 se expansiona a través del filtro en A_2, en donde la presión es $p_2 < p_1$, también constante. Por tanto, mientras el gas atraviesa B, un émbolo M_1, avanza hacia B para mantener p_1 constante, y otro émbolo M_2 se aleja de B para mantener constante p_2. Mientras ha salido de A_1, a través de B, un volumen v_1, el volumen de la cámara A_2 ha aumentado en v_2 $(> v_1)$ por la llegada de este

gas. El gas sometido a la experiencia ha efectuado en total el trabajo externo $\int_1^2 (d\mathfrak{L})_e = + p_2v_2 - p_1v_1$.

Según el primer principio [6], § 329, se tiene:

$$\int_1^2 dQ)_e - \int_1^2 (d\mathfrak{L})_e = (\Delta Q)_e - (\Delta \mathfrak{L})_e = \Delta U = U_2 - U_1.$$

El experimento corresponde a uno u otro de los tres casos siguientes:

1.er caso. *El gas satisface a la ley de Boyle y, durante la expansión isotérmica, no se efectúan intercambios de calor con el exterior.* Es decir, el experimento es isotérmico y adiabático. En este caso, el trabajo externo realizado por el gas es $-p_1v_1 + p_2v_2 = 0$; $(\Delta \mathfrak{L})_e$ y $(\Delta Q)_e$ son nulos, y, por tanto, también es nulo ΔU. Luego, la energía interna no ha variado al cambiar el volumen, siendo la temperatura constante. El gas es perfecto.

2.º caso. *El gas satisface a la ley de Boyle, pero la expansión adiabática no es isotérmica.* En estas condiciones, el experimento adiabático indica siempre un enfriamiento: $\Theta_2 - \Theta_1 < 0$; el experimento isotérmico necesita un suministro de calor $[(\Delta Q)_e > 0]$.

El trabajo externo efectuado por el gas durante la expansión isotérmica es todavía $-p_1v_1 + p_2v_2 = 0$.

El primer principio da:

$$(\Delta Q)_e = \Delta U;$$

y, puesto que $(\Delta Q)_e$ es positivo, como indica la experiencia, la energía interna del gas ha aumentado durante la expansión isotérmica.

Recuérdese que con ningún gas real se tiene ilimitadamente $pv = \text{const}$. Pero a temperaturas suficientemente bajas y escogiendo pares convenientes de valores de las presiones p_1 y p_2, puede lograrse que sea $p_1v_1 = p_2v_2$. Basta que los estados inicial (p_1, v_1) y final (p_2, v_2) del gas correspondan a puntos del diagrama de la figura 646, pertenecientes a una misma isoterma y a una misma paralela al eje de las abcisas.

3.er caso. *El gas no satisface a la ley de Boyle.* El trabajo externo efectuado por el gas $(\Delta \mathfrak{L})_e = p_2v_2, -p_1v_1$ es positivo o negativo, según sea el gas más o menos dilatable (y, por tanto, compresible), en la expansión efectuada (supuesta isoterma) que lo que requiere la ley de Boyle. Así sucede particularmente en las expansiones que vienen representadas en el gráfico de la figura 646 por ramas de isoterma, respectivamente a la derecha o a la izquierda del punto de Boyle.

La experiencia demuestra que $(\Delta Q)_e - (\Delta \mathfrak{L})_e = \Delta U$ es positivo *en cualquier caso.*

En otros términos: Si $p_2v_2 - p_1v_1 = (\Delta \mathfrak{L})_e$ es positivo, es decir, si el gas es más dilatable que lo que indica la ley de Boyle, $(\Delta Q)_e$ es seguramente positivo, y la expansión adiabática va acompañada forzosamente de enfriamiento. Si $(\Delta \mathfrak{L})_e$ es negativo, $(\Delta Q)_e$ puede ser positivo, negativo o nulo, según los casos.

Conviene entonces aplicar los dos principios de la termodinámica a la transformación que efectivamente se produce, es decir, a la transformación *adiabática*, que trataremos como infinitesimal; es decir, supondremos:

$$p_2 - p_1 = dp.$$

El primer principio da, para la transformación efectiva:

$$0 = dU + (d\mathfrak{L})_e$$

y, en nuestro caso, se tiene:

$$(d\mathfrak{L})_e = p_2v_2 - p_1v_1 = d(pv) = p\,dv + v\,dp.$$

Y el segundo principio da, para una transformación *reversible* entre los mismos extremos:

$$\Theta dS = dU + p\,dv.$$

Luego, eliminando dU entre las dos anteriores, resulta:

$$\Theta dS + v\,dp = 0.$$

Pero la [1], § 350, válida precisamente para las transformaciones reversibles, da:

$$\Theta dS = dQ = c_p \cdot d\Theta + h\,dp$$

y de las [6], [7] y [9], § 350, se deduce:

$$h = -\Theta\left(\frac{\partial v}{\partial \Theta}\right)_{p\,=\,\text{const.}}.$$

Por tanto, tenemos, finalmente,

$$c_p d\Theta - \left[\Theta \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial \Theta}\right)_{p\,=\,\text{const.}} - v\right] dp = 0,$$

de donde:

$$d\Theta = \frac{\left[\Theta \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial \Theta}\right)_{p\,=\,\text{const.}} - v\right]}{c_p} dp. \qquad [1]$$

que permite calcular la variación de temperatura $d\Theta = \Theta_2 - \Theta_1$ que puede obtenerse en la expansión adiabática, a partir de datos que pueden medirse fácilmente.

El caso en que es $(\Delta Q)_e > 0$, o sea, en que la expansión adiabática va acompañada de enfriamiento, tiene importancia práctica, porque se utiliza en la máquina de Linde para la licuefacción del aire.

El aire a temperatura ordinaria, expansionándose adiabáticamente de 2 a 1 atm en el aparato de la figura 681, se enfría en 0,28 °C.

Expansionándose desde 68 atm a 1 atm, se enfría en 17,0 °C.

Expansionándose desde 204 atm a 1 atm, se enfría en 44,6 °C.

Cuando se efectúa trabajo externo, los enfriamientos correspondientes son mucho mayores (§ 334).

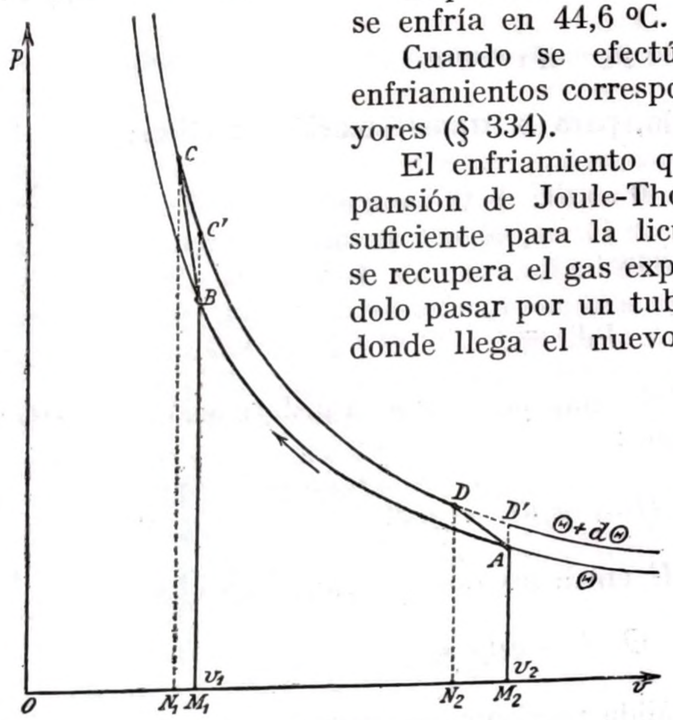


Fig. 682

El enfriamiento que acompaña a una expansión de Joule-Thomson no es, por tanto, suficiente para la licuefacción del aire; pero se recupera el gas expansionado y frío haciéndolo pasar por un tubo que rodea a aquel por donde llega el nuevo gas comprimido. Éste queda de este modo enfriado, y en su expansión llega a una temperatura más baja que el gas que le precedía. Esta sucesiva exageración del enfriamiento permite alcanzar rápidamente en la máquina de Linde la temperatura de licuefacción del aire. Todo esto viene ayudado por el hecho de que aumenta la compresibilidad del gas, comparada con la que se deduce de la ley de Boyle, cuanto más baja es la temperatura, según se deduce de las ramas descendentes de las curvas de la figura 646, y, por tanto, resulta más fuerte el enfriamiento en la expansión de Joule-Thomson.

El aire a — 90 °C, expansionándose desde 204 a 1 atm., se enfría en 90 °C.

El hidrógeno y el neón a la temperatura ordinaria tienen una compresibilidad menor que la que exige la ley de Boyle, por lo que

$$v_2 p_2 - v_1 p_1 = (\Delta \mathfrak{L})_e < 0;$$

y se encuentra también experimentalmente que $(\Delta Q)_e$ es negativo, a pesar de ser todavía positivo $(\Delta Q)_e - (\Delta \mathfrak{L})_e$. Estos gases se calientan durante la expansión adiabática; solamente puede aplicárseles la

máquina de Linde cuando previamente se les ha enfriado a una temperatura suficientemente baja (§ 309).

CLAUDE, en su máquina frigorífica, utiliza la expansión adiabática con trabajo externo (§ 334), y no la expansión de Joule-Thomson, como Linde.

§ **353. Fórmula de Helmholtz.** Imagínese un ciclo reversible de Carnot entre dos temperaturas extremas Θ y $\Theta + d\Theta$, muy próximas (fig. 682). Sabemos que las longitudes BC y AD de los segmentos que representan las adiabáticas, son infinitesimales, mientras que la longitud de la transformación BA es finita, porque la adiabática y la isoterma se cortan bajo un ángulo no infinitésimo (§ 351). El teorema de Carnot [1], § 339, o el segundo principio de la termodinámica, dan

$$\varrho = \frac{d\Delta Q}{\Delta Q} = \frac{d\Theta}{\Theta}, \qquad [1]$$

siendo ΔQ la cantidad de calor comunicada al cuerpo durante la isoterma Θ, y $d\Delta Q$, la diferencia entre los calores comunicados al cuerpo a lo largo de CD, a la temperatura $\Theta + d\Theta$, y a lo largo de BA, a la temperatura Θ, respectivamente. Mas, por el primer principio se tiene:

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta \mathfrak{L},$$

representando $\Delta \mathfrak{L}$ el trabajo efectuado por el cuerpo durante la isoterma BA. Por otro lado, $d\Delta Q$ es equivalente al trabajo infinitesimal que puede obtenerse del ciclo, y que está representado por el área

$$ABCD \approx M_1 C' D' M_2 - M_1 B A M_2,$$

igual, por tanto, a la variación de $\Delta \mathfrak{L}$ para un cambio infinitesimal de la temperatura a igualdad de volúmenes v_1 y v_2 de la transformación:

$$d\Delta Q = d\Delta \mathfrak{L}.$$

Luego la [1] da:

$$\Theta \frac{d\Delta \mathfrak{L}}{d\Theta} = \Delta U + \Delta \mathfrak{L}.$$

Recordando |3], § 345, en la que ahora es:

$$F_2 - F_1 = \Delta F, \qquad \int_1^2 (d\mathfrak{L})_e = \Delta \mathfrak{L},$$

se obtiene, finalmente,

$$\Delta U = \Delta F - \Theta \frac{d\Delta F}{d\Theta} \qquad [2]$$

que es la importante *fórmula de Helmholtz*, la cual abarca, en cierto modo, los principios primero y segundo.

§ 354. Cambios de estado y calores latentes. Supóngase ahora un sistema no homogéneo constituído por un cuerpo puro en dos fases; por ejemplo, un vapor en presencia de su líquido. Sea 1 g_m la masa total; si la parte x se halla en estado de vapor, la parte $1 - x$ se encontrará en estado líquido.

Considérese el siguiente ciclo de Carnot (fig. 683): Isoterma AB a la temperatura Θ y a la presión correspondiente del vapor saturante p; adiabática BC (la expansión va acompañada de condensación parcial del vapor); isoterma CD a la temperatura $\Theta - d\Theta$ ($d\Theta > 0$) y a la presión correspondiente del vapor saturante $p - dp$ ($dp > 0$), y adiabática DA. La pequeña parte del cuerpo que estaba todavía en estado de vapor en D, se condensa, y el calor de condensación, junto con el trabajo de compresión, permite exactamente el retorno adiabático desde D hasta A.

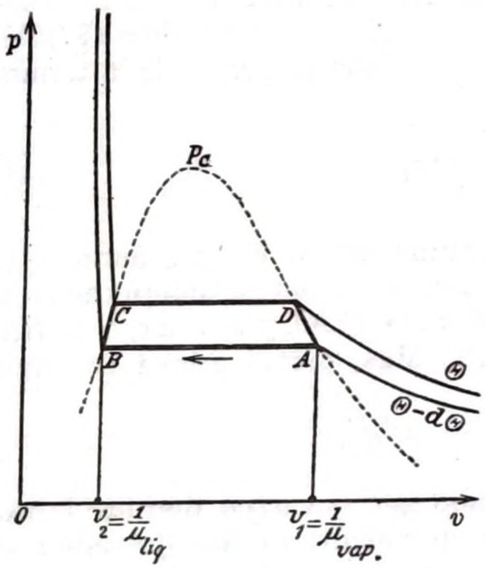


Fig. 683

Sean Q la cantidad de calor proporcionada a lo largo de AB, y Q el calor de vaporización c_e a la temperatura Θ. Sea dQ la cantidad de calor comunicada durante el ciclo completo, equivalente, por tanto, al trabajo externo $\mathcal{L}_0$ obtenido del ciclo. La [5], § 339, da, en valor y signo, en términos infinitesimales:

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{d\Theta}{\Theta};$$

pero dQ, equivalente al trabajo externo proporcionado por el ciclo, viene dado por el área $ABCD$, o sea, sensiblemente:

$$dp \cdot (v_1 - v_2) = dp \cdot \left(\frac{1}{\mu_{vap}} - \frac{1}{\mu_{liq}}\right),$$

siendo $\frac{1}{\mu_{liq}}$ y $\frac{1}{\mu_{vap}}$ los volúmenes específicos, a la temperatura Θ, del líquido y del vapor saturante, respectivamente.

Luego:

$$dp\left(\frac{1}{\mu_{vap}} - \frac{1}{\mu_{liq}}\right) = c_e \frac{d\Theta}{\Theta};$$

y, finalmente, expresando c_e en unidades térmicas:

$$c_e = \frac{\Theta}{J} \frac{dp}{d\Theta}\left(\frac{1}{\mu_{vap}} - \frac{1}{\mu_{liq}}\right), \qquad [1]$$

expresión que relaciona el calor latente de vaporización c_e con la temperatura, con las masas específicas μ_{vap}, μ_{liq} del vapor y del líquido, y con la variación de la presión p del vapor saturante al variar la temperatura.

Para el agua a 100 °C, es:

$$\frac{dp}{d\Theta} = 27{,}25 \frac{\text{mm}_{\text{Hg}}}{^\circ\text{C}} = 36\,900 \frac{\text{dinas}}{\text{cm}^2 \cdot ^\circ\text{C}}, \quad \mu_{vap} = \frac{1}{1\,650} \frac{\text{g}_\text{m}}{\text{cm}^3}, \quad \mu_{liq} = 1 \frac{\text{g}_\text{m}}{\text{cm}^3};$$

resulta $c_e = 537 \frac{\text{cal}}{\text{g}_\text{m}}$, en perfecta concordancia con la experiencia.

La [1] *(fórmula de Clapeyron)* también es valedera para la fusión, con análogo significado de los símbolos:

$$c_f = \frac{\Theta}{J} \frac{dp}{d\Theta}\left(\frac{1}{\mu_{liq}} - \frac{1}{\mu_{sol}}\right). \qquad [2]$$

Lo mismo ocurre para la sublimación.

La anterior demostración desprecia infinitésimos de orden superior y, por tanto, sólo es lícita mientras no nos hallemos en la proximidad del punto crítico P_c (fig. 683). Este ejemplo muestra la utilidad del procedimiento formal, indicado en § 350, independiente de la consideración de un ciclo de Carnot ideal, infinitésimo.

Considérese la unidad de masa de la substancia; por lo tanto, escribiremos q en lugar de Q. A lo largo de la isoterma AB, sea q el calor proporcionado; $q = \int_A^B dq = c_e$ es el calor de vaporización a la temperatura Θ. Pero, en general, tomando como variables Θ y v (§ 350), se tiene:

$$dq = c_v \cdot d\Theta + l \cdot dv; \quad l = \Theta\left(\frac{\partial p}{\partial \Theta}\right)_{v\,=\,\text{const.}}.$$

A lo largo de AB es $\Theta = \text{const.}$, $\frac{\partial p}{\partial \Theta} = \text{const.}$ Luego se tiene:

$$c_e = q = \int_A^B dq = l \cdot \int_A^B dv = \Theta \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial \Theta}\right)_{v\,=\,\text{const.}} \cdot (v_1 - v_2) =$$

$$= \Theta \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial \Theta}\right)_{v\,=\,\text{const.}} \cdot \left(\frac{1}{\mu_{vap}} - \frac{1}{\mu_{liq}}\right),$$

que es precisamente la [1] porque en nuestro caso $\left(\frac{\partial p}{\partial \Theta}\right)_{v=\text{const.}}$ se identifica con $\frac{dp}{d\Theta}$.

Se deduce de la [1] que $\frac{dp}{d\Theta}$ es siempre positivo: la presión de vapor saturante aumenta con la temperatura en todos los casos. En efecto, c_e, Θ, J, $\left(\frac{1}{\mu_{vap}} - \frac{1}{\mu_{liq}}\right)$ son siempre positivos: también se tiene $\mu_{liq} \gg \mu_{vap}$, y, por tanto, $\frac{1}{\mu_{liq}}$ es despreciable respecto a $\frac{1}{\mu_{vap}}$.

En la [2] se tiene $\left(\frac{1}{\mu_{liq}} - \frac{1}{\mu_{sol}}\right) \gtrless 0$, según que el sólido se dilate o se contraiga durante la fusión, y resulta, respectivamente, $\frac{dp}{d\Theta} \gtrless 0$. En el primer caso, que es el más frecuente, la temperatura de fusión se eleva al crecer la presión a que se experimenta, y en el segundo, como sucede en el agua, disminuye la temperatura de fusión al aumentar la presión.

Para el agua, alrededor de los 0 °C = 273 °K, se tiene:

$$\frac{1}{\mu_{sol}} = 1{,}091 \frac{\text{cm}^3}{\text{g}_\text{m}}; \quad \frac{1}{\mu_{liq}} = 1 \frac{\text{cm}^3}{\text{g}_\text{m}}; \quad \Theta = 273\ ^\circ\text{K}; \quad c_f = 80 \frac{\text{cal}}{\text{g}_\text{m}},$$

$$J = 4{,}186 \cdot 10^7 \frac{\text{erg}}{\text{cal}}.$$

Luego $\frac{d\Theta}{dp} = -\,0{,}0075$ °C por atmósfera de aumento de presión, en buen acuerdo con el valor experimental $-\,0{,}007\,4_3 \frac{^\circ\text{C}.}{\text{atm}}$.

Pero el punto triple del agua es a $+\,0{,}009\,9 \pm 0{,}000\,1$ °C, porque el punto fijo de 0 °C se define como la temperatura de equilibrio entre el agua pura y el hielo, sometidos a una presión de aire de 1 atm, de modo que el agua está saturada con el aire que se ha disuelto en ella a dicha presión. Sobre el valor propuesto actualmente para dicho punto triple, véase § 301.

§ 355. Cambios de estado y calores específicos. Los casos de la vaporización y de la sublimación son algo más complicados que el de la fusión, porque en ésta se desprecia el trabajo externo debido a las variaciones de volumen, y puede efectuarse un estudio análogo al de los calores de reacción (§ 330, *c*]).

Puede primero fundirse la unidad de masa sólida a la temperatura de fusión Θ correspondiente a la presión p, y después calentar el líquido elevando su temperatura en $d\Theta$ con variación simultánea de la presión hasta llegar al valor $p + dp$ correspondiente a la temperatura de fusión $\Theta + d\Theta$; o bien se puede calentar la masa sólida elevándola en $d\Theta$ con la variación de la presión correspondiente desde p a $p + dp$, y luego fundirla.

El primer principio da:

$$c_f + c_{liq} \cdot d\Theta = c_{sol} \cdot d\Theta + (c_f + dc_f)$$

siendo c_{sol} y c_{liq} los dos calores específicos de la fase sólida y de la fase líquida, y c_f y $c_f + dc_f$, los calores latentes de fusión respectivamente a Θ y a $\Theta + d\Theta$. Luego:

$$\frac{dc_f}{d\Theta} = c_{liq} - c_{sol}.$$

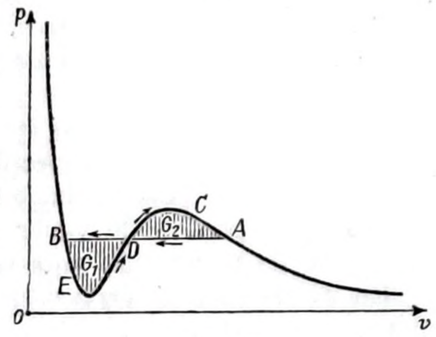


Fig. 684

El calor latente de fusión aumenta con la temperatura de fusión (que es variable con la presión a la cual se efectúa la fusión) cuando se tiene $c_{liq} > c_{sol}$.

En el agua, $c_{liq} - c_{sol} = 1{,}00 - 0{,}48 \frac{\text{cal}}{\text{g}_\text{m} \cdot ^\circ\text{C}} = 0{,}52 \frac{\text{cal}}{\text{g}_\text{m} \cdot ^\circ\text{C}}$; y la experiencia da, alrededor de los 0 °C: $\frac{dc_f}{d\Theta} = \frac{dc_f}{d\theta} = 0{,}505 \frac{\text{cal}}{\text{g}_\text{m} \cdot ^\circ\text{C}}$.

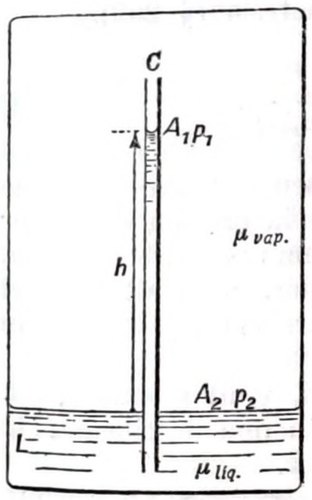


Fig. 685

§ 356. Isotermas de van der Waals y presión de vapor saturante. Una isoterma de van der Waals (§ 311), a temperatura inferior a la crítica, tiene la forma de la figura 684. En el § 311 se ha indicado lo que significan los segmentos AC y BE. La línea normal de licuefacción viene dada por el segmento horizontal AB.

Si se imagina posible el ciclo isotérmico $ADBEDCA$, el trabajo que puede obtenerse del mismo es nulo (§ 345, [6]). Pero este trabajo viene dado por la suma algebraica de las áreas $DBED$ (< 0) y $DCAD$ (> 0). Luego la horizontal ADB determina sobre las isotermas de van der Waals dos áreas iguales G_1 y G_2.

§ 357. Tensión superficial y presión de vapor saturante. En un recinto isotérmico (fig. 685) hay un líquido en el que se introduce un tubo capilar de radio r. El desnivel capilar h viene dado por la [2], § 222:

$$h = \frac{2\tau}{g\,(\mu_{liq} - \mu_{vap})\,r}, \qquad [1]$$

en donde se ha supuesto, para mayor sencillez, $\alpha = 0$, es decir, que el líquido moja completamente las paredes del tubo capilar; g es la aceleración de la gravedad, y τ es la tensión superficial. El radio r es muy pequeño e igual al radio del menisco hemisférico de A_1, tomándose positivo o negativo, según el menisco sea cóncavo o convexo; la [1] da h también en signo; $h > 0$ equivale a una elevación capilar.

Se hallan en presencia la fase líquida y la fase vapor saturante; μ_{liq} y μ_{vap} son las masas específicas correspondientes. Lo mismo que en la atmósfera, μ_{vap} varía con la altura.

Sea p_1 la presión de vapor saturante en presencia de A_1, y p_2 la presión de vapor saturante en presencia de A_2.

En el sistema isotérmico queda excluída una destilación continua de vapor desde A_1 a A_2 (o viceversa); de otro modo, un molinete colocado en C, bajo la acción de la corriente continua de vapor, podría efectuar un trabajo a expensas del calor que sería necesario suministrar continuamente desde el exterior para mantener isotérmico el sistema. Se habría realizado un movimiento continuo de segunda especie (§ 345), c]). Por tanto, en una sección horizontal ideal que pasara por A_1, tiene que haber las mismas presiones sobre las dos caras; a saber: p_1 sobre la cara inferior a causa del vapor saturante en equilibrio con el líquido A_1, y $p_2 - hg\,\mu_{vap}$ sobre la cara superior, resultado del vapor saturante de presión p_2, en equilibrio con A_2, disminuída esta presión a causa de la altura h, según la ley de Stevin, como sucede con la presión barométrica (§ 203).

Luego:

$$p_2 - p_1 = hg\,\mu_{vap} = \frac{2\,\tau\,\mu_{vap}}{r\,(\mu_{liq} - \mu_{vap})}. \qquad [2]$$

Es decir: en correspondencia con un menisco cóncavo se tiene $p_1 < p_2$; inversamente, en un menisco convexo la presión de vapor saturante es mayor que la correspondiente a una superficie plana. En ambos casos, el peso de la columna de vapor, cuya altura es el desnivel capilar, compensa exactamente la diferencia $p_2 - p_1$ entre las presiones de vapor saturante.

Pero si se colocan en un recinto isotérmico, y al mismo nivel, dos gotitas líquidas de distinto radio, se efectúa una destilación: la gotita menor se evapora para engrosar la mayor.

La causa de la sobresaturación que se observa en un recinto privado de elementos capaces de actuar como núcleos de condensación (§ 311) radica en la mayor presión de vapor necesaria para saturar el ambiente que rodea a una gotita líquida.

Por una razón análoga puede calentarse un líquido puro a una temperatura superior a la de ebullición sin que ésta se produzca *(líquido recalentado)* cuando faltan en el líquido cavidades (burbujitas de aire), aunque sea muy pequeño su radio de curvatura, en las cuales pueda producirse la evaporación.

§ **358. Punto triple.** Consideremos en el plano (Θ, p) (figura 686) la curva a, que representa la tensión de vapor saturante en función de la temperatura, que es la curva de equilibrio entre las fases líquida y gaseosa de un mismo cuerpo puro. Sea b la curva de equilibrio entre las fases sólida y líquida, que expresa la temperatura de fusión en función de la presión. En la figura, la curva b corresponde al caso (agua, § 354) en que la temperatura de fusión baja al aumentar la presión. En el punto P_t de intersección de a y b se tiene una presión p_t y una temperatura Θ_t, a las cuales se hallan en equilibrio la fase sólida en contacto con la líquida, y la fase líquida en contacto con la gaseosa.

Debido a la imposibilidad del movimiento continuo de segunda especie, también tienen que estar en equilibrio el sólido y el vapor;

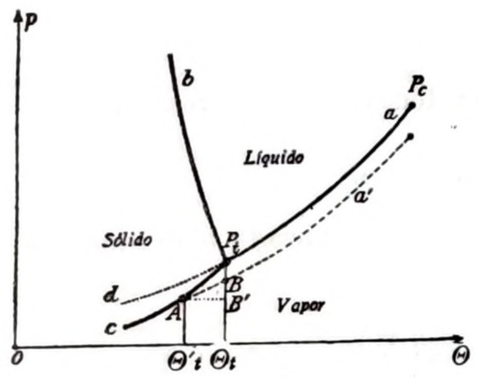


Fig. 686

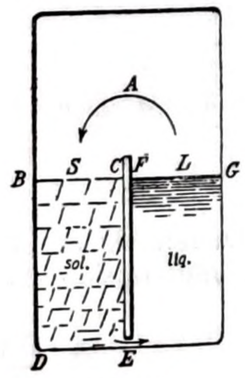


Fig. 687

luego P_t se ha de encontrar también en la curva c de equilibrio entre el sólido y el vapor (curva de sublimación).

En efecto, considérese el sistema sólido-líquido-vapor de la fig. 687: sólido y líquido en contacto, en E; líquido y vapor en contacto, en L; sólido y vapor en contacto, en S; todo el sistema se encuentra a la temperatura Θ_t.

Si el vapor saturante en equilibrio con el líquido en L (fig. 687) no estuviese en equilibrio con el sólido en S, es decir, si hubiese, por ejemplo, una presión de vapor saturante demasiado fuerte, se tendría una continua destilación de vapor desde L hacia S; un molinete colocado en A podría suministrar trabajo, mientras que ciertas cantidades de calor tomadas isotérmicamente desde el exterior o cedidas en BC hacia el exterior (calor de sublimación), en E (calor de fusión) o en FG (calor de vaporización), servirían para mantener constantes las cantidades presentes de fase líquida, de fase sólida y, por tanto, de fase gaseosa.

Se habría realizado un movimiento continuo de segunda especie.

P_t es el *punto triple* (§ 312), cuya existencia se ha establecido experimentalmente para todos los cuerpos puros.

Esto constituye, por tanto, una confirmación de la validez del segundo principio.

El primer principio establece que en el punto triple debe ser igual la expresión $\Delta Q - \Delta \mathfrak{L}$ cuando se sublima directamente un g_m de sólido, que cuando primero se funde y después se vaporiza. El trabajo externo durante la fusión es despreciable, y la presión de vapor saturante en la sublimación y en la vaporización presenta el mismo valor p_t, puesto que el trabajo externo es igual en las dos transformaciones supuestas. Luego debe ser:

$$(\Delta Q)_{subl.} = (\Delta Q)_{fus.} + (\Delta Q)_{evap.}.$$

Éstos son los calores latentes $c_{subl.}$, $c_{fus.}$ y $c_{evap.}$.
Luego, en el punto triple, es:

$$c_{subl.} = c_{fus.} + c_{evap.}, \qquad [1]$$

y, como los calores latentes son todos positivos, resulta:

$$c_{subl.} > c_{evap.}.$$

La fórmula de CLAPEYRON (§ 354), aplicada a la sublimación y a la vaporización, da entonces:

$$\left(\frac{dp}{d\Theta}\right)_{para\ la\ curva\ c} > \left(\frac{dp}{d\Theta}\right)_{para\ la\ curva\ a};$$

es decir, que la curva a de equilibrio líquido-vapor y la curva c de equilibrio sólido-vapor están dispuestas como en la figura; d, prolongación de la curva a, es la curva de equilibrio entre el líquido *sobrefundido* (§ 312) y su vapor saturante.

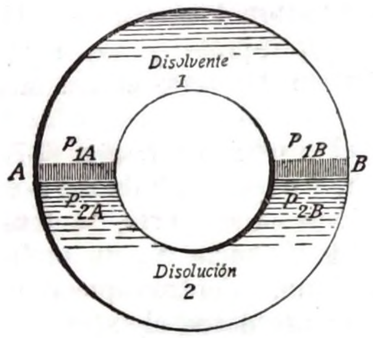


Fig. 688

§ 359. Disoluciones. Vamos a poner un ejemplo de aplicación de la termodinámica al caso de cuerpos no puros.

Admitida la existencia de la presión osmótica (§ 226, *a*], 3.º), la termodinámica permite deducir varias propiedades de las soluciones.

a] **Equivalencia de las paredes semipermeables.** En un sistema isotérmico de la forma de la figura 688, suponemos que A y B son dos paredes semipermeables de distinta naturaleza. Estas paredes deben producir presiones osmóticas iguales $p_{2A} - p_{1A}$ y $p_{2B} - p_{1B}$.

En efecto, el sistema isotermo debe hallarse en equilibrio; si hubiese un flujo continuo de líquido (que sólo podría ser del disolvente puro) en cierto sentido, el consabido molinete sumergido en el líquido podría proporcionar trabajo a expensas de energía calorífica que se tendría que suministrar al sistema para que éste se mantuviese isotérmico. Se habría realizado el movimiento continuo de segunda especie.

Pero hallándose el sistema en equilibrio, y teniendo que ser, por el principio de Pascal, $p_{1A} = p_{1B}$ y $p_{2A} = p_{2B}$, se obtiene, restando:

$$p_{2A} - p_{1A} = p_{2B} - p_{1B}$$

lo cual indica que las dos paredes semipermeables dan la misma presión osmótica.

b] Limitémonos al caso de soluciones en las que el soluto no tenga presión de vapor sensible.

1.º **Aumento del punto de ebullición de la disolución.** Más exactamente: la presión de vapor saturante de la solución es menor que la presión que corresponde al disolvente puro, a igualdad de temperatura.

Puesto que la ebullición se efectúa a la temperatura en que la presión de vapor saturante se iguala con la presión exterior (generalmente, la presión atmosférica), el *descenso de la presión del vapor saturante de las soluciones* implica una elevación del punto de ebullición.

Imaginemos un recinto isotérmico, y sea B (fig. 689) la disolución; A es el disolvente puro, y MN una pared semipermeable. Supongamos que C está ocupado por la fase gaseosa, o sea por el vapor saturante del disolvente, siendo h el desnivel debido a la presión osmótica p_{osm}. Sean p_2 la presión de vapor saturante de la solución en S, y p_1 la presión del disolvente puro en L.

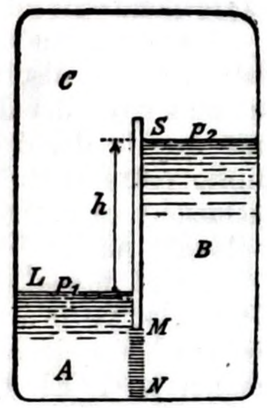


Fig. 689

Procediendo como en el § 357, para que exista equilibrio se tiene:

$$p_1 - p_2 = hg\,\mu_{vap}; \qquad p_{osm} = hg\,\mu_{soluc}, \qquad [1]$$

en donde μ_{vap} se supone constante en todo el espacio C y es muy pequeña respecto μ_{soluc}.

Supongamos que la solución sea ideal (§ 295), y, por tanto, diluída. Entonces se tiene:

$$p_{osm} \cdot v = R\Theta, \qquad [2]$$

siendo v el volumen de solución que contiene 1 molécula-gramo de soluto; luego es $v = \frac{1}{c}$, representando c la concentración de la disolución en moléculas-gramo por unidad de volumen de la misma.

Eliminando h, g y $p_{osm.}$ entre [1] y [2], se tiene:

$$p_1 - p_2 = \frac{\mu_{soluc}}{\mu_{vap}} R\Theta c. \qquad [3]$$

La disminución de la presión de vapor y, por lo tanto, la elevación de la temperatura de ebullición, es proporcional a la concentración de la solución diluída, y depende de la naturaleza del disolvente, pero no de la del cuerpo disuelto.

La curva de equilibrio a' entre la solución y el vapor saturante en el plano Θ, p (fig. 686) queda más baja que la curva a correspondiente al disolvente puro.

2.º **Descenso del punto de congelación de la disolución.** Supongamos que la solución sea bastante diluída para que no se sature al ser enfriada; la parte sólida que se separa durante la congelación será disolvente puro; por ejemplo, en una solución diluída de azúcar en agua se separa hielo. Así, la fase líquida se va concentrando en cuerpo disuelto.

En un aparato como el de la figura 687, para cada concentración de la disolución lograda de este modo, se tiene una temperatura de equilibrio entre las fases líquida, sólida y vapor, resultando también un punto triple, pero que no coincide con el de la figura 686, correspondiente al disolvente puro.

La curva c no se altera, porque el vapor y el sólido están aún constituídos por disolvente puro, y la curva a es sustituída por otra a' más baja, debido a que la presión de vapor de la solución es menor que la del disolvente puro; luego la temperatura Θ_t' de equilibrio entre el disolvente sólido y la solución (temperatura de congelación) es menor que la temperatura Θ_t de congelación del disolvente puro.

En cuanto a los segmentos de las líneas que forman el triángulo P_tAB, se pueden suponer retilíneos; P_tB es proporcional a la concentración c (soluciones diluídas) y AB' resulta también proporcional a c. El descenso de la temperatura de congelación es proporcional a la concentración c.

En una disolución acuosa ideal, la elevación del punto de ebullición es de 0,52 $\frac{^oC \cdot dm^3}{g\text{-}mol}$; por lo tanto, es muy pequeña y difícil de determinar, incluso con dispositivos muy precisos *(ebullometría)*.

El descenso del punto de congelación en el agua es de 1,85 $\frac{^oC \cdot dm^3}{g\text{-}mol}$, y puede determinarse con mejor aproximación *(criometría)*.

La criometría y la ebullometría (1) tienen mucho interés para la determinación de masas moleculares.

(1) Aunque es más corriente llamarlas *crioscopia* y *ebulloscopia*, hemos respetado las denominaciones del autor, que son más lógicas. — *N. del T.*

c] Cuando el soluto es un gas, puede suponerse frecuentemente que la presión de vapor del disolvente es despreciable en la fase gaseosa. Es aplicable entonces la *ley de Henry* (§ 224, [2]): la concentración de la solución, esto es, la concentración del gas en la fase líquida, es proporcional a la presión de este gas en la fase gaseosa.

Cuando hay varios gases en la fase gaseosa, que no reaccionan entre sí, cada uno se disuelve proporcionalmente a su propia presión parcial.

Existen casos en que no puede despreciarse ninguna de las presiones de vapor de los componentes de la fase líquida (p. ej., en las soluciones entre dos líquidos casi igualmente volátiles). Este caso tiene un interés grandísimo, especialmente en la destilación fraccionada, aunque no lo trataremos.

Entre los resultados obtenidos en este caso, recordaremos que, en rigor, la presión de vapor de un líquido depende de los gases inertes presentes en la fase gaseosa; el gas inerte aumenta ligeramente la presión de vapor saturante. En el vapor de agua a la temperatura ordinaria, una presión de aire de 1000 $\frac{\text{newton}}{cm^3}$ ($\approx$ 100 atm) aumenta la presión de vapor saturante en un 7,5 %.

En la medición del estado higrométrico (§ 298) puede despreciarse dicho aumento.

CAPÍTULO IV

Teoría cinética de los gases

§ 360. Constitución molecular de los gases perfectos. Se han indicado en los §§ 179, 227 las razones que conducen a la teoría cinética molecular. También se ha introducido (§ 179) el *número de Avogadro* $N = 60{,}2 \cdot 10^{22}$ mol-g^{-1}, esto es, el número de moléculas contenidas en una molécula-gramo de una substancia cualquiera.

Hemos definido como gas perfecto un gas que obedeciera sin limitaciones a la ley de Boyle. Los gases reales satisfacen a esta condición cuando se hallan suficientemente enrarecidos y apartados de las condiciones de licuefacción.

Se deduce experimentalmente que todos los gases reales tienen, en estas condiciones, el mismo coeficiente de dilatación $\alpha = \frac{1}{273{,}15}$, y que cuando se someten a la expansión de Joule (fig. 616), se expansionan adiabáticamente sin enfriarse.

De este modo se puede definir una temperatura absoluta Θ independiente de la naturaleza del gas y obtener la ecuación característica de los gases perfectos:

$$pv = nR\Theta, \qquad [1]$$

en donde la constante R es la misma para todos los gases, y n es el número de moléculas-gramo que constituyen la masa de gas considerada.

Desde el punto de vista molecular, definiremos como *gas perfecto* un gas cuyas moléculas comparables a esferitas elásticas en continuo movimiento (v., sin embargo, § 367)

1.º, tienen un volumen despreciable respecto al volumen ocupado por el gas;

2.º, no se ejercen mutuamente ninguna acción sensible (cohesión entre moléculas iguales, adherencia entre moléculas de diferente naturaleza), excepto durante sus choques recíprocos, comparables a choques entre cuerpos elásticos (§§ 140 y 141).

Demostraremos que un gas así constituído obedece, en efecto, a la [1], cuando se adopta una definición conveniente de «temperatura».

Se comprende por qué un gas real, bastante enrarecido y apartado del punto de licuefacción, tiene que comportarse como un gas perfecto: no se ejerce cohesión sensible entre sus moléculas por estar muy apartadas entre sí y el volumen de las moléculas es despreciable respecto al del recipiente que las contiene. Por ejemplo, en el helio, ya en las condiciones normales, o sea, a 0 ºC y presión de 1 atm, la relación entre estos volúmenes vale sólo 0,000 1.

§ 361. Presión. Consideremos, para simplificar, un cubo de lado l que contiene n moléculas-gramo de gas, y, por tanto, $n \cdot N$ moléculas. Sea m la masa de cada una, y $M = m \cdot n \cdot N$, la masa total.

Sea $\vec{u}_1$ la velocidad de una de las moléculas en un instante dado; en su movimiento choca y rebota, pero, a causa del enorme número de moléculas presentes y del pequeño volumen que ocupan, parece lícito admitir que si la molécula se desvía o disminuye de velocidad, otra toma simultáneamente la velocidad $\vec{u}_1$. Supondremos, pues, que en el trayecto recorrido por esta molécula entre una y otra pared conserva su velocidad sin alteración de valor, dirección y sentido.

Sean:

u_{1x}, u_{1y}, u_{1z} las componentes de la velocidad $\vec{u}_1$ de una primera molécula según tres ejes cartesianos, que supondremos coincidentes con las artistas del cubo que contiene el gas;

u_{2x}, u_{2y}, u_{2z} las componentes análogas para una segunda molécula;

.....

u_{nNx}, u_{nNy}, u_{nNz}, las componentes análogas para la $(nN)^{\text{-ésima}}$ molécula.

Se tiene:

$$\left.\begin{aligned} u_{1x}^2 + u_{1y}^2 + u_{1z}^2 &= u_1^2 \\ u_{2x}^2 + u_{2y}^2 + u_{2z}^2 &= u_2^2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ u_{nNx}^2 + u_{nNy}^2 + u_{nNz}^2 &= u_{nN}^2 \end{aligned}\right\}. \qquad [1]$$

Por lo que se ha dicho al tratar del choque elástico oblicuo (§ 141), en los choques de cada molécula contra las paredes del cubo, la componente u_{rx} de la velocidad se cambia en $-u_{rx}$ si el choque se efectúa contra las caras del cubo perpendiculares al eje x; en los otros choques, u_{rx} no varía.

El choque de la $r^{\text{-ésima}}$ molécula contra una de las paredes perpendiculares al eje x se efectúa, por tanto, con la variación de cantidad de movimiento

$$2m \cdot u_{rx};$$

y, puesto que el volumen de las moléculas es despreciable, esta molécula recorrerá en un segundo $\frac{u_{rx}}{l}$ veces el camino comprendido entre las dos paredes y, por tanto, chocará contra la pared considerada $\frac{u_{rx}}{2l}$ veces.

Todas las moléculas que chocan en el transcurso de un segundo contra la pared considerada, experimentan una variación de cantidad de movimiento

$$\frac{2m}{2l}\,(u_{1x}^2 + u_{2x}^2 + \ldots\ldots + u_{nNx}^2).$$

Éste es también el impulso $F \cdot t = F \cdot 1 = F$ con el que la pared, reaccionando contra las moléculas que chocan, varía la cantidad de movimiento de éstas. Pero esta reacción de la pared es la presión total $p \cdot l^2$ que la pared debe ejercer contra el gas para resistir la presión del choque (§ 142). Así, por ejemplo, en los manómetros, una fuerza elástica, o una fuerza peso, equilibran la presión de los choques moleculares. Ordinariamente, la solidez de las paredes del recipiente que contiene el gas es la que hace posible dicha reacción de las paredes contra la presión de choque del gas.

Luego se tiene:

$$F = p \cdot l^2 = \frac{m \cdot n \cdot N}{l}\,\frac{(u_{1x}^2 + u_{2x}^2 + \ldots\ldots + u_{nNx}^2)}{nN}.$$

Y como $l^3 = v$, resulta:

$$pv = mnN\,\frac{(u_{1x}^2 + u_{2x}^2 + \ldots\ldots + u_{nNx}^2)}{nN}, \qquad [2]$$

Análogamente, se obtendría para las otras caras del cubo l^3:

$$\left.\begin{aligned} pv &= mnN\,\frac{\sum u_{ry}^2}{nN} \\ pv &= mnN\,\frac{\sum u_{rz}^2}{nN} \end{aligned}\right\} \qquad [3]$$

Ahora bien, los primeros miembros de estas tres fórmulas deben ser evidentemente iguales, porque en un gas que se halla macroscópicamente en reposo, excluída la acción de la gravedad, es valedera la ley de Pascal: p es constante en todas las caras del cubo l^3. También deben ser iguales los segundos miembros.

La teoría cinética justifica plenamente esta conclusión:

$\frac{1}{2} m \cdot \frac{\sum u_{rx}^2}{nN}$ representa la energía cinética media de una molécula, según el eje de las x. Si un gas se halla en reposo macroscópico, es decir, no fluye en determinado sentido, es evidente que esta energía cinética media debe ser la misma según cualquier eje, es decir, que:

$$\frac{\sum u_{rx}^2}{nN} = \frac{\sum u_{ry}^2}{nN} = \frac{\sum u_{rz}^2}{nN}.$$

Sumando las expresiones [2] y [3] se tiene, en virtud de las [1]:

$$pv = \frac{1}{3} mnN \frac{\sum u_r^2}{nN};$$

y si indicamos por

$$\bar{\bar{u}}^2 = \frac{\sum u_r^2}{nN} \qquad [4]$$

la media de los cuadrados de las velocidades moleculares ($\bar{\bar{u}}$ se llama *media cuadrática, media energética o media eficaz de las velocidades)* (1) resulta:

$$pv = \frac{1}{3} mnN \cdot \bar{\bar{u}}^2 = \frac{2}{3} M \frac{\bar{\bar{u}}^2}{2}; \qquad [5]$$

o también:

$$p = \frac{2}{3} \frac{M}{v} \frac{\bar{\bar{u}}^2}{2}, \qquad [6]$$

que da la presión del gas según la teoría cinética.

La parte menos satisfactoria del razonamiento anterior estriba en la hipótesis de la substituibilidad de una molécula por otra; la [5] puede deducirse más rigurosamente sin esta hipótesis, pero de un modo menos elemental.

(1) En la [4] se obtiene la media de los cuadrados de las velocidades de todas las moléculas en cierto instante. Una misma molécula tiene una velocidad $\vec{u}_r$ continuamente variable, a consecuencia de los choques; por tanto, $\bar{\bar{u}}^2$ puede imaginarse como la media de los valores que el cuadrado u_r^2 de la velocidad de una misma molécula ha ido tomando en los diversos instantes de un intervalo de tiempo suficientemente largo.

Obsérvese que se llegaría igualmente a la [6] suponiendo que las moléculas contenidas en el volumen cúbico l^3 se pueden dividir en tres grupos iguales de $\frac{nN}{3}$ moléculas cada uno, estando formado uno de estos grupos por moléculas con velocidad $\bar{\bar{u}}$ paralela al eje x, otro por moléculas de velocidad $\bar{\bar{u}}$ paralela al eje y, y el tercero, análogamente respecto al eje z.

§ 362. Temperatura. Cuando se mezclan dos gases, la temperatura de equilibrio de los mismos es igual para los dos.

Se deduce de las leyes de la mecánica estadística, aplicadas a un sistema formado por un número grandísimo de *esferitas* completamente elásticas, que, cuando se alcanza el equilibrio estadístico, gracias a los choques mutuos, la energía cinética media se *reparte por igual* entre todas las esferitas *(teorema de la equipartición de la energía)*.

Luego la energía cinética media en las condiciones de equilibrio térmico tiene que ser igual en los dos gases:

$$\frac{1}{2} m_1 \cdot \bar{\bar{u}}_1^2 = \frac{1}{2} m_2 \cdot \bar{\bar{u}}_2^2. \qquad [1]$$

Esto conduce a la hipótesis de que la energía cinética molecular media es el índice de la *temperatura* del gas.

Tomaremos como definición de temperatura, en la teoría cinética, la expresión:

$$\frac{1}{2} m \bar{\bar{u}}^2 = \frac{3}{2} k\Theta \qquad [2]$$

en la que k es una constante universal independiente de la naturaleza del gas *(constante de Boltzmann)*.

La [2] equivale a admitir que la energía cinética molecular media es proporcional a la temperatura absoluta y que la constante de proporcionalidad es la misma para todos los gases.

Advirtamos que, efectivamente, el teorema de la equipartición establece que, en un sistema constituído por un grandísimo número de partículas elásticas que chocan mutuamente, la energía cinética está igualmente repartida entre todos los grados de libertad del sistema. Cada molécula monoatómica, comparable a una esferita, tiene tres grados de libertad, correspondientes a los tres movimientos de traslación, independientes entre sí, que puede efectuar la esferita, según los tres ejes cartesianos ortogonales. *A cada grado de libertad le corresponde la energía cinética media* $\frac{1}{2} k\Theta$, y a la molécula entera le corresponde la energía $\frac{3}{2} k\Theta$.

§ 363. Ecuación de estado. La ecuación de estado [1], § 360, se deduce de las hipótesis cinéticas hechas respecto a la presión y a la temperatura. En efecto, la [5], § 361, y la [2], § 362, dan:

$$pv = nN \cdot k\Theta.$$

Poniendo

$$Nk = R \text{ constante universal,} \qquad [1]$$

se tiene:

$$pv = n \cdot R\Theta, \text{ y, para una molécula-gramo, } pv = R\Theta. \qquad [2]$$

Las hipótesis moleculares que hemos sentado sirven precisamente para atribuir al sistema de moléculas considerado las propiedades de gas perfecto.

Puesto que es $R = 8{,}314 \cdot 10^7 \ \frac{\text{erg}}{°\text{C} \cdot \text{mol-g}}$, $N = 60{,}2 \cdot 10^{22}$ mol-g^{-1}, se tiene:

$$k = 1{,}38 \cdot 10^{-16} \ \frac{\text{erg}}{°\text{C}}.$$

El valor más fidedigno propuesto recientemente es:

$$k = 1{,}380_3 \cdot 10^{-16} \ \frac{\text{erg}}{°\text{C}}.$$

§ 364. Ley de Avogadro. En dos volúmenes iguales de gases diferentes, a la misma presión y temperatura, se tiene:

$$p_1 v_1 = \frac{1}{3} m_1 n_1 N_1 \cdot \bar{\bar{u}}_1^2; \qquad p_1 v_1 = \frac{1}{3} m_2 n_2 N_2 \cdot \bar{\bar{u}}_2^2; \qquad [1]$$

y como

$$\frac{1}{2} m_1 \cdot \bar{\bar{u}}_1^2 = \frac{1}{2} m_2 \cdot \bar{\bar{u}}_2^2,$$

resulta:

$$n_1 N_1 = n_2 N_2.$$

Volúmenes iguales de gases en las mismas condiciones de presión y de temperatura contienen igual número de moléculas.

El gas que hemos imaginado, cuando su temperatura está definida por la [2], § 362, obedece a la *ley de Avogadro*.

Si se hubiese admitido esta ley *a priori*, la [1] hubiese permitido deducir que en dos gases a la misma temperatura tiene que ser valedera la [1], § 362, y que, por tanto, la temperatura ha de estar definida por la [2], § 362.

§ 365. Velocidades moleculares. En la [6], § 361, pueden medirse p, v y M, obteniéndose:

$$u = \sqrt{\frac{3pv}{M}} = \sqrt{\frac{3p}{\mu}}, \qquad [1]$$

siendo $\mu = \frac{M}{v}$ la masa específica del gas.

Para 1 cm^3 de hidrógeno a presión normal y a 0 °C se tiene:

$$\frac{M}{v} = \mu_0 = 0{,}000\,089\,6 \ \frac{\text{g}_\text{m}}{\text{cm}^3}$$

$$p = 1 \text{ atm} = 1{,}013\,6 \cdot 10^6 \ \frac{\text{dinas}}{\text{cm}^2}.$$

Por tanto, aproximadamente, es:

$$\bar{\bar{u}}_{H_2;\,0} = 185\,000 \ \frac{\text{cm}}{\text{seg}} = 1\,850 \ \frac{\text{m}}{\text{seg}}.$$

Análogamente, se tendría:

en el nitrógeno ..... $\bar{\bar{u}}_{N_2;\,0} = 490$
en el oxígeno ..... $\bar{\bar{u}}_{O_2;\,0} = 460$
en el anhídrido carbónico ..... $\bar{\bar{u}}_{CO_2;\,0} = 390$

$\Big\}$ $\frac{\text{m}}{\text{seg}}$.

§ 366. Distribución estadística de las velocidades. Las velocidades $\bar{\bar{u}}$ determinadas anteriormente son las velocidades medias cuadráticas.

Pero, en un instante dado, la velocidad $\vec{u}$ no es la misma en todas las moléculas, ni en dirección ni en magnitud.

Sea $d\Pi = f(u_x) \cdot du_x$ la fracción de moléculas cuya componente u_x de la velocidad está comprendida entre u_x y $u_x + du_x$ (du_x se supone positivo). *Sea* $d\Pi$ la *probabilidad* de que suceda así; la función $f(u_x)$ se toma como medida de lo que puede llamarse *probabilidad específica* $\frac{d\Pi}{du_x}$ del valor u_x de la componente de la velocidad molecular según el eje de las x.

En un gas en equilibrio macroscópico no hay ninguna dirección privilegiada; luego la misma función f da la probabilidad correspondiente para las componentes de u según los otros ejes.

Por tanto, la probabilidad de que una molécula tenga una velocidad $\vec{u}$ de componentes comprendidas entre

$$u_x, \ u_y, \ u_z \quad \text{y} \quad u_x + du_x, \ u_y + du_y, \ u_z + du_z$$

es:

$$f(u_x) \cdot f(u_y) \cdot f(u_z) \cdot du_x \, du_y \, du_z, \qquad [1]$$

porque la probabilidad buscada es el producto de las probabilidades que corresponden simultáneamente a estos tres acontecimientos:

la componente según el eje x está comprendida entre u_x y $u_x + du_x$,
la componente según el eje y está comprendida entre u_y y $u_y + du_y$,
la componente según el eje z está comprendida entre u_z y $u_z + du_z$;

y estos tres sucesos se suponen independientes entre sí, ya que se admite que, al verificarse uno de ellos, no queda modificada la probabilidad de que se verifique uno de los otros dos.

Si nN es el número total de moléculas, el número de moléculas con una velocidad $\vec{u}$ de componentes comprendidas entre u_x, u_y, u_z y $u_x + du_x$, $u_y + du_y$, $u_z + du_z$ es, por tanto:

$$nN \cdot f(u_x) \cdot f(u_y) \cdot f(u_z) \cdot du_x\, du_y\, du_z,$$

La misma probabilidad debe tenerse cuando, cambiando los ejes de referencia, el nuevo eje de las x venga a coincidir con $\vec{u}$; las componentes de $\vec{u}$, según la nueva terna de ejes, son entonces $u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$, 0, 0, y debe ser:

$$f(u_x) \cdot f(u_y) \cdot f(u_z) = f(u) \cdot f(0) \cdot f(0),$$

o sea,

$$f(u_x) \cdot f(u_y) \cdot f(u_z) = f\left(\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}\right) \cdot f(0) \cdot f(0). \qquad [2]$$

Es evidente que la función

$$\frac{d\Pi}{du_x} = f(u_x) = A \cdot e^{Bu_x^2} \qquad [3]$$

y, por tanto:

$$f(u_y) = A \cdot e^{Bu_y^2}; \qquad f(u_z) = A \cdot e^{Bu_z^2}$$

satisface a la [2]. También se demuestra que esta solución es única.

A y B son constantes respecto a u_x, u_y, u_z. A es ciertamente positiva, porque no tiene sentido hablar de probabilidad $f(u_x)$ negativa. A y B dependerán, en general, de la temperatura y de la naturaleza del gas.

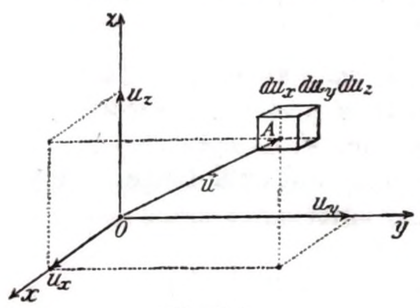


Fig. 690

Imaginemos ahora los nN vectores $\vec{u}$, relativos a las nN moléculas del gas en un cierto instante, aplicados en un mismo punto O (fig. 690). Se obtiene así una estrella de vectores, de simetría esférica. Sea A el extremo de uno de estos vectores $\vec{u}$, de componentes u_x, u_y, u_z.

Un volumen $du_x\, du_y\, du_z$ en dicho espacio representativo de los vectores $\vec{u}$, contiene los extremos de todos los vectores $\vec{u}$ cuyas componentes están comprendidas entre u_x y $u_x + du_x$, u_y y $u_y + du_y$, u_z y $u_z + du_z$. El número de estos es, según las [2] y [3]:

$$nN \cdot f(u_x) \cdot du_x \cdot f(u_y) \cdot du_y \cdot f(u_z) \cdot du_z = nN \cdot A^3 \cdot e^{Bu^2} \cdot du_x\, du_y\, du_z, \qquad [4]$$

El número de moléculas para las cuales la magnitud de la velocidad está comprendida entre u y $u + du$, coincide con el número de vectores $\vec{u}$, cuyos extremos están contenidos en un estrato comprendido entre dos superficies esféricas de centro O y radios respectivos u y $u + du$. La [4] da el número de dichos vectores para el elemento de volumen $du_x\, du_y\, du_z$ del mencionado estrato esférico. Siendo $4\pi u^2 \cdot du$ el volumen total del mismo, el número de moléculas que tienen velocidades comprendidas entre u y $u + du$ es:

$$d(nN) = nN \cdot A^3 \cdot e^{Bu^2} \cdot 4\pi u^2 \cdot du. \qquad [5]$$

Pero se debe tener:

$$\int_{u=0}^{u=\infty} d(nN) = nN,$$

o sea,

$$4\pi A^3 \int_{u=0}^{u=\infty} u^2 \cdot e^{Bu^2} \cdot du = 1. \qquad [6]$$

Luego e^{Bu^2} debe tener un exponente negativo. Pondremos

$$B = -\frac{1}{u^2}, \qquad [7]$$

y puesto que el exponente Bu^2 debe ser un número puro, u toma el significado de una velocidad que depende del gas y de su temperatura.

Ahora, se tiene:

$$\int_{u=0}^{u=\infty} u^2 \cdot e^{-\frac{u^2}{u^2}} \cdot du = \frac{u^3 \cdot \sqrt{\pi}}{4}; \qquad [8]$$

lo que se obtiene poniendo $\frac{u}{u} = x$, y después integrando por partes.

Para que quede satisfecha la [6], debe ser:

$$4\pi A^3 \cdot \frac{u^3 \cdot \sqrt{\pi}}{4} = 1, \qquad \text{o sea,} \quad A = \frac{1}{u \cdot \sqrt{\pi}}, \qquad [9]$$

y la probabilidad $d\Pi$ de que una molécula tenga una magnitud de velocidad comprendida entre u y $u + du$, se obtiene mediante las [5], [7] y [9]:

$$d\Pi = \frac{d(nN)}{nN} = \frac{4}{u^3 \cdot \sqrt{\pi}} u^2 \cdot e^{-\frac{u^2}{u^2}} \cdot du, \qquad [10]$$

que da la *ley de distribución estadística de las velocidades*, de MAXWELL.

Ésta puede escribirse también:

$$\frac{d\Pi}{du} = \frac{4}{\mathfrak{u}^3 \cdot \sqrt{\pi}} u^2 \cdot e^{-\frac{u^2}{\mathfrak{u}^2}}, \qquad [11]$$

mientras que la [3] da:

$$\frac{d\Pi}{du_x} = \frac{1}{\mathfrak{u}\sqrt{\pi}} e^{-\frac{u_x^2}{\mathfrak{u}^2}}. \qquad [12]$$

La [10] ha sido confirmada por numerosos hechos experimentales, y actualmente se tienen también comprobaciones experimentales directas (§ 379, *b*]), por lo que se acepta que sólo en condiciones particularísimas conviene substituir en un gas perfecto la estadística maxwelliana por otra *estadística* (p. ej., en la proximidad del cero absoluto).

En efecto, cambiando alguna de las hipótesis admitidas para llegar a la estadística maxwelliana (equipartición de la energía entre los diversos grados de libertad, cálculo de estos grados de libertad, etcétera), se obtienen otras leyes de distribución de las velocidades.

Derivando la [11], se tiene:

$$\frac{d^2\Pi}{du^2} = \frac{4}{\mathfrak{u}^3\sqrt{\pi}} 2u \cdot e^{-\frac{u^2}{\mathfrak{u}^2}} \cdot \left(1 - \frac{u^2}{\mathfrak{u}^2}\right);$$

el máximo de $\frac{d\Pi}{du}$ resulta para $\frac{d^2\Pi}{du^2} = 0$, o sea, para $u = \mathfrak{u}$; $\mathfrak{u}$ *es la velocidad más probable de las moléculas.*

Esta velocidad *no* coincide con la media cuadrática de las velocidades u.

Esta última está definida por la [4], § 361, que puede también escribirse:

$$\bar{\bar{u}}^2 = \frac{\int_{u=0}^{u=\infty} u^2 \cdot d\,(nN)}{nN} \qquad [13]$$

o sea,

$$\bar{\bar{u}}^2 = \int_0^\infty u^2 \cdot d\Pi = \frac{4}{\mathfrak{u}^3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty u^4 \cdot e^{-\frac{u^2}{\mathfrak{u}^2}} \cdot du = \frac{4\,\mathfrak{u}^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty x^4 \cdot e^{-x^2} \cdot dx.$$

$\left(\text{Se ha puesto } \frac{u}{\mathfrak{u}} = x\right)$. Ahora, integrando por partes, se tiene:

$$\int x^4 e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2} \int x^3 \cdot 2x \cdot e^{-x^2}\, dx = -\frac{1}{2} x^3 e^{-x^2} + \frac{3}{2} \int x^2 e^{-x^2} \cdot dx.$$

Se sabe por el cálculo integral (comp. con la [8]) que es:

$$\int_0^\infty x^2 \cdot e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}, \text{ mientras que es: } \left| -\frac{1}{2} x^3 \cdot e^{-x^2} \right|_0^\infty = 0.$$

Luego:

$$\bar{\bar{u}}^2 = \frac{3}{2}\mathfrak{u}^2; \qquad \bar{\bar{u}} = \mathfrak{u}\sqrt{\frac{3}{2}}, \qquad [14]$$

expresión que relaciona la velocidad media cuadrática con la velocidad más probable.

No deben confundirse ni $\mathfrak{u}$ ni $\bar{\bar{u}}$ con la *velocidad media* $\bar{u}$ de las moléculas. Esta última está definida por:

$$\bar{u} = \frac{\int_0^\infty u \cdot d\,(nN)}{nN} = \int_0^\infty u \cdot d\Pi = \frac{4}{\mathfrak{u}^3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty u^2 \cdot e^{-\frac{u^2}{\mathfrak{u}^2}} \cdot du =$$

$$= \frac{4\,\mathfrak{u}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty x^3 \cdot e^{-x^2}\, dx. \qquad \left(\text{se ha puesto: } x = \frac{u}{\mathfrak{u}}\right).$$

Integrando por partes, como antes, se tiene:

$$\int x^3 e^{-x^2}\, dx = -\frac{1}{2} x^2 \cdot e^{-x^2} + \int x \cdot e^{-x^2}\, dx = -\frac{1}{2} x^2 \cdot e^{-x^2} - \frac{1}{2} e^{-x^2} + k.$$

Y, por tanto,

$$\int_0^\infty x^3 \cdot e^{-x^2} \cdot dx = \frac{1}{2}.$$

En fin:

$$\bar{u} = \frac{2\,\mathfrak{u}}{\sqrt{\pi}} = \bar{\bar{u}}\sqrt{\frac{8}{3\pi}}. \qquad [15]$$

El diagrama de la función $\frac{d\Pi}{du_x}$ de la variable u_x, según la [12], resulta independiente de la naturaleza y de la temperatura del gas cuando se toman como abscisas los valores $\frac{u_x}{\mathfrak{u}}$ y como ordenadas

los valores $u \cdot \frac{d\Pi}{du_x}$. Este diagrama está representado en la figura 691 y es común a u_x, u_y y u_z.

El diagrama de la función $\frac{d\Pi}{du}$ de la velocidad u según la [11] resulta también independiente de la naturaleza y de la temperatura del gas cuando se toman como abscisas los valores $\frac{u}{\bar{u}}$ y como ordenadas los valores $u \cdot \frac{d\Pi}{du}$. Este diagrama tiene la forma indicada en la figura 692.

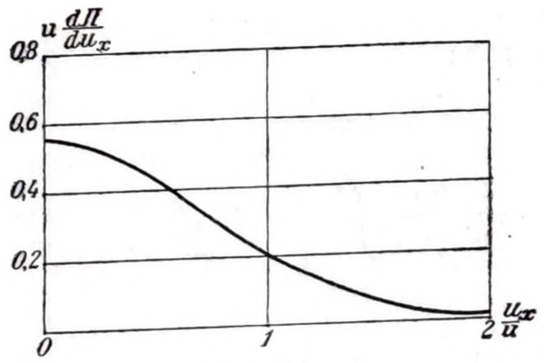


Fig. 691

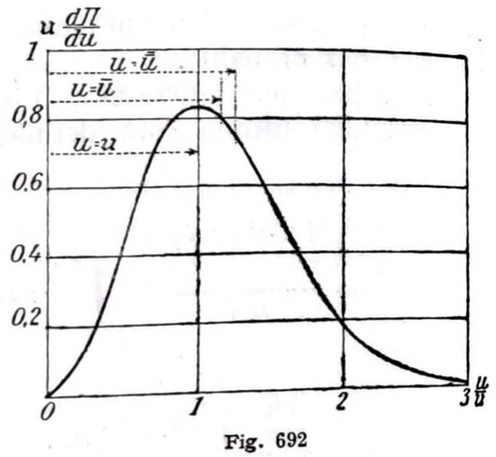


Fig. 692

Obsérvese el distinto comportamiento de las dos probabilidades: mientras es máxima la probabilidad $\frac{d\Pi}{du_x}$ de que se anule la componente u_x de $\vec{u}$, es nula la probabilidad $\frac{d\Pi}{du}$ de que se anule la magnitud u de la velocidad.

§ 367. Energía interna y calores específicos de los gases. Con las hipótesis admitidas, la energía interna U es solamente energía cinética molecular:

$$U = \sum_r \frac{1}{2} m u_r^2 = \frac{1}{2} m \cdot nN \frac{\sum u_r^2}{nN} = nN \cdot \frac{1}{2} m \bar{u}^2 = \quad [1]$$

$$= \frac{3}{2} k \cdot nN \cdot \Theta = \frac{3}{2} n \cdot R\Theta,$$

y para una molécula-gramo: [2]

$$U_{n=1} = \frac{3}{2} R\Theta.$$

La energía interna resulta simplemente proporcional a la temperatura e independiente del volumen. En el cero absoluto se tiene $U = 0$.

Por el primer principio de la termodinámica (§ 327, [3]) se tiene, en general:

$$dU = (dQ)_{v = \text{const.}} \quad [3]$$

porque si v es constante, resulta $d\mathcal{L} = p\, dv = 0$.

Además, por la definición del calor específico c_v es:

$$(dQ)_{v = \text{const.}} = M c_v d\Theta, \quad [4]$$

en donde M es la masa de gas que se considera. En particular, para una molécula-gramo de un gas de masa molecular m_{mol}, las [2], [3] y [4] dan:

$$c_v = \frac{dU_{n=1}}{m_{mol} \cdot d\Theta} = \frac{3}{2} \frac{R}{m_{mol}}, \quad [5]$$

valor independiente de Θ.

El calor molecular, o sea la capacidad calorífica de una molécula-gramo, a volumen constante, resulta:

$$m_{mol}\, c_v = \frac{3}{2} R \quad [6]$$

independiente de la naturaleza del gas y de Θ, y puesto que (§ 333, [4]) R es igual a $\approx 2 \frac{\text{cal}}{^oC \cdot \text{mol-g}}$, dicho calor molecular es, aproximadamente igual a $\approx 3 \frac{\text{cal}}{^oC \cdot \text{mol-g}}$.

El calor específico a presión constante está relacionado con c_v y con R por la [3], § 333:

$$c_p = c_v + \frac{R}{m_{mol}}.$$

Introduciendo los calores moleculares, resulta:

$$m_{mol}\, c_p = m_{mol}\, c_v + R = \frac{5}{2} R \quad [7]$$

valor independiente del gas y de Θ, y aproximadamente igual a ≈ 5 $\frac{\text{cal}}{^oC \cdot \text{mol-g}}$.

Por tanto, $$\frac{c_p}{c_v} = \frac{5}{3} = 1{,}66, \quad [8]$$

de acuerdo con la experiencia, en los *gases monoatómicos*.

En efecto, las consideraciones anteriores sólo son aplicables a los gases monoatómicos, porque únicamente las moléculas de éstos son comparables a esferitas elásticas.

En los gases biatómicos puede imaginarse que la molécula tiene más bien la forma de la figura 693, y la expresión [1] de la energía interna ya no es legítima.

En una molécula biatómica es preciso tener en cuenta los grados de libertad correspondientes a las rotaciones de la molécula o a la vibración mutua de las dos masas que la componen. Si la molécula de la figura 693 es rígida, sólo se tienen dos nuevos grados de libertad. Según el teorema de la equipartición (§ 362), la energía cinética total media de una molécula tiene el valor $\frac{5}{2}\,k\Theta$, y la [2] se transforma en:

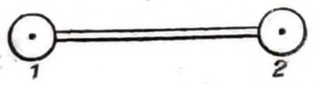


Fig. 693

$$U_{n=1} = \frac{5}{2}\,R\Theta\,;$$

los calores específicos moleculares se convierten, aproximadamente, en:

$$m_{mol}\,c_v = 5\,\frac{\text{cal}}{°\text{C}\cdot\text{mol-g}} \quad ; \quad m_{mol}\,c_p = 7\,\frac{\text{cal}}{°\text{C}\cdot\text{mol-g}}\,;$$

y, por tanto,

$$\frac{c_p}{c_v} = \frac{7}{5} = 1.4,$$

de acuerdo con la experiencia.

En las moléculas no rígidas, y en las poliatómicas, aumenta todavía el número de los grados de libertad, y aumentan c_1 y c_1, pero se tiene siempre:

$$m_{mol}\,c_p - m_{mol}\,c_v = R,$$

luego $\frac{c_p}{c_v}$ disminuye al aumentar la complejidad de la molécula.

§ 368. Difusión. Dos gases colocados uno en presencia del otro se difunden a causa de las velocidades moleculares. Pero basta una deducción aproximada para hacer ver que han de ser enormes las velocidades de difusión, como lo son las velocidades $\bar{\bar{u}}$, $\bar{u}$ y u, y que, por ejemplo, introduciendo un perfume en un ángulo de una habitación, tiene que sentirse inmediatamente en todo el recinto.

El *camino libre medio* λ (§ 369) de una molécula en un gas, a las presiones corrientes, es muy pequeño, pues es inversamente proporcional a la presión; a la presión normal, λ es del orden de 10^{-5} cm (§ 371); por consiguiente, por término medio, una molécula solamente corre, sin ser perturbada, un trayecto de $\frac{1}{100\,000}$ cm, y después

choca con otra. En un segundo, una molécula experimenta unos 10^{10} choques, lo que impide que la difusión sea rápida.

A la presión de 10^{-3} mm_{Hg}, el camino libre medio es ya de ≈ 10 centímetros, y a la presión de 10^{-6} mm_{Hg} existente en las válvulas termoelectrónicas y en los tubos para rayos Roentgen, el camino libre medio es de algunos centenares de metros.

La expansión de un gas desde un recipiente a otro, en el que se ha practicado el vacío (fig. 616), a través de una llave R no capilar, es prácticamente instantánea. Por lo menos durante la primera fase, cuando A_2 está vacío, la rapidez de la expansión se debe precisamente al notable camino libre de las moléculas en A_2 y al elevado valor de $\bar{u}$, que da una idea de la velocidad de salida del gas en el vacío.

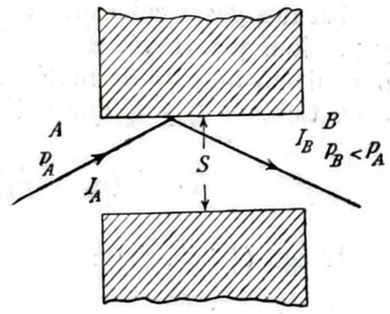


Fig. 694

Considérese, en cambio, el peso de las moléculas gaseosas a través de canalitos finísimos de una pared porosa (fig. 694). La difusión, a la que se da entonces el nombre de *efusión* (§ 226, *b*], 2.º), es el resultado del paso de moléculas desde A hacia B, y viceversa.

Imaginemos, en primer lugar, que todo el dispositivo está a la misma temperatura Θ *(difusión isotérmica)*.

Admitamos que las moléculas que pasan desde A hacia B sean todas las que penetran por la embocadura I_A; es decir, supongamos que casi ninguna molécula se vea obligada a regresar hacia A, por choque contra otra o contra las paredes del conducto. Lo mismo ocurre con las moléculas que van desde B hacia A. Esto es lo que sucede en realidad cuando en B hay el vacío o cuando las presiones p_A en A y p_B en B son suficientemente pequeñas para asegurar a las moléculas un camino libre medio suficiente en el canal $I_A\,I_B$.

En estas condiciones, el número de moléculas que «se difunde» desde A hacia B en el tiempo dt es igual al número de moléculas que en dicho tiempo chocarían con el área S de la embocadura I_A si estuviese cerrada por una pared; este número es, por tanto, proporcional a p_A (§ 361); también es evidentemente proporcional a S, a dt y a la velocidad molecular media $\bar{u}$ y, por consiguiente, también es proporcional a $\bar{\bar{u}}$ (§ 366, [15]). El volumen de gas que pasa de A a B es, a su vez, proporcional a este número de moléculas, y, por tanto, se podrá poner igual a $K\cdot p_A\,S\bar{\bar{u}}dt$, siendo K una constante que sólo depende de las dimensiones geométricas del canal AB.

En el mismo tiempo, pasa en sentido opuesto un número de moléculas $K\cdot p_B\,S\bar{\bar{u}}\cdot dt$. Por consiguiente, el número resultante de moléculas que han pasado por efusión desde A hacia B ($p_A > p_B$), en el tiempo t, es:

$$K\cdot S\cdot\bar{\bar{u}}\,(p_A - p_B)\cdot t.$$

En virtud de la [5], § 361, y de la [2], § 362, resulta que tal número de moléculas ocupa a la presión p_A y a la temperatura Θ el volumen:

$$v = K \cdot k \cdot \Theta \cdot \bar{\bar{u}} \cdot \frac{p_A - p_B}{p_A} \cdot t = K' \cdot \frac{p_A - p_B}{p_A} \cdot \Theta^{\frac{3}{2}} \cdot t. \qquad [1]$$

La velocidad de difusión, que se mide por el volumen v, aumenta con la temperatura proporcionalmente a $\Theta^{\frac{3}{2}}$.

En dos gases colocados en las mismas condiciones de temperatura y presión, y a través de la misma pared porosa, se tendrán efusiones del mismo número de moléculas, y, por lo tanto, del mismo volumen v en tiempos t_1 y t_2 que satisfagan a las igualdades:

$$K \cdot S \bar{\bar{u}}_1 (p_A - p_B)\, t_1 = K \cdot S \bar{\bar{u}}_2 (p_A - p_B)\, t_2.$$

Luego (§ 365, [1]):

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\bar{\bar{u}}_2}{\bar{\bar{u}}_1} = \frac{\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2}} = \sqrt{\frac{\delta_1}{\delta_2}}. \qquad [2]$$

Se encuentra de nuevo la ley de Bunsen relativa a la difusión (efusión) de los gases y quedando así explicadas las experiencias que de esta ley se deducen (§ 226).

Si la presión es la misma en A y en B, la difusión isotérmica no origina ningún fenómeno macroscópico porque en [1] resulta $v = 0$. Esto ocurre, en particular, en un gas homogéneo isotermo cuando, adelgazándose la pared porosa, se multiplican los poros, y la pared deja de existir. El gas está en reposo macroscópico aunque, en realidad, a través de una pared ideal cualquiera imaginada en él se tienen difusiones equivalentes del gas en ambos sentidos.

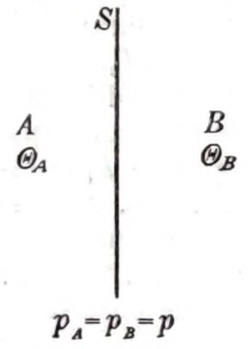


Fig. 695

La difusión isotérmica, cuando falta el tabique poroso, se hace evidente macróscopicamente en el caso de la figura 457, porque, a través de la superficie horizontal de separación inicial de los dos gases (aire, cloro), que es suficientemente nítida, se tienen dos corrientes de difusión de naturaleza diversa que ya no son equivalentes.

Imagínese ahora que A y B contengan un mismo gas, a presiones iguales ($p_A = p_B = p$), pero a temperaturas diferentes Θ_A, Θ_B (siendo, por ejemplo, $\Theta_A > \Theta_B$).

La superficie de separación S (fig. 695) entre el gas caliente y el frío constituye la pared ideal a través de la cual se considera la difusión:

Sea m la masa de una molécula; $\bar{\bar{u}}_A$, la media cuadrática de las velocidades moleculares en A; $\bar{\bar{u}}_B$, la correspondiente en B. Según § 362, es:

$$3k\Theta_A = m\bar{\bar{u}}_A^2; \qquad 3k\Theta_B = m\bar{\bar{u}}_B^2. \qquad [3]$$

Sea N el número de Avogadro; $v_0 = 22\,415$ cm³ el volumen de una molécula-gramo en condiciones normales, es decir, a la presión $p_0 = 1$ atm y a la temperatufa $\Theta_0 = \frac{1}{\alpha} = 273{,}15$ °K. El volumen v de la misma molécula-gramo en las condiciones p, Θ, por la ecuación de los gases perfectos, es:

$$v = v_0 \frac{p_0}{p} \frac{\Theta}{\Theta_0} = v_0 \frac{p_0}{p} \alpha\Theta;$$

de modo que la unidad de volumen de dicho gas contiene $n = \frac{N}{v}$ moléculas.

De acuerdo con lo dicho al final del § 361, imaginemos que existan en A (y en B) sólo un tercio de las moléculas reales, todas ellas con velocidad $\bar{\bar{u}}_A$ (o $\bar{\bar{u}}_B$) normal a S. En el sentido $A \longrightarrow B$, por unidad de tiempo y de superficie, pasarán todas las moléculas que existen en un cilindro de sección unitaria y longitud $\bar{\bar{u}}_A$, es decir, de volumen $\bar{\bar{u}}_B$. Su número es:

$$\frac{1}{3} n \bar{\bar{u}}_A = \frac{1}{3} \frac{N}{v_0} \frac{p}{p_0} \frac{1}{\alpha} \frac{\bar{\bar{u}}_A}{\Theta_A}$$

o bien, por la [3]:

$$\frac{1}{3} n \bar{\bar{u}}_A = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{N}{v_0} \frac{p}{p_0} \frac{\sqrt{k}}{\alpha} \cdot \frac{1}{\sqrt{m}\sqrt{\Theta_A}}.$$

Simultáneamente existe un flujo análogo en el sentido $B \longrightarrow A$; por lo tanto, por unidad de tiempo y de superficie S se tiene, en valor y signo, en el sentido $A \longrightarrow B$, un flujo macroscópico resultante de un número de moléculas:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{N}{v_0} \frac{p}{p_0} \frac{\sqrt{k}}{\alpha} \cdot \frac{1}{\sqrt{m}} \left(\frac{1}{\sqrt{\Theta_A}} - \frac{1}{\sqrt{\Theta_B}} \right) < 0 \quad \text{para} \quad \Theta_A > \Theta_B. \qquad [4]$$

El gas pasa macroscópicamente de la zona fría a la caliente. Si la pared S fuese un tabique poroso real, resultaría una diferencia de presión ($p_A > p_B$) entre las dos zonas A y B, de modo análogo a lo que ocurre en los experimentos de las figuras 460 y 461.

Este es el fenómeno macroscópico de la *termodifusión*.

Obsérvese que si, en vez de calcular el número de moléculas, se calculase el flujo consiguiente de la energía cinética, el resultado sería muy diferente: predomina el flujo de energía cinética desde A (caliente) hacia B (frío), lo cual constituye la interpretación molecular de la conducción del calor en el gas.

Supongamos ahora que en A y en B tenemos una mezcla homogénea constituída, para simplificar, por dos únicos gases inicialmente a la misma presión parcial, $p_1 = p_2$; sean m_1, m_2 las masas de las respectivas moléculas.

La termodifusión se realiza, según la [4], para ambos gases, y el gas de menor masa molecular, más ligero, presenta termodifusión más enérgica, en el sentido de que es mayor el número [4] de las moléculas del mismo que pasan hacia la zona caliente A. Esta zona se enriquece especialmente en moléculas ligeras.

Este fenómeno, observado ya hace tiempo (Enskog, 1911) y controlado experimentalmente (Dootson, 1917), ha conducido recientemente a resultados muy felices gracias a la acción simultánea de un efecto de convección (Clusius y Dickel, 1938 - 1941). Un tubo cilíndrico de algunos metros de longitud y unos centímetros de diámetro está lleno de la mezcla gaseosa; las paredes son mantenidas a la temperatura ambiente mientras a lo largo del eje del tubo, que es vertical, existe un hilo calentado por una corriente eléctrica; el componente más ligero se concentra junto al eje del tubo y, por convección, sube hacia arriba. Después de algunas horas de acción pueden sacarse por las extremidades del tubo los dos componentes de la mezcla.

En un tubo que sólo tiene 65 cm de longitud, con temperaturas de las paredes y del hilo de $\approx$ 25 y $\approx$ 325 °C, respectivamente, se obtiene la separación prácticamente completa de una mezcla de bromo y helio.

Esta operación, con tubos hasta de 20 m de longitud, continuada durante decenas de horas, ha permitido la separación en escala macroscópica (aunque sólo se trate de algunas decenas de cm^3 por día) de los isotopos gaseosos; por ejemplo, el cloro $^{35}_{17}Cl_2$ y el cloro $^{37}_{17}Cl_2$, el neón $^{20}_{10}Ne$ y el neón $^{22}_{10}Ne$, se han obtenido con una pureza del $\approx$ 99 %. Así, para éstos últimos, Clusius y Dickel incluso han alcanzado sucesivamente la pureza del 99,7 % para el $^{22}_{10}Ne$ y del 99,8 % para el $^{22}_{10}Ne$ (¡!).

El método puede también aplicarse a una mezcla de más de dos isotopos: en los dos extremos del tubo pueden separarse poco a poco, respectivamente, el isotopo más ligero y el más pesado. Así, del criptón, mezcla de seis isotopos por lo menos, han obtenido, por ejemplo, el $^{86}_{36}Kr$ con sólo 0,5 % de $^{84}_{36}Kr$ y $^{84}_{36}Kr$ con sólo 1 % de $^{86}_{36}Kr$ y 0,75 % de $^{83}_{36}Kr$. Pero la operación de termodifusión practicada sobre 10 litros de criptón, ha exigido un tubo de 28 m de longitud, un trabajo de 28 meses y un consumo de energía de 32 000 Kwh para mantener caliente el hilo axial.

La [4] da razón de estos resultados, esquemáticamente; sin embargo, en una teoría más completa de la difusión, deberían tenerse en cuenta las dimensiones de las moléculas y las acciones recíprocas que se ejercen entre ellas, por tratarse de factores esenciales en la realización de los choques moleculares.

Puesto que la termodifusión, ayudada por la convección, se ha revelado como un potente medio de separación de moléculas de diferente especie, ¿podrá obtenerse con ella la separación de moléculas de igual masa, pero de distinta estructura?

La respuesta es afirmativa: Wall y Holley han anunciado la separación del óxido de carbono (CO) y del etileno (C_2H_2), por ejemplo, que tienen igual masa molecular, mediante el método de Clusius - Dickel.

§ 369. Camino libre medio. La equiparación de las moléculas a masas puntiformes ha permitido las anteriores consideraciones esquemáticas. En una segunda aproximación de la teoría cinética se equiparan las moléculas a esferitas elásticas de radio r pequeñísimo, pero no nulo. En el § 373 veremos cómo queda entonces modificada la ecuación de estado de los gases.

Si todas las moléculas, menos una, se imaginasen como fijas en cierto instante en el sitio que ocupan, se calcularía fácilmente para la única molécula móvil el número de choques ν que experimentaría por término medio, en su movimiento, en cada unidad de tiempo.

En efecto, se tiene un choque cuando la distancia entre la molécula móvil y una molécula fija se reduce hasta el valor $2r$. Una esfera de radio $2r$, con su centro en coincidencia con el centro de una molécula (p. ej., el de la molécula móvil), constituye la *esfera de impenetrabilidad* para los efectos de los choques moleculares, en el sentido de que la distancia entre dos moléculas no puede ser menor que $2r$. El área $4\pi r^2$ del círculo máximo de esta esfera es la *sección eficaz* de de la molécula para los choques intermoleculares: r es el radio molecular cinético.

Ahora bien, llamando $\overline{u}$ a la velocidad media de la molécula móvil, el volumen cilíndrico descrito por la sección eficaz en un segundo es $4\pi \cdot r^2 \cdot \overline{u}$. Si llamamos v_1 al volumen ocupado por una molécula-gramo de gas, y N es el número de Avogadro, $\frac{N}{v_1}$ es el número de moléculas existentes en la unidad de volumen; el volumen cilíndrico $4\pi \cdot r^2 \overline{u}$ contiene, por tanto, $4\pi \cdot r^2 \overline{u} \cdot \frac{N}{v_1}$ moléculas, y éste es también el número de moléculas contra las que ha chocado en la unidad de tiempo la molécula móvil considerada.

Como las demás moléculas no están en reposo, el fenómeno se complica y se demuestra que hay que introducir, para tener en

cuenta su movimiento, un coeficiente igual a $\sqrt{2}$; por tanto, el número ν de choques por segundo es:

$$\nu = 4 \cdot \sqrt{2} \cdot \pi \frac{N}{v_1} r^2 \bar{u}. \qquad [1]$$

Se define el *camino libre medio* (MAXWELL) por la relación:

$$\lambda = \frac{\bar{u}}{\nu}. \qquad [2]$$

Luego se tiene:

$$\lambda = \frac{1}{4 \cdot \sqrt{2} \cdot \pi r^2} \frac{v_1}{N}. \qquad [3]$$

Debe imaginarse el camino libre medio como la media de los caminos recorridos por una molécula entre dos choques sucesivos.

Siendo Θ constante, v_1 es inversamente proporcional a la presión p del gas, por la ley de Boyle; por tanto, λ es inversamente proporcional a la presión.

Los choques mutuos entre moléculas garantizan el desorden cinético molecular; en condiciones normales, bastaría una pequeñísima fracción de segundo para que un grupo de moléculas que tuviesen velocidades ordenadas $\bar{u}$, al penetrar en un gas se encontrasen obligadas a participar también del movimiento térmico desordenado, así como un pequeño grupo de personas que se mueven ordenadamente, se vería pronto trastornado al penetrar en una multitud tumultuosa y desordenada.

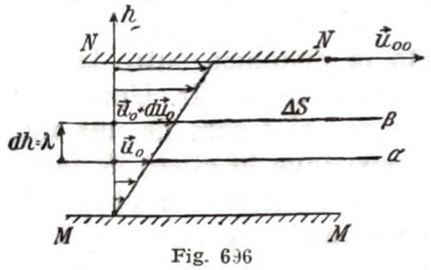


Fig. 696

§ 370. Rozamiento interno. Uno de los ejemplos más sencillos de la importancia del camino libre medio λ es la interpretación molecular del rozamiento interno de un gas.

Se tomarán de nuevo las condiciones experimentales del § 187, *b*] (figura 375). Sea *MM* (fig. 696) una pared plana en reposo, y *NN* otra pared plana y paralela a la anterior, que se mueve con velocidad constante $\vec{u}_{00}$. Entre *MM* y *NN* se encuentra el gas que se estudia. En régimen estacionario se indica en la figura el diagrama de las velocidades macroscópicas $\vec{u}_0$ del gas, en función de la distancia h al plano *MM*.

La experiencia demuestra la presencia de un rozamiento interno ΔA (§ 187, *b*]), que está relacionado con la superficie ΔS de las capas

deslizantes de gas, y con el coeficiente de rozamiento interno η por la expresión:

$$\Delta A = \eta \cdot \Delta S \cdot \frac{\partial u_0}{\partial h}. \qquad [1]$$

He aquí la explicación molecular de este rozamiento: Las moléculas de dos planos contiguos, como α y β, paralelos a *M M*, tienen diferentes velocidades (macroscópicamente); unas tienen la velocidad macroscópica u_0, y las otras tienen la velocidad

$$u_0 + du_0 = u_0 + \frac{\partial u_0}{\partial h} dh.$$

El intercambio de moléculas entre las capas α y β se realiza a consecuencia del movimeiento molecular desordenado, y proporciona a la capa β moléculas que, por término medio, son menos veloces en el sentido $\vec{u}_{00}$ que las preexistentes en β. La capa β resulta frenada por esta infiltración de moléculas «lentas». Inversamente, la capa α recibe, por infiltración, moléculas «rápidas» procedentes de la capa β, por lo que la capa α recibe un impulso que tiende a acelerarla. La acción retardatriz que α efectúa sobre β (a la que, por reacción, corresponde la acción aceleratriz de β sobre α) constituye la fuerza de rozamiento interno ΔA.

Pero esta acción se manifiesta cuando las partículas de α que han penetrado en β, chocan aquí con moléculas más rápidas por término medio y adquieren, a expensas de éstas, la cantidad de movimiento necesario para tener también la velocidad media macroscópica $u_0 + \frac{\partial u_0}{\partial h} \cdot dh$.

Por tanto, se debe suponer que la distancia necesaria entre α y β para el anterior razonamiento es igual al camino libre medio λ. Entonces se tiene:

$$du_0 = \frac{\partial u_0}{\partial h} \cdot dh = \frac{\partial u_0}{\partial h} \cdot \lambda.$$

Si hay en el gas $\frac{N}{v_1}$ moléculas por cm³, las que se mueven paralelamente al eje h son $\frac{1}{3}\frac{N}{v_1}$ (véase § 361, final), y éstas tienen la velocidad media $\bar{u}$ debida al movimiento molecular desordenado.

Por consiguiente, en un segundo $\frac{1}{3}\frac{N}{v_1} \cdot u \cdot \Delta S$ moléculas, cuya masa es $\frac{1}{3}\frac{N}{v_1} \cdot \bar{u} \cdot m \cdot \Delta S$, pasan a través de la superficie ΔS. Estas moléculas, que han venido a formar parte de la capa β, experimentan un

aumento de cantidad de movimiento (macroscópica) dado por:

$$\frac{1}{3}\frac{N}{v_1}\bar{u}\cdot\Delta S\cdot m\cdot du_0 = \frac{1}{3}\frac{N}{v_1}\cdot\bar{u}\cdot\Delta S\cdot m\cdot\frac{\partial u_0}{\partial h}\cdot\lambda.$$

El impulso $F\cdot 1$ que, en cada segundo, debe recibir la capa β de la capa superpuesta, y ésta de la sucesiva, y, por fin, NN del exterior, en las condiciones de régimen estacionario, es igual a dicho aumento de cantidad de movimiento:

$$F\cdot 1 = \frac{1}{3}\frac{N}{v_1}\bar{u}\cdot\Delta S\cdot m\cdot\frac{\partial u_0}{\partial h}\cdot\lambda.$$

Por lo tanto, F es la fuerza, igual y opuesta al rozamiento interno ΔA, que debe ser aplicada a NN, desde el exterior, para mantener las condiciones de régimen estacionario con velocidad constante $\vec{v}_{00}$ de NN.

Luego:

$$\eta\cdot\Delta S\cdot\frac{\partial u_0}{\partial h} = \frac{1}{3}\frac{N}{v_1}\bar{u}\cdot\Delta S\cdot m\frac{\partial u_0}{\partial h}\cdot\lambda,$$

o sea:

$$\eta = \frac{1}{3}\frac{N}{v_1}\bar{u}\cdot m\cdot\lambda. \qquad [2]$$

Un cálculo más exacto sustituiría $\frac{1}{3}$ por otro coeficiente numérico, por lo demás no muy diferente; con el grado de aproximación de nuestro razonamiento se podría confundir $\bar{u}$ con $\bar{\bar{u}}$.

En la [2], $\frac{Nm}{v_1}$ es la masa contenida en la unidad de volumen, es decir, la masa específica μ. Por tanto, se tiene también:

$$\eta = \frac{1}{3}\mu\cdot\lambda\cdot\bar{u}. \qquad [3]$$

Por consiguiente, el coeficiente de rozamiento interno η resulta:

proporcional a $\sqrt{\Theta}$, porque así lo es $\bar{\bar{u}}$ (§ 362, [2]), y, por tanto, $\bar{u}$ (§ 366, [15]);

independiente de la presión p, porque, por la [3], § 369, el producto $\frac{N}{v_1}\cdot\lambda$ viene dado por:

$$\frac{N}{v_1}\lambda = \frac{1}{4\sqrt{2}\cdot\pi r^2},$$

que es independiente de la presión.

Estos dos resultados, deducidos teóricamente (MAXWELL), parecieron al principio paradójicos, especialmente el segundo. Sin embargo, éste ha sido confirmado por la experiencia hasta presiones de pocos mm_{Hg}.

Naturalmente, el resultado sólo es paradójico en apariencia: el arrastre entre una capa y la sucesiva en el experimento fundamental de rozamiento interno (fig. 696) depende del número de moléculas que intercambian las dos capas gaseosas contiguas, a igualdad de tiempo y de superficie ΔS. Manteniendo constante la temperatura, al rebajar la presión del gas disminuye este número de moléculas por haber disminuído el número de moléculas presentes en el gas enrarecido, pero aumenta en la misma proporción por haber aumentado la posibilidad del intercambio, es decir, por haberse incrementado el camino libre medio de las moléculas: las moléculas que participan en el intercambio a través de una superficie plana determinada «pueden venir de más lejos».

Cuando el camino libre medio alcanza el valor de la distancia h entre las dos placas MM y NN de la figura 696, cesa la compensación entre los dos efectos, y el rozamiento interno tiende a disminuir proporcionalmente a la presión.

§ 371. Determinación de magnitudes moleculares. Se ha visto ya en el § 365 cómo se llega a la determinación de los valores de $\bar{\bar{u}}$. Las [14] y [15], § 366, dan entonces los valores de u y de $\bar{u}$.

La teoría cinética conduce también sucesivamente al cálculo de los otros valores moleculares.

De la [3], § 370, como son conocidos μ, $\bar{u}$ y η, se deduce λ.

He aquí algunos valores aceptados actualmente para λ a 0 °C y a la presión normal:

en el aire	$\lambda = 608\cdot10^{-8}$	cm.
en el O_2	$= 647\cdot10^{-8}$	
en el N_2	$= 599\cdot10^{-8}$	
en el H_2	$= 1123\cdot10^{-8}$	
en el He	$= 1798\cdot10^{-8}$	

De modo que el camino libre medio es del orden de 10^{-5} cm. En el § 368 ya se han indicado los valores que pueden tomarse para los gases muy enrarecidos.

Conocido λ, la [3], § 369, da:

$$Nr^2 = \frac{v_1}{4\cdot\sqrt{2}\cdot\pi\lambda}. \qquad [1]$$

Por otro lado, el volumen de las moléculas esféricas que componen una molécula-gramo se supone, en primera aproximación, igual

a $\frac{4}{3}\pi r^3 \cdot N$ y se identifica con el volumen $v_{líq}$ del líquido que puede obtenerse por licuefacción de dicha molécula-gramo. Por consiguiente, se tiene:

$$Nr^3 = \frac{3}{4\pi} v_{líq}. \qquad [2]$$

Las [1] y [2] son dos ecuaciones de las que se obtienen N y r. El valor del número de Avogadro resulta próximo a $60 \cdot 10^{22}$. Los valores de r son del orden de 10^{-8} cm.

A continuación se dan, como ejemplo, algunos valores aceptados para el radio molecular cinético:

en el O_2	$r = 2{,}9 \cdot 10^{-8}$	cm.
en el N_2	$= 3{,}1 \cdot 10^{-8}$	
en el H_2	$= 2{,}3 \cdot 10^{-8}$	
en el He	$= 1{,}9 \cdot 10^{-8}$	

§ 372. Extensión de la teoría cinética. Incluso bajo la precedente forma esquemática, la teoría cinética puede también explicar la propagación del calor, la de las ondas elásticas y, en general, todos los fenómenos macroscópicos cuya interpretación podía obtenerse suponiendo que la materia fuese de estructura continua. Aplicada a las soluciones diluídas, la teoría cinética logra dar cuenta de las leyes que regulan sus fenómenos; aplicada a los electrones libres de los metales, explica también, por lo menos en una primera aproximación, los fenómenos fundamentales de conducción eléctrica y calorífica en los metales, y, en particular, justifica la existencia de una relación muy estrecha entre estas dos conducciones (*ley de Wiedemann y Franz*; v. tomo II).

La teoría cinética de los gases puede completarse y permite explicar las propiedades de los gases reales y de los líquidos, cuando se tienen en cuenta el volumen de las moléculas y la cohesión. También se ha llegado a extensiones satisfactorias para aplicarla incluso a los sólidos.

§ 373. Teoría cinética y gases reales. Las consideraciones precedentes y, por tanto, la ecuación de estado [2], § 263, no son aplicables a los gases reales por dos motivos:

1.º El volumen de las moléculas de un gas no es despreciable. Cuando p tiende a ∞, en un gas real, el volumen v_1 de una molécula-gramo del gas no tiende a 0, sino que toma cierto valor límite b, llamado *covolumen*, que se supone relacionado con el *volumen total de las moléculas* del gas en estudio; en el hidrógeno, el helio, el nitrógeno y el oxígeno, b es del orden de una milésima del volumen del gas en condiciones normales.

La ley de BOYLE resultaría corregida de este modo:

$$p \cdot (v - n \cdot b) = \text{const.}$$

2.º La presión efectiva del gas no es la p que se mide con el manómetro. Este mide (§ 361) la variación de cantidad de movimiento de las moléculas que chocan durante la unidad de tiempo con la pared sensible del manómetro. Pero las moléculas que chocan, son las que están para salir del gas, y son retardadas en su movimiento por la atracción de sus compañeras, es decir, por la cohesión. La presión verdadera del gas p' es mayor que la presión p medible con el manómetro. Ahora bien, $p' - p$ depende de la acción que, sobre cada elemento de volumen del gas, ejerce por cohesión cada uno de los demás elementos de volumen. Y es lógico admitir que esta acción de cohesión es proporcional a las masas, es decir, a los números de moléculas contenidas en cada uno de aquellos volúmenes. Ahora bien, si el volumen $\frac{v}{n}$ de una molécula-gramo del gas se duplica, dichos elementos de volumen encierran cada uno un número de moléculas mitad, y la acción mutua se reduce a la cuarta parte. Luego se puede suponer que es

$$p' - p = a : \left(\frac{v}{n}\right)^2 = \frac{n^2 \cdot a}{v^2},$$

siendo a una constante conveniente, relacionada con la *cohesión* del gas que se estudia.

La razón $\frac{p' - p}{p}$, en los gases citados anteriormente y en condiciones normales, es también del orden de 0,001.

VAN DER WAALS supone que la ecuación [2], § 363, es también válida para los gases reales, con tal que el volumen v se substituya por $v - n \cdot b$ y la presión p venga reemplazada por la presión verdadera p'.

La ecuación de estado de los gases reales toma entonces la forma:

$$\left(p + \frac{n^2 \cdot a}{v^2}\right)(v - nb) = nR\Theta. \qquad [1]$$

El término $\frac{n^2 \cdot a}{v^2}$ tiene el significado de presión interna existente en el flúido a causa de la cohesión. La [1] es también la ecuación de estado de un flúido, que puede ser incluso líquido; luego se supone que es posible identificar $\frac{n^2 \cdot a}{v^2}$ con la presión interna K considerada en el § 218 y relacionada con la tensión superficial de los

líquidos. Determinada experimentalmente la constante a de la ecuación de van·der Waals (§ 311), se puede, pues, calcular K:

$$K = \frac{n^2 \cdot a}{v^2} = \frac{a}{v_1^2}. \qquad [2]$$

Consideremos una molécula-gramo del flúido, midamos las presiones en atmósferas y tomemos como unidad de medida de los volúmenes el de una molécula-gramo de gas perfecto en condiciones narmales (22 415 cm³); los valores numéricos de a son entonces los indicados en el [5], § 311, para algunos de los flúidos más comunes.

Por ejemplo, en el agua líquida, con dichas unidades de medidas se tiene:

$$\frac{v}{n} = v_1 = \frac{18}{22\,415}, \quad a = 0{,}011;$$

por lo tanto, la presión interna del agua líquida es:

$$K = \frac{a}{v_1^2} \approx 17\,000 \text{ atm} \approx 170\,000 \frac{\text{newton}}{\text{cm}^2} \text{ (¡!)}$$

En los gases reales la expansión adiabática de Joule (sin trabajo externo) debe efectuarse siempre con un enfriamiento que es índice del aumento de energía de posición debido a la cohesión, se produce al alejarse unas moléculas de otras. Este aumento de energía en la expansión adiabática se efectúa a expensas de la energía cinética molecular, de donde resulta el enfriamiento observado.

El experimento adiabático de Joule-Thomson (§ 352) produce un efecto térmico, que es la resultante de dos acciones:

a] el aumento de energía de posición entre las moléculas durante la expansión, que tiende siempre a producir un enfriamiento;

b] el pequeño trabajo externo efectuado por el gas, que no obedece exactamente a la ley de Boyle. Este trabajo puede ser positivo o negativo.

Estas dos acciones pueden ser concordantes (trabajo externo positivo y gas más compresible de lo que requiere la ley de Boyle); entonces, la expansión adiabática de Joule-Thomson se efectúa ciertamente con enfriamiento. Si las dos acciones están en desacuerdo, la expansión va acompañada de enfriamiento o de calentamiento, según que prevalezca una u otra acción.

§ 374. Teoría cinética de los sólidos y calores específicos. En los §§ 182 y 183 ya hemos indicado las ideas que se tienen actualmente sobre la constitución de los cristales: se supone que en los sólidos los átomos tampoco están quietos en sus posiciones de equilibrio (p. ej., fig. 359), sino que oscilan alrededor de ellas con frecuencias que son características para cada átomo o grupo atómico del cristal.

Cada átomo tiene tres grados de libertad correspondientes a vibraciones independientes según tres ejes cartesianos, perpendiculares entre sí.

Según el teorema de la equipartición, el átomo vibrante tiene la energía cinética media $3\,\frac{1}{2}\,k\Theta$, pero, al contrario de lo que ocurre en los gases monoatómicos (§ 367), ahora el átomo tiene energía cinética y energía potencial; como en un péndulo (§ 146, [4]), la energía cinética media (en el tiempo) y la energía potencial media (en el tiempo) son iguales. Por consiguiente, la energía interna de un átomo-gramo de un cuerpo simple, que contiene N átomos es:

$$U = N \cdot 6\,\frac{1}{2}\,k\Theta,$$

y, a volumen constante, se tiene aún:

$$(dQ)_{v\,=\,\text{conrt.}} = dU = m_{at} \cdot c_v \cdot d\Theta),$$

en donde m_{at} es la masa atómica. Luego el calor atómico $m_{at} \cdot c_v$ a volumen constante es:

$$m_{at} \cdot c_v = \frac{dU}{d\Theta} = 3 \cdot Nk = 3 \cdot R = 5{,}96 \frac{\text{cal}}{°\text{C} \cdot \text{át-g}}. \qquad [1]$$

Hemos obtenido la ley de DULONG y PETIT (§ 319, a]).

Este debería ser también el calor atómico medio de un compuesto (§ 319, *c*)] si la equipartición explicada fuese válida para todos los átomos presentes, independientemente de su naturaleza química.

Pero sabemos (§ 319, *c*]) que c_v es función de la temperatura y que tiende a cero con la temperatura absoluta. Las consideraciones anteriores, como las del § 367, dan calores específicos constantes respecto a la temperatura.

Ha ido aumentando cada vez más el número de fenómenos atómico-moleculares a los que no han resultado aplicables las concepciones clásicas de la mecánica, por un lado, y del electromagnetismo, por otro, lo que ha llevado a una revisión general de los principios que gobiernan estos fenómenos.

El punto de partida de esta revisión es la *teoría de los cuantos* de energía, propuesta por PLANCK para explicar las leyes experimentales relativas a la emisión de energía radiante por los cuerpos en virtud de su temperatura *(emisión puramente térmica)*.

La parte substancial de esta teoría es la hipótesis de que la energía radiante (electromagnética) que se revela en el espectroscopio

como dotada de longitud de onda λ y, por tanto, de frecuencia $\nu = \frac{v}{\lambda}$ (véase [5] § 259), está constituída por porciones indivisibles (mientras no cambia ν), llamadas *cuantos*, cuya magnitud es proporcional a la frecuencia de vibración ν:

$$\mathcal{E} = h\nu, \qquad [2]$$

siendo

$$h = 6{,}62 \cdot 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{seg} \qquad [3]$$

la *constante de Planck*.

Puede decirse que esta concepción granular de la energía electromagnética constituye en la Física de los últimos treinta años una columna miliaria comparable a la fijada, casi simultáneamente, al comprobar la estructura granular de la electricidad, y a la establecida un siglo antes, al reconocer la estructura granular de la materia.

En una de sus formas primitivas, esta teoría ya fué aplicada con éxito por EINSTEIN al problema del calor específico de los sólidos; Einstein obtuvo, efectivamente, una forma de la curva $c_v = c_v\,(\Theta)$ en concordancia con los resultados experimentales (fig. 660).

La idea de que los edificios eléctricos (§ 170) que constituyen los sistemas atómico - moleculares, solamente pueden tener configuraciones de equilibrio subordinadas a valores discretos de la energía del sistema, los cuales dependen de h, ha conducido después a la *mecánica ondulatoria* (SCHRÖDINGER), que debe sustituir a la mecánica clásica en la interpretación de los fenómenos moleculares y atómicos.

§ 375. El segundo principio de la termodinámica y la teoría cinética. Limitémonos al caso de un gas perfecto. La energía interna U es simplemente la suma de las energías cinéticas moleculares (§ 367). Las energías caloríficas, es decir, las cantidades de calor que pueden obtenerse del gas al enfriarlo (a volumen constante), son el equivalente de la energía interna perdida, y, por tanto, son el equivalente de la energía cinética molecular.

Si la energía calorífica es energía cinética de las moléculas, ¿por qué es de inferior calidad (§ 339, final) que la energía cinética en lo que respecta a su transformabilidad en trabajo?

Esto depende de que la energía calorífica es una energía cinética *desordenada*. Y en la Naturaleza sucede que es fácil desordenar (crear calor a expensas de energía cinética, p. ej. con el rozamiento) y no es fácil ordenar (crear energía cinética a expensas de calor). No es fácil, pero es posible.

La teoría cinética y el segundo principio son, en rigor, incompatibles, porque la primera, por ejemplo, supone reversibles los fenómenos 2.º y 3.º del § 294.

1.º Supongamos que en A_1 y en A_2 (fig. 697) haya un poco de gas extraordinariamente enrarecido: solamente dos moléculas, una en A_1 y otra en A_2. Levántese la pared P. Podrá suceder que las dos moléculas, que chocan y rebotan contra las paredes o entre sí, se encuentren, en un momento dado, los dos en A_1. Bájese entonces P. Se ha hecho reversible la expansión de un gas sin trabajo externo: el gas se ha colocado en un recipiente dejando el otro vacío.

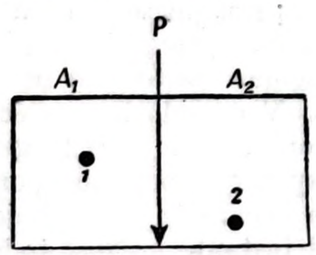


Fig. 697

2.º En A_1 (fig. 698) suponemos que hay dos moléculas, y otras dos en A_2. Las energías cinéticas iniciales sean 20 y 5, por ejemplo (en unidades arbitrarias), tanto en uno como en el otro compartimiento. Los dos gases tienen la misma energía cinética media, y se hallan, por tanto, a la misma temperatura.

Levántese la pared P. Después de los choques mutuos queda inalterada la energía total. Pero no así la de cada molécula. Espérese el momento en que se hallen en A_1 las dos moléculas más rápidas, lo que es posible si se aprovecha el instante oportuno. Entonces bájese P.

El gas de A_1 está ahora más «caliente» que el de A_2. Se ha obtenido paso espontáneo de calor desde un cuerpo más frío a un cuerpo más caliente, habiendo caído en defecto el postulado de Clausius.

También el movimiento browniano contradice el segundo principio de la Termodinámica. En este fenómeno se tienen partículas empujadas por las moléculas que las rodean, y algunas son lanzadas hacia arriba. Único fenómeno acaecido: levantamiento de un peso (la partícula); por el teorema de la conservación de la energía, esto es equivalente a energía calorífica que es necesario dar al líquido desde el exterior para que se mantenga isotermo. Al final del levantamiento de la partícula, el líquido que la rodea, suministrado convenientemente de energía calorífica desde el exterior, se encuentra en las mismas condiciones iniciales. He aquí una máquina capaz, al final de un ciclo isotermo, de haber absorbido calor y levantado un peso. Esto contradice el segundo principio de la termodinámica (§ 345, *c*, y § 346, *d*]).

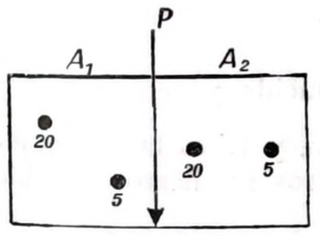


Fig. 698

En todos estos casos es falso el segundo principio. Para mayor sencillez, limitémonos al primer ejemplo.

Ante todo, los conceptos de temperatura y de calor en un cuerpo caen en defecto cuando el sistema deja de estar constituído por muchas moléculas. Una molécula en movimiento tiene energía cinética, pero no calor. Para *una* molécula no sólo deja de tener validez el segundo principio, sino que no tienen significado la temperatura y el calor.

Y cuando las moléculas contenidas en A_1 y en A_2 (fig. 697) no son dos, sino sólo algunas decenas, ¿cuánto habrá que esperar para que suceda que todas las moléculas, en su movimiento desordenado, se reúnan en A_1?

¡Imagínese que en un recinto que contiene aire extraordinariamente enrarecido con las mejores máquinas neumáticas hay siempre algunos centenares de millones de moléculas por centímetro cúbico!

Y cuando las moléculas que hay en A_1 y A_2 se cuentan por millones, como sucede generalmente, todavía es verdad que se puede esperar la ocasión oportuna para que sea reversible el fenómeno de la expansión sin trabajo externo; pero la ocasión oportuna (es decir, el instante en que todas las moléculas se hallen en A_1) hace falta esperarla algo así como una vez cada 10^{30} años.....

El segundo principio no es una ley absoluta, pero alcanza el valor de ley extraordinariamente probable.

La ley del incremento de la entropía (§ 347) debería enunciarse del siguiente modo: en los fenómenos adiabáticos irreversibles es extraordinariamente probable que aumente la entropía; un cuerpo, un gas por ejemplo, aislado térmicamente y mantenido a volumen constante, tomará con extrema probabilidad como estado de equilibrio aquel en que sea máxima su entropía (§ 349, 1.º).

Pero en tal caso, el gas toma en definitiva el estado más probable, que es también el más desordenado cinéticamente. Se entrevé de este modo que han de estar en relación muy estrecha la entropía y la probabilidad.

Se tiene, según BOLTZMANN:

$$S = k \cdot \log W = \text{const.},$$

siendo $k = 1{,}38 \cdot 10^{-16} \frac{\text{erg}}{^{o}\text{C}}$ la constante introducida ya en §§ 362 y 363; S es la entropía en el estado considerado, y W es la probabilidad de dicho estado, que, desde luego, nosotros no hemos definido suficientemente.

CAPÍTULO V

Producción de vacíos elevados

§ 376. Bombas neumáticas. Nos limitaremos a describir las bombas neumáticas más interesantes, haciendo resaltar especialmente las modernas *bombas moleculares*, fruto utilísimo de consideraciones basadas en la teoría cinética.

La técnica moderna de construcción de lámparas eléctricas, de tubos termoelectrónicos y de tubos para rayos X, no hubiese podido alcanzar el grado de perfección actual sin estos potentísimos medios de producción de vacío.

a] **Bomba de aceite con émbolo.** Las mejores bombas de émbolo son las de aceite, de GERIK (fig. 699), en las que un aceite, de presión de vapor bajísima, cubre el émbolo, logrando así eliminar casi completamente el espacio perjudicial.

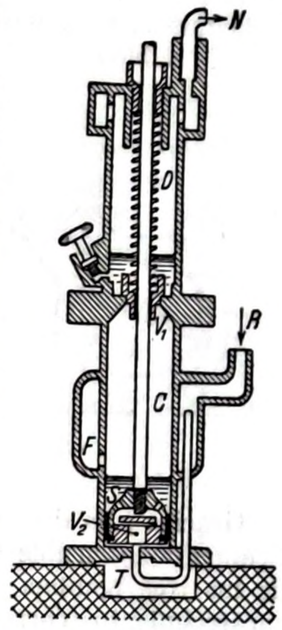


Fig. 699

R comunica con el recipiente en el que se ha de practicar el vacío; el aire del mismo llega a la cámara C a través del paso F. El émbolo S, recubierto de una capa de aceite, es levantado de manera que en C queda aprisionada una porción de aire; cuando el émbolo está en lo más alto de su carrera, la válvula V_1 es levantada, y el aire es expulsado hacia D y luego hacia N. Cuando el émbolo baja, la cámara de debajo está ocupada por otro aire que ha llegado de R, a través del tubo T, mientras que entre V_1 y S se produce el vacío. La bajada del émbolo requeriría un esfuerzo notable si en R el aire estuviese todavía a una presión casi normal; pero, en tal caso, el aire pasa de la cámara inferior hasta C a través de la válvula V_2 hasta que el agujero F no está él mismo en comunicación con C. La comunicación T sirve también para evitar que al comienzo de la elevación de S, al formarse el vacío entre S y el fondo del cilindro, no se requiera un esfuerzo excesivo para el levantamiento. Si en R la presión está ya muy reducida (por ej., 10 mm_{Hg}), V_2 cesa de funcionar y T tampoco es útil.

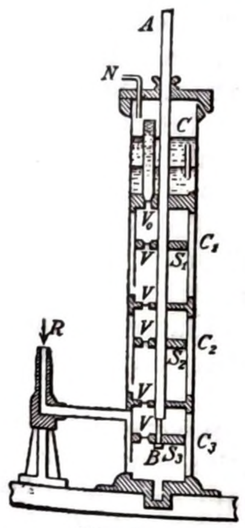


Fig. 700

La bomba de aceite con émbolo, de GAEDE, está constituída por tres bombas superpuestas de este tipo, cada una de las cuales produce un vacío preparatorio para la sucesiva; por consiguiente, se trata de tres bombas *en serie*. Está representada esquemáticamente en la figura 700.

La barra AB gobierna simultáneamente el movimiento de los tres émbolos S_1, S_2 y S_3.

El aire es aspirado por R, sucesivamente a través de las válvulas V, V, ... en las tres cámaras C_3, C_2 y C_1 de la bomba, hasta ser expulsado a través de la válvula V_0 y salir por N. En la cámara superior C hay una capa de aceite que proporciona continuamente el aceite necesario para asegurar la retención de aire. En C se decanta el aceite eventualmente mezclado con gotitas de agua, que es expulsado junto con el aire por la válvula V_0.

En efecto, el aceite, al aspirar gas húmedo, retiene en emulsión gotitas de agua, las cuales, evaporándose y condensándose alternativamente durante el ciclo de la bomba, llenan de vapor las cámaras de la misma que, para funcionar bien, deberían quedar vacías durante la subida de los émbolos.

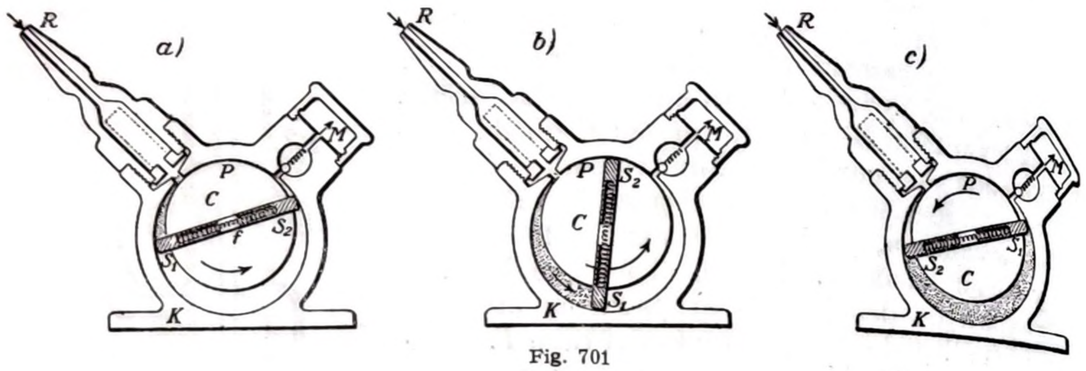


Fig. 701

Gracias a la decantación del aceite, la bomba de Gaede es prácticamente insensible al vapor de agua y, con la acción combinada de las tres bombas en serie, se alcanza, según el constructor, un enrarecimiento correspondiente a una presión residual de sólo 0,000 05 mm_{Hg}. Se dice, abreviadamente, que la bomba es capaz de «efectuar un vacío» de 0,000 05 mm_{Hg}.

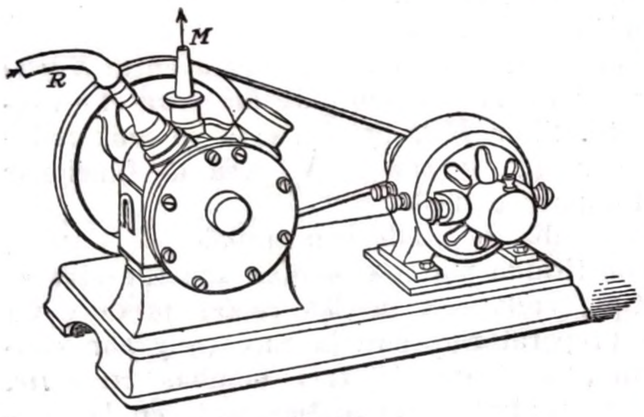


Fig. 702

b] **Bombas de aceite rotativas, llamadas de cápsula.** Se comprende su funcionamiento mediante las figuras 701, *a*), *b*) y *c*). En una cápsula cilíndrica *K*, gira otro cilindro *C* en posición excéntrica, de modo que permanece siempre en contacto con la cápsula o tambor a lo largo de un pequeño trecho en *P*.

El cilindro *C* tiene una canal en la que pueden moverse dos paletas S_1 y S_2, Un muelle *f*, comprimido entre ellas, las empuja continuamente contra la pared de la cápsula y las mantiene aplicadas contra dicha pared. Girando el cilindro *C* en el sentido de la flecha, el aire es aspirado por *R* y expulsado por *M*.

Esta bomba puede servir como bomba aspirante, por *R*, pudiendo efectuar rápidamente un vacío próximo a 0,001 mm_{Hg}, y como bomba impelente en *M*, hasta un par de atmósferas. La figura 702

representa la vista de conjunto de una bomba de cápsula de Gaede con su motor correspondiente.

c] **Bomba rotativa de mercurio.** Esta bomba también es de Gaede. Las antiguas bombas de mercurio, de vacío barométrico o de descenso, embarazosas y frágiles, no han tenido nunca éxito. La bomba de Gaede es una bomba *de vacío barométrico* que elimina estos inconvenientes, pero funciona solamente cuando una *bomba preparatoria*, como por ejemplo un aspirador de Bunsen o, todavía mejor, una bomba de aceite, haya producido en la bomba de mercurio y en el aparato a vaciar un enrarecimiento preliminar, de una presión no superior a 2 cm_{Hg}.

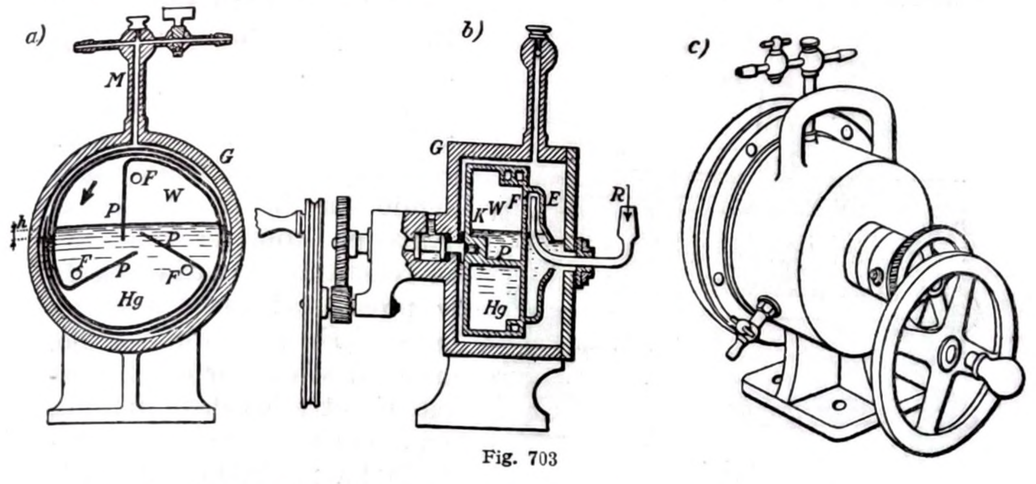


Fig. 703

En la figura 703 se representan dos secciones verticales de la bomba y una vista del conjunto.

Un tambor *K* de porcelana o de hierro esmaltado, subdividido en tres compartimientos mediante las paredes *P*, se halla encerrado en un recipiente metálico *G*. La comunicación entre los compartimientos está interrumpida por mercurio, que llena más de la mitad del tambor. En una primera fase del movimiento de rotación del tambor en el sentido de la flecha, aumenta el espacio *W* encerrado entre una de las paredes y el mercurio, y, estando en comunicación en *R* con el recipiente a vaciar por medio del agujero *F*, parte del gas de *R* se expansiona en el espacio *W*. Prosiguiendo la rotación, el orificio *F* se sumerge en el mercurio, interrumpiendo así la comunicación con el recipiente a vaciar, y el aire es enviado al espacio comprendido entre el tambor y la envolvente *G*, de donde es aspirado a través de *M* por la bomba preparatoria.

La bomba de Gaede se puede suponer equivalente a tres bombas de mercurio de vacío barométrico, sin espacio perjudicial, y puestas *en paralelo*.

Cada cámara barométrica *W* necesita, para formarse, no los 80 cm de costumbre, sino sólo $h = 2$ cm (aproximadamente) de desnivel barométrico, gracias a la acción de la bomba preparatoria.

Con esta bomba rotativa de mercurio, en recinto bien limpio y seco, se obtiene un vacío de 0,000 1 mm_{Hg}.

La bomba de CACCIARI es una modificación de la Gaede, y en ella, las tres bombas de vacío barométrico, de volumen ordenadamente creciente, están colocadas *en serie;* así es posible alcanzar un enrarecimiento de 0,000 01 mm_{Hg}.

d] **Bomba molecular rotativa.** Aunque inventada por Gaede, describimos la de HOLWECK, basada en el mismo principio y perfeccionada en diversos detalles de carácter esencialmente constructivo.

Un cilindro *A* (fig. 704) gira rapidísimamente (4 000 vueltas por minuto, p. ej.) dentro de otro cilindro *B*; las paredes de *A* y de *B* no se tocan, pero se encuentran muy próximas, a menos de 0,1 mm.

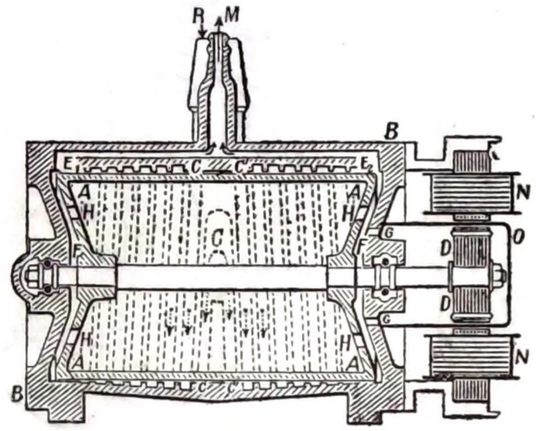


Fig. 704

En la pared interior de *B* se ha grabado un surco helicoidal que empieza muy profundo en *C*, en donde se halla en comunicación con el recipiente a vaciar en *R*, y prosigue hacia los extremos E_1E_2 del cilindro fijo, hasta desembocar en el espacio *F* entre los dos cilindros, en donde una bomba preparatoria ha producido un vacío de $\approx$ 1 mm_{Hg}.

Dicho par de conductos helicoidales CE_1 y CE_2 pone en comunicación el recipiente a vaciar en *R* con la bomba preparatoria en *M*. El cilindro *A* se hace girar mediante un motor de campo magnético giratorio *NNDD*, el cual tiene la propiedad de que el rotor *DD* no necesita hilos o contactos de comunicación con el exterior. Un casquete de aluminio *O*, capaz de «sostener el vacío», permite, por otro lado, que el estator *NN* ejerza su acción motriz sobre el rotor *DD*. Así, sin ningún contacto mecánico con el exterior, el cilindro *A* es puesto en rotación y está completamente sumergido en el vacío preparatorio.

Esquemáticamente, la bomba puede reducirse a lo que se ha dibujado en la figura 705. *M* comunica con la bomba preparatoria, y *R*, con el recipiente a vaciar; el conducto *CE*, de altura *h* gradualmente decreciente, pone en comunicación *R* con *M*.

Las moléculas del gas en *R*, difundiéndose hasta *C*, vienen a chocar contra el cilindro giratorio y reciben una componente de velocidad preponderante en dirección concordante con el sentido de rotación del cilindro; el gas es empujado molécula a molécula desde *R* hacia *M*; entre *R* y *M* se establece una diferencia de presión que, entre anchos límites, se demuestra que es independiente de las presiones

en *R* y en *M*. Si, por ejemplo, en *M* se tiene un vacío preparatorio de 2 mm_{Hg} y la velocidad de rotación de *A* es de unas 4000 vueltas por minuto, la diferencia de presión que puede obtenerse entre *R* y *M* rebasa 2 mm_{Hg}: todas las moléculas que llegan a *C* desde *R* son empujadas hacia *M*.

Realmente, ninguna de las moléculas que se difunden de *M* hacia *E*, que son las más numerosas, logra recorrer hacia atrás el conducto *EC* y volver a *R*.

Sucede esto cuando prácticamente no hay choques entre moléculas dentro del conducto *CE*. Estos choques desordenarían nuevamente el movimiento molecular que, a causa de los choques contra las paredes de *A*, tiende a ordenarse y a convertirse en un movimiento desde *C* hacia *E*, en el mismo sentido para todas las moléculas. Si se produce este desorden, es posible que las moléculas vuelvan hacia *R* por difusión.

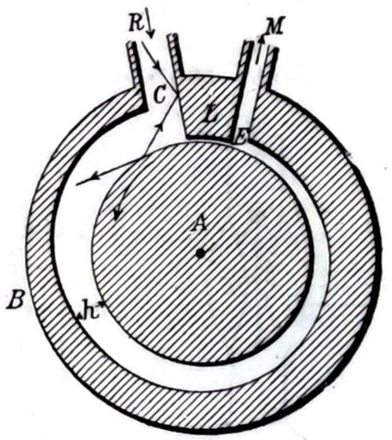


Fig. 705

Puede decirse también que la bomba funciona cuando *todas* las moléculas están sometidas en el conducto *CE* a la acción del cilindro giratorio. Esto sucede cuando el camino libre medio es mayor que *h*. De aquí la necesidad del vacío preparatorio, quedando explicado por qué, aumentando la presión del gas desde *C* hacia *E*, el espesor *h* del conducto disminuye desde *C* hacia *E*.

Esta bomba arrastra gases y vapores con gran rapidez y no existe ningún límite teórico para el enrarecimiento que pueda alcanzarse, el cual está sólo limitado por los vapores desprendidos por las substancias volátiles presentes en el recipiente a vaciar, o por los gases adheridos a las paredes de este recipiente, que sólo se desprenden lentamente y con dificultad.

Por todo ello, únicamente se obtiene un buen vacío cuando está todo perfectamente limpio, cuando se emplean para las juntas y llaves mástiques que no se evaporan y cuando se *desgasan* (§ 377) las paredes del recipiente a vaciar y de los objetos que el mismo contiene (electrodos, hilos, placas, etc.).

La rapidez de funcionamiento es tan grande, que sólo puede aprovecharse por completo cuando son cortas y anchas (20 $\div$ 25 mm de diámetro) las canalizaciones que comunican el recipiente que se vacía con la bomba; de otro modo, el tiempo que emplea el gas en difundirse desde el recipiente a la bomba es mayor que el tiempo que necesita la bomba para arrastrar fuera el gas que llega. (¡!)

Pero la necesidad de alcanzar grandes velocidades de rotación hace muy delicado el funcionamiento de la bomba rotativa molecular.

e] **Bombas de vapor de mercurio.** También son debidas a GAEDE, aunque ahora se construyen en formas variadísimas.

Sea un chorro de vapor de mercurio en el sentido AB (fig. 706) canalizado en un conducto que presenta una hendidura circular F de comunicación con el conducto R, que va al recipiente que se vacía. Gracias a una bomba preparatoria que actúa en M, ya es notable el enrarecimiento en AB: el chorro de vapor puede obtenerse con algunos cm³ de mercurio en C, los cuales, calentados a poco más de 100 °C, experimentan una rápida pero tranquila evaporación, en lugar de la irregular y violenta ebullición que se obtendría a presiones más elevadas.

Con un vacío preparatorio del orden de 20 mm_{Hg} y con un adelgazamiento conveniente del conducto AB en correspondencia con la rendija F [fig. 706, *a*)], el aparato es una *bomba de chorro de vapor de mercurio*, cuyo funcionamiento es parecido al del aspirador de Bunsen (figs. 475 y 476). El aire de R puede expansionarse en F, en donde, penetrando en el vapor, produce en él un movimiento turbulento, y cada remolino lleva consigo hacia B un poco de gas de R. Se obtiene en R un vacío de hasta 0,001 mm_{Hg}.

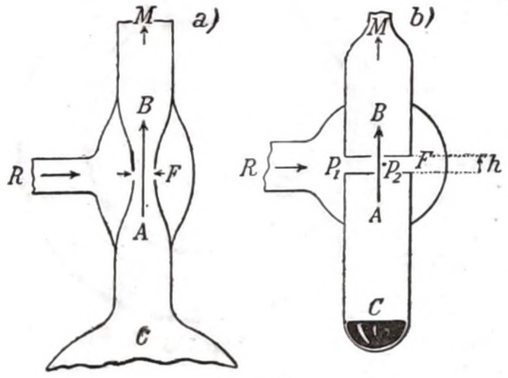


Fig. 706

Pero supongamos que el vacío preparatorio sea mucho más adelantado: de 0,1 mm_{Hg}, o, mejor todavía, de 0,01 mm_{Hg}, de modo que el camino libre medio de las moléculas en el espacio que rodea a la rendija F sea sensiblemente mayor que el ancho h de ésta; pasará una molécula desde P_1 [figura 706, *b*]), en donde el aire está enrarecido, a P_2, es decir, decididamente al seno de la corriente de vapor, sin haber encontrado prácticamente otra molécula (de vapor o de aire).

Nos hallamos en las condiciones de la *difusión* consideradas en el § 368. Prácticamente, todas las moléculas de aire que llegan a la rendija rebasan la hendidura y llegan al interior de la corriente de vapor. Aquí, las moléculas de vapor, siempre a causa del notable enrarecimiento, no se perturban mutuamente y tienen todas, prácticamente, una velocidad paralela y del mismo sentido hacia arriba: las moléculas de mercurio arrastran consigo todas las moléculas de aire que llegan.

La difusión del aire, no perturbada por la presencia del vapor de mercurio, se efectúa desde P_1 hasta P_2, en donde hay siempre una densidad de aire prácticamente nula, gracias a la acción continua de arrastre del vapor; por lo tanto, también tiende a cero, en P_1, la densidad en moléculas de aire. La bomba funciona como *bomba molecular de difusión* y produce un vacío en R, sin limitación teórica. Ahora ya no es útil la estrangulación de la figura 706, *a*), sino perjudicial.

El anterior razonamiento es válido mientras pueda suponerse que la rendija anular F constituye también una área de separación bastante bien definida entre un recinto en el que no hay más que moléculas de aire y otro en el que sólo hay moléculas de mercurio; efectivamente, éste, difundiéndose en P_1, tiende a perturbar, hasta interrumpirlo, el funcionamiento de la bomba, por lo que las paredes del recinto P_1 y los labios de la rendija F deben estar fríos para que las moléculas de mercurio que se difunden desde P_2 hacia P_1, a causa de la imperfecta unidad de dirección del chorro de vapor, se condensen inmediatamente. A causa de esta necesidad, la bomba de difusión se llama también *bomba de condensación*.

En la figura 707 se representa la sección de uno de los tipos más sencillos de bomba de difusión, construída en vidrio. F es la rendija para la difusión; R está en comunicación con el recinto a vaciar, y M comunica con la bomba preparatoria; los tubos N, N sirven para la circulación del agua refrigerante que condensa el vapor de mercurio que sale de F. El tubito D sirve para recuperar el mercurio que se condensa en las paredes del refrigerante L.

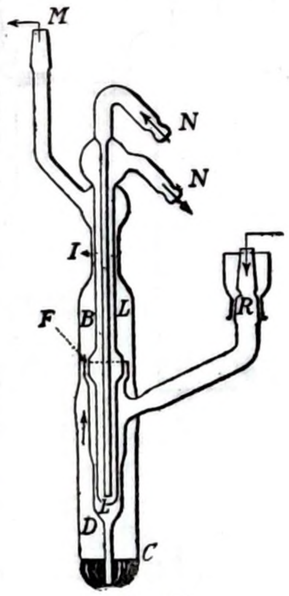


Fig. 707

Se construyen otros tipos de cuarzo fundido o de acero, que son más caros, pero menos frágiles.

Actualmente, las bombas de vapor de mercurio construídas en acero suelen constar de dos o tres pisos superpuestos en un mismo aparato (fig. 708), y cada uno constituye una bomba preparatoria para el sucesivo. Basta entonces un vacío preparatorio de unos 20 mm_{Hg}: los primeros compartimientos funcionan como bombas de chorro de vapor, y los últimos como bombas de difusión.

La bomba de difusión arrastra gases y vapores con rapidez grandísima y produce un enrarecimiento en el recipiente a vaciar que no tiene ningún límite teórico, aparte de los vapores que continuamente se desprenden de las substancias volátiles (grasas, etc.) presentes en el recinto en donde se quiere producir el vacío, y de los vapores de mercurio que, a pesar de la refrigeración, se difunden desde la bomba al recipiente que se vacía.

Pero estos vapores pueden condensarse fácilmente enfriando con aire líquido, por ejemplo, un pedazo de la canalización que conecta el recipiente con la bomba. Un filtro, constituído por panes de oro, puede servir también para detener los vapores de mercurio.

Las bombas de vapor de mercurio se han extendido mucho debido a su potencia, poco coste, mantenimiento fácil y ausencia de órganos giratorios.

En la actualidad son preferidas las bombas de difusión en que el mercurio está sustituído por líquidos orgánicos que se evaporan suficientemente a 120 ÷ 140 °C y que a la temperatura ambiente tienen una presión de vapor de cien a mil veces menor que la del mercurio.

Se emplean mucho algunos aceites minerales obtenidos por una cuidadosa destilación del petróleo natural en el vacío, a los que se da el nombre genérico de *apiezón*, para recordar su bajísima presión de vapor a la temperatura ordinaria (inferior a 10^{-7} mm_{Hg}). También se han empleado algunos compuestos químicamente definidos del ácido ftálico, como el ftalato butílico y el etil-exil-ftalato llamado comercialmente *octoil*.

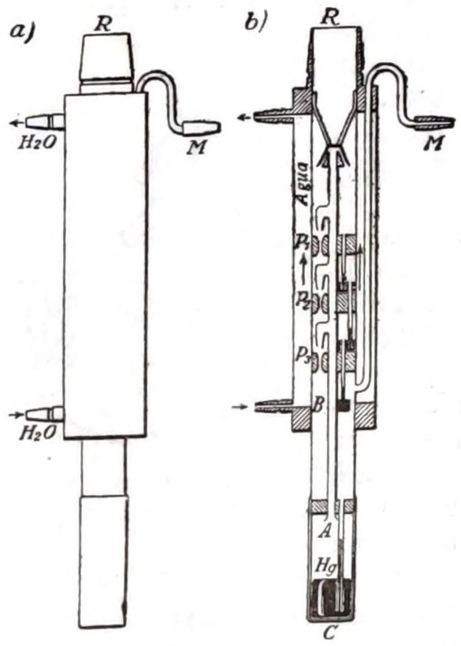


Fig. 708

Pero estos flúidos orgánicos, aunque al principio son homogéneos, pierden rápidamente su homogeneidad, especialmente si llegan a ponerse en contacto con el aire en caliente, con lo que aumenta su presión de vapor.

Hickman ha construído bombas de «autodestilación» a varios estadios, en las cuales el vapor de aceite que hace actuar la bomba, experimenta, al condensarse y caer de nuevo en el fondo de la misma, una especie de destilación fraccionada, y las partes más volátiles del aceite resultan siempre separadas y destinadas a actuar tan sólo en los estadios preliminares de la bomba.

De este modo se obtienen con el octoil vacíos hasta de $\approx 8 \cdot 10^{-8}$ mm_{Hg}, mientras que, en iguales condiciones, con el apiezón sólo se alcanzan los $\approx 2 \cdot 10^{7-}$ mm_{Hg}.

§ 377. Técnica de los vacíos elevados. La obtención de un vacío tan avanzado como el que pueden ofrecer las bombas moleculares, se dificulta en la práctica por dos motivos:

1.º, por falta de suficiente limpieza en la canalización y en los aparatos en donde se produce el vacío, y por los vapores de las grasas y mástiques empleados para hacer todas las juntas impermeables al aire exterior:

2.º, por la cantidad, mayor de lo que se cree, de gases adheridos a las paredes del recipiente y ocluídos por los sólidos, incluso por los no porosos.

Generalmente, las juntas son conos de vidrio esmerilado. En ellas, el mercurio puede sustituir ventajosamente a las antiguas grasas y mástiques; y, a su vez, se sustituye ahora el mercurio por grasas *apiezón*, cuya presión de vapor no llega a 10^{-10} mm_{Hg}.

En las llaves se han propuesto diversos artificios para hacer funcionar el mercurio como tapón de cerradura o apertura de las diversas canalizaciones. Así, un doblado en **u** de la canalización (fig. 709), conectado a un tubo T y a un recipiente B, que puede levantarse, sirve para crear en C un cierre de la canalización mediante mercurio, y mantenerla cerrada contra diferencias de presión h' de algunos cm_{Hg}; h es una verdadera columna barométrica y, por tanto, es de unos 76 cm_{Hg}.

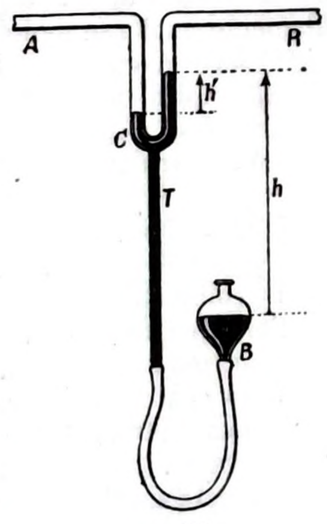


Fig. 709

Es muy recomendable hacer la canalización con tubos de vidrio soldados unos con otros para dejar sólo la junta que sirve de unión con la bomba.

Para *desgasar* el aparato, o sea para eliminar los gases ocluídos en los sólidos o adheridos a las paredes, es necesario calentar el recipiente que ha de vaciarse (y los aparatos que contiene) hasta más de 400 ÷ 500 °C. Los aparatos de vidrio fácilmente fusible, y, por tanto, más fácil de trabajar, no pueden calentarse a temperatura demasiado elevada, y, en ellos, la eliminación de los gases es más lenta y menos perfecta. El cierre del recipiente a la llama, una vez alcanzado el vacío, por mucho cuidado que se ponga, origina siempre el desprendimiento de pequeñas cantidades de gas, que perjudican el vacío ya obtenido. Es siempre muy difícil la eliminación de los gases ocluídos por los metales; incluso se tienen dudas sobre si los filamentos metálicos de platino y de wolframio, calentados a más de 1500 °C durante varias horas, quedan efectivamente privados de los gases ocluídos. Un metal solamente puede desgasarse por completo mediante su destilación en un vacío elevado.

Para mejorar ulteriormente el vacío, se utilizan acciones químicas y acciones físicas.

El carbón vegetal, especialmente el que se obtiene de la corteza dura de la nuez de coco, desgasado en caliente (≈ 400 °C) y enfriado después a la temperatura del aire líquido (≈ — 180 °C), absorbe cantidades muy grandes de gases; el hidrógeno y los gases nobles son los menos absorbidos (§ 224, *b*]).

Pequeñas cantidades de metales (calcio, estroncio, bario, torio, circonio), introducidas en el recipiente vacío y evaporados, reaccionan con casi todos los gases residuales (vapor de agua, oxígeno, nitrógeno, hidrógeno, anhídrido carbónico y óxido de carbono), produ-

ciendo compuestos sólidos de presión de vapor prácticamente nula. Resulta así un vacío extraordinariamente mejorado; en inglés, esta operación recibe el nombre de «gettering».

Cuando en el recipiente vacío se puede hacer pasar una descarga eléctrica, o hay en él un filamento que pueda ponerse incandescente — y éste es el caso más frecuente en la producción técnica de vacíos elevados: lámparas eléctricas, tubos para rayos X, válvulas termoelectrónicas — la descarga eléctrica, por sí sola o en presencia de cuerpos adecuados como el fósforo, o la incandescencia del filamento mejoran notablemente el grado de vacío. No es todavía bien clara la causa de la desaparición del gas así obtenida.

El empleo de estos artificios y la potente acción de las bombas moleculares posibilitan los enrarecimientos superiores a 10^{-7} mm_{Hg} que son corrientes en la técnica.

§ 378. Manómetros moleculares. Para la medición de tales presiones, la válvula de Mac Leod (§ 212) no puede servir más que de un modo completamente cualitativo.

Por otro lado, las consideraciones teóricas sobre el funcionamiento de los aparatos de medición de presiones muy bajas ($10^{-3} \div 10^{-7}$ mm_{Hg}), para las cuales el camino libre medio de las moléculas puede llegar a algunos metros, deben basarse necesariamente en la teoría cinética de los gases.

Por este motivo estos aparatos se llaman *manómetros o vacuómetros moleculares*. Los hay de varios tipos.

El rozamiento interno (§ 370) del gas enrarecido es función del número de moléculas existentes en la unidad de volumen; por consiguiente, el amortiguamiento de la vibración de una fibra de cuarzo o de la oscilación de un equipo suspendido por una fibra de torsión (comp. con fig. 274) es función de la presión residual. Se llegan a medir presiones del orden de 10^{-5} mm_{Hg}.

Un filamento puesto incandescente por una corriente eléctrica constante toma una temperatura de régimen estacionario: entonces, la energía calorífica creada continuamente en el hilo por el efecto Joule, iguala a la que es dispersada por conducción a través de los soportes, por emisión de energía radiante (por ejemplo, luz) y por convección a través del gas circundante. La cesión de calor del filamento al gas que le rodea se efectúa por el choque de las moléculas contra el filamento caliente; cada molécula, durante el choque, recibe energía cinética y rebota con la velocidad aumentada. Pero, por una razón análoga a la que hemos visto al estudiar el rozamiento interno (§ 370), la cantidad de energía calorífica así recogida es independiente de la presión del gas hasta un enrarecimiento de 1 mm_{Hg}, aproximadamente. Para enrarecimientos mayores, esta cantidad de calor disminuye con la presión, y a presiones bastante bajas, es proporcional al número de moléculas presentes por unidad de volumen, es decir, a la presión.

En tales condiciones, la temperatura de régimen estacionario del filamento es, por tanto, función de la presión del gas. Por otro lado, la resistencia eléctrica del filamento es función de su temperatura, y se dispone de métodos extraordinariamente sensibles para la medición de esta resistencia (§ 304, *e*]).

PIRANI ha realizado así un manómetro molecular que puede medir presiones hasta de 10^{-5} mm_{Hg}.

En fin, el *manómetro absoluto de M. Knudsen* se funda en un fenómeno análogo al que produce la rotación del molinete de los *radiómetros*.

He aquí el principio del aparato: Un par de aletas A_1A_2 (fig. 710) está suspendido de una fibra de torsión vertical, cuya proyección o traza es O. Se observa la rotación del equipo, constituído por las aletas, mediante el método Poggendorf. B_1 y B_2 son dos recipientes recorridos por agua caliente. Las moléculas que chocan con B_1 y B_2 y rebotan contra las superficies enfrentadas de A_1 y A_2, respectivamente, están más calientes, y, por tanto, son más rápidas; en cambio, las que chocan con las caras externas s_1 y s_2 del molinete, están menos calientes. Los choques moleculares en las dos caras de A_1 y en las dos de A_2 no se equilibran, y las aletas giran como si estuvieran repelidas por B_1 y B_2. Puede calcularse la presión del gas en función de las dimensiones geométricas del dispositivo y de la diferencia entre la temperatura del ambiente y la de B_1 y B_2.

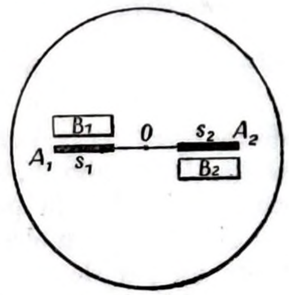


Fig. 710

Este manómentro puede indicar hasta presiones de $\approx 10^{-7}$ mm_{Hg}, y se llama *absoluto* porque la teoría demuestra que sus indicaciones dependen de la temperatura de B_1 B_2 s_1 s_2 y de la presión incógnita, pero no de la naturaleza de las moléculas que chocan, lo que constituye una notable ventaja.

Todos estos manómetros moleculares indican la presencia de los gases y vapores que subsisten todavía en los recintos en que se ha practicado el vacío, mientras que la probeta de Mac Leod no es capaz de indicar la presencia de vapores condensables, y en particular del vapor de mercurio.

Sin embargo, todos ellos constituyen dispositivos muy delicados y de uso poco cómodo.

Respecto del manómetro de ionización, véase el tomo II.

§ 379. Rayos moleculares. La posibilidad de producir vacíos muy avanzados con bombas de funcionamiento muy rápido, como las bombas moleculares, ha permitido realizar experimentos muy instructivos sobre las propiedades de los chorros de moléculas prácticamente unidireccionales, en los cuales puede decirse que es nulo el número de los choques mutuos. Estas venas o chorros de molécu-

las de gases (hidrógeno, helio, etc.), o de vapores (mercurio, plata, oro, etc.), se llaman *rayos moleculares.*

Damos a continuación algunos de los experimentos más característicos :

a] Las moléculas de plata que salen del tubito de platino C (fig. 711) calentado eléctricamente, se obtienen por evaporación de un gránulo de plata A, avanzan en línea recta hacia los diafragmas D_1 y D_2 y chocan contra la pantalla B, condensándose. Se produce en esta pantalla un depósito de plata de contorno tanto más definido cuanto más puntiforme es el manantial AC y cuanto menor es el número de las moléculas que se desvían de la línea recta por choques mutuos o por choques contra el gas residual. Un hilo F, interpuesto en el camino, produce una sombra nítida F' sobre la pantalla B.

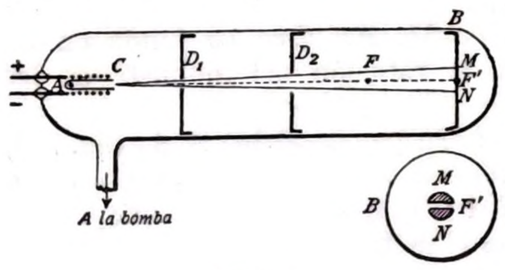


Fig. 711

b] El rayo molecular, diafragmado por D_1 y D_2 (fig. 712), incide sobre un par de discos R_1 y R_2 rígidamente unidos que giran alrededor del eje O_1O_2. Los discos tienen una rendija cada uno, F_1 y F_2, defasadas en un ángulo φ.

Las moléculas del rayo molecular no tienen todas la misma velocidad. Sólo pasarán a través de F_1 y F_2, y serán recogidas sobre la pantalla S_c, las que han atravesado la distancia l en el tiempo en que la doble rueda ha girado el ángulo φ. Conocidos l, φ y la velocidad ω de rotación de los discos, se deduce fácilmente la velodidad de las moléculas recogidas en S_c. Manteniendo constante la temperatura Θ de A, al variar ω se pueden aislar sucesivamente sobre S_c las moléculas de distinta velocidad u. Si, al aumentar ω, se traslada S_c transversalmente en sentido horizontal y de un modo conocido, se podrán ir recogiendo en los puntos sucesivos de S_c las moléculas a las cuales corresponde una velocidad cada vez más elevada ; se obtiene en S_c un *espectro molecular.*

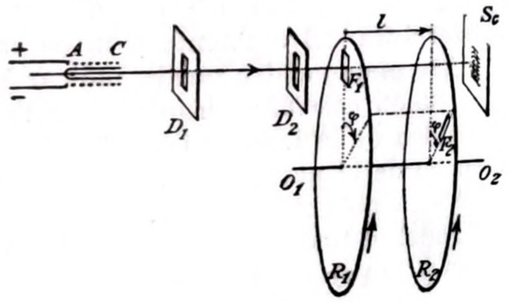


Fig. 712

De este modo se han medido directamente las velocidades moleculares u, y se han obtenido valores perfectamente concordantes con los que establece la teoría cinética ; se ha comprobado así directamente la validez de la ley de Maxwell sobre la distribución de las velocidades.

c] Cuando la pantalla S_c está constituída por una de las aletas L_1L_2 (fig. 713) de un ligerísimo equipo, suspendido en O por una fibra de torsión, cuyo giro o desviación se observa por el método de Poggendorf, el impulso dado por las moléculas que llegan depende de su cantidad de movimiento $m \cdot u$ y de su número. Cuando se conocen m y u, se puede determinar la cantidad de vapor emitido por el cuerpo A referida a la unidad de tiempo y, por tanto, su presión de vapor. El método permite descubrir y medir presiones bajísimas de vapor que sale de cuerpos extraordinariamente poco volátiles.

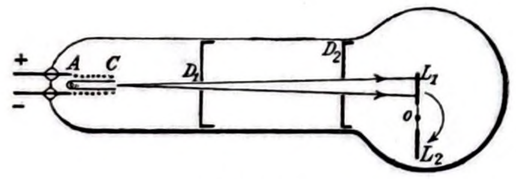


Fig. 713

Además, se han obtenido resultados interesantísimos estudiando la difracción de los rayos moleculares a través de la materia.

Digamos, por fin, que, mediante la acción de un campo magnético sobre la trayectoria de los rayos moleculares, O. Stern y Gerlach han llegado a resultados importantísimos relacionados con las recientes teorías sobre la constitución atómica y, en especial, con la teoría de los cuantos.

ÍNDICE ALFABÉTICO

Absorción, 576.
— de energía ondulatoria, 651.
Acción de contacto, 428.
— a distancia, 428.
Acciones simultáneas, 296.
Accleración, 18, 130, 142.
— angular, 390.
— centrípeta, 143.
— de la gravedad, 437.
— tangencial, 143.
Acelerómetro, 689.
Acimut, 13.
Acomodación, 512.
Acoplamiento, constante de, 384.
— factor de, 385.
— de generadores sonoros, 658.
— de oscilaciones, 382.
Acre, 13.
Acústica, 633.
— arquitectónica, 746.
— técnica, 743.
Adherencia, 456.
Adsorción, 576.
— isoterma de, 578.
Aeroplano, alas de, 531.
Aeróstatos, 536.
Agua, anomalía de dilatación del, 799.
Aire tipo, 531.
Alargamiento, 488, 494.
Altavoz, 714.
Altímetros, 547.
Altura de detención, 603.
— piezométrica, 603.
— o tono del sonido, 682.
Amortiguador de aire, 98.
Amortiguadores, 195, 369.
Amortiguamiento, 138, 147.
— índice de, 367.
Ampère, regla de, 120.
Amplitud, 134.
Análisis armónico, 171.
— de sonidos, 703.
Analizadores armónicos, 172.
— eléctricos, 172.
— — de sonidos, 704.
Anemómetro de hilo caliente, 848.
— de molinete de Robinson, 627.
Angstrom, unidad, 49.
Ángulo acimutal, 73.
— cenital, 73.
— diedro, 67.
— de enlace o de contacto, 567.
Ángulo límite, 343.
— plano, 15.
— de rozamiento, 343.
— sólido, 67.
Ángulos, medición de, 65.
— patrón, 68.
Anomalías de la gravedad, 437.
Año sidéreo, 79.
— trópico, 80.
Aparato de Fletcher, 289.
— de Laborde-C. Neumann, 286.
— de Threlfall y Pollock, 439.
— de Wiedemann y Franz, 848.
Aparatos calibrados, 24.
— registradores, 44.
Apiezón, 970.
Área, 13.
Áreas, medición de, 60.
Arquímedes, principio de, 526.
Arranque, movimiento de, 346.
Ascensor de Einstein, 331.
Aspiradores, 607.
Atmósfera o aire tipo, 531.
— unidad, 545.
Átomo ionizado, 453.
— neutro, 453.
Átomos, 450.
Atracción newtoniana, 422.
Atwood, máquina de, 289.
Audibilidad, campo de, 716.
Audición, 715.
— biauricular, 720.
Aumento del punto de ebullición, 931.
Autodestilación, bombas de, 970.
Avogadro, ley de, 938.
— número de, 451.

Balancín, 81.
Balanza de análisis, 96.
— de Coulomb, 93.
— de Eötwös, 440.
— gravimétrica, 94.
— hidrostática, 107.
— de Jolly, 434.
— de Mohr-Westphal, 109.
— de Roberval, 277.
— de torsión (bifilar), 95.
— — de hilo tenso, 94.
— — monofilar, 93.
Bar, 546.
Baría, 192.
Baricentro, 258, 260.

Barógrafo, 548.
Barómetro, 542.
— metálico, 546.
Barra, problema de la, 848.
Básculas, 278.
Bel, 724.
Bernoulli, régimen de, 603.
— teorema de, 603.
Boltzmann, constante de, 937.
— ecuación de, 962.
Bomba de aceite, 963.
— — rotativa, 964.
— de autodestilación, 970.
— de Cacciari, 966.
— calorimétrica, 825.
— de cápsula, 964.
— de condensación, 969.
— molecular rotativa, 966.
— neumática, 962.
— rotativa de mercurio, 965.
— de vapor de mercurio, 968.
Boyle, ley de, 474.
— punto de, 810.
Bravais, célula de, 459.
Brazo de un par, 262.
Brinell, aparato de, 514.
Brown, movimiento de, 589.
Brújula giroscópica, 447.
Bunsen, calorímetro de, 820.
— ley de, 588.
— mechero de, 608.

Cacciari, bomba de, 966.
Caída de los graves hacia Oriente, 444.
— libre, 134, 300.
Caja de pesas, 88.
Calibrado, 25.
Calibrador, 53.
Calibres diferenciales, 51.
— de Johansson, 50.
— de tolerancia, 51.
— de Zeiss, 50.
Calor, 751.
— atómico, 836.
— latente, 818.
— molecular, 837.
— radiante, 844.
— de reacción, 867.
— solar, 431.
Calores específicos de los gases, 873.
— — medio y verdadero, 831.
— latentes, 840.
— molares o moleculares, 837.
Caloría, 821, 857.
Calorimetría, 818.
Calorímetro, 820.
— de Bunsen, 820.
— de calentamiento, 823.
— eléctrico, 826.
— de Favre y Silbermann, 826.
— de Junker, 825.
— de las mezclas, 823.
— de Nernst y Lindemann, 825.
Callendar, experimento de, 855.
Cámara elástica, 599.
Cambios de estado, 924, 926.
Camino libre medio, 951.
Campo, 196, 218.
— de audibilidad, 716.
— conservador, 213.
— culombiano, 229.
— de fuerzas, 195.
— — centrales, 228.
— — equilibrio de un, 241.
— — uniforme, 225.
— gravitatorio, 195, 197, 231, 427, 433.
— — de una esfera, 429.
— irrotacional, 213.
— newtoniano, 230.
— solenoidal, 210.
— vectorial, 198, 222.
Cantidad de calor, 751, 818.
— — medición de una, 820.
— de movimiento, 304, 305.
Cantidades de movimiento, teorema de las, 319, 604.
Cañón, presión en un, 558.
Capacidad calorífica, 833.
Capilaridad, 568.
Cardiófono, 734.
Carnot, ciclo de, 882.
— teorema de, 887.
Carros dinamométricos, 93.
Catálisis, 580.
Catetómetro, 54, 55.
Cavendish, experimento de, 423.
Célula de Bravais, 459.
— elemental, 459.
Centrifugación, 532.
Centrifugadoras, 533.
Centro de fuerzas paralelas, 257, 258.
— de gravedad, 258, 260.
— de oscilación, 134.
Centros de suspensión y de oscilación, 406.
Cero absoluto, 783.
Ciclo, 757, 766.
— de Carnot, 882.
— — irreversible, 889.
— — rendimiento del, 886.
— de histéresis elástica, 512.
— irreversible, 906.
— reversible, 903.
Cilindro que rueda sobre un plano, 276.
Cilindros conjugados, 408.
Cinemática, 48, 125, 187.
Cintas de invar, 50.
Circulación, 207, 209, 223.
Cizalladura, 480.
— módulo de, 481.
Clapeyron, diagrama de, 760.
— fórmula de, 925.
Clausius, postulado de, 886.
Clément y Desormes, método de, 877.
Coalescencia, 560.
Coeficiente de absorción ondulatoria, 652.
— de amortiguamiento, 138, 147.
— de compresión, 470.
— de deslizamiento, 481.
— de difusión, 583.
— de dilatación, 797.
— de Poisson, 495.
Coeficientes calorimétricos, 913.
Coherencia, 16, 17.

Coherencia de las ecuaciones, 12.
— en las ondas, 658.
Cohesión, 456.
Colimación, 28.
Coloides, 585.
Comparador, 33, 51.
Componentes de un vector, 112.
Composición de corrimientos, 147.
— de fuerzas, 239.
— de movimientos, 147, 150, 156.
— — armónicos, 159, 169, 181.
— — circulares, 166.
— — rectilíneos, 151.
Compresibilidades isotérmica y adiabática, 917.
Compresión uniforme, 469.
Concentración, 587.
Concordancia de fase, 160.
Conducción, 842.
Conductibilidad externa, 847.
— interna, 844.
Conexión lineal simple, 209.
— múltiple, 209.
— superficial simple, 203.
Confrontamiento, 8.
Congelación, descenso del punto de, 932.
Cono de rozamiento, 346.
Conservación de la cantidad de movimiento, 309.
— de la energía, 327.
— de la materia, 291.
— del momento cinético, 309.
— de los vórtices, 597.
Constante de la gravitación universal, 231.
— solar, 432.
— de tiempo, 138.
— universal, 14.
Constantes críticas de algunos gases, 809.
— — determinación de las, 811.
Constitución de la materia, 449.
— molecular de los gases perfectos, 933.
Construcción de Fresnel, 168, 176.
Contacto entre dos fases, 556.
Contracción de la vena líquida, 612.
Contractilidad de una lámina líquida, 558.
Control de las dimensiones, 19.
Convección, 843.
Coordenadas, 283.
Coriolis, fuerza de, 294.
Corrimiento, 114.
— de fase, 135.
— infinitesimal, 251.
— virtual, 275.
Corti, órgano de, 720.
Coulomb, balanza de, 93.
— ley de, 229.
Covolumen, 956.
Criometría, 932.
Crioscopia, 932.
Cristales, 458.
Cristaloides, 585.
Cronógrafo, 86.
Cuadratura, 160.
Cuarzo fundido, 27.
— piezoeléctrico, 85.
Cubo de caras centradas, 461.
Cubo centrado, 461.
Cuentasegundos, 84.
Cuerda, 278.
Cuerdas, vibraciones de las, 679.
— vocales, 715.
Cuerpo apoyado sobre un plano, 273.
— rígido, 187, 253.
— — dinámica del, 388.
— — libre, dinámica del, 409.
Cuerpos reales, 449.
Curva de enfriamiento, 817.
— de Gauss, 42.

Charron, ondoscopio de, 670.
Choque, 199.
— aparato del, 352.
— central, 347.
— normal elástico, 351.
— — inelástico, 349.
— oblicuo elástico, 353.
— — inelástico, 350.
— presión de, 354.
— real, 355.

D'Alembert, paradoja de, 624.
Dalton, ley de, 777.
Decibel, 724.
Decremento logarítmico, 138, 147.
Densidad, 101.
— de energía elástica, 505.
— de los líquidos, medición de la, 108.
— de los sólidos, medición de la, 106.
Densímetro, 109.
Descenso del punto de congelación, 932.
Descomposición de movimientos, 150.
— de un vector, 117.
Desgoffe, manómetro, 552.
Deslizamiento, 341, 343, 477.
— coeficiente y módulo de, 481.
Desviación hacia Oriente, 293.
Dewar, vaso de, 825.
Día sidéreo, 79.
— solar medio, 80.
— trópico, 80.
Diagrama de Clapeyron, 760.
Diálisis, 585.
Diapasón, 683.
— electromagnético, 684.
— normal, 684.
Diapasones vibrantes, 165.
Diferencia de vectores, 117.
Difracción de ondas, 671.
Difusión, 581.
— gaseosa, 946.
Dilatación del agua, 799.
— de los gases, 756, 773.
— lineal, 801.
— de los líquidos, 798.
— de los sólidos, 800.
Dilatómetro, 800.
Dimensiones, 16, 18.
Dina, 89.
Dinámica, 48, 284.
— del cuerpo rígido, 388.
— del punto libre, 299.
Dinamómetros, 91, 190.
Disco estroboscópico, 184.

Disco de Rayleigh, 702.
Discos gramofónicos, 711.
Disoluciones, termodinámica de las, 930.
Distorsión, 378.
Divergencia, 202, 203.
Divisibilidad, 450.
Doppler, efecto de, 739.
Dulong y Petit, regla de, 835.
Dureza, 514.

Ebullición, aumento del punto de, 931.
Ebullometría, 932.
Ebulloscopia, 932.
Ecuación adiabática de un gas perfecto, 874.
— diferencial de Laplace, 235.
— de estado, 759.
— — de los gases perfectos, 773.
— — de ios fiúidos reales, 812.
— — de mezclas de gases, 779.
— — teoría cinética, 938.
— horaria, 126.
— de las ondas, 636.
— reducida de van der Waals, 815.
— de van der Waals, 813, 957.
Ecuaciones básicas, 9, 13, 22.
— dimensionales, 18.
— entre magnitudes, 9.
— entre medidas, 16.
— sobre unidades, 16.
Efecto Doppler, 739.
— Magnus, 630.
Efusión, 588.
Eiffel, método de, 622.
Einstein, ascensor de, 331.
Ejes conjugados, 408.
— espontáneos o libres, 394, 416.
— móviles, 148.
— principales de inercia, 394.
— de suspensión y de oscilación, 406.
Elasticidad, 466.
— de alargamiento, 488, 494.
— de los cristales, 512.
— de los cuerpos reales, 509.
— de deslizamiento, 477.
— de flexión, 488, 496.
— subsiguiente, 510.
— de torsión, 487, 489.
Elinvar, 82.
Elipsoide geodésico, 435.
— de inercia, 394.
Elongación, 134.
Endurecimiento, 510.
Energía de campo, 237.
— cinética, 323.
— conservación de la, 327, 865.
— de un cuerpo, 323.
— elástica, 504.
— interna, 861.
— — y calores específicos de los gases, 944.
— — de un gas perfecto, 870.
— mutua de dos masas, 236.
— de posición, 236, 325.
— potencial, 219, 227, 236.
— — mutua, 325.
— de rotación, 391.
Energía sonora reflejada y refractada, 735.
— superficial, 59, 561.
— teorema de la, 329.
— transmitida por ondas, 646.
Enfriamiento, curva de, 817.
Enmascaramiento de sonidos, 719.
Entalpía, 868.
Entropía, 896.
— ley de incremento de la, 907.
Eötvös, balanza de, 94, 440.
Epicentro, 732.
Equilibrio de un cuerpo ligado, 268.
— estable, 241, 250, 273.
— indiferente, 241, 250, 273.
— inestable, 241, 250, 273.
— de un sistema de fuerzas, 267.
— térmico, 753.
— termodinámico, 909.
Equilibrios, superposición de, 241, 255.
Equivalencia, principio de la, 851.
Equivalente en agua, 823.
Erg, 322.
Error absoluto, 41.
— de excentricidad, 73.
— de una medida, 39.
— medio, 43.
— de paralaje, 26.
— probable, 43.
— relativo, 41.
Errores accidentales, 40.
— sistemáticos, 40.
Escala de Mohs, 514.
— práctica de temperaturas, 787.
— de temperaturas, 754.
— termodinámica de temperaturas, 890.
Escape de áncora, 83.
— de cilindro, 83.
Esfera de impenetrabilidad, 951.
Esferómetro, 55.
Esfuerzo de cortadura, 192, 480.
— normal unitario, 192.
Esfuerzos internos, 507.
Eslabón neumático, 475.
Espectro acústico, 633, 704.
Espectros de sonidos, 173.
Espejos ustorios, 734.
Espiral logarítmica, 146.
Estado higrométrico, 781.
Estados correspondientes, ley de los, 809.
Estática, 48, 189.
— del cuerpo deformable, 466.
— — rígido, 253.
— de los flúidos, 515.
— del punto, 238.
Estela turbulenta, 625, 628.
Estereorradián, 67.
Estroboscopio, 182.
Éter, 428.
Exfoliación, 513.
Exotérmica y endotérmica, reacciones, 842.
Expansión de Joule, 829.
— con trabajo externo, 764.
— sin trabajo externo, 764, 770.
Experimento de Callendar, 855.
— de Cavendish, 423.
— de Hirn, 856.

Experimento de Joule Thompson, 919.
— de Mayer, 856.
Extensómetro, 494.

Factor de acoplamiento, 385.
Fase, 134, 160.
Fase termodinámica, 863.
Favre y Silbermann, calorímetro de, 826.
Fechner-Weber, ley de, 724.
Fenómenos de capilaridad, 568.
— moleculares, 449.
— periódicos, 182.
— de superficie, 556.
Féry, pirómetro de, 795.
Figuras de Lissajous, 181.
Filete flúido, 223.
Filtros acústicos, 742.
Fleming, regla de, 120.
Fletcher, aparato de, 289.
Flettner, rotor de, 631.
Flexión, 488, 496.
— plana circular, 498.
— — normal, 501.
Flotadores, 534.
Flúidos reales, ecuación de estado de los, 812.
Flujo de energía ondulatoria, 647.
— ligado, 211.
— líneas de, 202.
— saliente, 202.
— tubo de, 198.
— de un vector, 199.
Fon, 723, 726.
— nuevo, 727.
Fonodeik, 708.
Fonógrafo, 707.
Fonotelemetría, 744.
Forma aerodinámica, 628.
Formantes, 715.
Fórmula de Clapeyron, 925.
— de Hagen-Poiseuille, 616.
— de Helmholtz, 923.
— hipsométrica, 530.
— de Laplace, 569.
Foucault, péndulo de, 446.
Frasco de Mariotte, 612.
Frecuencia, 81, 136.
Frecuencímetro, 380.
Fresnel, construcción de, 168, 176.
Frigoría, 821.
Fuerza aparente, 331.
— ascensional, 536.
— del campo, 197.
— centrífuga, 313.
— — máquina de, 316.
— centrípeta, 302.
— concepto de, 189.
— de Coriolis, 294.
— culombiana, 229.
— equilibrante, 257.
— newtoniana, 229.
— peso, 189.
— de resistencia, 622.
— tubo y líneas de, 198.
— unidades y patrones de, 87.
Fuerzas de campo, 191.
— centrales, 228.
Fuerzas centrífugas, campo de las, 416.
— composición de, 239.
— — y descomposición de, 153.
— elásticas, 466.
— de inercia, 313.
— internas y externas, 319.
— medición de las, 90.
— moleculares, 456, 561.
— paralelas, 256.
— ponderomotrices, 238.
— principio de acción de las, 286.
— de reacción, 252.
— de superficie, 191.
— vivas, teorema de las, 325.
Fusión, 816, 841.
— brusca, 486.

Gaede, bombas de, 965.
Gal, 130.
Galería de viento, 621.
Galileo, experimento de, 293.
— plano inclinado de, 288.
— relatividad de, 331.
Galton, pito de, 685.
Gas ideal o perfecto, 465.
— perfecto, 474.
— — energía interna de un, 870.
— real, isotermas de un, 807.
Gases perfectos, constitución molecular de los, 933.
— teoría cinética de los, 933.
Gauss, curva de, 42.
— relación de, 203, 205.
— teorema de, 232, 233.
Generadores de ondas elásticas, 682.
Geófono, 733.
Geoide, 435.
Gerik, bomba de, 963.
Gibbs, ley de, 577.
Giro, 15.
— en torno a un eje, 270.
— — a un punto, 268.
Giroscopio, 418.
Goniómetro de aplicación, 69.
— de reflexión, 74.
Gradiente, 219.
Grado centesimal, 15, 66.
— nonagesimal, 15, 66.
— sexagesimal, 66.
Grados de libertad, 283.
Gramo-masa, 88, 291.
— peso, 88.
Gramófono, 711.
Grave, caída de un, 300.
— lanzado, 297.
Gravedad, campo de la, 433.
— normal, 437.
Gravitación, 231.
Grimsehl, pistola de, 311.

Hagen-Poiseuille, fórmula de, 616.
Helmholtz, fórmula de, 923.
— resonadores de, 172, 698.
— teorema hidrodinámico, o de, 593.
— teoría de la resonancia de, 720.
Henry, ley de, 579.
Hertz, unidad de frecuencia, 81.

Hess, ley de, 865.
Hickmann, bombas de autodestilación de, 970.
Higrometría, 780.
Hipocentro, 732.
Hipótesis de trabajo, 5.
Hirn, experimento de, 856.
Histéresis elástica, 511.
Horizontalidad, 72.
Humedad absoluta y relativa, 781.
Huygens-Fresnel, principio de, 671.
Huygens-Steiner, teorema de, 396.

Impulso de una fuerza, 305.
Independencia de las acciones simultáneas, 296.
Índice de cuchillo, 26.
— óptico, 26, 27, 29.
Índices y escalas, 25.
Inercia, 290, 292, 295, 313.
— fuerzas de, 313.
— para la rotación, 388.
Iners, 88.
Instrumentos calibrados, 25.
— de mira, 27.
Integral de línea, 207.
Intensidad del campo, 196, 197, 218.
— del sonido, 682.
Interferencias de ondas transversales, 653.
Invar, 806.
Invariabilidad de la masa, 334.
Irreversibilidad, 769.
Isobaros, 454.
Isoterma de adsorción, 578.
— crítica, 807.
Isotermas de van der Waals, 813, 927.
Isotopos, 454.

Jinetillo, 99.
Johansson, calibres de, 50.
Jolly, balanza de, 434.
Joule, 323.
— expansión de, 829.
— experimento de, 854.
— Thompson, experimento de, 919.
Junker, calorímetro de, 825.
Jurin, Ley de, 568.

Kater, péndulo de, 409.
Kelvin, método de Lord, 76.
Kepler, leyes de, 424.
Kilocaloría, 821.
Kilográmetro, 324.
Kilogramo-masa, 88, 291.
— peso, 87.
Knudsen, manómetro absoluto de, 973.
Kretz, micromanómetro de, 554.
Kundt, tubo de, 662.
— válvula de, 702.

Laborde-C. Neumann, aparato de, 286.
Lanzamiento de un grave, 297.
Laplace, ecuación diferencial de, 235.
— fórmula de, 569.
Ley de Avogadro, 938.
— de Boyle, 474.
Ley de Bunsen, 688.
— de Coulomb, 229.
— de Dalton, 777.
— de Fechner-Weber, 724.
— de Gibbs, 577.
— de Henry, 579.
— de Hess, 865.
— de Jurin, 568.
— de Maxwell sobre distribución de velocidades, 942.
— de Newton, 422.
— de Stevin, 521.
— de Stokes, 626.
Leyes físicas, 2, 3.
Leyes de Kepler, 424.
Licuefacción, 808.
Ligadura, 246.
— lisa, 252.
— reacción de la, 251.
Ligaduras, 274.
Límite de audibilidad, 716.
— de sensibilidad, 36.
Linde, máquina de, 922.
Línea de corriente, 592.
— de flujo, 198, 202, 223, 592.
— de fuerza, 198.
— neutra, 498.
— unitaria de flujo, 212.
Líquidos, dilatación de los, 798.
— ideales o perfectos, 465.
Lissajous, figuras de, 181.
Litro, 64.
Longitud de onda, 638.
— reducida del péndulo, 406.
— unidades de, 48.
Longitudes pequeñas, medición de, 51.
Lubricantes, 346.

Llamas sensibles, 620, 705.

Mac Leod, vacuómetro de, 549.
Magnitudes derivadas, 11.
— equidimensionales, 18.
— físicas, 6, 23.
— fundamentales, 10, 21.
— sin dimensiones, 19.
Magnus, efecto de, 630.
Malzel, metrónomo de, 406.
Manantiales, 205.
Manómetro absoluto de Knudsen, 973.
— de Kretz, 554.
Manómetros, 542, 551.
— moleculares, 972.
Máquina de Atwood, 289.
— — dividir círculos, 69.
— — rectas, 54.
— frigorífica, 886.
— de fuerza centrífuga, 316.
— — Linde, 922.
— — Morin, 287.
— simples, 278.
— térmicas, 885.
Mariotte, frasco de, 612.
Masa atómica, 455.
— definición de la, 426.
— específica, 102.
— — crítica, 812.

Masa inerte, 290.
— — y masa gravitatoria, 443.
— material, 291.
— unidades y patrones de, 87.
Masas, medición de, 96.
Materia, constitución de la, 449.
Maxwell, ley de distribución de velocidades de, 942.
— péndulo de, 399.
Mayer, experimento de, 856.
— principio de, 853.
Mecánica, principios de la, 48.
Mechero de Bunsen, 608.
— de Mecker, 609.
Media aritmética, 36.
Medición absoluta o derivada, 23.
— de ángulos, 69.
— directa, 8, 23.
— indirecta, 23.
— de magnitudes, 6, 48.
Mediciones físicas, 33.
— sonoras, 690.
Medidas coherentes, 9
Membranas semipermeables, 586.
Mendelejeff, método de, 99.
Menisco cóncavo y convexo, 568.
Mercurio, 551.
Metacentro, 535.
Método de Clément y Desormes, 877.
— de Eiffel, 622.
— experimental, 1.
— estroboscópico, 182.
— de Lord Kelvin, 76.
— de Mendelejeff, 99.
Método de Poggendorff, 77.
— de Retgers, 109.
Metro patrón, 49.
Metrónomo de Mälzel, 406.
Mezclas de gases, ecuación de estado de, 779.
Micra, 49.
Micrófono, 708.
— de hilo caliente de Tucker, 696.
Micromanómetro, 554.
Micrómetro objetivo, 58.
— ocular, 29, 31.
— unidad de longitud, 49.
Micrón, 49.
Microscopio micrométrico, 58.
Milésimo, unidad de ángulo, 66.
Milibar, 546.
Milímetro, unidad de presión, 545.
Milimicrómetro, 49.
Minímetros, 58.
Modelo atómico, 452.
Modulación, 175, 179.
Módulo de compresión, 470.
— de deslizamiento, 481.
— de rigidez, 481.
— de un vector, 112.
— de Young, 495.
Mohr-Westphal, balanza de, 109.
Mohs, escala de, 514.
Moléculas, 450.
Molinete hidráulico, 612.
Momento de la cantidad de movimiento, 304.
Momento cinético, 304.
— — teorema del, 401.
— de una fuerza, 264, 266.
— del impulso, 305.
— de inercia, 393.
— — de un cilindro, 394.
— — de una esfera, 395.
— motor, 390.
— de un par, 262.
— respecto a un eje, 272.
Monocristal, dilatación de un, 803.
Monocristales, 458, 465, 513.
Morin, máquina de, 287.
Móvil perpetuo de primera especie, 865.
— — de segunda especie, 904.
Movimiento absoluto, 148.
— armónico, 134, 159, 165.
— — amortiguado, 137.
— — energía del, 360.
— browniano, 589.
— cicloidal, 411.
— circular, 165.
— — uniforme, 144, 166.
— continuo de primera especie, 865.
— — de segunda especie, 904.
— curvilíneo, 140, 155, 302.
— en espiral logarítmica, 146.
— estacionario, 591.
— — en las conducciones, 600.
— de un grave, 297.
— helicoidal, 188.
— irrotacional, 223.
— laminar, 596.
— ligado, 302.
— naturalmente acelerado, 134.
— pendular, 137.
— periódico simple, 137.
— en el plano inclinado, 340.
— de precesión, 419.
— rectilíneo, 126, 155.
— — uniforme, 131.
— relativo, 147, 330.
— resultante, 150.
— rígido, 187.
— de rotación, 188.
— rotacional, 223.
— de traslación, 187.
— turbillonario, 223, 595.
— turbulento, 223, 592.
— uniformemente acelerado, 132.
Movimientos armónicos, composición y descomposición de, 159, 169, 181.
— circulares, composición de, 166.
— composición y descomposición de, 150, 156, 166.
Muro, problema del, 844.

Natterer, tubos de, 811.
Nernst y Lindemann, calorímetro de, 825.
Neumann y Kopp, regla de, 837.
Newton, ley de, 422.
— tubo de, 287.
— unidad de fuerza, 89, 291.
Nivel de burbuja, 70.
— sonoro, 723.
Nivelación barométrica, 530.

Nonio, 29, 30.
Nudo, 12.
Número atómico, 453.
— de Avogadro, 451.
— de carga, 455.
— de Reynolds, 618, 628.

Observación, 2.
Oclusión, 579.
Octoil, 970.
Ocular micrométrico, 59.
Oído humano, 715.
— poder analizador del, 719.
Onda balística, 740.
Onda de boca, 706, 742.
— de choque, 741.
— de presión, 641.
Ondas coherentes, 658.
— elásticas, propagación de, 633.
— esféricas, 664.
— estacionarias, 660.
— planas, 642.
— sísmicas, 732.
Ondoscopio de Charron, 670.
Opalescencia crítica, 812.
Oposición de fase, 160.
Órgano de Corti, 720.
Oscilaciones acopladas, 382.
— amortiguadas, 366.
— composición de, 363.
— elásticas, 504.
— entretenidas, 382.
— forzadas, 369, 372, 379.
— libres, 359.
— de un líquido, 598.
— longitudinales, 639.
— transversales, 636.
Ósmosis, 586.

Palanca, 281.
— óptica, 29, 76.
Palmer, 58.
Par de fuerzas, 261.
— termoeléctrico, 792.
Paradoja de D'Alembert, 624.
Paradojas hidrodinámicas, 609.
Paralaje, error de, 26.
Paralelogramo de las aceleraciones, 153.
— de los corrimientos, 147.
— de las fuerzas, 116, 240.
— regla del, 115.
— de las velocidades, 152.
Pascal, principio de, 525.
Patrón de frecuencia, 81.
— de longitud, 48.
— de medición, 23.
Péndulo balístico, 350.
— que bate segundos, 81.
— compuesto, 272, 405.
— cónico, 364.
— de Foucault, 446.
— de Maxwell, 399.
— reversible de Kater, 409.
— simple, 355.
— de Sterneck, 439.
Péndulos acoplados, 383.
Percusión, 348.
Período, 145.
— de oscilación, 136.
Perry, rueda de, 388.
Pesada a carga constante, 99.
Pesas, 88.
— elásticas, 386.
Peso, 189.
— específico, 104.
— — relativo, 103.
Pick-up, 713.
Picnómetro, 106.
Pie, 49.
Pie de rey, 53.
Piezómetro, 469.
Pirómetro de Féry, 795.
Pirómetros, 794.
Pistola doble de Grimsehl, 311.
Pito de Galton, 685.
Pitot, tubo de, 610.
Planck, constante de, 960.
Planímetro polar, 60.
Plano inclinado, 247, 282, 340.
Plano inclinado de Galileo, 288.
— de polarización, 635.
— de vibración, 635.
Planos reticulares, 461.
Platinita, 806.
Plomada, 189.
Poder analizador del oído, 719.
— calorífico, 841.
Poggendorff, método de, 77.
Poiseuille, fórmula de, 616.
— régimen de, 614.
Poisson, coeficiente de, 495.
Polarización, 635.
Polea diferencial, 281.
— fija, 279.
— móvil, 279.
Polígono de las fuerzas, 116.
Polipasto, 280.
Politrópicas de un gas perfecto, 879.
Postulado de Clausius, 886.
Potencia, 322.
— disipada, 376.
Potencial escalar, 213, 215, 230.
— polidromo, 220.
— vector, 222.
Precesión, movimiento de, 80, 419.
Precisión de una medida, 39.
Presión, 192, 517.
— de cohesión, 562.
— crítica, 808, 812.
— de choque, 348, 354.
— dinámica o piezométrica, 601.
— específica, 518.
— gaseosa, teoría cinética, 934.
— interna, 562.
— osmótica, 587.
— del sonido, 702.
— de vapor, 792, 928.
Principio de acción de las fuerzas, 286.
— — y reacción, 274, 307.
— de Arquímedes, 526.
— de las cantidades de movimiento, 321.
— de Huygens-Fresnel, 671.
— de inercia, 292.
— de Mayer, 853.

Principio de Pascal, 525.
— de los trabajos virtuales, 250, 275.
Principios de la Termodinámica, 859, 891, 899, 907, 960.
Probeta, 549.
Problema de la barra, 848.
— del muro, 844.
Producto escalar, 118.
— externo, 120.
— interno, 118.
— triple, 124.
— vector, 120.
Propagación del calor, 482, 769.
— de ondas elásticas, 633.
— del sonido, 728.
Prospección geofísica mediante el sonido, 746.
— gravimétrica del suelo, 442.
Psicrómetro, 782.
Pulgada, 49.
Pulsación, 136.
Pulsaciones, 175, 177.
Punto de Boyle, 810.
— crítico, 808.
— de ebullición, 931.
— libre, 138, 299.
— ligado, 246.
— material, 238, 285.
— de rocío, 781.
— triple, 818, 929.
Puntos fijos de temperatura, 788.

Quincke, tubo de, 657.

Racionalización, 21.
Radiación, 844.
Radián, 15, 66.
Radio de acción molecular, 457.
— de una esfera, medición del, 56.
— molecular cinético, 956.
Rayleigh, disco de, 702.
Rayos moleculares, 973.
Reacción, fuerzas de, 252.
— mecánica, 191.
— de una ligadura, 274.
Reacciones endotérmica y exotérmica, 842.
Receptores de ondas elásticas, 687.
Recorrido libre medio, 951.
Recristalización, 465.
Recta de colimación, 28.
Redes espaciales, 459.
Reducidas, variables, 809.
Reflexión en cuerdas y en tubos, 659.
— factor de, 736.
— del sonido, 734.
Refracción del sonido, 734.
Régimen de Bernoulli, 603.
— de Poiseuille, 614.
— turbulento, 618.
Regímenes diversos en las corrientes líquidas, 623.
Registro de sonidos, 706.
Regla de Dulong y Petit, 835.
— de Fleming, 120.
«Regla del hombre», de Ampère, 120.
— de Neumann y Kopp, 837.
Regnault, calorímetro de, 823.
Regulador de fuerza centrífuga, 317.
— de temperatura, 758.
Reiter, 99.
Relación de Gauss, 203, 205.
— de Stokes, 209.
Relajamiento, 510.
Relatividad de Galileo, 331.
Relojes, 82.
Rendimiento del ciclo de Carnot, 886.
Representación gráfica, 45.
Reproductores de sonidos, 711.
Resistencia acústica específica, 651.
— estática, 346.
— del medio, 622.
— de presión, 623.
— de rozamiento, 623.
Resonador, 661.
— de membrana, 701.
Resonadores acústicos, 697.
— de Helmholtz, 172, 698.
Resonancia, 372, 660.
Resorte en hélice, 503.
Resultante de fuerzas, 115, 240.
Retgers, método de, 109.
Reynolds, número de, 618, 628.
Rigidez, módulo de, 481.
Roberval, Balanza de, 277.
Robinson, anemómetro de, 627.
Rocío, punto de, 781.
Rodadura, 411.
— de un cilindro, 276.
Rotación, movimiento de, 188, 389.
— terrestre, pruebas de la, 444.
Rotacional, 207.
Rotor de Flettner, 631.
Rozamiento, 193.
— de arranque, 346.
— cono de, 346.
— crítico, 368.
— de deslizamiento, 193, 341, 343.
— externo, 194.
— interno, 193, 477, 482, 516.
— — cinemático, 618.
— — teoría cinética, 952.
— de líquidos en tubos, 613.
— con el medio, 193.
— de rodadura, 193, 413.
Rueda de Perry, 388.
Ruidos, 682.

Sección neutra, 498.
Segundo solar medio, 80.
Seno lineal, 70.
Sensación sonora, 690, 723, 726.
Sensibilidad de una lectura, 35.
— — medición de la, 37.
Sentido antirreloj, 121.
Silencio, zona de, 738.
Sincronismo, 184.
Sismógrafo, 688.
Sismograma, 733.
Sistema absoluto, 21.
— aislado, 320.
— CGS, 20.
— de fuerzas en equilibrio, 267.
— de los ingenieros, 89.

Sistema inerte, 295, 292.
— MKS, 20.
— «práctico», 22.
— racionalizado, 21.
Sistemas cristalinos, 460.
— de medidas, 17, 20, 21, 89.
Sobrefusión, 817.
Solidificación, 816.
Sólidos, teoría cinética de los, 958.
Soluciones coloidales, 585.
— ideales, 587.
Sondaje acústico, 745.
Sonido, análisis del, 703.
— espectro del, 173.
— generadores secundarios de, 711.
— medición del, 690.
— — de la amplitud del, 692.
Sonido, medición de la intensidad del, 691.
— presión del, 702.
— propagación del, 728.
— puro o simple, 682.
— reflexión y refracción del, 734.
— registro del, 706.
— velocidad del, 729.
Sonómetro, 678.
Steiner, teorema de, 396.
Stern, variador de, 684.
Sterneck, péndulo de, 439.
Stevin, ley de, 521.
Stokes, ley de, 626.
— relación de, 209.
Sublimación, 816.
Substancias termométricas, 755.
Suma de vectores, 115, 240.
Sumergibles, 536.
Sumideros, 205.
Superficie de contacto, 557.
— equipotencial, 217.
— fenómenos de, 556.
— fuerzas de, 191.
— de nivel, 227.
Superposición de los equilibrios, 241, 255.

Tabiques semipermeables, 586.
Tablas, 45.
Tacómetro, 534.
Teléfono, 685, 712.
Temperatura, 751, 753.
— absoluta, 783.
— de ebullición, 931.
— escalas de, 754.
— de fusión, 486, 753.
— de un gas, teoría cinética, 937.
— puntos fijos, 788.
— termodinámica, 787, 890.
Tensión normal, 192.
— superficial, 192, 557, 561, 927.
— tangencial, 192.
— de vapor, 928.
Teodolito universal, 73.
Teorema de Bernoulli, 602.
— de la cantidad de movimiento, 604.
— de Carnot, 887.
— de la energía, 329.
— de Gauss, 232, 233.
— de Helmholtz en hidrodinámica, 593.
Teorema de Huygens-Steiner, 396.
— del momento cinético, 401.
— de Torricelli, 610.
Teoría cinética, extensión de la, 956.
— — de los gases, 933.
— — y gases reales, 956.
— — de los sólidos, 958.
— de la resonancia, 720.
Teorías físicas, 4.
Termodifusión, 949.
Termodinámica, 851.
— primer principio de la, 859.
— segundo principio de la, 891, 899, 907, 960.
Termófono eléctrico, 686.
Termometría, 751.
Termómetros de gases, 784.
— de líquido, 790.
Termómetros de máxima y mínima, 791.
— metálicos, 792.
— de presión de vapor, 792.
— de resistencia, 794.
Termoscopio, 752.
Termóstato, 753.
Thiesen, manómetro, 552.
Threllfall y Pollock, aparato de, 439.
Tiempo, medición del, 79.
— de reverberación, 747.
— unidad y patrones de, 81.
Timbre del sonido, 682.
Tono del sonido, 682.
Tor, 546.
Torbellinos, 223.
Tornillo, 283.
— micrométrico, 31.
Torr, 546.
Torricelli, teorema de, 610.
Torsión, 487, 489.
Trabajo, 322.
— de deformación, 504.
— externo por expansión, 763.
— integral de línea del, 205.
Trabajos virtuales, principio de los, 250, 275.
Tracción, 192.
— uniforme, 469.
Transformación adiabática, 759.
— cíclica, 757, 766.
— irreversible, 768, 900, 904.
— isobárica, 867.
— isócora, 866.
— isotérmica, 758.
— politrópica, 880.
— reversible, 768, 899, 902.
— termodinámica, 756.
Transmisión, factor de, 736.
Traslación, movimiento de, 187.
Trayectoria del movimiento, 126.
Trompas, 607.
Tubo de flujo, 198, 223.
— de fuerza, 198.
— de Kundt, 662.
— de Newton, 287.
— piezométrico, 601.
— de Pitot, 610.
— de Quincke, 657.
— unitario de flujo, 212.

Tubo de Venturi, 607.
Tubos acústicos, 680, 681.
— de Natterer, 811.
Tucker, micrófono de, 696.
Túnel aerodinámico, 621.
Tyndall, fenómeno, 585.

Umbral para las frecuencias sonoras, 718.
— para las intensidades sonoras, 719.
— de sensación sonora, 716.
Unidades derivadas, 11, 17.
— sin dimensiones, 19.
— fundamentales, 10, 17, 21.
— internacionales, 22.
— patrón, 23, 87.
— sistemas de, 89.
Unión homopolar, 464.
— iónica, o heteropolar, 464.
— metálica, 464.

Vacíos elevados, producción de, 962, 970.
Vacuómetros, 549.
— moleculares, 972.
Válvula de Kundt, 702.
Van der Waals, ecuación de, 813, 815, 957.
— — isotermas de, 927.
Vapor de mercurio, bombas de, 968.
Vaporización, 840.
Variables reducidas, 809
Variación de g con la altura, 434.
— de W. Stern, 684.
Vaso Dewar, 825.
Vesos comunicantes, 537.
Vactor aceleración, 197.
— aplicado, 115.
— no aplicado, 115.
— campo, 197.
Vectores, 111.
Velocidad angular, 134, 145.
— de arrastre, 153.
— crítica, 380, 618.
— cuadrática media, 936.
— media, 128, 943.
— más probable, 942.
— del sonido, 729.
Velocidades, distribución estadística de las, 939.
Velocidades moleculares, 938, 955.
Vena líquida, contracción de la, 612.
Venturi, tubo de, 607.
Vibración, 635.
Vibraciones libres de los cuerpos elásticos, 678.
Vibroscopios, 687.
Vickers, aparato de, 515.
Vidrio de cuarzo, 27, 806.
Violín, espectro acústico del, 705.
Viscosidad, 193, 483.
— cinemática, 618.
Viscosímetros, 617.
Volumen, 13.
— crítico, 808.
— específico, 105.
— unidades de, 63.
Volúmenes, medición de, 63, 110.
Volumenómetro, 476.
Voz humana, 715.

Watt, 323.
Weber-Fechner, ley de, 724.
Wiedemann y Franz, aparato de, 848.
Wien, resonador de, 701.

Yarda, 49.
Young, módulo de, 495.

Zeiss, calibres de, 50.

PUBLICACIONES TÉCNICAS LABOR

Tratado de Física. Adaptado a la enseñanza en Universidades y Escuelas Técnicas Superiores, por WILHELM H. WESTPHAL, Profesor de Física de la Escuela Politécnica de Berlín. 915 páginas y 650 figuras. *(2.ª edición).*

Prácticas de Física. Colección de ejercicios de Física e introducción sobre los fundamentos de las mediciones físicas, por el Prof. WILHELM H. WESTPHAL. 368 páginas, 106 figuras y 6 diagramas.

Prácticas fundamentales de física. Dirigida por C. SCHAEFER y L. BERGMANN, con la colaboración de W. KLIEFOTH. Con 267 páginas, 182 figuras y 18 tablas.

Curso de Física, por el Prof. W. WATSON. Incluyendo un Apéndice acerca de la teoría de la relatividad. Ampliado por H. Moss. 977 páginas, 589 figuras y numerosos ejemplos demostrativos. *(3.ª edición. 3.ª reimpresión).*

Prácticas de Física, por el Prof. W. WATSON. 691 páginas, 282 figuras y 30 tablas con valores numéricos de uso corriente. *(2.ª reimpresión).*

Problemas de Física, por los Profs. G. MAHLER y K. MAHLER. 170 páginas. *(3.ª edición. Reimpresión).*

Soluciones a los Problemas de Física de Mahler, por J. MIR. 354 páginas y 23 figuras.

La Física en fórmulas, por G. MAHLER †, Profesor de Matemáticas y Física en el Instituto de Ulm, y K. MAHLER, Catedrático en el Instituto Schubart de Aalen (Württemberg). Traducción de la 7.ª edición alemana. 228 páginas y 74 figuras.

Física teórica, por el Prof. G. JÄGER. Dos tomos, con 712 páginas y 125 figuras. *(2.ª edición).*

Física experimental, por los Profs. R. LANG y B. CABRERA. Dos tomos, con 711 páginas y 477 figuras. *(3.ª edición).*

Compendio de Física, para Médicos, Farmacéuticos, Químicos y Naturalistas, por el Prof. E. LAMLA. 386 páginas y 282 figuras. *(2.ª edición. 2.ª reimpresión).*

Física general, por D. JOSÉ MAÑAS y BONVÍ. 387 páginas y 270 figuras. *(2.ª edición. Reimpresión).*

Tratado de Química física, por el Dr. JOHN EGGERT. 726 páginas y 168 ilustraciones. *(2.ª edición).*

Historia de la Física, por el Prof. A. KISTNER. 367 páginas y 10 láminas.

Cristalografía, por el Prof. A. K. BOLDYREV, Profesor de la Escuela de Minas y Director del Instituto Fedorov. 432 páginas, 354 figuras y 2 láminas en color.